

Expérimenter avec un morceau de Scotch®

Conditionné sous forme de rouleau, un ruban adhésif (généralement désigné par le terme « Scotch® ») est constitué de deux couches solidaires l'une de l'autre : une couche « molle » sur la face interne (celle qui colle) et une couche « dure » sur la face externe du rouleau (qui paraît néanmoins souple car très fine). L'épaisseur de l'ensemble est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. On propose d'étudier dans ce problème quelques expériences mettant en jeu les propriétés — adhésives ou autres — des rubans adhésifs.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

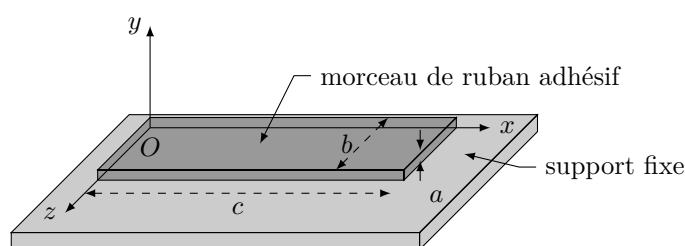
Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Ce document réponse comporte également une annexe et regroupe des données numériques.

Les quatre parties sont indépendantes entre elles.

I Pelage d'un ruban adhésif collé sur un substrat plan

I.A – Principe de l'essai de pelage

Pour tester les propriétés d'adhésion d'un ruban adhésif, on réalise généralement des essais de *pelage*. Pour cela, on commence par coller le ruban adhésif à tester sur un support rigide. Puis on mesure la force $F_p = \|\vec{F}_p\|$ qu'il est nécessaire d'appliquer à l'extrémité du ruban pour le décoller du support tout en maintenant un angle θ constant entre le support et la portion de ruban décollée (figure 1).



Positionnement du ruban adhésif sur le support avant l'essai de pelage

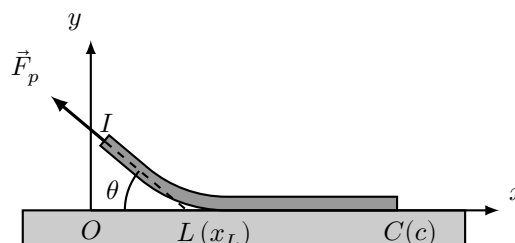


Schéma de principe et paramétrage de l'essai de pelage ; x_L désigne l'abscisse du front de pelage

Figure 1 Pelage d'un morceau de ruban adhésif

I.A.1) Au niveau microscopique, les interactions qui permettent l'adhésion du ruban sur le support sont des liaisons de van der Waals. Citer un autre type de liaison chimique et comparer qualitativement l'énergie de liaison de ce type de liaison à celle d'une liaison de van der Waals.

I.A.2) En première approximation, la force de van der Waals entre deux molécules distantes de r dérive du potentiel de Lennard-Jones $E_{LJ}(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$, où α et β sont deux constantes positives.

- Identifier, en justifiant la réponse, le caractère attractif ou répulsif de chacun des deux termes figurant dans cette expression.
- Représenter l'allure de E_{LJ} en fonction de r . Indiquer graphiquement à quoi correspond l'énergie de liaison entre les deux molécules.
- Justifier qualitativement que le travail W_{adh} que doit fournir l'opérateur pour décoller le ruban adhésif du support est proportionnel à l'aire A de la surface de contact entre le ruban et son support.

Pour la suite du problème, on note $W_{adh} = \gamma A$, où γ est une constante positive caractéristique du ruban et du support mis en contact.

I.A.3) On considère dans cette question que le décollement se fait de façon quasi-statique et que le ruban est parfaitement inextensible. Le problème étant invariant par translation selon Oz , on raisonne dans le plan Oxy . On rappelle que l'angle θ reste constant au cours de cette opération.

- a) Exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_I$ du point I (point d'application de la force $\vec{F}_p$) lorsque le front de pelage (figure 1) progresse de dx_L , ainsi que le travail δW_p de la force de pelage associé à cette progression.
- b) En déduire l'expression de la force de pelage F_p en fonction de γ , b et θ .

I.A.4) Le dispositif utilisé en pratique est représenté sur la figure 2. Le pelage est réalisé au moyen d'une tige horizontale, de rayon r_0 , en rotation autour de son axe, et sur laquelle s'enroule le ruban au cours de l'essai (l'axe de la tige est fixe dans le référentiel du laboratoire et situé à une hauteur ℓ_0 au-dessus du support). Le support sur lequel est collé l'autre extrémité du ruban est animé d'un mouvement de translation horizontale à la vitesse constante $\vec{V}_0$ dans le référentiel du laboratoire.

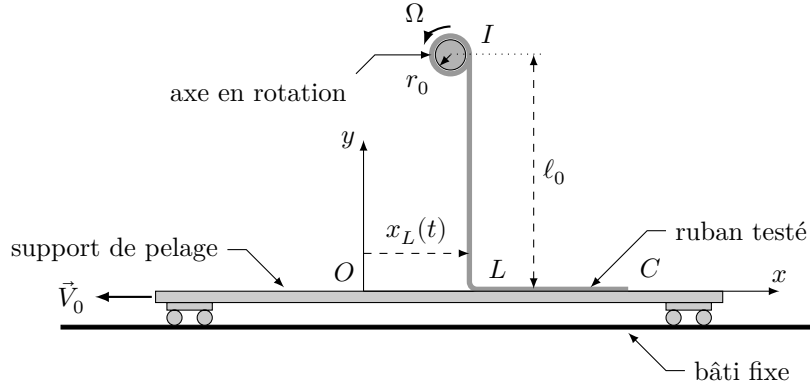


Figure 2 Schéma du dispositif pratique utilisé pour l'essai de pelage. Le repère Oxy est lié au support de pelage. Les points I et L correspondent aux limites entre les parties collée et décollée du ruban

- a) Le repère Oxy étant lié au support, quelle loi d'évolution $x_L(t)$ devrait-on observer si l'angle θ reste constant ?
- b) On rappelle que le ruban est supposé inextensible. Comment doit-on choisir Ω et $\|\vec{V}_0\|$ pour maintenir un angle de pelage constant au cours de l'essai ?
- c) Initialement, le ruban est positionné de sorte à avoir un angle de pelage $\theta \approx 90^\circ$. Commenter ce choix.

I.B – Modélisation du comportement dynamique du ruban au cours de l'essai

La loi d'évolution de $x_L(t)$ prévue précédemment n'est pas toujours observée en pratique car le ruban présente un comportement légèrement élastique. Au début de l'essai, le ruban commence en effet par se tendre sans se décoller. Puis, lorsque la tension est suffisante, le décollement se produit brutalement, réduisant par conséquent la tension. Le décollement s'arrête alors spontanément, jusqu'à ce que la poursuite du mouvement tende suffisamment le ruban pour que le décollement reprenne, et ainsi de suite... Ce phénomène périodique, connu sous le nom de « *stick-slip* » (ou « *collé-glissé* »), est à l'origine du bruit caractéristique du décollement d'un ruban adhésif : « *scriiich* ».

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au support de pelage, la dynamique du front de pelage s'apparente à celle du système masse-ressort représenté sur la figure 3. La portion de ruban au contact du support est modélisée par la masse m tandis que la portion décollée du ruban est modélisée par le ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et dont l'extrémité I est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{V}_p = -\vec{V}_0$. L'action du support sur le ruban est modélisée par une force de frottement $\vec{f} = f\vec{u}_x$ obéissant aux lois suivantes :

- la masse m ne glisse pas sur le support tant que $\|\vec{f}\| < F_p$;
- lorsque la masse m glisse sur le support, la force $\vec{f}$ s'oppose au glissement et $\|\vec{f}\| = (1 - \varepsilon) F_p$ (avec ε une constante telle que $0 < \varepsilon < 1$).

On néglige l'action de la pesanteur sur l'évolution du système.

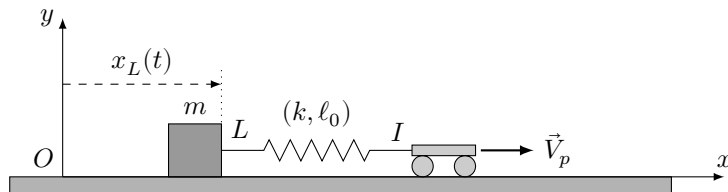


Figure 3 Système modèle pour l'étude du mouvement stick-slip

- I.B.1)** Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ lié au support de pelage peut-il être considéré comme galiléen ?

I.B.2) À l'instant $t = 0$, on a $x_L(0) = 0$ et $\ell(0) = \ell_0$. Exprimer la longueur $\ell(t)$ du ressort pour $t > 0$, en fonction de ℓ_0 , $V_p = \|\vec{V}_p\|$, $x_L(t)$ et t .

I.B.3) On suppose de plus que $\dot{x}_L(0) = 0$. Montrer que l'évolution du système pour $t > 0$ commence nécessairement par une phase de *stick* (le ruban se tend sans se décoller). Déterminer à quel instant t_0 se termine cette phase.

I.B.4) Établir l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase suivante (phase de *slip*). Identifier la pulsation propre ω_0 du système.

I.B.5) La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$x_L(t') = C_1 \cos(\omega_0 t') + C_2 \sin(\omega_0 t') + V_p t' + C_3 \quad \text{avec} \quad t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes C_1 , C_2 et C_3 correspondant à cette phase du mouvement.

I.B.6) Une simulation numérique permet de représenter l'évolution de la solution *mathématique* $x_L(t')$ précédente pour différentes valeurs de la vitesse de pelage V_p . Les paramètres choisis pour réaliser cette simulation sont :

$$\varepsilon = 0,15 \quad \frac{F_p}{k} = 1,0 \text{ mm} \quad \omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Les courbes correspondant à $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sont reproduites sur les figures A et B du document-réponse. Ces courbes sont accompagnées des portraits de phase du système, pour lesquels on représente $v_L(t') = \frac{dx_L}{dt'}(t')$ en fonction de $\ell(t') - \ell_0$.

a) Faire apparaître, sur chacun des deux portraits de phase du document-réponse, le point représentatif de l'instant $t' = 0$. Indiquer, en le justifiant, quel est le sens de parcours de ces portraits de phase.

b) En justifiant votre raisonnement par des *considérations graphiques précises*, indiquer, pour chacune des deux vitesses de pelage, si la phase de *slip* perdure indéfiniment ou si elle cesse à un instant t'_1 que l'on identifiera clairement sur les courbes.

c) Dans le(s) cas où la phase de *slip* cesse, représenter (directement sur les figures A et/ou B du document réponse) l'allure de la solution *physique* $x_L(t')$ réellement obtenue et du portrait de phase associé.

II Préparation du substrat préalablement à l'essai de pelage

Quel que soit le type de colle à déposer (y compris celle présente sur le ruban adhésif) et le type de surface ciblée, on ne peut obtenir une force d'adhérence élevée et stable dans le temps qu'après un traitement chimique préalable. Cela est particulièrement vrai pour les métaux pour lesquels le défaut de force d'adhérence provient généralement de la fine couche d'oxyde ou bien de lubrifiants, d'huile de coupe, de graisse d'étirage, etc. dus au procédé de fabrication, présente à la surface de la plupart des métaux.

Un traitement particulièrement simple et encore très souvent utilisé consiste à attaquer le métal avec un acide. Ainsi, les atomes de surface sont oxydés et partent en solution entraînant avec eux les oxydes et autres impuretés.

II.A – Comparaison de différents acides minéraux

Dans cette partie on va comparer trois acides forts : les acides chlorhydrique (HCl en solution dans l'eau), sulfurique (H₂SO₄ en solution dans l'eau) et nitrique (HNO₃ en solution dans l'eau) en vue de décaper localement une surface métallique. *Les données numériques utiles sont regroupées à la fin de l'énoncé.*

II.A.1) Donner les structures de Lewis de HCl et de H₂SO₄ sachant que l'élément soufre est situé en dessous de l'élément oxygène dans la classification périodique.

II.A.2) On souhaite décaper une surface de cuivre (c'est-à-dire éliminer une partie des atomes de cuivre Cu_(s) à la surface du métal). Parmi les trois acides présentés ci-dessus, expliquer quel(s) acide(s) il est possible d'utiliser et le(s)quel(s) il n'est pas possible d'utiliser.

II.B – Étude d'une étape de la synthèse de l'acide sulfurique

L'acide sulfurique est très souvent utilisé dans l'étape de décapage (parfois en combinaison avec de l'acide nitrique, du sulfate ferrique...). Il est obtenu industriellement par hydratation du trioxyde de soufre SO₃ obtenu par oxydation de SO₂, lui-même issu du traitement du soufre.

On considère la réaction, à l'équilibre thermodynamique, d'équation :



Le taux de conversion α de cette réaction est défini par :

$$\alpha = \frac{n_{\text{SO}_3}}{n_{\text{SO}_3} + n_{\text{SO}_2}}$$

La composition du système est systématiquement donnée en fraction molaire.

II.B.1) Optimisation des conditions expérimentales

Les figures 4, 5 et 6 présentent l'évolution du taux de conversion en fonction de la température pour différentes conditions opératoires. En analysant chacune de ces figures, proposer un ensemble de conditions opératoires permettant d'optimiser le taux de conversion de la réaction d'oxydation du dioxyde de soufre.

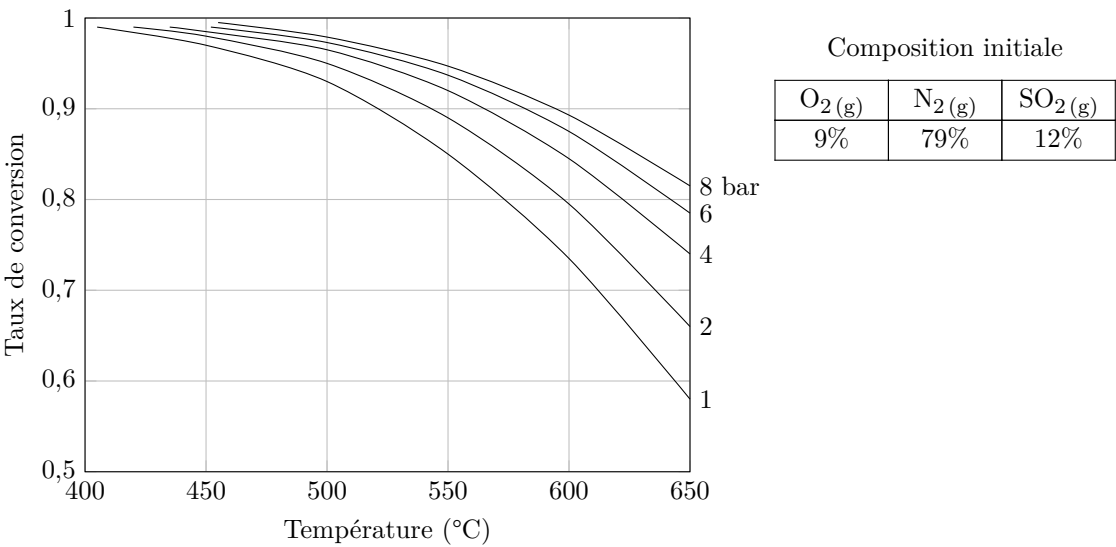


Figure 4 Influence de la pression

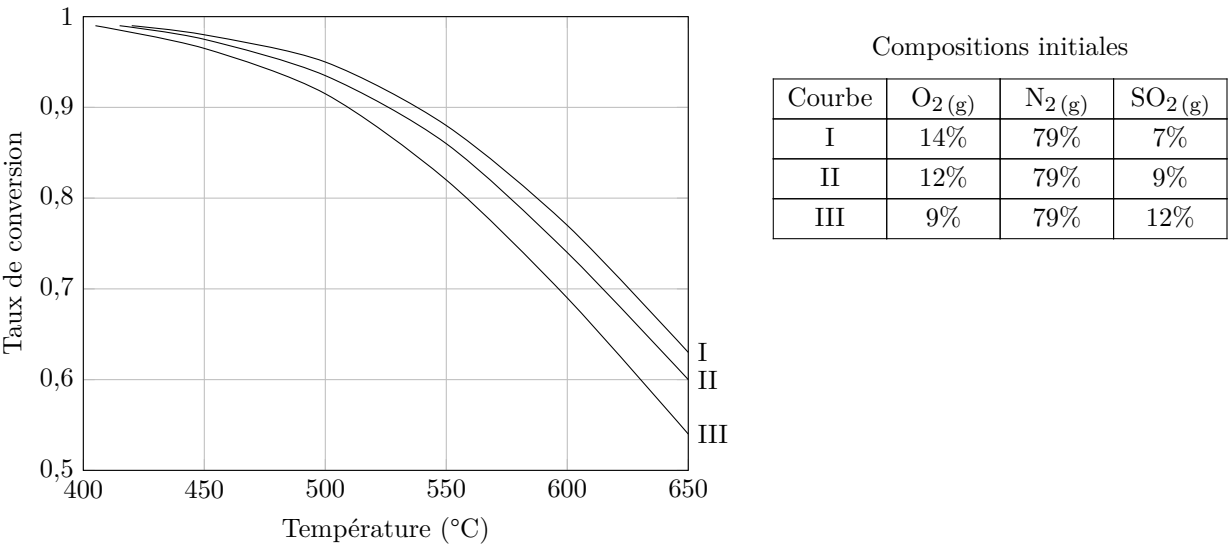


Figure 5 Proportion initiale de N₂(g) et pression fixées

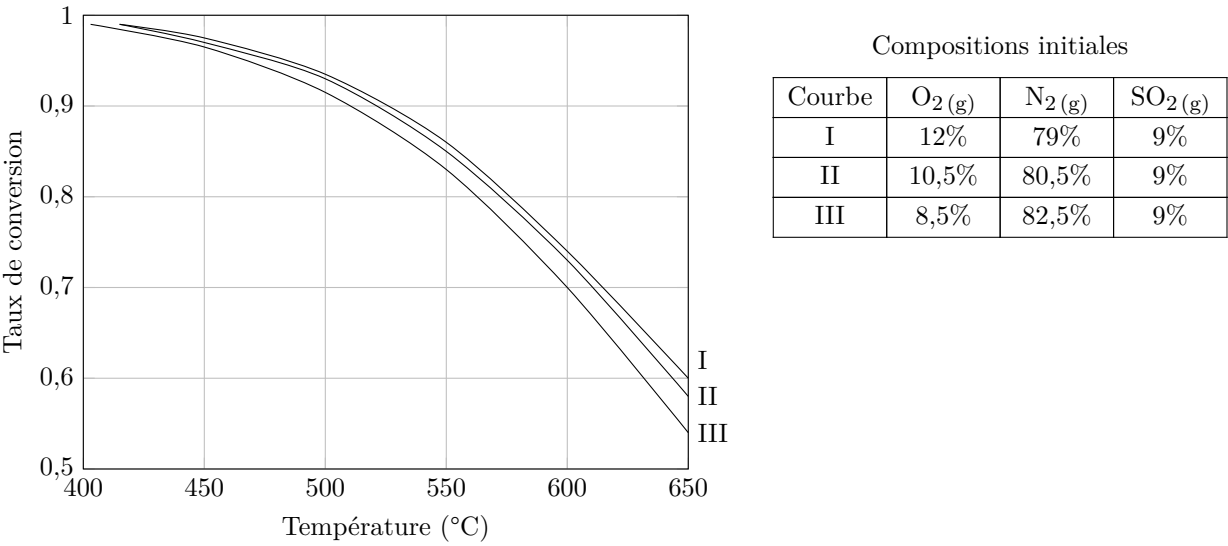


Figure 6 Proportion initiale de SO₂(g) et pression fixées

II.B.2) Choix de la température – Approche théorique

Dans la suite de cette partie, on se place dans l'approximation d'Ellingham, c'est-à-dire que les variations de l'enthalpie standard de réaction et de l'entropie standard de réaction avec la température sont supposées négligeables.

- Montrer que la constante d'équilibre K de la réaction (II.1) vérifie la loi $\ln K = k_1 + \frac{k_2}{T}$ où T est la température du milieu exprimée en kelvin.
- Préciser les valeurs numériques de k_1 et k_2 .
- Confronter l'expression de $\ln K$ au choix des paramètres d'optimisation du processus discuté précédemment.

II.B.3) Choix de la composition du système – Approche théorique

- Exprimer le taux de conversion α en fonction de la pression partielle en dioxygène du milieu P_{O_2} , de la constante d'équilibre de la réaction K et de la pression standard P° .
- Confronter l'expression obtenue au choix des paramètres d'optimisation du processus discuté précédemment.

II.B.4) Pour déterminer s'il est préférable de travailler en présence de dioxygène pur ou d'air, on considère un système à l'équilibre auquel on ajoute une quantité dn_{N_2} de diazote, tous les autres paramètres étant inchangés. Le système se retrouve alors dans un état hors équilibre caractérisé par un quotient de réaction Q .

- Exprimer Q en fonction de la pression totale P , de P° , des quantités de matière à l'équilibre et de dn_{N_2} .
- En déduire le sens d'évolution du système hors équilibre suite à l'ajout de diazote à T et P fixés. Confronter ce résultat au choix des paramètres d'optimisation du processus discuté précédemment.
- Dans la pratique, le dioxygène pur n'est jamais utilisé. Proposer une explication.

III Mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif

Dans toute cette partie, l'air est assimilé au vide et on note c la célérité de la lumière dans le vide.

III.A – Preamble : Mesure d'une différence d'indice optique à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder

On dispose de deux lames transparentes à faces parallèles, de même épaisseur e (connue avec précision) et d'indices optiques différents :

- une lame « de référence » ($\mathcal{L}_0$), d'indice optique n_0 connu ;
- une lame « d'essai » ($\mathcal{L}_e$), d'indice optique $n_e = n_0 + \Delta n$ (avec $\Delta n > 0$).

Afin de mesurer Δn , on place chacune de ces lames dans un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (figure 7).

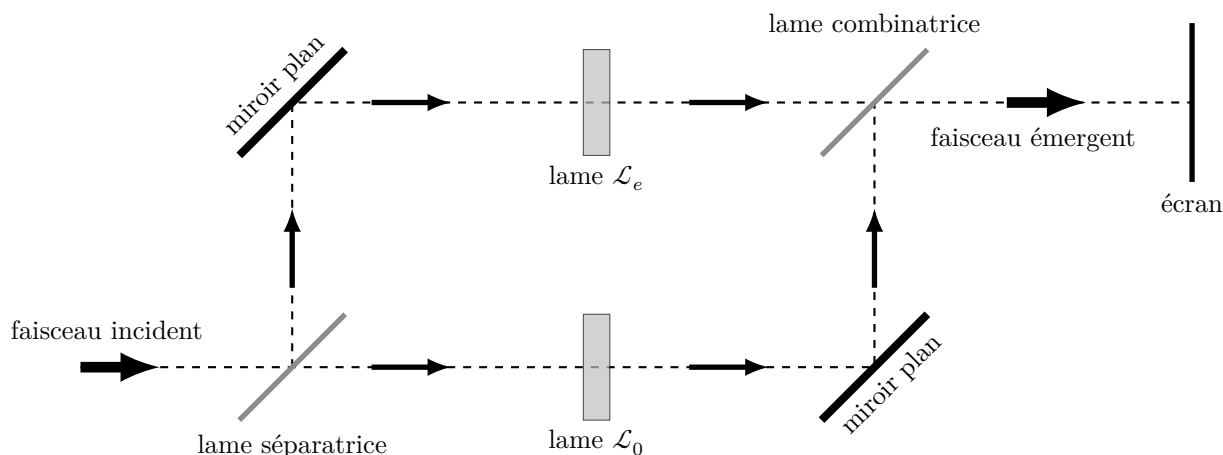


Figure 7 Schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder et placement des lames étudiées.

De façon simple, l'interféromètre de Mach-Zehnder est constitué de deux lames semi-réfléchissantes et de deux miroirs plans (tous ces éléments sont parallèles entre eux). La lame semi-réfléchissante placée en entrée du dispositif est appelée lame *séparatrice* ; elle permet de diviser le faisceau incident en deux faisceaux secondaires orthogonaux entre eux et de même intensité. Les deux miroirs plans (un dans chaque bras de l'interféromètre) permettent d'orienter les faisceaux secondaires vers la sortie du dispositif. La lame semi-réfléchissante placée en sortie du dispositif, rigoureusement identique à la lame séparatrice, est appelée lame *combinatrice* car elle permet de superposer les deux faisceaux secondaires en direction de l'écran (ou d'un photodétecteur).

III.A.1) L'interféromètre de Mach-Zehnder est un interféromètre à division d'amplitude. Citer le nom d'un autre interféromètre de ce type et dater approximativement son invention.

III.A.2) Pourquoi n'est-il pas nécessaire d'accoler une lame compensatrice à la lame séparatrice dans ce dispositif ?

III.A.3) Le faisceau incident est un faisceau de lumière parallèle. On suppose que les deux lames sont orientées de façon à être éclairées sous incidence normale. Déterminer la différence de marche δ entre les deux faisceaux en sortie de l'interféromètre.

III.A.4) Dans le cas où le faisceau incident est monochromatique de longueur d'onde λ , exprimer l'intensité lumineuse I obtenue sur l'écran en sortie du dispositif (on se placera dans le cadre du modèle scalaire de la lumière et on notera I_0 l'intensité lumineuse obtenue sur l'écran en masquant l'un des deux miroirs). Décrire brièvement ce que l'on observe sur l'écran.

III.A.5) Pour quelle(s) longueur(s) d'onde, l'intensité I est-elle maximale ?

III.A.6) Proposer un protocole de mesure de Δn à l'aide de ce dispositif (et de tout le matériel classique d'un laboratoire d'optique).

III.B – Propagation d'une onde polarisée à travers un morceau de Scotch®

Le Scotch® est un milieu *biréfringent*, c'est-à-dire que son indice de réfraction n'est pas unique : il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse qui le traverse. Pour la suite, on considère un morceau de Scotch® assimilé à une lame plane à faces parallèles, orthogonales à l'axe Oz , d'épaisseur e . On envoie sur cette lame une onde lumineuse plane, progressive (selon $+Oz$), monochromatique, polarisée rectilignement, et on admet que :

- pour une polarisation rectiligne selon Ox , l'onde se propage à la vitesse $v_0 = \frac{c}{n_0}$ dans la lame, sans changer de direction de polarisation ;
- pour une polarisation rectiligne selon Oy , l'onde se propage à la vitesse $v_e = \frac{c}{n_e}$ dans la lame, avec $n_e = n_0 + \Delta n$, sans changer de direction de polarisation.

Les axes Ox et Oy sont appelés *lignes neutres* de la lame.

L'origine de l'axe Oz est choisie au niveau de la face d'entrée de la lame. On néglige tout phénomène de réflexion partielle au niveau des faces de la lame.

III.B.1) En notation complexe, le champ électrique associé à l'onde incidente (dans le domaine $z < 0$) s'écrit $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$, où ω est la pulsation de l'onde et $\vec{E}_0$ un vecteur constant.

a) Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ correspondant à la situation étudiée.

b) Justifier que les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{E}_0$ sont nécessairement orthogonaux entre eux.

III.B.2) On suppose dans cette question que l'onde incidente est polarisée rectilignement selon Ox . Expliciter, en notation complexe, le champ électrique associé à l'onde au niveau de la face de sortie de la lame (en $z = e$), puis en un point quelconque du domaine $z > e$.

III.B.3) L'onde incidente est désormais polarisée rectilignement selon la première bissectrice des axes Ox et Oy : $\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$ (avec $E_0 = \|\vec{E}_0\|$).

a) En admettant que la biréfringence du Scotch® est un phénomène linéaire, donner en notation complexe l'expression du champ électrique obtenu dans le domaine $z > e$.

b) Après avoir traversé la lame, l'onde est-elle toujours polarisée rectilignement ?

c) Montrer que, si $\Delta n e = p\lambda$ avec p un entier et λ la longueur d'onde de l'onde dans le vide, l'onde émergente est polarisée rectilignement dans la même direction que l'onde incidente.

III.C – Analyse d'une expérience

Au cours de l'année scolaire 2011/2012, un groupe de quatre élèves d'une classe de terminale a réalisé une expérience de mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif. Le principe de cette mesure est décrit dans le document annexe (situé à l'intérieur du document réponse).

III.C.1) Présentation du dispositif

a) Comment peut-on s'assurer expérimentalement qu'un polariseur et un analyseur sont croisés (*i.e.* orientés selon des directions orthogonales entre elles) ?

b) Comment procéder pour orienter les lignes neutres du ruban adhésif à 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur ?

III.C.2) Étalonnage du spectrogoniomètre

a) En admettant que le réseau est éclairé sous incidence normale tout au long de l'expérience et que les relevés effectués correspondent au spectre d'ordre 1, déterminer le pas a du réseau utilisé.

b) En pratique, quelles sont les principales sources d'incertitude sur la valeur de a ainsi obtenue ?

III.C.3) Mesure de la biréfringence du Scotch®

a) D'après l'étude réalisée dans la sous-partie III.B, à quoi correspondent les « raies d'absorption » observées ?

b) « En observant les spectres de la lumière après l'analyseur pour une ou deux épaisseurs de Scotch[®], on remarque que les spectres sont continus. On observe à partir de trois épaisseurs une première raie d'absorption. » En déduire une estimation de la valeur maximale de Δn sachant que l'épaisseur d'une couche du ruban adhésif utilisé est $e = 28,0 \mu\text{m}$.

c) À partir des différents résultats présentés dans le document et de ceux établis précédemment, proposer une autre valeur expérimentale de Δn pour le ruban adhésif étudié. Comparer à celle obtenue par les auteurs du document et commenter.

III.C.4) Le dispositif {polariseur – ruban adhésif – analyseur} est en fait analogue à l'interféromètre de Mach-Zehnder étudié dans la sous-partie III.A.

a) À quoi correspondent les deux bras de l'interféromètre ? Quel élément permet ici de réaliser la division d'amplitude ?

b) Justifier la partie *en italique* dans l'affirmation suivante : « La plaque de verre est orientée de sorte que les lignes neutres du Scotch[®] soient orientées de 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur (*car c'est dans cette position que les contrastes sont les plus importants*) ».

IV Obtention de graphène par le procédé d'exfoliation « au Scotch[®] »

Le *graphène* est un cristal bidimensionnel, constitué d'atomes de carbone répartis régulièrement sur un réseau hexagonal en forme de nid d'abeille. En appliquant un simple morceau de Scotch[®] sur un cristal de graphite, les physiciens Konstantin Novoselov et Andre Geim ont réussi, en 2004, à isoler et à observer une unique feuille de graphène. Ils ont reçu le prix Nobel de physique en 2010 pour ces travaux. Le graphène s'est avéré être un matériau fascinant, aux propriétés électroniques exceptionnelles et donne lieu, depuis 2004, à des recherches variées à la fois en physique fondamentale et en physique appliquée.

IV.A – Diagramme de phases du carbone

Le carbone solide existe sous deux variétés allotropiques aux propriétés physico-chimiques très différentes : le *diamant* (dur, cassant, transparent, isolant) et le *graphite* (mou, noir, conducteur). On donne sur la figure 8 le diagramme d'état du carbone.

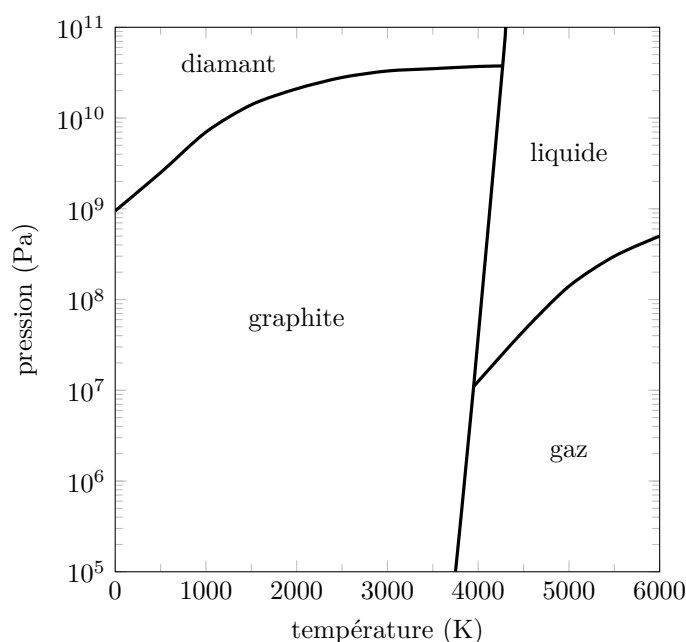


Figure 8 Diagramme de phases du carbone

IV.A.1) Quelle est la forme stable du carbone à 0°C sous 1 bar ?

IV.A.2) Sous quelles pressions le graphite peut-il se transformer en diamant ? Où peut-on rencontrer de telles pressions ?

IV.A.3) Comment expliquer que des diamants puissent être achetés dans des bijouteries ?

IV.B – Structure cristallographique du diamant

Le diamant cristallise dans une structure cubique telle que les atomes de carbone forment un réseau cubique à faces centrées et occupent un site tétraédrique sur deux en alternance.

IV.B.1) Dessiner la maille du diamant.

IV.B.2) Quelle est la compacité de l'édifice en supposant qu'il y a tangence entre atomes de carbone les plus proches ?

IV.B.3) La masse volumique du diamant vaut $3520 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. En déduire la distance séparant deux atomes de carbone.

IV.C – Structure cristallographique du graphite et comparaison

Le graphite présente une structure en feuillets superposés de type ABAB. Au sein d'un même feuillet, les carbones ont une géométrie trigonale plane avec des angles de 120° et des longueurs de liaison de 141 pm. La maille hexagonale associée à la structure est représentée figure 9.

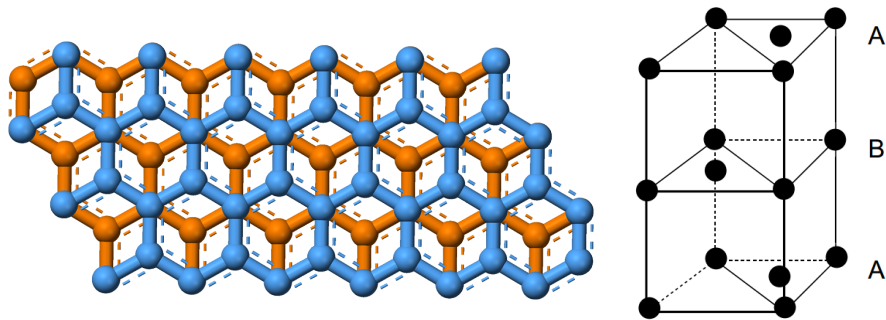


Figure 9 À gauche : représentation schématisée des feuillets du graphite vus de dessus. À droite : maille hexagonale du graphite

IV.C.1) Déterminer le nombre d'atomes en propre par maille.

IV.C.2) La densité du graphite étant comprise entre 2,09 et 2,23, en déduire une fourchette pour la distance entre deux feuillets.

IV.C.3) En comparant les différentes distances entre atomes de carbone rencontrées dans cette partie, discuter la nature des liaisons C-C dans le diamant, dans les feuillets du graphite et entre les feuillets du graphite. Commenter.

IV.D – Du graphite au graphène

Le graphène correspond à un unique feuillet d'atomes de carbones constituant le graphite. La figure 10 explique comment obtenir un tel feuillet à partir d'un bloc de graphite (tiré d'une mine de crayon par exemple) et d'un morceau de ruban adhésif.

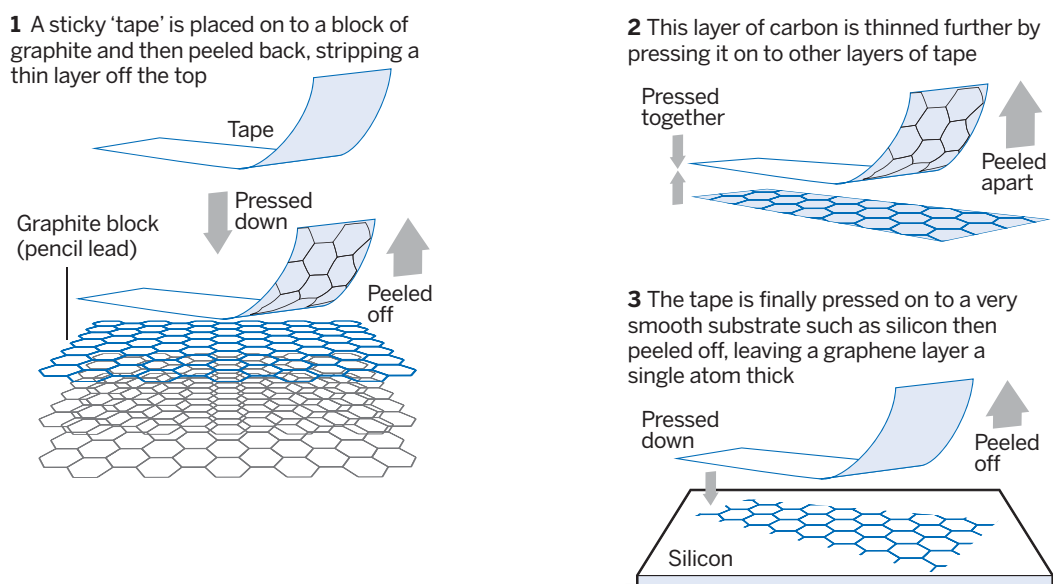
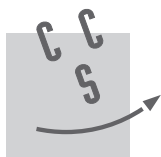


Figure 10 Illustration extraite de l'article *Faster, stronger, bendier* de Clive Cookson, publié dans *Financial Times* du 28 janvier 2013

IV.D.1) À partir d'arguments qualitatifs uniquement, justifier la faisabilité d'un tel procédé.

IV.D.2) Dans le domaine de la recherche, le graphène est particulièrement étudié pour ses propriétés électroniques exceptionnelles. Comment expliquer simplement les propriétés conductrices du graphène ?

• • • FIN • • •



Numéro de place

--	--	--	--	--	--

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--

Signature

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve : Physique-chimie 2 MP

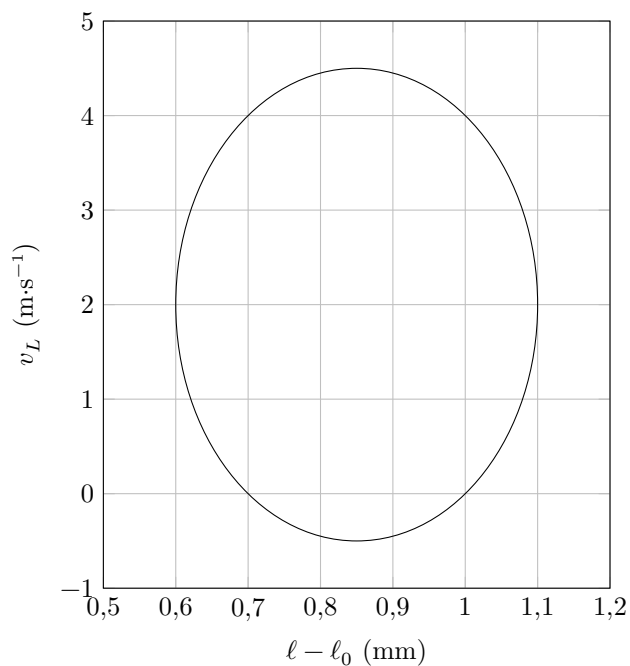
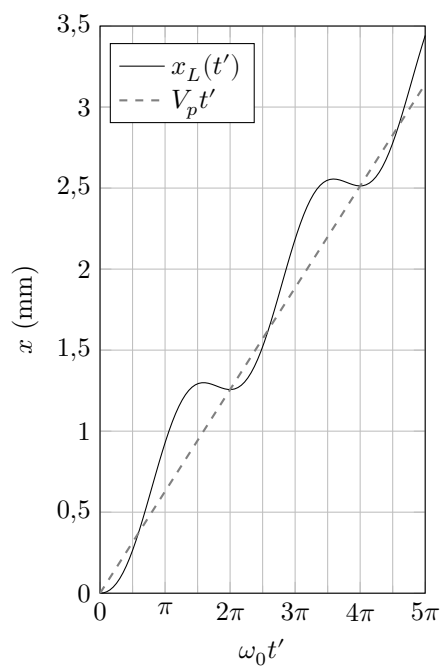
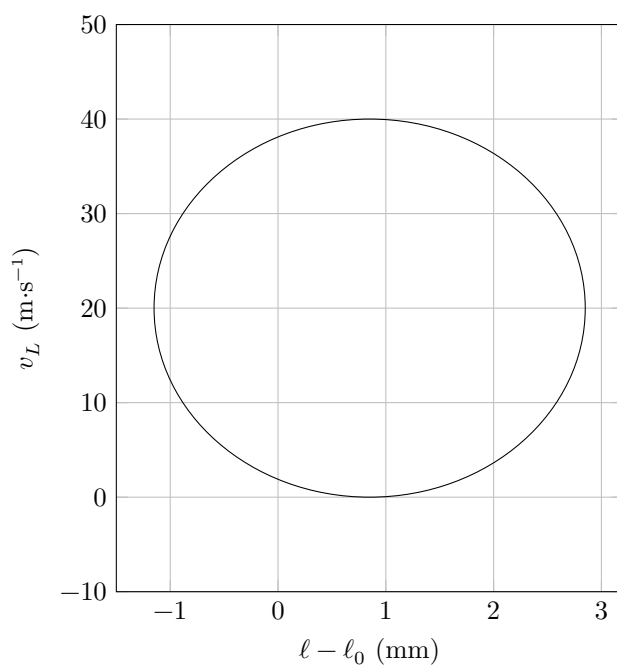
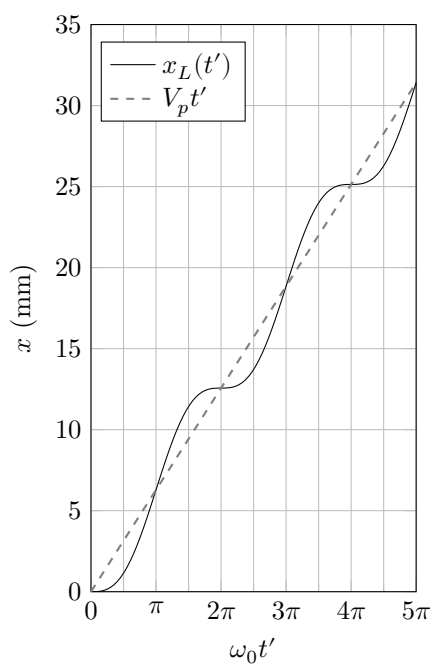
Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

--	--

 /

--	--

**Figure A** Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.**Figure B** Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Ne rien écrire

dans la partie barrée

2016-002-DR/20160519 13 :43 MKIV

Annexe - Une expérience de mesure de la biréfringence du Scotch[®]

Présentation du dispositif

Afin d'observer le phénomène de biréfringence du Scotch[®], nous avons réalisé une boîte dans laquelle nous avons glissé deux polariseurs croisés de part et d'autre d'une plaque de verre circulaire pouvant pivoter autour d'un axe horizontal. Sur cette plaque de verre est collé du Scotch[®] avec différentes épaisseurs (voir photo ci-dessous). L'ensemble est éclairé par un faisceau parallèle de lumière blanche.

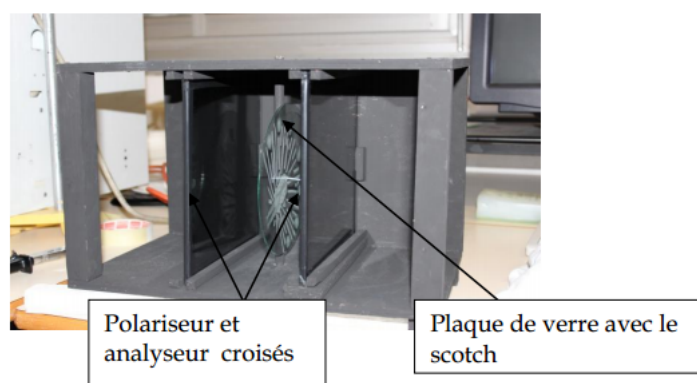


Figure 1 Notre boîte (la lumière entre par la gauche et sort par la droite).

Nous avons commencé par analyser spectralement la lumière à la sortie de l'analyseur et ce pour une, deux, trois, ..., épaisseurs de Scotch[®]. Pour chaque épaisseur, la plaque de verre est orientée de sorte que les lignes neutres du Scotch[®] soient orientées de 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur (car c'est dans cette position que les contrastes sont les plus importants). Puis nous avons mesuré la différence d'indice entre les deux lignes neutres du Scotch[®].

Observations des spectres

Pour faire cette étude, nous avons utilisé un spectrogoniomètre. La lumière entre dans le collimateur et se dirige vers la plate-forme sur laquelle on place un réseau (ou un prisme) qui décompose la lumière. Le spectre de cette lumière peut ensuite être observé à l'aide d'une lunette. Avec un tel appareil, on peut, en pointant la lunette sur une raie d'émission ou d'absorption, relever la position de cette dernière.

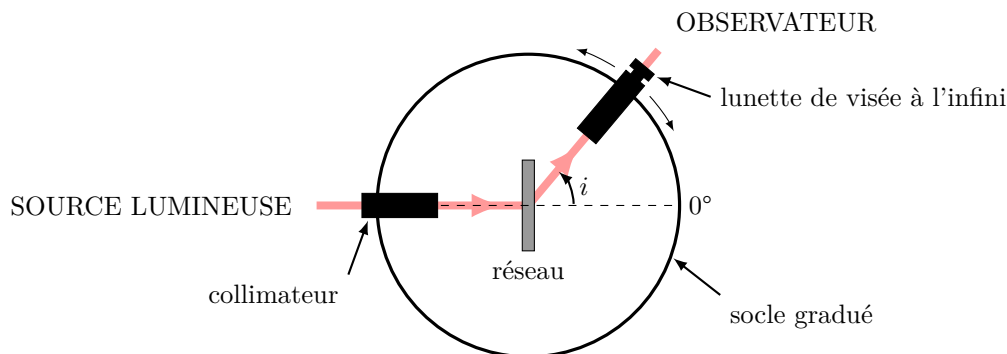


Figure 2 Schéma du spectrogoniomètre (vue de dessus).

En observant les spectres de la lumière après l'analyseur pour une ou deux épaisseurs de Scotch[®], on remarque que les spectres sont continus. On observe à partir de trois épaisseurs une première raie d'absorption. Nous avons alors décidé de porter le nombre d'épaisseurs de Scotch[®] à dix afin d'observer plusieurs raies d'absorption.

Étalonnage du spectrogoniomètre

Nous avons tout d'abord mesuré avec la graduation du socle les positions des raies d'émission d'une lampe à vapeur de zinc et d'une lampe à vapeur de mercure. Nous avons ensuite calculé le sinus des angles trouvés à

l'aide du goniomètre pour chaque raie d'émission et y avons associé les longueurs d'onde correspondantes grâce aux tables de valeurs.

Source	Valeur de l'angle sur le goniomètre (en°)	Sinus de cet angle	Longueur d'onde de la raie d'émission (en nm)
Lampe à vapeur de zinc	16,33	0,281	468,0
	16,48	0,284	472,0
	16,78	0,289	480,0
	22,37	0,380	637,0
Lampe à vapeur de mercure	15,23	0,263	435,8
	19,12	0,328	546,1
	20,23	0,346	576,6
	20,28	0,347	579,1

À l'aide d'un logiciel de traitement des données, nous avons tracé la courbe d'étalonnage du sinus des angles en fonction des longueurs d'onde correspondantes. Cette courbe est une droite.

Mesure de la biréfringence du Scotch®

Nous avons ensuite repris l'analyse spectrale de la lumière sortant de l'analyseur après avoir traversé dix épaisseurs de Scotch®. Nous avons ainsi pu mesurer les valeurs des angles pour les raies d'absorption et avons calculé leur sinus. Grâce à la courbe d'étalonnage nous avons alors déterminé les longueurs d'onde correspondant à ces raies.

Valeur de l'angle sur le goniomètre (en°)	Sinus de cet angle	Longueur d'onde correspondante (en nm)
15,13	0,261	433,4
17,25	0,297	494,9
20,03	0,343	573,2
24,03	0,407	680,0

Grâce à ces mesures nous avons la possibilité désormais de déterminer la différence des indices dans le Scotch®. À l'aide de notre simulation informatique utilisant un logiciel de géométrie dynamique et pour les longueurs d'onde ci-dessus, nous avons recherché la différence d'indice entre l'indice n_0 et l'indice n_e pour laquelle il y a absorption de la radiation par le système {polariseur-Scotch®-analyseur}. Nous avons considéré l'indice n_0 comme égal à 1, et nous avons joué sur la valeur de l'indice n_e jusqu'à obtenir l'extinction de la lumière. Voilà les valeurs obtenues :

Longueur d'onde (en nm)	Indice n_e
433,4	1,0175
494,9	1,0146
573,2	1,01253
680,0	1,01118

Nous avons finalement fait la moyenne de toutes ces valeurs, et nous obtenons :

$$\Delta n = n_e - n_0 = 0,0139$$

Données numériques

Divers

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- L'air est considéré comme un mélange gazeux dont les fractions molaires sont 20% de O_2 et 80% de N_2
- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Extrait du tableau périodique

Numéro atomique	1	6	8	16	17
Symbole	H	C	O	S	Cl
Masse molaire atomique ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)	1	12	16	32,1	35,5

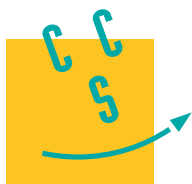
Potentiels rédox standard à 298 K

Les espèces non attachées à un couple rédox seront supposées électro-inactives dans les conditions de l'énoncé.

	$\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(\text{s})}$	$\text{H}_{(\text{aq})}^{+}/\text{H}_{2(\text{g})}$	$\text{Cu}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Cu}_{(\text{s})}$	$\text{NO}_{3(\text{aq})}^{-}/\text{NO}_{(\text{g})}$	$\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$
$E^\circ \text{ (V)}$	−0,44	0	0,34	0,96	1,23

Grandeurs thermodynamiques à 298 K

	$\text{S}_{(\alpha)}$	$\text{O}_{2(\text{g})}$	$\text{N}_{2(\text{g})}$	$\text{SO}_{2(\text{g})}$	$\text{SO}_{3(\text{g})}$
$\Delta_f H^\circ \text{ (kJ}\cdot\text{mol}^{-1}\text{)}$	0	0	0	−297	−396
$S_m^\circ \text{ (J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\text{)}$	31,8	205	192	248	257



Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre

Ce sujet propose l'étude de mouvements dans le champ de pesanteur terrestre, à différentes échelles d'énergie et de longueur. Selon les cas étudiés, ces mouvements seront décrits par la mécanique classique ou quantique.

On propose dans un premier temps de modéliser le champ de pesanteur terrestre et d'étudier la dynamique du saut supersonique de Felix Baumgartner. La seconde partie de ce sujet, indépendante de la première, concerne l'étude du mouvement de neutrons dans le champ de pesanteur terrestre. Une application à la mesure de l'intensité du champ de pesanteur est proposée.

Un ensemble de valeurs numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé. Il est conseillé de les lire avant de commencer à traiter le sujet.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Un saut supersonique

I.A – Champ de pesanteur créé par la Terre immobile

On modélise la Terre par une boule immobile de centre O , de rayon R_T et de masse totale M_T uniformément répartie en volume. Un point M est repéré grâce à ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans la base $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (figure 1).

On note $\vec{g}(M)$ le champ de pesanteur que la Terre crée en un point M . Sa norme, notée $g(M)$, est appelée *intensité du champ de pesanteur*.

I.A.1) Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation.

I.A.2) Après un examen précis des propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de masse, établir l'expression de $\vec{g}(M)$ à l'extérieur comme à l'intérieur de la Terre.

I.A.3) En utilisant les valeurs numériques fournies en fin d'énoncé, donner une valeur numérique de la masse de la Terre M_T .

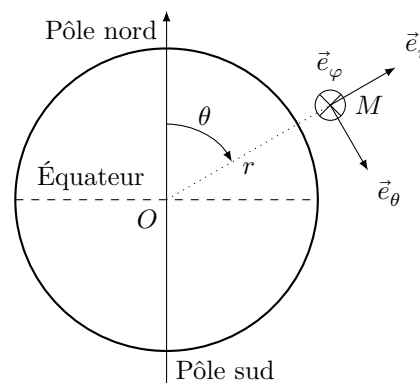


Figure 1

I.B – Le saut de Felix Baumgartner

Document 1 : le saut supersonique de Felix Baumgartner

D'après J.M. Colino et al., étude dynamique d'un mémorable plongeon en chute libre, Physics Today, Avril 2014.

Le saut de tous les records

Le 14 octobre 2012, Felix Baumgartner effectue, dans l'atmosphère terrestre, un plongeon hors-norme : les records de tous ses prédécesseurs sont battus. Baumgartner fut tout d'abord hissé jusqu'à une altitude voisine de 39 km grâce à un ballon d'hélium. Un appareil GPS, fixé sur sa poitrine, permet de suivre précisément sa position au cours du saut.

En février 2013, les organisateurs de cette mission rendirent publiques ces données. Confirmées par la fédération internationale des sports aériens, elles montrent que Baumgartner a établi trois records. Premièrement, il a atteint une vitesse maximale de $1357,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, supérieure de 11% à la vitesse du son dans l'air (prise égale à $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Il s'agit de la plus grande vitesse verticale jamais atteinte sans dispositif de stabilisation. Deuxièmement, Baumgartner a sauté d'une altitude record de 38,9694 km. Enfin, il est resté en chute libre sur une hauteur record de 36,4026 km.



Figure 2 Felix Baumgartner au départ de son saut

Une affaire de traînée

Les corps qui chutent vers la surface terrestre ne le font pas sous la seule action de la pesanteur. Ils sont aussi soumis à une force dirigée dans le sens opposé à la vitesse, exercée par l'air atmosphérique. Cette force, appelée *force de traînée*, est proportionnelle au carré de la vitesse. Elle est donnée par la relation $F_D = K A \rho v^2$, où A est l'aire de l'objet projeté sur un plan orthogonal à la direction du mouvement, ρ la masse volumique de l'air et K une constante.

Quelques détails sur le saut de Baumgartner

Les données enregistrées pendant le saut montrent qu'initialement, la composante de la vitesse de Baumgartner parallèle au sol est nulle. Comme l'air est raréfié en haute altitude, la force de traînée joue peu au début du saut et l'accélération de Baumgartner s'identifie quasiment à l'intensité du champ de pesanteur. Ensuite, au fur et à mesure que la vitesse augmente et que l'altitude diminue, l'action de l'air devient de plus en plus importante et la force de traînée équilibre le poids. La vitesse terminale de Baumgartner atteint $79,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Document 2 : le modèle de l'atmosphère isotherme

Sous l'effet de la pesanteur, les molécules constitutives de l'air ont tendance à tomber vers le sol. L'agitation thermique a un effet antagoniste et tend à uniformiser la distribution des molécules dans l'atmosphère. Lorsqu'on assimile l'air à un gaz parfait et que l'on considère la température et la pesanteur uniformes dans l'atmosphère, il en résulte une distribution d'équilibre, caractérisée par le champ de masse volumique suivant, qui ne dépend que de l'altitude z comptée depuis le sol : $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{M_a g z}{RT}\right)$ où ρ_0 désigne la masse volumique au niveau du sol en $z = 0$, R la constante des gaz parfaits, T la température de l'atmosphère, M_a la masse molaire de l'air et g l'intensité du champ de pesanteur.

Il est légitime de se demander pourquoi il est nécessaire de hisser le sauteur à une altitude aussi élevée afin d'atteindre la vitesse du son.

I.B.1) Quelle devrait être l'altitude minimale de départ si le sauteur, voulant atteindre la vitesse du son, n'était soumis qu'à la force de pesanteur ?

I.B.2) En exploitant les documents 1 et 2, donner une estimation de la hauteur minimale de saut qui permet d'atteindre la vitesse du son au cours de la chute. Le choix de certaines valeurs numériques relève de votre initiative. Comparer l'estimation obtenue à l'altitude de départ de Felix Baumgartner et discuter les hypothèses que vous aurez retenues.

II États stationnaires d'un neutron dans le champ de pesanteur

La prise en compte de la gravitation dans les phénomènes quantiques est un champ actif important de recherche en physique. Les enjeux en question concernent, entre autres, le test de la robustesse de la loi de Newton et de l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle à l'échelle de l'infiniment petit, ou encore la découverte de la matière noire.

On cherche à déterminer les niveaux d'énergie d'un neutron dans le champ de pesanteur terrestre. Par leur mesure, on peut accéder à la valeur de l'intensité du champ de pesanteur, supposée uniforme dans toute la suite du sujet.

II.A – Échelle caractéristique de hauteur

Examinons l'expérience représentée sur la figure 3. Une particule de masse m est lâchée depuis une hauteur H dans le champ de pesanteur terrestre, avec une vitesse initiale nulle. Elle est soumise à la seule force de pesanteur. Le sol en $z = 0$ est impénétrable et correspond à une barrière de potentiel d'amplitude infinie. On suppose que le rebond sur le sol se fait sans perte d'énergie mécanique, la vitesse verticale voyant son sens changer mais pas sa norme. L'axe (Oz) est vertical ascendant.

II.A.1) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $V(z)$ de la particule. On suppose $V(0) = 0$. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la particule au cours de son mouvement ? Représenter $V(z)$ en fonction de z sur un graphe et y faire figurer l'énergie mécanique E .

II.A.2) On se place dans le cadre de la mécanique classique. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la particule à une altitude z quelconque comprise entre 0 et H . L'exprimer en fonction de m , g , H et z .

II.A.3) Toujours dans le cadre de la mécanique classique, quelles sont les altitudes accessibles à la particule ? Afin de compléter votre réponse, définir et calculer la probabilité de présence classique $dP_{cl}(z)$ de la particule entre les altitudes z et $z + dz$. On précise que la probabilité de présence entre z et $z + dz$ est proportionnelle à la durée passée par la particule entre ces deux altitudes. On veillera à normaliser correctement cette loi de probabilité de présence. Représenter sur un graphe $\frac{dP_{cl}}{dz}$ en fonction de z . Commenter qualitativement le graphe obtenu.

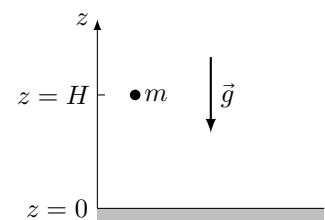


Figure 3 Chute libre depuis une hauteur H

II.A.4) On définit la grandeur suivante : $\ell_g = \left(\frac{\hbar^2}{2gm^2} \right)^{1/3}$. Quelle est sa dimension ?

II.A.5) En déduire l'expression du *quantum* d'énergie potentielle de pesanteur ε_g en fonction de m , g et ℓ_g .

II.A.6) Application numérique

Donner les valeurs numériques de ℓ_g et de ε_g (en eV) pour un neutron.

II.A.7) Le tableau 1 présente les caractéristiques de différents neutrons. Quel type de neutron vous paraît le mieux adapté à la mise en évidence expérimentale de ℓ_g ? Justifier la réponse.

	Neutron de fission	Neutron thermique	Neutron froid	Neutron ultrafroid
Énergie	2 MeV	25 meV	3 meV	< 100 neV
Vitesse	$10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$2200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$800 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$\simeq 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Tableau 1 Catégories de neutrons

II.B – Approche semi-classique

Document 3 : Règle de quantification de Bohr-Sommerfeld

D'après A. Messiah, *Mécanique Quantique*, tome 1, Dunod.

Les premières expériences sur les atomes au début du vingtième siècle avaient permis de révéler la nature discrète de leurs niveaux d'énergie. Cependant, les lois de la mécanique classique ne permettaient pas de rendre compte de ce fait expérimental et prévoyaient une distribution continue des énergies possibles.

Pour rendre compte de la quantification de l'énergie, Bohr et Sommerfeld proposent le procédé suivant : on admet que la particule suit les lois de la mécanique classique et on ne retient que les solutions qui vérifient une règle de quantification *ad hoc*.

Considérons l'exemple d'un oscillateur harmonique dont le mouvement est contraint de se faire le long d'un axe (Ox). En notant ω la pulsation propre de l'oscillateur et m sa masse, son énergie mécanique s'exprime par $E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, où p_x et x représentent respectivement la quantité de mouvement et l'abscisse de l'oscillateur unidimensionnel.

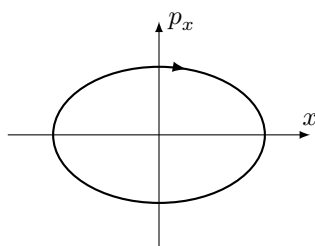


Figure 4 Orbite de phase d'un oscillateur harmonique d'énergie E

Cette relation définit, dans l'espace des phases (p_x, x) , une courbe fermée associée à la valeur de E , c'est l'*orbite de phase*. Pour l'oscillateur harmonique, cette courbe est une ellipse (voir figure 4). L'aire intérieure à l'orbite de phase est égale à l'*action* S de l'oscillateur :

$$S = \oint p_x(x) dx = 2\pi \frac{E}{\omega}$$

Selon Bohr et Sommerfeld, les seules énergies permises sont celles pour lesquelles l'action S est un multiple entier de la constante de Planck h . Cela se traduit par la *règle de quantification de Bohr-Sommerfeld* :

$$S = \oint p_x(x) dx = nh \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Pour l'oscillateur harmonique, cette condition donne comme expression approchée des énergies possibles de l'oscillateur : $E_n = n\hbar\omega$.

La règle de quantification de Bohr-Sommerfeld constitue une approximation, dite semi-classique, qui est acceptable lorsque les variations spatiales de la longueur d'onde de de Broglie de la particule sont faibles.

Dans le régime de chute libre quantique, les énergies possibles d'un neutron dans le champ de pesanteur forment un spectre discret. Chaque niveau d'énergie peut être repéré par un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et correspond à une hauteur H_n . De façon imagée, on peut dire que si la particule de la figure 3 est un neutron, les hauteurs de rebond H sont quantifiées et ne peuvent prendre que les valeurs discrètes H_n .

En utilisant le document 3, proposer une expression approchée des niveaux d'énergie E_n d'un neutron dans le champ de pesanteur en mettant en œuvre une approche semi-classique.

II.C – Détermination des états stationnaires par résolution de l'équation de Schrödinger

On propose maintenant de déterminer les états stationnaires d'un neutron d'énergie E et de masse m dans le champ de pesanteur au-dessus de la surface $z = 0$ par résolution de l'équation de Schrödinger. La fonction d'onde qui décrit le mouvement du neutron est : $\psi(z, t) = \varphi(z) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$. On admet que la *fonction d'onde propre* $\varphi(z)$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps qui est rappelée dans le formulaire.

Le neutron ne peut pas pénétrer dans le sol dont la surface constitue une barrière de potentiel d'amplitude infinie. On considère donc que $V(z < 0) \rightarrow +\infty$ et que pour $z \geq 0$, $V(z)$ conserve la même expression qu'à la question II.A.1.

II.C.1) Qu'est-ce qu'un *état stationnaire* ?

II.C.2) Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps sous forme adimensionnée en utilisant l'altitude adimensionnée $\zeta = \frac{z}{\ell_g}$ et l'énergie adimensionnée $\varepsilon = \frac{E}{\varepsilon_g}$.

Dans la suite, on utilisera aussi bien les variables sans dimension ζ et ε que les grandeurs dimensionnées correspondantes z et E .

II.C.3) Quelles sont les conditions aux limites qui s'imposent à $\varphi(\zeta)$?

II.C.4) La solution acceptable de l'équation de Schrödinger indépendante du temps adimensionnée s'écrit

$$\varphi(\zeta) = \mathcal{N} \text{Ai}(\zeta - \varepsilon)$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation (qui n'est pas à calculer). Toutes les informations utiles sur la fonction d'Airy Ai (représentation graphique, liste des trois premiers zéros et comportement asymptotique en $+\infty$) sont données dans le formulaire en fin d'énoncé.

Donner les valeurs numériques des niveaux d'énergie $\varepsilon_n = E_n/\varepsilon_g$ pour les deux premiers niveaux d'énergie ($n = 1$ et 2). Comparer avec les valeurs approchées obtenues à la question II.B.

II.C.5) Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence d'un neutron en fonction de z pour les deux premiers niveaux d'énergie. On explicitera la démarche suivie. Quelle(s) différence(s) notable(s) peut-on relever par rapport au cas classique (question II.A.3) ?

II.D – Spectroscopie résonante gravitationnelle

— Document 4 : l'expérience qBounce —

La mesure des niveaux d'énergie d'un neutron dans le champ de pesanteur permet d'accéder à la valeur de l'intensité du champ de pesanteur. La comparaison entre les mesures et la modélisation théorique permet de valider la théorie de la gravitation aux échelles considérées.

L'expérience *qBounce* permet de mesurer précisément les niveaux d'énergie des états stationnaires d'un neutron dans le champ de pesanteur terrestre. Elle est réalisée au moyen du dispositif schématisé sur la figure 5.

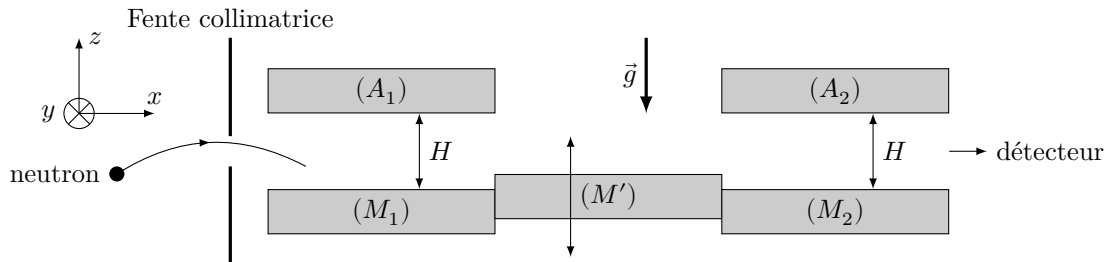


Figure 5 Schéma du dispositif expérimental de l'expérience qBounce. D'après T. Jenke et al., Realization of gravity resonance spectroscopy technique, *Nature Physics* **7**, 468-472 (2011)

Le dispositif expérimental est constitué des éléments successifs suivants :

- une fente collimatrice, à travers laquelle les neutrons sont injectés dans le dispositif ;
- un premier guide, constitué d'un *miroir à neutrons* (M_1) (verre optique poli) sur sa partie basse et d'un élément absorbeur de neutrons (A_1) sur la partie haute du guide (figure 5). Le miroir et l'absorbeur sont séparés d'une hauteur $H = 25,5 \mu\text{m}$. Ce guide a une longueur (selon Ox) $D = 15,0 \text{ cm}$. On le suppose invariant par translation dans l'autre direction horizontale (Oy) ;
- un miroir à neutrons (M'), de longueur horizontale $d = 20,0 \text{ cm}$ selon (Ox) et dont la position oscille verticalement à la pulsation Ω , de sorte que l'accélération verticale de la surface réfléchissante par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) s'écrit : $a(t) = a_0 \cos(\Omega t)$. Ce miroir est aussi invariant par translation selon l'autre direction horizontale (Oy) ;
- un second guide (M_2) (A_2), identique au premier ;
- un détecteur de neutrons à la sortie du dispositif.

Les neutrons traversent le dispositif avec une vitesse horizontale $v_x = 6,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ qui reste inchangée tout le long du dispositif.

Certaines valeurs numériques nécessaires à la résolution des questions suivantes figurent dans le document 4.

II.D.1) Niveaux d'énergie dans le guide à neutrons

Dans un guide, on décrit le mouvement du neutron, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, par une fonction d'onde de la forme :

$$\psi_I(z, t) = \varphi_I(z) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right) \exp(i(kx - \omega t))$$

avec $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$. Cette fonction d'onde doit vérifier l'équation de Schrödinger rappelée à la fin du sujet.

a) Que décrit le facteur $\exp(i(kx - \omega t))$? Montrer que $\varphi_I(z)$ est solution d'une équation de Schrödinger indépendante du temps, associée à une énergie E .

Les conditions aux limites qui s'imposent à $\varphi_I(z)$ sont : $\varphi_I(z = 0) = 0$ et $\varphi_I(z = H) = 0$. Elles entraînent une quantification de l'énergie E . On note E_n ($n \in \mathbb{N}^*$) chacune des valeurs autorisées.

b) Dans cette question uniquement, on néglige l'influence de la gravité ($V(z) = 0$). Justifier qu'alors le spectre d'énergie est celui du puits de potentiel infiniment profond de largeur H .

On note $E_{\infty, n}$ les valeurs correspondantes, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $E_{\infty, n}$ en fonction de H , m , $\hbar$ et n .

c) La figure 6 donne une représentation de l'énergie adimensionnée $\varepsilon_1 = E_1/\varepsilon_g$ du niveau fondamental en fonction de H/ℓ_g dans une échelle logarithmique. Ces valeurs ont été obtenues par une résolution numérique.

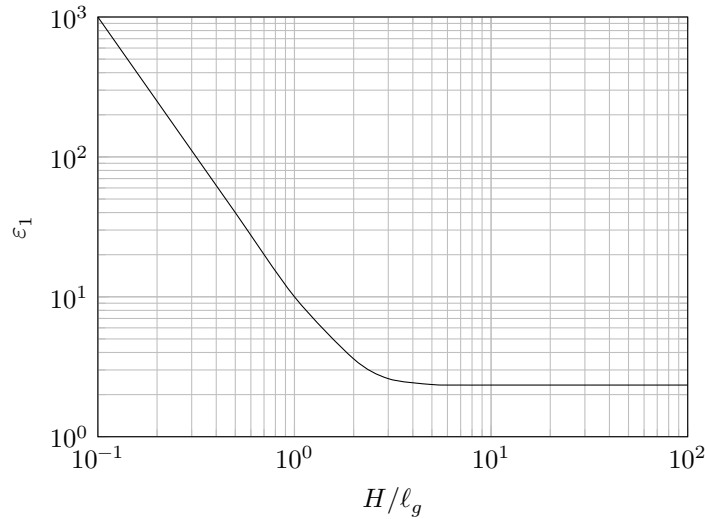


Figure 6 Évolution de l'énergie adimensionnée du niveau fondamental en fonction de la hauteur adimensionnée du guide (échelle logarithmique)

Déterminer la pente de l'asymptote dans la limite $H \ll \ell_g$ et interpréter le résultat. Quelle valeur de ε_1 retrouve-t-on dans la limite $H \gg \ell_g$?

d) Utiliser la figure 6 pour déterminer la valeur de l'énergie adimensionnée ε_1 du niveau fondamental d'un neutron qui évolue dans le guide.

II.D.2) Absorption sélective des neutrons dans le guide

Afin de modéliser simplement l'absorption des neutrons dans le guide en fonction de leur énergie, on associe au niveau d'énergie E_n une trajectoire parabolique au sens de la mécanique classique telle que le neutron rebondit sur le miroir inférieur et atteint le sommet de sa trajectoire à la hauteur H_n au-dessus du miroir inférieur. La distance horizontale parcourue par un neutron entre deux rebonds successifs sur le miroir inférieur est notée L_n (figure 7).

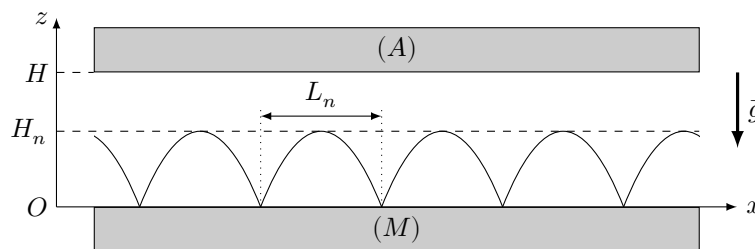


Figure 7 Rebonds d'un neutron dans un guide

- a) En utilisant les lois de la mécanique classique, montrer que $L_n = 2v_x \sqrt{\frac{2H_n}{g}}$ (on rappelle que v_x est la vitesse horizontale d'un neutron).
- b) Les neutrons peuvent être sélectivement absorbés par l'absorbeur en fonction de leur énergie selon la règle suivante :
- si $H_n > H$, le neutron est absorbé lors d'une « collision » avec l'absorbeur et ne parvient donc pas à traverser le guide ;
 - si $H_n < H$, le neutron peut atteindre la hauteur H par effet tunnel depuis le sommet de sa trajectoire et être absorbé. La probabilité d'absorption par effet tunnel à chaque passage au sommet de la trajectoire est notée T_n . On donne son expression approchée :

$$T_n \simeq \exp \left(-2 \left(\frac{H - H_n}{\ell_g} \right)^{3/2} \right)$$

On donne : $H_1 = 13,4 \mu\text{m}$, $H_2 = 24,0 \mu\text{m}$ et $H_3 = 32,4 \mu\text{m}$.

Étant donnée la valeur de H , quelles sont les énergies des neutrons susceptibles de traverser le guide ?

c) Qu'appelle-t-on *effet tunnel* en mécanique quantique ? Citer un phénomène physique de votre connaissance qui fait intervenir cet effet.

On s'intéresse à la transmission à travers le guide des neutrons d'énergie E_1 .

d) *Application numérique* Calculer la valeur numérique de T_1 .

e) On note P_p ($p \in \mathbb{N}$) la probabilité qu'un neutron n'ait **pas** été absorbé après p rebonds. Exprimer P_{p+1} en fonction de P_p et T_1 , puis P_p en fonction de p et T_1 .

f) En déduire l'expression de la probabilité $P(x)$ qu'un neutron d'énergie E_1 n'ait pas été absorbé après avoir parcouru, depuis l'entrée du guide, une distance horizontale x . On fera apparaître la *longueur caractéristique d'absorption* $D_1 = L_1/T_1$.

g) *Application numérique* On admet qu'on peut définir de même une longueur caractéristique d'absorption D_2 pour les neutrons d'énergie E_2 . On donne $D_2 = 3,73 \text{ cm}$.

Calculer la valeur numérique de D_1 . Comparer D_1 et D_2 à la longueur du guide. Conclure quant à la sélectivité du guide selon l'énergie des neutrons.

II.D.3) Mesure de l'intensité du champ de pesanteur

Dans la partie intermédiaire du dispositif, le miroir inférieur oscille à la pulsation Ω autour d'une position moyenne. Le mouvement du neutron dans cette zone est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au miroir mobile. Pour ce, on utilise la fonction d'onde : $\psi_{II}(z, t) = \varphi_{II}(z, t) \exp(i(kx - \omega t))$, avec $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$. On peut montrer (le calcul n'est pas demandé) que $\varphi_{II}(z, t)$ vérifie l'équation de Schrödinger unidimensionnelle suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_{II}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi_{II}(z, t)}{\partial z^2} + V_{II}(z, t) \varphi_{II}(z, t)$$

L'énergie potentielle $V_{II}(z, t)$ d'un neutron dans cette zone s'écrit $V_{II}(z, t) = V(z) + V_{ie}(z, t)$ où l'énergie potentielle de pesanteur $V(z)$ a la même expression qu'à la question II.A.1 et où $V_{ie}(z, t)$ est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

a) Justifier que le référentiel $\mathcal{R}'$ est non galiléen. Établir l'expression $V_{ie}(z, t) = ma(t)z$ où $a(t)$ représente l'accélération verticale du miroir mobile par rapport au référentiel terrestre.

b) On cherche une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme suivante :

$$\varphi_{II}(z, t) = c_1(t) \exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) \varphi_1(z) + c_3(t) \exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right) \varphi_3(z)$$

On rappelle que les fonctions d'onde $\varphi_1(z)$ et $\varphi_3(z)$ sont celles qui ont été définies à la question II.C.4 ; elles sont respectivement associées aux niveaux d'énergie E_1 et E_3 . On les suppose correctement normalisées. Les coefficients $c_1(t)$ et $c_3(t)$ sont complexes. On définit les coefficients suivants :

$$Z_{11} = \int_0^{+\infty} z \varphi_1^2(z) dz \quad Z_{33} = \int_0^{+\infty} z \varphi_3^2(z) dz \quad Z_{13} = \int_0^{+\infty} z \varphi_1(z) \varphi_3(z) dz$$

On précise que : $\int_0^{+\infty} \varphi_1(z) \varphi_3(z) dz = 0$. On définit aussi la pulsation $\Omega_R = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}$.

Établir les équations différentielles suivantes :

$$i\hbar \frac{dc_1(t)}{dt} = ma(t)(Z_{11}c_1(t) + Z_{13} \exp(-i\Omega_R t)c_3(t))$$

$$i\hbar \frac{dc_3(t)}{dt} = ma(t)(Z_{13}c_1(t) \exp(+i\Omega_R t) + Z_{33}c_3(t))$$

On leur adjoint les conditions initiales suivantes : $c_1(t=0) = 1$ et $c_3(t=0) = 0$.

c) Justifier le choix des conditions initiales.

d) On envisage le cas où $a(t) = 0$ (miroir immobile). Interpréter les solutions $c_1(t)$ et $c_3(t)$ obtenues dans ce cas.

e) Lorsque $a(t) = a_0 \cos(\Omega t)$, la résolution de ces deux équations différentielles est effectuée par voie numérique. Dans la figure 8, on a représenté $|c_1|^2$ et $|c_3|^2$ en fonction du temps, pour différentes valeurs de la pulsation d'excitation Ω et différentes valeurs de a_0 .

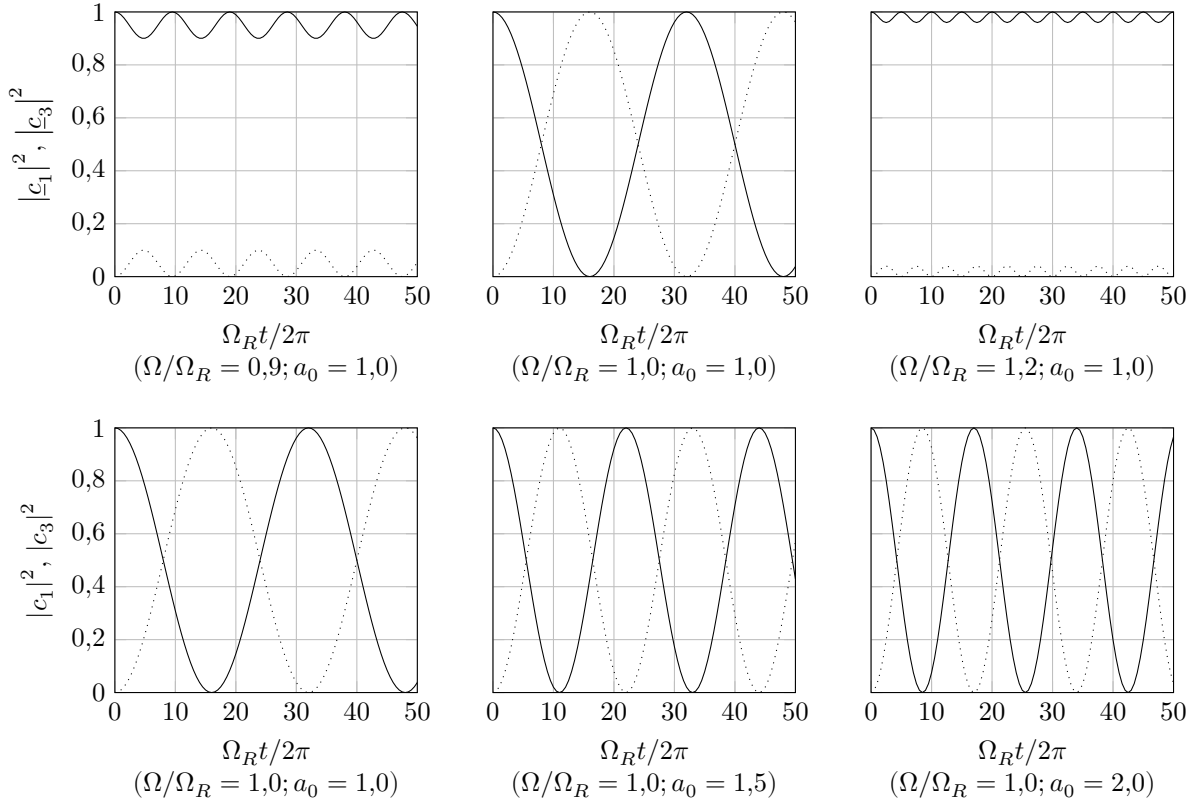


Figure 8 Évolution temporelle de $|c_1|^2$ (en trait continu) et $|c_3|^2$ (en pointillés) pour trois valeurs différentes du rapport Ω/Ω_R et une même amplitude d'accélération du miroir (M') (ligne supérieure), puis pour trois valeurs de cette accélération (unité arbitraire) à la pulsation Ω_R (ligne inférieure).

Quel est l'effet de la mise en oscillation du miroir ? Pourquoi parle-t-on de résonance lorsque $\Omega = \Omega_R$?

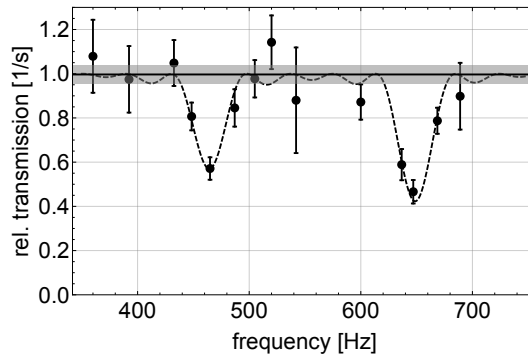


Figure 9 Taux de transmission des neutrons en fonction de la fréquence. Figure extraite de G. Cronenberg et al., *A Gravity of Earth measurement with a qBounce experiment*, Proceedings of the EPS Conference on High Energy Physics 2015, arXiv:1512.09134

f) La figure 9 représente le nombre de neutrons recueillis par unité de temps à la sortie du second guide en fonction de la fréquence d'oscillation du miroir.

La diminution du taux de transmission des neutrons observée entre 400 Hz et 500 Hz implique les états d'énergie E_1 et E_3 . Expliquer pourquoi le taux de transmission présente une valeur minimale dans cet intervalle de fréquence. L'expérience montre que cette valeur minimale dépend de l'amplitude a_0 de l'accélération du miroir (M'). Lorsqu'on augmente a_0 à partir d'une valeur nulle, la valeur minimale du nombre de neutrons détectés à la sortie du dernier guide commence par diminuer avant d'augmenter à nouveau. Interpréter cette évolution en s'aidant de la figure 8.

Comment expliquer la chute similaire du taux de transmission entre 600 Hz et 700 Hz ?

g) Déduire une valeur numérique de l'intensité du champ de pesanteur g , accompagnée de son incertitude, sachant que la fréquence de résonance est égale à 464 Hz avec une incertitude de 1,0 Hz.

h) Les mesures de la figure 9 ont été obtenues pour une amplitude d'accélération $a_0 = 6,10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. À quelle amplitude de déplacement du miroir correspond-elle à la résonance ? Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

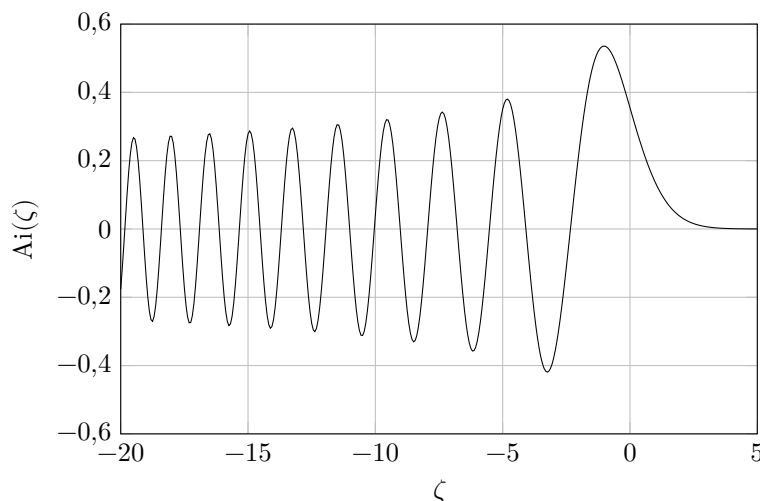
i) En exploitant la courbe de la figure 9, estimer le temps de passage d'un neutron au-dessus du miroir oscillant. On explicitera la démarche suivie. Comparer avec la valeur qu'on peut déduire du document 4.

Données numériques

Constante de gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}\cdot\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$
Intensité moyenne du champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,34 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_a = 29,0 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Masse du neutron	$m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$

Formulaire

- Équation de Schrödinger : $i\hbar \frac{\partial \psi(M, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(M, t) + V(M, t) \psi(M, t)$
- Équation de Schrödinger indépendante du temps : $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(M) + V(M) \varphi(M) = E \varphi(M)$
- Opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes : $\Delta U(M, t) = \frac{\partial^2 U(M, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(M, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(M, t)}{\partial z^2}$
- Relation entre largeur spectrale et durée : $\Delta \omega \cdot \Delta t \approx 2\pi$
- Fonction d'Airy



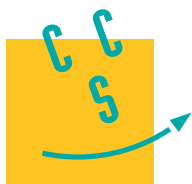
Comportement asymptotique en $+\infty$

$$\text{Ai}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}$$

Trois premiers zéros de $\text{Ai}(\zeta)$

n	1	2	3
ζ_n	-2,34	-4,09	-5,52

• • • FIN • • •



L'essentiel du rayonnement visible du Soleil provient de sa photosphère, que l'on désignera par « surface solaire ». Elle est entourée d'une fine couche appelée chromosphère, puis de la couronne, laquelle est observable en particulier lors des éclipses. La figure 1 (photographie de Luc Viatour <https://lucnix.be>) montre la couronne solaire observée en France lors de l'éclipse totale de 1999. La Lune, qui masque le Soleil, a un diamètre apparent presque identique à celui du Soleil.

La couronne est un milieu fortement variable et inhomogène. Sa structure est profondément influencée par le champ magnétique solaire. Dans tout ce problème, on ignore ces aspects et on étudie, sauf mention contraire, une « couronne moyenne », idéalisée et à symétrie sphérique. Dans un premier temps, on évalue sa température (partie I). On estime ensuite son contenu électronique (partie II). Le rayonnement radio qui provient du Soleil nous renseigne sur des propriétés physiques des régions d'émission (partie III). La couronne s'étend dans l'espace interplanétaire et sera bientôt approchée par la mission Parker Solar Probe (partie IV). La trajectoire de cette sonde pourra être corrigée par un moteur à hydrazine (partie V). Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

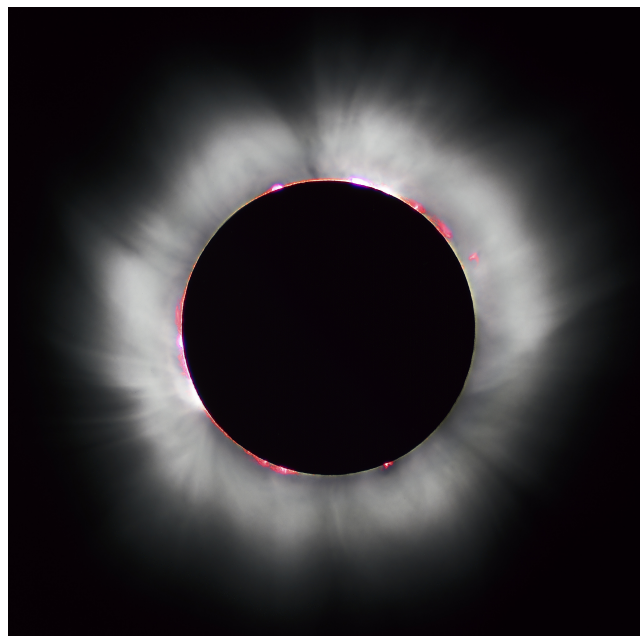


Figure 1

I Température dans la couronne solaire

— La mesure des températures en astrophysique. Application au Soleil. —

D'après « Panorama de la physique », sous la direction de Gilbert Pietryk, Belin Pour la Science, 2012.

Le spectre de raies d'émission est la signature des éléments chimiques présents dans le corps qui émet. Il permet d'obtenir des informations sur la température, par la largeur de ces raies, mais renseigne aussi par la présence de formes ionisées. Cette propriété est utilisée pour étudier la couronne solaire et accéder à la température du plasma dans cette région. La couronne n'est pas observable en même temps que le disque solaire, parce que sa luminosité est à peu près un million de fois inférieure, mais en occultant le disque on peut la voir très nettement. Cette occultation peut être naturelle (lors des éclipses) ou artificielle en utilisant des coronographes. L'analyse des raies émises par la couronne met en évidence l'existence d'atomes ionisés un grand nombre de fois. Par exemple le FeX est un atome de fer ionisé 9 fois qui existe dans la couronne. Or, l'étude en laboratoire de la réaction de passage du FeIX à FeX a montré que cette réaction nécessite une température d'au moins 1×10^6 K et que légèrement au-dessus apparaît l'ion FeXI. L'observation des raies de cet ion dans la couronne prouve donc d'une part qu'il y a du fer à cet endroit, mais aussi que la température qui y règne est d'environ 1×10^6 K.

On constate grâce à ces observations que l'évolution de la température au voisinage du Soleil est complexe : partant de quelques milliers de degrés à la base de la photosphère, elle diminue d'abord comme on peut s'y attendre lorsqu'on s'éloigne d'un corps chaud, mais elle ré-augmente ensuite brutalement dans une région appelée région de transition (figure 2), pour atteindre un million de degrés. Cette température reste ensuite presque constante dans la haute couronne et dans le vent solaire, comme le montrent les mesures *in-situ*.

Aucune mesure n'a pu encore être faite directement dans la couronne elle-même, mais le vent solaire a fait l'objet de plusieurs missions spatiales comme Ulysse ou Wind. Le plasma du milieu interplanétaire étant extrêmement ténu, l'utilisation d'un thermomètre au sens classique (corps en équilibre thermodynamique avec le milieu) n'a pas de sens. En revanche, les sondes embarquent des détecteurs de particules qui les sélectionnent en fonction de leur énergie (en appliquant un champ électrostatique), les trient (en appliquant un champ magnétique) et enfin les comptent. Au final, la fonction de distribution obtenue donne l'énergie moyenne des particules et donc leur température.

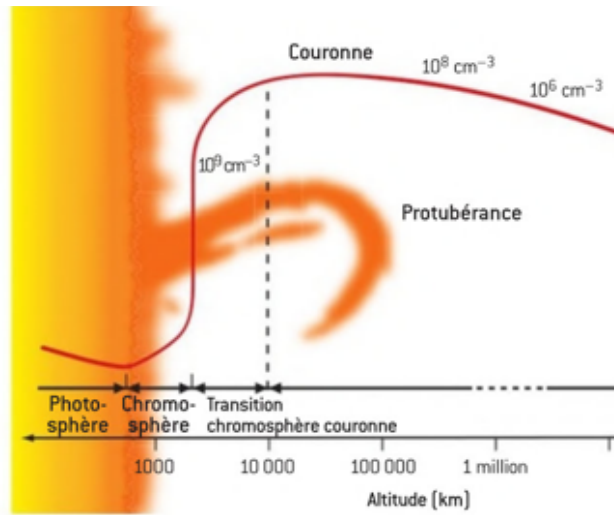


Figure 2 Profil de température dans la couronne solaire : l'échelle de distance, logarithmique, montre la faible épaisseur sur laquelle se fait la transition entre la basse température de la photosphère et la haute température de la couronne. Des ordres de grandeur de densités volumiques de particules sont aussi indiqués.

I.A – Une atmosphère très étendue

Observée en lumière blanche, la couronne s'étend assez loin du limbe solaire (figure 1). La couronne est constituée d'un plasma assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_p . La masse moyenne d'une particule du milieu est notée $m = M_p/\mathcal{N}_A$, où $\mathcal{N}_A$ est la constante d'Avogadro. On modélise la couronne par une atmosphère isotherme à la température T et à l'équilibre sous l'effet du champ de pesanteur solaire. Dans un premier temps, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme g_s . La densité volumique de particules $n_1(z)$ à l'altitude z , mesurée par rapport à la base de la couronne, a alors pour expression $n_1(z) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p(z)}{k_B T}\right)$ où $E_p(z)$ est l'énergie potentielle d'une particule de masse m dans le champ de pesanteur et n_0 la densité volumique de particules à l'altitude $z = 0$.

Q 1. Donner l'expression de $E_p(z)$ et en déduire que $n_1(z) = n_0 \exp(-z/H)$ où H est la hauteur d'échelle, dont on donnera l'expression en fonction de m , k_B , T et g_s .

Q 2. Le milieu est localement neutre et on le suppose constitué uniquement d'hydrogène totalement ionisé. Exprimer m en fonction de la masse d'un proton (m_p) et de celle d'un électron (m_e).

Q 3. Des mesures d'intensité lumineuse de la couronne conduisent à estimer une densité volumique de particules à l'altitude $z_2 = R_s$, où R_s est le rayon du Soleil, environ 10^3 fois plus faible qu'à l'altitude $z_1 = 0$. En déduire la valeur numérique de H , puis évaluer la température de la couronne.

On adopte un modèle à symétrie sphérique et on néglige l'effet de rotation du soleil. La densité volumique de particules $n_2(r)$ ne dépend que de la distance r au centre du Soleil. À l'équilibre, la pression p vérifie l'équation $\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r)$ où $g(r)$ désigne la norme du champ gravitationnel solaire et $\rho(r)$ la masse volumique.

Q 4. En négligeant la masse de la couronne et en supposant la distribution de masse du Soleil à symétrie sphérique, déterminer $g(r)$ pour $r \geq R_s$, en fonction de g_s , r et R_s .

Q 5. En déduire l'expression de $n_2(r)$. On notera $n'_0 = n_2(R_s)$.

Q 6. Des observations ont permis de déterminer en fonction de r la densité volumique d'électrons dans la couronne « calme » (tableau 1). Vérifier la pertinence du modèle précédent à l'aide de ces données puis estimer la température de la couronne.

r/R_s	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$n_e \text{ (m}^{-3}\text{)}$	$3,5 \times 10^{14}$	2×10^{14}	9×10^{13}	5×10^{13}	3×10^{13}

Tableau 1

I.B – Présence de fer hautement ionisé

Le spectre de la lumière provenant de la couronne solaire inclut une raie d'émission assez intense de longueur d'onde 530,3 nm. Cette raie a été attribuée à l'ion FeXIV, c'est-à-dire au fer ayant perdu 13 électrons. L'énergie d'ionisation permettant de passer de FeXIII à FeXIV est $E_1 = 355 \text{ eV}$.

Q 7. Quelle est la condition sur la longueur d'onde d'un photon incident pour qu'il puisse provoquer l'ionisation de FeXIII en FeXIV ? À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-il ?

Le rayonnement provenant de la surface solaire est insuffisant dans ce domaine spectral. On explique l'ionisation par des chocs entre ions FeXIII et électrons libres du milieu.

Q 8. Donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne des électrons libres en fonction de la température T .

Q 9. En considérant que l'ionisation est probable si la somme des énergies cinétiques moyennes des deux particules est supérieure à E_1 , estimer la température de la couronne.

On déduit de simulations numériques les fractions massiques d'ions du fer en fonction de la température (figure 3). Le satellite SOHO a observé le Soleil à différentes longueurs d'onde (figure 4).

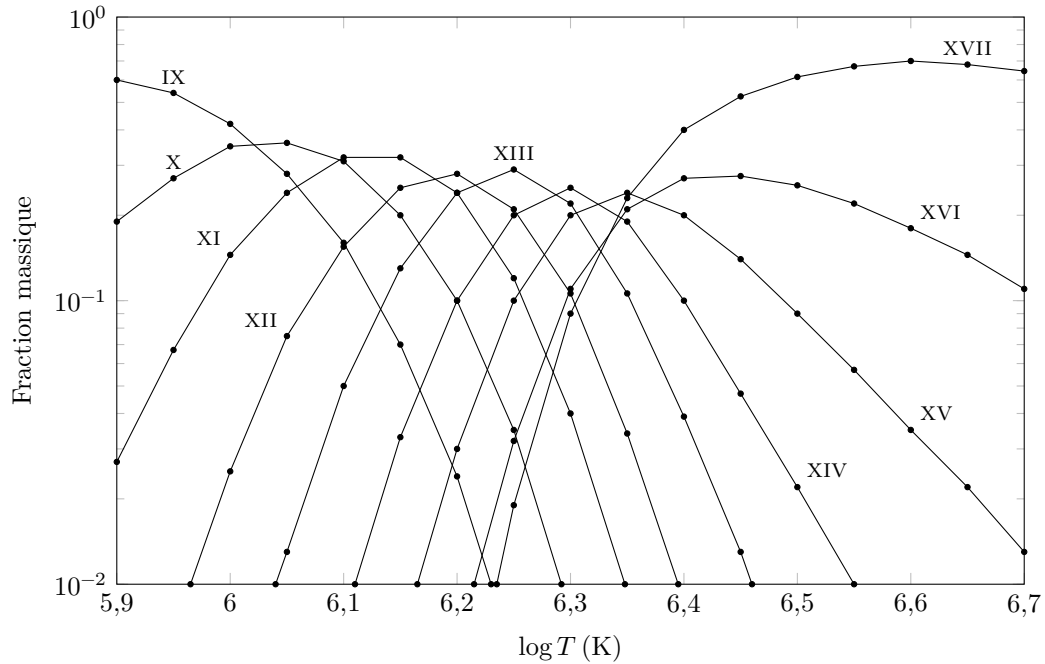


Figure 3 Fraction massique de différents états d'ionisation du fer en fonction de la température exprimée en Kelvin. D'après Dere et al. (2009), *Astron. Astrophys.*, 498 (2009), p. 915

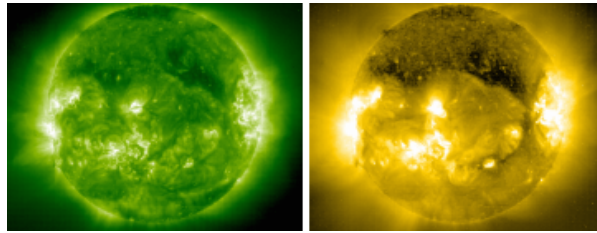


Figure 4 Images obtenues par SOHO : à droite, à une longueur d'onde de 19,5 nm correspondant à une raie de FeXII ; à gauche, à une longueur d'onde de 28,4 nm correspondant à une raie de FeXV

Q 10. Évaluer la température des régions les plus émissives sur chacune de ces deux images.

Q 11. Expliquer l'intérêt d'observer à des longueurs d'onde de raies émises par le fer dans différents états d'ionisation.

Q 12. Pourquoi observe-t-on des raies d'émission d'ions du fer, élément peu abondant dans la couronne solaire, mais pratiquement aucune raie de l'hydrogène, principal constituant de la couronne ?

I.C – Des raies d'émission très larges

Un ion FeXIV excité rayonne une onde électromagnétique de fréquence ν_0 dans son référentiel propre. S'il a une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un observateur, ce dernier perçoit une fréquence $\nu \approx \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c}\right) \nu_0$ où $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire de la direction observateur – source orienté dans le sens observateur vers source et c désigne la célérité de la lumière dans le vide. Le rayonnement observé dans la direction définie par le vecteur $\vec{u}$ provient d'un grand nombre d'ions FeXIV dont les vitesses suivent une distribution statistique, d'autant plus dispersée que la température du milieu émetteur est élevée. Il en résulte une raie spectrale élargie autour de la fréquence ν_0 .

Q 13. Nommer l'effet décrit ci-dessus.

On note $\langle X \rangle_i$ la moyenne d'une grandeur X sur les ions dont on observe le rayonnement.

Q 14. Établir une relation entre $\Delta\nu = \sqrt{\langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle_i}$ et $\langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle_i$.

Q 15. Exprimer $\langle v^2 \rangle_i$ en fonction de la masse m_{Fe} d'un ion, de la température T du milieu et de la constante de Boltzmann k_B .

Q 16. La distribution des vitesses des ions étant supposée isotrope, quelle est la relation entre $\langle(\vec{v} \cdot \vec{u})^2\rangle_i$ et $\langle v^2 \rangle_i$?

Q 17. En déduire $\Delta\nu$ en fonction de m_{Fe} , T , c , k_B et ν_0 , puis la largeur de la raie spectrale en longueur d'onde, notée $\Delta\lambda$, en fonction de m_{Fe} , T , c , k_B et λ_0 longueur d'onde de l'onde de fréquence ν_0 . On supposera $\Delta\nu \ll \nu_0$.

Pour la raie verte de FeXIV, centrée sur la longueur d'onde 530,3 nm, on observe $\Delta\lambda \approx 0,03$ nm.

Q 18. En déduire la température du milieu dans lequel cette raie se forme.

Q 19. Vérifier la cohérence avec la figure 3.

II Densité volumique d'électrons dans la couronne solaire

Lors d'une éclipse solaire (figure 1), on peut observer la couronne en lumière blanche. Près du limbe solaire, cette lumière provient du rayonnement émis à la surface solaire et diffusé par les électrons libres de la couronne.

II.A – Intensité d'une onde plane progressive harmonique

Dans le domaine visible, la couronne est quasiment transparente et la structure d'une onde électromagnétique qui s'y propage est identique à celle dans le vide. On considère une onde plane progressive harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$. Son champ électrique est noté $\vec{E}(M, t)$.

Q 20. Rappeler, sans démonstration, les propriétés du champ électromagnétique de cette onde, ainsi que la relation de dispersion.

Q 21. Déterminer son vecteur de Poynting en fonction de ε_0 , c et du champ électrique.

Q 22. En déduire l'intensité I , c'est-à-dire la puissance surfacique moyenne traversant une surface orthogonale à $\vec{u}_z$.

II.B – Diffusion par les électrons de la couronne K

On considère un électron de masse m_e et de charge $-e$ placé dans le champ électromagnétique de l'onde.

Q 23. À quelle condition peut-on négliger l'effet du champ magnétique de l'onde ? Justifier, en s'appuyant sur un ordre de grandeur, que cette condition est vérifiée.

Q 24. À quelle condition peut-on se rapporter à l'étude d'un mouvement de particule chargée dans un champ électrique uniforme et à variation temporelle harmonique ? Justifier que cette condition est ici vérifiée.

On note $\langle P \rangle$ la puissance moyenne rayonnée par l'électron et on définit la section efficace de diffusion par $\sigma = \langle P \rangle / I$. On précise qu'un électron non relativiste de charge $-e$ et d'accélération a rayonne une puissance instantanée $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$.

Q 25. Vérifier que σ a la dimension d'une section. Déterminer son expression, puis sa valeur numérique. Dans la suite, on retiendra $\sigma = 6,65 \times 10^{-29}$ SI.

II.C – Contenu électronique de la couronne

Une colonne cylindrique d'axe (Oz) , de base d'aire S et de hauteur h contient $n_e(z)$ électrons libres par unité de volume. Chaque électron diffuse le rayonnement incident dans toutes les directions. Le rayonnement selon (Oz) a une intensité $I(z)$ (figure 5).

Q 26. Montrer que l'intensité à la sortie de cette colonne en $z = h$

a pour expression $I(h) = \exp(-N\sigma)I(0)$ où $N = \int_0^h n_e(z) dz$ est le contenu électronique.

Q 27. En déduire, dans le cas où $N\sigma \ll 1$, une expression approchée de la fraction f de la puissance incidente qui est diffusée par les électrons sur l'ensemble de la colonne.

Q 28. La partie de la couronne solaire observable sur la figure 1, comprise entre la surface solaire et l'altitude $0,6R_s$ par rapport à cette surface, diffuse une fraction $f \approx 10^{-6}$ de la puissance rayonnée par le Soleil dans le domaine visible. Évaluer la densité volumique moyenne $\bar{n}_e$ d'électrons libres.

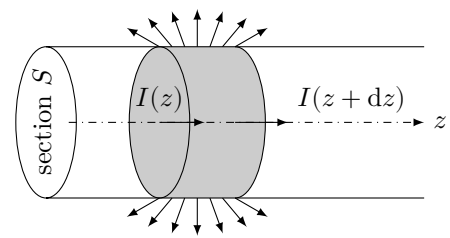


Figure 5

III Rayonnement radio de la couronne solaire

Le Soleil émet un rayonnement radioélectrique sur un large spectre. Ce rayonnement résulte de processus thermiques et non thermiques. On s'intéresse au deuxième cas.

III.A – Propagation dans un plasma

On considère un plasma d'hydrogène totalement ionisé, localement neutre et dont la densité volumique d'électrons est n_e . Un électron a une masse m_e et une charge $-e$. Dans ce plasma, on étudie une onde électromagnétique plane harmonique de pulsation ω .

- Q 29.** Rappeler brièvement les hypothèses et les approximations qui permettent d'établir l'expression $\underline{\sigma}(\omega) = \frac{n_e e^2}{i m_e \omega}$ de la conductivité complexe du plasma en fonction de la pulsation.
- Q 30.** Établir la relation de dispersion dans le plasma.
- Q 31.** À quelle condition une onde plane progressive harmonique peut-elle se propager dans ce milieu ? Quelle est la nature de l'onde dans le cas contraire ?

III.B – Oscillations plasma

Le milieu n'est plus supposé localement neutre. On néglige le mouvement des protons, de densité volumique n_0 . Les électrons, de densité volumique $n_e(x, t)$, ont une vitesse $\vec{v}_e(x, t) = v_e(x, t)\vec{u}_x$. Par ailleurs, le champ électrique a pour expression $\vec{E}(x, t) = E(x, t)\vec{u}_x$. On note $\rho(x, t)$ la densité volumique de charge et $\vec{j}(x, t)$ le vecteur densité de courant.

- Q 32.** Donner l'expression de $\rho(x, t)$ en fonction de $n_e(x, t)$, n_0 et de la charge élémentaire e .
- Q 33.** En s'appuyant sur l'équation locale de conservation de la charge, montrer que $\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v_e)}{\partial x} = 0$.

On supposera dans la suite que l'on peut retenir $\frac{\partial(n_e v_e)}{\partial x} \approx n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x}$, d'où l'équation

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.1})$$

- Q 34.** Justifier l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{(n_0 - n_e(x, t))e}{\varepsilon_0} \quad (\text{III.2})$$

- Q 35.** Écrire l'équation (III.3) permettant de décrire le mouvement d'un électron sous l'effet du champ électrique. On admettra que, dans une approximation linéaire, on peut retenir $\frac{dv_e}{dt} \approx \frac{\partial v_e}{\partial t}$.

On cherche des solutions des équations précédentes sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques. On adopte des notations complexes et on pose $\underline{n}_e(x, t) = n_0 + N \exp(i(\omega t - kx))$, $\underline{v}_e(x, t) = V \exp(i(\omega t - kx))$ et $\underline{E}(x, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx))$.

- Q 36.** Montrer que la pulsation est nécessairement égale à la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$.

III.C – Sursaut radio

- Q 37.** La relaxation des ondes précédentes s'accompagne d'un rayonnement à la même pulsation. Évaluer la fréquence correspondante si les « oscillations plasma » se produisent dans la basse couronne solaire ($n_0 = 1 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$).

- Q 38.** Ce rayonnement peut-il atteindre l'atmosphère terrestre ? La traverser ?

On observe des « sursauts radio » du Soleil. Ils correspondent à des émissions transitoires sur un large spectre du domaine radio, mais dont l'intensité spectrale présente un maximum à une fréquence qui évolue au cours du temps. Ainsi, dans le cas d'un sursaut « de type III », cette fréquence dérive de 120 MHz à 75 MHz en une seconde. On attribue ce sursaut à des particules chargées qui traversent la couronne des couches les plus basses vers les plus hautes et qui excitent, sur leur passage, les ondes étudiées dans la sous-partie III.B.

- Q 39.** En considérant une densité volumique d'électrons $n_e(r) = N_1 \exp\left(b \frac{R_s}{r}\right)$, où r désigne la distance au centre du Soleil, $N_1 = 4 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$ et $b \approx 10$, évaluer la vitesse des particules « perturbatrices ». Commenter la valeur obtenue.

IV Prolongement de la couronne dans l'espace interplanétaire

IV.A – Température dans la couronne solaire et dans le milieu interplanétaire

La conductivité thermique λ du plasma coronal dépend de la température selon la loi $\lambda(T) = (T/T_0)^{5/2} \lambda_0$ avec $\lambda_0 = 9 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $T_0 = 1 \times 10^6 \text{ K}$.

- Q 40.** Comparer la conductivité de ce plasma, à T_0 , à celle d'un bon conducteur thermique sur Terre.

- Q 41.** Écrire et nommer la loi reliant le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_t$ à la température.

On se place en régime permanent et il n'y a aucun autre échange thermique que diffusif. La température $T(r)$ ne dépend que de la distance r au centre du Soleil. À la distance $r_0 \approx 1,2 R_s$, $T(r_0) = T_0$.

Q 42. Montrer que $T(r) = T_0(1 - K(1/r_0 - 1/r))^{2/7}$ où K est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question.

Q 43. La couronne solaire se prolonge dans l'espace interplanétaire. La température, très loin du Soleil, est très faible devant T_0 . En déduire l'expression de la constante K et la loi $T(r)$.

IV.B – La mission Parker Solar Probe

La sonde Parker Solar Probe (PSP), dont le lancement est prévu en 2018, va s'approcher à une distance $r_p = 9,6R_s$ du centre du Soleil. La sonde est munie d'un bouclier thermique testé pour résister à une température de 1400 K.

Q 44. En utilisant le modèle de la sous-partie IV.A, évaluer la température de la couronne à la distance $r_p = 9,6R_s$ du centre du Soleil. Le bouclier thermique sera-t-il suffisant pour protéger la sonde ?

La réalisation des objectifs scientifiques de la mission dépend de la durée passée par la sonde en-deçà de la distance $r_{10} = 10R_s$ au centre du Soleil. On rappelle que la Terre décrit une trajectoire quasi-circulaire autour du Soleil, de rayon $r_T = 1$ u.a. (unité astronomique, $1 \text{ u.a.} \approx 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$).

Q 45. L'orbite finale de PSP autour du Soleil est une ellipse de distance au périhélie $r_p = 4,6 \times 10^{-2}$ u.a. et de distance à l'aphélie $r_a = 0,73$ u.a.. En déduire la période de révolution, en jours, de la sonde.

Q 46. Déterminer la vitesse v_p de la sonde à son périhélie.

Dans le plan de l'orbite de la sonde, on note θ l'angle entre le grand axe de l'orbite et le rayon joignant le centre du Soleil et la sonde (figure 6). L'équation polaire de la trajectoire elliptique s'écrit alors $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$.

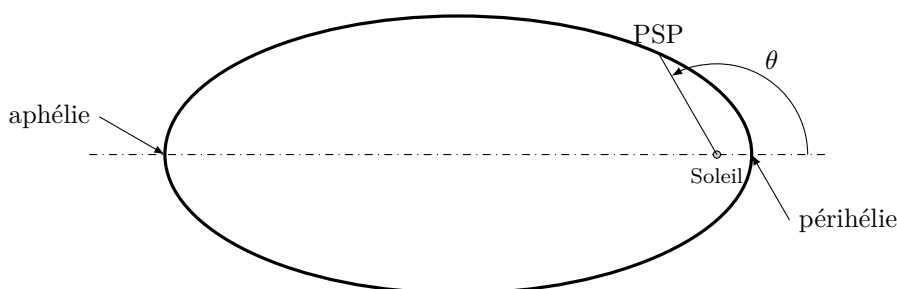


Figure 6

Q 47. Exprimer e et p en fonction de r_a et r_p . Calculer leurs valeurs numériques.

Q 48. Évaluer la durée passée, pendant une révolution, à $r \leq r_{10}$.

V Correction de trajectoire

Au cours de la mission de Parker Solar Probe, il peut être nécessaire d'effectuer des corrections de trajectoire. Dans ce but, la sonde est équipée de douze propulseurs à hydrazine (N_2H_4) qui permettent de modifier sa vitesse.

V.A – Propulseur à hydrazine

Les propulseurs choisis utilisent l'hydrazine comme monergol : il n'y a pas de combustion. Par passage sur un catalyseur, l'hydrazine liquide se décompose en diazote et dihydrogène gazeux.

Q 49. Écrire l'équation de la réaction de décomposition de l'hydrazine et justifier son utilisation pour un moteur à propulsion.

Q 50. Définir le terme catalyseur.

La température de la chambre de décomposition doit être maîtrisée car le catalyseur se détériore à haute température.

Q 51. Justifier le caractère exothermique de la réaction de décomposition.

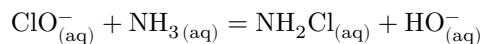
Q 52. Calculer la variation de température dans la chambre dans l'hypothèse d'une décomposition adiabatique et monobare.

Q 53. Quelles améliorations, permettant d'obtenir une meilleure estimation de la variation de température, peut-on apporter au modèle utilisé pour le calcul précédent ?

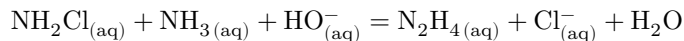
V.B – Synthèse de l'hydrazine

Pour des moteurs à propulsion, il est nécessaire d'utiliser de l'hydrazine de haute pureté (teneur massique supérieure à 99,5%). Une des méthodes utilisées est le procédé Raschig qui se décompose en deux étapes de synthèse suivies d'étapes de concentration et de purification pour obtenir l'hydrazine anhydre.

La première étape consiste en la formation à froid de monochloramine ($\text{NH}_2\text{Cl}_{(\text{aq})}$) à partir d'ammoniac et d'hypochlorite de sodium :



La seconde étape de la synthèse est la formation de l'hydrazine par réaction entre la monochloramine et l'ammoniac, sous forte pression et en présence d'un large excès d'ammoniac :



Q 54. Justifier d'un point de vue thermodynamique l'intérêt d'utiliser un excès d'ammoniac pour cette étape. Plusieurs études cinétiques ont été menées en laboratoire sur ces réactions dans le but d'optimiser les conditions de synthèse. Nous proposons ici d'étudier un modèle simplifié pour la seconde réaction. Les recherches ont établi que, sous certaines conditions, sa loi de vitesse peut s'écrire sous la forme $v = k[\text{NH}_2\text{Cl}]^\alpha[\text{NH}_3]$.

L'énergie d'activation est estimée à 74,0 kJ·mol⁻¹. Un suivi cinétique par spectroscopie à 27,3 °C et pH = 11,85 a permis de déterminer la concentration en monochloramine au cours du temps à partir d'une solution de concentration initiale 2,00 × 10⁻³ mol·L⁻¹ en monochloramine et 1,00 mol·L⁻¹ en ammoniac. Les données sont regroupées dans le tableau 2.

t (min)	0	10	20	30	50	70	90
$[\text{NH}_2\text{Cl}]$ (mol·L ⁻¹)	2,00 × 10 ⁻³	1,86 × 10 ⁻³	1,73 × 10 ⁻³	1,61 × 10 ⁻³	1,40 × 10 ⁻³	1,21 × 10 ⁻³	1,05 × 10 ⁻³

Tableau 2

Q 55. Montrer que ces valeurs permettent de valider l'hypothèse d'un ordre $\alpha = 1$ par rapport à la monochloramine.

Q 56. Déterminer la valeur de la constante de vitesse k .

Q 57. Comment peut-on déterminer expérimentalement une énergie d'activation ?

Q 58. Proposer une estimation du temps de demi-réaction dans les conditions réelles de synthèse :

$$[\text{NH}_2\text{Cl}]_0 = 1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad [\text{NH}_3]_0 = 30 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad T = 130 \text{ }^\circ\text{C}$$

Q 59. La cinétique réelle est plus complexe et la constante de vitesse est dépendante du pH selon l'équation $k = k_1 + k_2 \times 10^{\text{pH}}$. Justifier que cette expression de la constante de vitesse peut se traduire par l'existence de deux chemins réactionnels dont l'un correspond à une catalyse par les ions HO⁻.

V.C – Analyse de la pureté de l'hydrazine

Il est possible d'estimer la pureté de l'hydrazine par titrage spectrophotométrique d'une azine formée par réaction de l'hydrazine avec le paradiméthylaminobenzaldéhyde (PDAB).

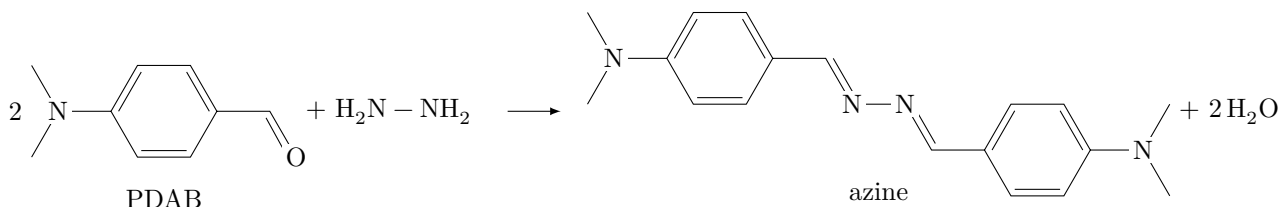
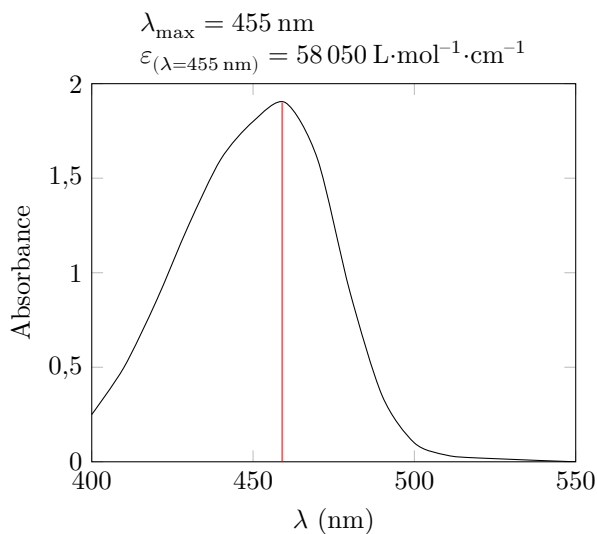


Figure 7



Spectre d'absorption de l'azine

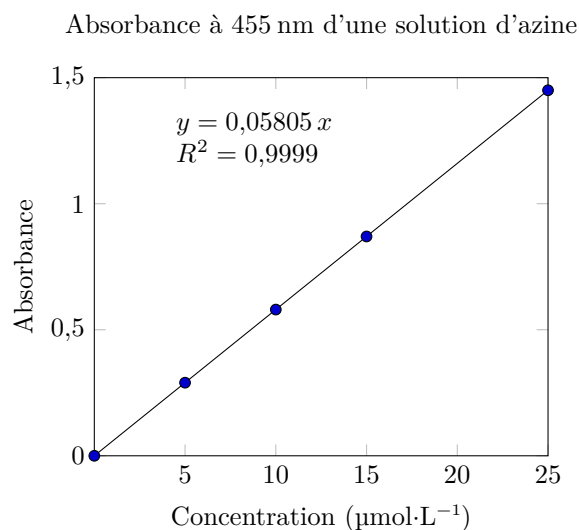


Figure 8 D'après *Nouvelle stratégie d'extraction et de purification de l'hydrazine de grade spatial via le procédé Raschig*, Clelia Betton, Thèse de doctorat

- Q 60.** Justifier le choix de la longueur d'onde pour le tracé de la figure 8 à droite.
- Q 61.** Quelle loi est mise en évidence par la figure 8 à droite, l'énoncer en indiquant le nom et l'unité de chaque terme.
- Le protocole de titrage est le suivant :
- à un volume V d'hydrazine « pure » est ajoutée de l'eau jusqu'à obtention d'un volume $2V$;
 - cette solution est diluée 100 000 fois pour obtenir une solution S_0 ;
 - dans une fiole de 50 mL sont introduits 20 mL d'eau distillée, 5,0 mL de la solution S_0 et 10 mL de réactif PDAB (en excès). La fiole est ensuite complétée au trait de jauge avec de l'eau distillée. Après 20 minutes, on obtient une solution S_1 ;
 - on mesure l'absorbance de la solution S_1 , $A_1 = 0,90$.
- Q 62.** Proposer un protocole pour réaliser une dilution par 100 en indiquant clairement la verrerie utilisée.
- Q 63.** Pourquoi est-il nécessaire d'attendre 20 minutes avant de mesurer l'absorbance ?
- Q 64.** Déterminer la concentration en hydrazine de la solution S_0 .
- Q 65.** En déduire la teneur massique en hydrazine de l'échantillon d'hydrazine « pure ». Conclure.

Données numériques

Constantes

Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$

Soleil

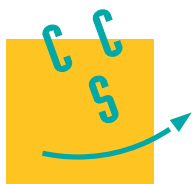
Rayon	$R_s = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Masse	$M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Champ de pesanteur à la surface solaire	$g_s = 274 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Données diverses

Électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge de l'électron	$-e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse molaire atomique du fer	$M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Numéro atomique du chlore	$Z = 17$
Énergie de l'atome d'hydrogène dans son niveau fondamental	$-13,6 \text{ eV}$

Hydrazine

Enthalpie standard de formation de l'hydrazine	$\Delta_f H^\circ(\text{N}_2\text{H}_4) = 50,6 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
Capacité thermique molaire standard à pression constante	$C_{P,m}^\circ(\text{N}_{2(\text{g})}) = 29,1 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ $C_{P,m}^\circ(\text{H}_{2(\text{g})}) = 28,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Densité de l'hydrazine liquide à 25 °C	1,005
Masse molaire de l'hydrazine	$32,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

*Vie et mort d'un photon*

Dans la plupart des expériences, la mesure de la présence d'un photon se fait par absorption, c'est-à-dire par destruction du photon : un œil ou une caméra CCD détruisent les photons incidents en les absorbant. De nombreux travaux ont toutefois permis de réaliser des mesures quantiques non destructives (QND, *quantum non-demolition measurement*). Ainsi, à la fin du xx^e siècle, la présence d'un photon a pu être détectée sans que celui-ci ne soit détruit, ouvrant la porte à des mesures successives de l'état du même photon.

L'équipe de Serge Haroche de l'École Normale Supérieure de Paris a en particulier utilisé ses connaissances en électrodynamique quantique en cavité (CQED, *cavity quantum electrodynamics*) pour mesurer sans le détruire l'état d'un seul photon piégé. Pour la première fois, l'apparition et la disparition du même photon ont pu être observées en direct.

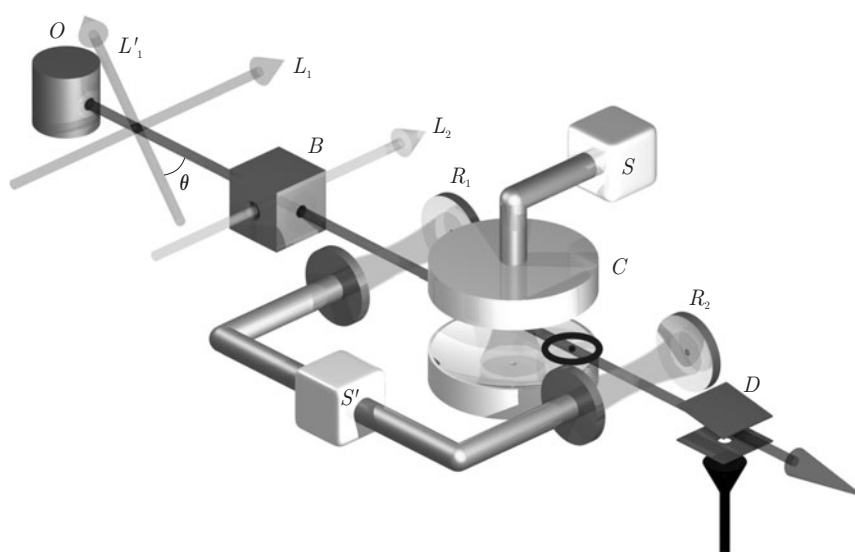


Figure 1 Principe de l'expérience d'électrodynamique quantique en cavité (Exploring the Quantum - Atoms, cavities and photons - Serge Haroche et Jean-Michel Raimond - Oxford University Press (2006))

Dans cette expérience, le photon est piégé dans une cavité C constituée de deux miroirs en vis-à-vis (figure 1). Le photon effectue des allers-retours entre les deux miroirs jusqu'à sa disparition (absorption par l'un des miroirs ou fuite hors de la cavité).

Pour sonder la présence du photon, on utilise un atome de Rubidium sortant du four O dont la vitesse est sélectionnée grâce aux lasers L_1 et L'_1 . L'atome est ensuite excité dans un état dit de *Rydberg circulaire* au niveau de B . L'atome subit ensuite une impulsion micro-onde au niveau de R_1 ce qui le place dans une superposition de deux états. En traversant la cavité C , les deux états acquièrent un déphasage relatif Φ_{at} dépendant de la présence ou non d'un photon. L'atome subit une deuxième impulsion micro-onde au niveau de R_2 et son état final est mesuré par le détecteur D . Cet état final dépend du déphasage relatif Φ_{at} et donc de la présence ou non du photon. Celui-ci n'a pas été absorbé par l'atome, mais a seulement induit un déphasage dans la structure électronique de l'atome.

L'équipe de Serge Haroche a par la suite généralisé la mesure non destructive à un nombre de photons supérieur à un et a utilisé cette technique pour réaliser une expérience de chat de Schrödinger, ce qui a entre autres valu à Serge Haroche l'obtention du prix Nobel de physique en 2012. Dans le cadre de ce sujet, nous ne nous intéresserons toutefois qu'à certains aspects de l'expérience décrite sur la figure 1.

La partie I étudie quelques propriétés des atomes de Rubidium excités dans l'état de *Rydberg* (on parle alors d'*atomes de Rydberg*) ainsi que leur détection. La partie II s'intéresse aux propriétés de la cavité permettant de piéger un photon pendant une durée suffisante. La partie III étudie le couplage entre un atome de Rydberg et un photon de la cavité. Les trois parties sont indépendantes, même si le contexte reste celui de l'expérience de la figure 1.

Des données numériques, un formulaire et une annexe sont présents en fin de sujet.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Étude des atomes de Rydberg circulaires

Les atomes utilisés dans l'expérience sont des atomes de Rubidium dont l'électron situé sur la couche électronique la plus énergétique est excité dans un état de nombre quantique principal n très élevé. Des atomes ainsi excités sont appelés *atomes de Rydberg*. Si de plus le nombre quantique secondaire ℓ de l'électron excité est maximum, alors on parle d'*atomes de Rydberg circulaires*.

I.A – Préliminaires

Q 1. Donner la structure électronique du Rubidium ($Z = 37$) dans son état fondamental. Entourer le ou les électron(s) de valence. À quelle famille cet élément appartient-il ?

Considérons un atome polyélectronique contenant Z électrons. Le noyau sera considéré comme ponctuel et fixe en O . On s'intéresse à l'électron de la couche électronique la plus énergétique que l'on repère en coordonnées sphériques. L'énergie potentielle électrostatique de cet électron est de la forme

$$U(r) = -\frac{Z(r)q}{r}$$

où l'on a posé $q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide. La fonction $Z(r)$ est positive et vérifie $Z(r \rightarrow 0) = Z$ et $Z(r \rightarrow +\infty) = 1$.

Q 2. Justifier le signe de $U(r)$.

Q 3. Interpréter physiquement les valeurs limites de la fonction $Z(r)$ en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$.

Q 4. On cherche un ordre de grandeur de la taille typique a_0 de l'atome. On estime que a_0 est de la forme $a_0 = \hbar^\alpha q^\beta m_e^\gamma$ où m_e est la masse de l'électron. Établir soigneusement que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ et $\gamma = -1$. La grandeur a_0 est appelée rayon de l'atome de Bohr, calculer sa valeur numérique.

I.B – Atomes de Rydberg

L'électron le plus énergétique de l'atome précédent est excité dans un niveau de nombre quantique $n \gg 1$ (typiquement $n \simeq 50$), le reste de l'atome étant inchangé. On étudie par la suite le comportement de cet électron dont la masse est toujours notée m_e . L'atome est isolé de son environnement extérieur.

I.B.1) Étude classique

Q 5. Justifier que l'énergie potentielle de l'électron est alors : $U(r) = -\frac{q}{r}$.

Q 6. Démontrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}$ de cet électron est constant et en déduire que le mouvement de l'électron est plan. On introduit le repère sphérique (r, θ, φ) tel que $\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\vec{e}_z$ avec $\mathcal{L} > 0$. Le noyau est toujours à l'origine du repère. Montrer que le mouvement de l'électron est alors situé dans le plan Oxy et donner l'expression de la constante $\mathcal{L}$ en fonction de m_e , r et $\dot{\varphi}$.

Q 7. Que peut-on dire de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron ? Montrer que l'on peut mettre cette énergie mécanique sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

où l'on exprimera $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ en fonction de q , r , m_e et $\mathcal{L}$.

Q 8. Justifier que, pour une trajectoire circulaire, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est minimale. En déduire la valeur du rayon r_C de l'électron lorsqu'il est sur une trajectoire circulaire. On exprimera r_C en fonction de $\mathcal{L}$, m_e et q , puis on vérifiera que $r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2}a_0$.

I.B.2) Étude quantique

En physique quantique, l'état de l'électron excité dans le niveau n est décrit par la fonction d'onde $\Psi(M, t)$. Celle-ci vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \Psi - \frac{q}{r} \Psi$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

On cherche $\Psi(M, t)$ sous la forme d'un état stationnaire : $\Psi(M, t) = \Phi(M)\chi(t)$.

Q 9. Justifier que $\chi(t)$ est de la forme $\chi(t) = A \exp\left(-i \frac{\mathcal{E}t}{\hbar}\right)$ avec A et $\mathcal{E}$ deux constantes.

Q 10. Justifier sans calcul le signe de $\mathcal{E}$ pour l'électron étudié.

On met $\Phi(M)$ sous la forme $\Phi(M) = \frac{1}{r} u(r) Y(\theta, \varphi)$ et on admet que $u(r)$ vérifie l'équation

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}\right) u(r) = \mathcal{E} u(r) \quad (\text{I.1})$$

où ℓ est le nombre quantique secondaire.

Q 11. Rappeler les valeurs permises pour le nombre quantique ℓ .

Q 12. En utilisant notamment la question 7 et en procédant par identification, justifier qu'en physique quantique les valeurs possibles de $\mathcal{L}^2$ sont $\ell(\ell+1)\hbar^2$. Quelle est en particulier la valeur maximale que $\mathcal{L}^2$ peut prendre pour l'électron étudié ?

Q 13. Que vaut alors le rayon r_C de la trajectoire circulaire obtenue en question 8 ? On donnera le résultat en fonction de a_0 et de n pour un atome de Rydberg.

Q 14. On cherche à adimensionner l'équation (I.1). Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{d^2}{d^2\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon\right) u(\rho) = 0 \quad (\text{I.2})$$

en posant $\rho = r/a_0$ et $\epsilon = -\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$, avec $\mathcal{E}_0$ une constante que l'on exprimera en fonction de a_0 et de q . Quelle est la valeur numérique de $\mathcal{E}_0$ en électron-volts ?

I.C – Atomes de Rydberg circulaires

L'électron le plus énergétique est maintenant placé dans un état de nombre quantique principal $n \gg 1$ et de nombre quantique secondaire ℓ maximum. Sa fonction d'onde spatiale est

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = A(n) \left(-\frac{r}{a_0} \sin \theta e^{i\varphi}\right)^{n-1} \exp\left(\frac{-r}{na_0}\right) \quad (\text{I.3})$$

avec $A(n)$ une constante réelle positive de normalisation.

Q 15. Exprimer la probabilité dP de trouver l'électron entre r et $r + dr$, quels que soient θ et φ . On ne cherchera pas à calculer les éventuelles intégrales.

Q 16. Montrer que la densité de probabilité $\frac{dP}{dr}$ est maximale pour le rayon $r_{\max} = n^2 a_0$. Commenter ce résultat.

Q 17. Faire l'application numérique pour $n = 50$. Pourquoi qualifie-t-on les atomes de Rydberg circulaires d'atomes géants ?

L'expression de la fonction d'onde (non demandée) permettrait en outre de montrer que la probabilité de présence est maximale dans la direction $\theta = \pi/2$. On admet également que la dispersion relative de r et la dispersion de θ sont de l'ordre de $\frac{\Delta r}{r} \simeq \Delta \theta \simeq \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Q 18. Pourquoi peut-on dire que le comportement de l'électron excité de l'atome de Rydberg circulaire est « classique » ?

Q 19. Donner, à partir de la forme de la fonction d'onde (I.3), l'expression de $u(\rho)$ pour l'électron le plus énergétique dans un atome de Rydberg circulaire, à un facteur multiplicatif constant près. En déduire l'expression de ϵ puis de $\mathcal{E}$ pour l'électron dans un tel état. Commenter ce résultat.

Q 20. Calculer la fréquence ν_{at} du photon correspondant à la transition entre les états $\mathcal{E}_{n=50}$ et $\mathcal{E}_{n=51}$. Dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situe-t-il ?

I.D – Détection des atomes de Rydberg circulaires

On se reportera aux différents documents de l'annexe pour traiter cette sous-partie qui est indépendante des résultats précédents.

Q 21. Considérons tout d'abord un atome d'hydrogène dans son état fondamental. L'électron est à une distance moyenne du noyau de l'ordre de 10^{-10} m. Donner l'ordre de grandeur de la norme du champ électrique créé par le proton au niveau de l'électron. Justifier pourquoi on peut, en ordre de grandeur, assimiler la valeur de ce champ électrique à celle du champ d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

Q 22. On assimile l'état de Rydberg circulaire n à un atome d'hydrogène dont l'électron est excité dans le niveau $n \gg 1$. On s'intéresse aux trois états de Rydberg circulaires $n = 50$, $n = 51$ et $n = 52$. Une approche théorique non détaillée ici permet de calculer les champs d'ionisation des trois états précédents. Ces champs sont dans le désordre, en unités du système international, $1,48 \times 10^4$, $1,36 \times 10^4$ et $1,60 \times 10^4$. Attribuer à chaque n son champ d'ionisation en justifiant succinctement.

Q 23. Classer les potentiels V_a , V_b , V_c , V_d , V_e et V_f des différentes électrodes de la figure 11 dans l'ordre croissant en justifiant.

Q 24. Estimer la vitesse des atomes de Rydberg dans la zone d'ionisation à l'aide du protocole 1.

Q 25. Dans le protocole 2, la variation de $V_a(t)$ suit une loi affine : $V_a(t) = V_b + K(t - t_0)$ avec $V_b = 32$ V le potentiel de l'électrode b , t_0 l'instant initial de déclenchement de la variation de $V_a(t)$ et K une constante. Déterminer l'instant de déclenchement t_0 de la rampe et sa pente K permettant d'observer les deux signaux d'ionisations sélectives de la figure 13 de l'annexe.

Q 26. Quel problème pourrait-on rencontrer si l'on choisissait une variation de $V_a(t)$ plus rapide ? Et plus lente ?

Q 27. Quelle valeur faut-il prendre pour t_l , défini dans le paragraphe « Principe de la détection » à la fin de l'annexe ? Quelle(s) cause(s) expérimentale(s) pourraient fausser l'attribution de l'électron détecté au bon état de Rydberg ?

II Étude de la cavité micro-ondes

La cavité micro-ondes est constituée de deux miroirs métalliques en vis-à-vis entre lesquels un photon de longueur d'onde λ_0 est piégé. Dans un premier temps (sous-partie II.A) nous allons nous intéresser aux propriétés d'une cavité composée de miroirs métalliques plans avant d'aborder le cas des miroirs sphériques (sous-partie II.B).

II.A – Miroirs plans

Considérons une cavité constituée de deux miroirs plans métalliques (figure 2) séparés par le vide d'une distance $d = 26,6$ mm. Le coefficient de réflexion r_M en amplitude pour le champ électrique est identique pour les deux miroirs. r_M est un *réel négatif* à la longueur d'onde λ_0 considérée : $-1 < r_M < 0$ et $1 - |r_M| \ll 1$.

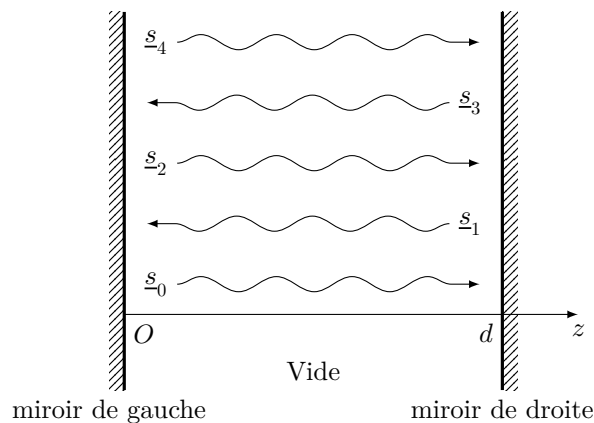


Figure 2 Cavité plane

On se place dans l'approximation scalaire. L'intensité est définie comme $I = \underline{s} \underline{s}^*$ où $\underline{s}$ est l'amplitude complexe de la vibration. Une onde $\underline{s}_0(z, t) = S_0 \exp(i(\omega t - kz))$ se propage dans la cavité (S_0 est un réel positif). Elle subit des réflexions multiples dans la cavité. On note $\underline{s}_1(z, t)$ l'onde réfléchie sur le miroir de droite, $\underline{s}_2(z, t)$ l'onde réfléchie sur le miroir de gauche et de manière générale $\underline{s}_n(z, t)$ l'onde ayant subi n réflexions.

Q 28. On se place en un point d'abscisse z à l'intérieur de la cavité. Exprimer $\underline{s}_1(z, t)$ en fonction de $\underline{s}_0(z, t)$.

Q 29. Exprimer $\underline{s}_2(z, t)$ en fonction de $\underline{s}_0(z, t)$ ainsi que $\underline{s}_3(z, t)$ en fonction de $\underline{s}_1(z, t)$. On fera intervenir la grandeur $\Phi = 4\pi d/\lambda_0$.

Q 30. Simplifier alors l'expression de la somme cohérente des amplitudes complexes des ondes se propageant dans le sens des z croissants : $\underline{s}_+(z, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underline{s}_{2p}(z, t)$. De même pour la somme cohérente des amplitudes

complexes des ondes se propageant dans le sens des z décroissants : $\underline{s}_-(z, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underline{s}_{2p+1}(z, t)$.

On admet que l'intensité maximale $I_{\max}$ de l'onde totale $\underline{s}_+(z, t) + \underline{s}_-(z, t)$ au niveau d'un de ses ventres dépend de Φ selon l'expression

$$I_{\max} = \frac{I_M}{1 + M \sin^2(\Phi/2)} \quad (\text{II.1})$$

avec I_M une constante et $M = \frac{4R}{(1-R)^2}$, où $R = r_M^2$. La dépendance en Φ de $I_{\max}$ est tracée en figure 3.

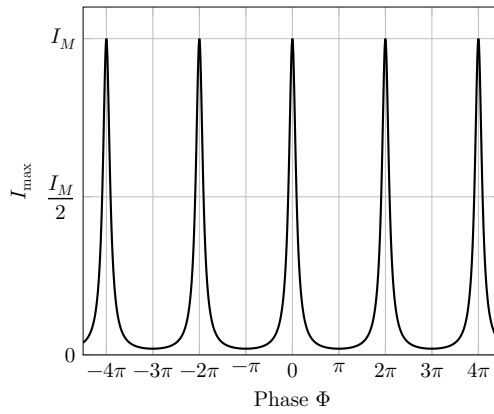


Figure 3 Tracé de $I_{\max}$ en fonction de Φ

Q 31. Pour quelles fréquences ν_{cav} cette intensité est-elle maximale ?

Q 32. On s'intéresse à la largeur à mi-hauteur $\delta\Phi$ des pics de $I_{\max}$ définie par $I_{\max}(\delta\Phi/2) = I_M/2$. Dans l'hypothèse où $1 - R \ll 1$, donner l'expression de $\delta\Phi$ en fonction de M . En déduire la largeur en fréquence $\delta\nu$ des pics de résonance de la cavité.

Q 33. Associer à cette largeur de fréquence une durée typique τ de l'onde dans la cavité en fonction de c , d et R , toujours dans l'hypothèse où $1 - R \ll 1$.

Nous cherchons maintenant à retrouver l'ordre de grandeur de cette durée τ en adoptant un point de vue corpusculaire. À chaque réflexion, la probabilité que le photon franchisse le miroir et sorte de la cavité est $T = 1 - R$.

Q 34. Déterminer la durée de vie moyenne du photon dans la cavité en fonction de c , d et R .

Q 35. Que doit valoir $1 - R$ pour avoir une durée de vie du photon de 100 ms ? Commenter.

Q 36. On recouvre en pratique les miroirs d'un supraconducteur de résistance électrique nulle. Pourquoi ?

II.B – Miroirs sphériques

Les miroirs ont en réalité une dimension finie. Considérons la situation où l'on aurait des disques plans de rayon $a = 25$ mm. Comme indiqué en figure 4, l'onde électromagnétique parvenant sur un miroir (ici le miroir de droite) est ainsi diffractée. Une partie de l'onde diffractée n'est pas captée par le miroir en vis-à-vis (ici le miroir de gauche).

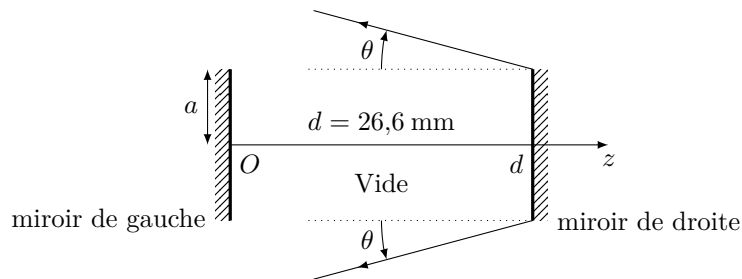


Figure 4 Diffraction sur l'un des deux miroirs (ici le miroir de droite)

Q 37. Estimer la durée τ_{diff} au bout de laquelle l'intensité restant dans la cavité est divisée d'un facteur 1000 par rapport à l'intensité initiale pour un photon de fréquence 51,1 GHz. Commenter ce résultat.

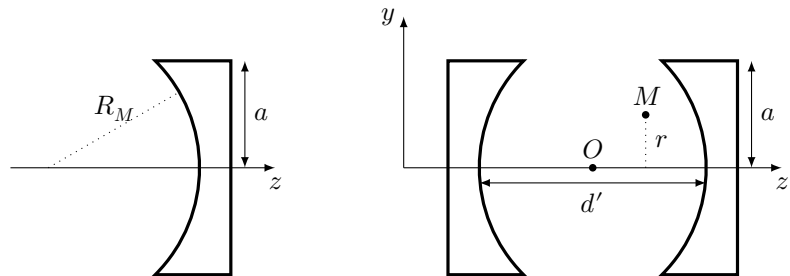


Figure 5 Photographie des miroirs sphériques, Schéma d'un miroir sphérique, Schéma de la cavité

Afin de palier le problème lié à la diffraction, on prend des miroirs en forme de portion de sphère de rayon de courbure $R_M = 40$ mm. Le rayon des miroirs est toujours $a = 25$ mm, mais la distance entre les deux est désormais $d' = 27,6$ mm. La cavité est présentée en figure 5. On se place dorénavant en coordonnées cylindriques avec l'origine du repère au centre de la cavité et l'axe (Oz) selon son axe de révolution. L'intérieur de la cavité est dans le vide. On admet que la diffraction est ainsi limitée et on s'intéresse à l'étude de l'onde électromagnétique dans cette cavité.

Pour une longueur d'onde λ_0 , l'onde stationnaire pouvant exister dans la cavité est de la forme

$$\underline{s}(M, t) = s_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_0} - \arctan\left(\frac{\lambda_0 z}{\pi w_0^2}\right) + \frac{\pi r^2}{\lambda_0 R_g(z)} + \varphi\right)}_{\Phi(r, z)} \exp(i\omega t) \quad (\text{II.2})$$

où $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0 z}{\pi w_0^2}\right)^2}$ est le rayon typique du faisceau au niveau de l'abscisse z dans le plan perpendiculaire à (Oz), w_0 est une constante appelée *col du faisceau* (*waist* en anglais), $R_g(z)$ est le rayon de courbure des surfaces d'onde : $R_g(z) = z + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda_0}\right)^2$ et φ est une phase constante. On admet que $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi} \sqrt{\frac{d'}{2} \left(R_M - \frac{d'}{2}\right)}}$.

Q 38. Calculer w_0 pour une fréquence de 51,1 GHz.

Q 39. Au niveau de l'axe (Oz) ($r = 0$), on souhaite que la structure d'onde stationnaire présente un nœud au niveau de chaque miroir et p ventres avec en particulier un ventre au niveau de O . En déduire, en fonction de p , la variation en valeur absolue de $\Phi(r = 0, z)$ entre $z = 0$ et $z = d'/2$. Que vaut p pour une fréquence de l'onde de 51,1 GHz ?

Q 40. En faisant l'analogie avec la corde de Melde, estimer l'ordre de grandeur de la taille d'un fuseau. Faire l'application numérique et commenter sachant que le jet atomique traverse la cavité en son centre et a un diamètre de 0,7 mm.

III Couplage entre un atome de Rydberg et la cavité

Les deux parties précédentes ont permis de mettre en évidence qu'un atome de Rydberg et une cavité sont deux systèmes dans lesquels il est possible de stocker de l'énergie : une énergie $h\nu_{\text{at}} = \hbar\omega_{\text{at}}$ pour l'atome (entre les deux niveaux d'énergie $n = 50$ et $n = 51$ que l'on supposera isolés des niveaux inférieurs) et une énergie $h\nu_{\text{cav}} = \hbar\omega_{\text{cav}}$ pour un photon piégé dans la cavité. Nous allons maintenant voir comment ces deux systèmes peuvent interagir, échanger éventuellement de l'énergie et comment on peut utiliser cette interaction pour détecter la présence d'un photon dans la cavité sans le détruire.

Le traitement de ces interactions est quantique, mais il est possible de faire des analogies avec des systèmes classiques usuels.

III.A – Représentation électrocinétique du couplage atome-photon

On admet que le couplage entre l'atome et un photon de la cavité peut être assimilé à la présence d'une inductance mutuelle M entre deux circuits LC (figure 6). Le circuit de gauche représente la cavité tandis que le circuit de droite est analogue à l'atome. On note ω_{cav} et ω_{at} les pulsations propres de chacun des deux circuits en l'absence de couplage.

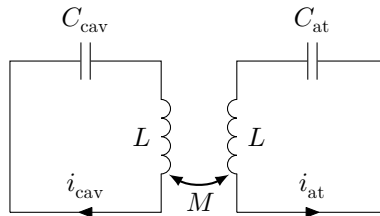


Figure 6 Circuit équivalent au système {photon + atome}

Q 41. Déterminer les expressions de ω_{at} et ω_{cav} en fonction de L , C_{at} et C_{cav} .

Q 42. Les deux circuits sont considérés sans résistance. Quels phénomènes physiques sont ainsi négligés au niveau de l'atome et au niveau de la cavité ?

On pose $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_{\text{cav}}$ le désaccord entre les deux pulsations. On considèrera dans toute la suite que $|\delta| \ll \omega_{\text{cav}}$ ($|\delta| \ll \omega_{\text{at}}$). Par ailleurs, on note : $\omega_0 = \frac{\omega_{\text{cav}} + \omega_{\text{at}}}{2}$.

Q 43. Montrer que les deux intensités i_{cav} et i_{at} vérifient le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 i_{\text{cav}}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{d^2 i_{\text{at}}}{dt^2} + (\omega_0^2 - \varepsilon) i_{\text{cav}} &= 0 \\ \frac{d^2 i_{\text{at}}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{d^2 i_{\text{cav}}}{dt^2} + (\omega_0^2 + \varepsilon) i_{\text{at}} &= 0\end{aligned}\quad (\text{III.1})$$

où l'on exprimera Ω et ε en fonction de ω_0 , δ , M et L .

On cherche la possibilité pour que l'ensemble du circuit oscille à la même pulsation ω (on parle de mode propre). On cherche ainsi i_{cav} et i_{at} sous la forme complexe $i_{\text{cav}}(t) = \underline{I}_{\text{c0}} \exp(i\omega t)$ et $i_{\text{at}}(t) = \underline{I}_{\text{a0}} \exp(i\omega t)$.

Q 44. Déterminer l'équation vérifiée par ω , équation que l'on écrira sous la forme d'un polynôme en ω qui s'annule, mais que l'on ne cherchera pas à résoudre.

On admet que ω peut prendre deux valeurs dans le cas où $\delta \gg \Omega$, situation dans laquelle on se place désormais :

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\Omega^2}{4\delta} \right). \quad (\text{III.2})$$

III.B – Couplage atome-photon de la cavité

Revenons à l'expérience d'électrodynamique quantique. On considère maintenant le système {atome + cavité}. En l'absence de couplage entre l'atome et la cavité, les niveaux d'énergie de ce système sont représentés en figure 7.

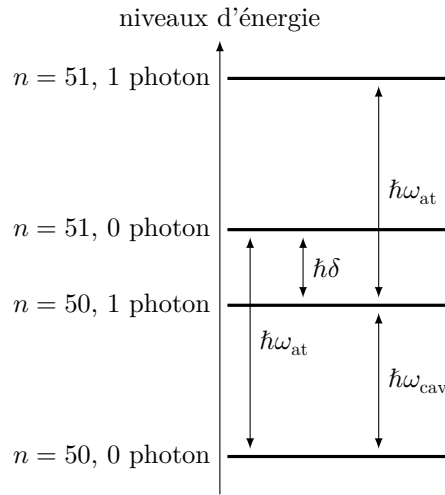


Figure 7 Niveaux d'énergie du système {atome + cavité} en l'absence de couplage

En présence de couplage entre l'atome et la cavité, le niveau { $n = 50 + 0$ photon dans la cavité} garde la même énergie. Il est pris comme niveau de référence des énergies.

En présence de couplage, l'état {atome $n = 50 + 1$ photon dans la cavité} a une énergie $\hbar\omega_-$ tandis que l'état {atome $n = 51 +$ aucun photon dans la cavité} a une énergie $\hbar\omega_+$. L'état {atome $n = 51 + 1$ photon dans la cavité} voit quant à lui son énergie augmentée de $+\hbar\Omega^2/(2\delta)$.

Q 45. Reproduire la figure 7 sur votre copie et dessiner en pointillés la position des quatre états considérés en présence de couplage.

Q 46. En l'absence de couplage entre la cavité et l'atome, la différence d'énergie entre les niveaux $n = 50$ et $n = 51$ est $\hbar\omega_{\text{at}}$. Que vaut la différence d'énergie $\hbar\omega'_{\text{at}}$ entre les niveaux $n = 50$ et $n = 51$ en présence d'un couplage cavité-atome dans le cas où la cavité ne contient pas de photon ? En déduire la variation de la pulsation $\Delta\omega_{\text{at}}^{(0\text{ph})} = \omega'_{\text{at}} - \omega_{\text{at}}$ de l'atome correspondante.

Q 47. Déterminer de même l'expression de $\Delta\omega_{\text{at}}^{(1\text{ph})}$ dans le cas où la cavité contient 1 photon.

Afin de détecter la présence ou non d'un photon dans la cavité, on crée un atome de Rydberg initialement dans l'état $n = 50$, comme indiqué en introduction de ce sujet et illustré dans la figure 1. Une impulsion micro-onde place l'atome dans une superposition des états $n = 50$ et $n = 51$. Les deux états quantiques acquièrent un déphasage $\Phi_{\text{at}} = \Delta\omega_{\text{at}} t_{\text{cav}}$ où t_{cav} est la durée d'interaction entre l'atome et la cavité. Comme nous venons de le voir, ce déphasage dépend de la présence ou non d'un photon dans la cavité. Une deuxième impulsion micro-onde en sortie de cavité fait interférer ces deux états quantiques. On règle les impulsions micro-ondes de manière à ce que l'atome se retrouve dans l'état $n = 50$ en l'absence de photon dans la cavité et dans l'état $n = 51$ en présence d'un photon dans la cavité. On détecte alors l'état de l'atome à l'aide du dispositif étudié en sous-partie I.D. L'état de l'atome renseigne sur la présence d'un photon dans la cavité sans pour autant avoir détruit celui-ci.

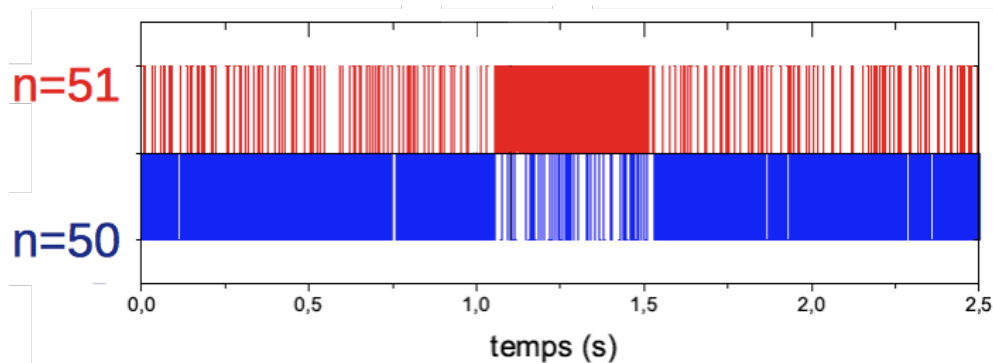


Figure 8 Mesure non destructive de la présence d'un photon dans la cavité, adapté de « Mesure quantique non destructive répétée de la lumière : états de Fock et trajectoires quantiques » - Christine Guerlin - Thèse de doctorat de l'Université Paris VI (14 décembre 2007)

Il est alors possible d'envoyer plusieurs atomes à la suite comme indiqué sur la figure 8 : une détection dans $n = 50$ est représentée par un trait bleu vers le bas, une détection dans $n = 51$ par un trait rouge vers le haut. Dans cette mesure, un photon (d'origine thermique) est apparu dans la cavité à 1,1 ms et a disparu à 1,5 ms. Il a ainsi été capturé pendant 0,4 ms. Pendant cette durée, il a parcouru une distance de $1,2 \times 10^5$ km, soit l'équivalent de 4 fois la circonférence de la Terre !

Données et formulaire

Masse de l'électron

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Constante de Planck

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$$

Célérité de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

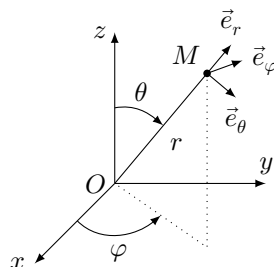


Figure 9 Base sphérique

Volume infinitésimal en coordonnées sphériques

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Opérateur gradient en coordonnées sphériques

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Opérateur laplacien d'un scalaire en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

La plupart des documents et les textes entre guillemets de cette annexe sont issus de la thèse de doctorat de l'université Paris VI d'Alexia Auffèves, soutenue le 29 juin 2004 « Oscillation de Rabi à la frontière classique-quantique et génération de chats de Schrödinger ». Certaines figures et données expérimentales ont été adaptées pour les besoins de l'épreuve.

Le phénomène d'ionisation

« L'ionisation d'un atome désigne l'émission vers le continuum d'un électron initialement dans un état lié. Elle peut advenir par interaction de l'atome avec une onde lumineuse (photo-ionisation) ou, comme dans notre cas, avec un champ électrique quasi statique. »

Prenons une assemblée de N atomes identiques que l'on place dans un champ électrique extérieur E que l'on augmente linéairement au cours du temps. L'augmentation est lente si bien que le champ peut être considéré comme quasi statique. On relève le nombre d'atomes ionisés par unité de temps dN/dt . La dépendance en E de dN/dt est représentée sur la figure 10.

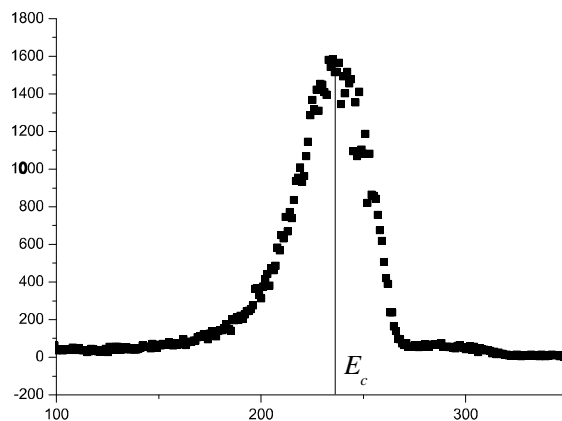


Figure 10 Variation de dN/dt en fonction de E (unité arbitraire)

Le *champ critique*, ou *champ d'ionisation*, E_c , est la valeur du champ électrique pour laquelle le signal d'ionisation est le plus élevé.

Présentation du détecteur

On cherche à déterminer si l'atome de Rydberg étudié est dans l'état $n = 50$ ou $n = 51$.

Un des deux détecteurs utilisés dans l'expérience est présenté en figure 11. Les atomes de Rydberg pénètrent dans la zone d'ionisation, entre les électrodes parallélépipédiques a et b . L'électron arraché à l'atome traverse alors l'électrode b qui est percée d'un diaphragme de 6 mm de diamètre. Il entre dans la zone de focalisation, constituée d'une succession d'électrodes (électrodes c à e), avant de parvenir au multiplicateur d'électrons (ME) situé juste derrière l'électrode f . Le multiplicateur d'électrons permet, à partir d'un électron incident, d'obtenir un courant électrique mesurable. On peut ainsi relever l'instant où l'électron parvient au multiplicateur d'électrons. On négligera la durée mise par l'électron pour franchir la zone de focalisation.

La zone d'ionisation (figure 11) pourra être assimilée à un condensateur plan (l'effet du trou dans l'électrode b sur le champ électrostatique sera négligé, de même que l'influence de la zone de focalisation). L'électrode b est portée à un potentiel $V_b = 32$ V fixe. L'électrode a est portée à un potentiel $V_a(t)$ ajustable.

Tout électron arraché à un atome se trouvant devant le diaphragme parvient au multiplicateur d'électrons.

Réglage du détecteur

On prend comme origine des temps l'instant où l'atome est excité dans l'état de Rydberg circulaire, au niveau de la boîte B de la figure 1.

Protocole 1

« On prépare un atome de vitesse fixée et on commence par repérer à quel instant précis t_c l'atome ainsi préparé est au centre du diaphragme. Pour cela on applique [à $V_a(t)$] une rampe d'ionisation très raide qui permet d'ioniser instantanément tous les niveaux dans lesquels pourrait se trouver l'atome. Lorsqu'on balaye le déclenchement de cette rampe dans le temps, on obtient un électron si l'atome se trouve dans le diaphragme et rien sinon. » Pour chaque instant t de déclenchement de la rampe, on réitère l'expérience avec le même nombre N d'atomes. On relève pour chaque instant t le nombre d'atomes N_e ionisés. Le résultat est présenté en figure 12.

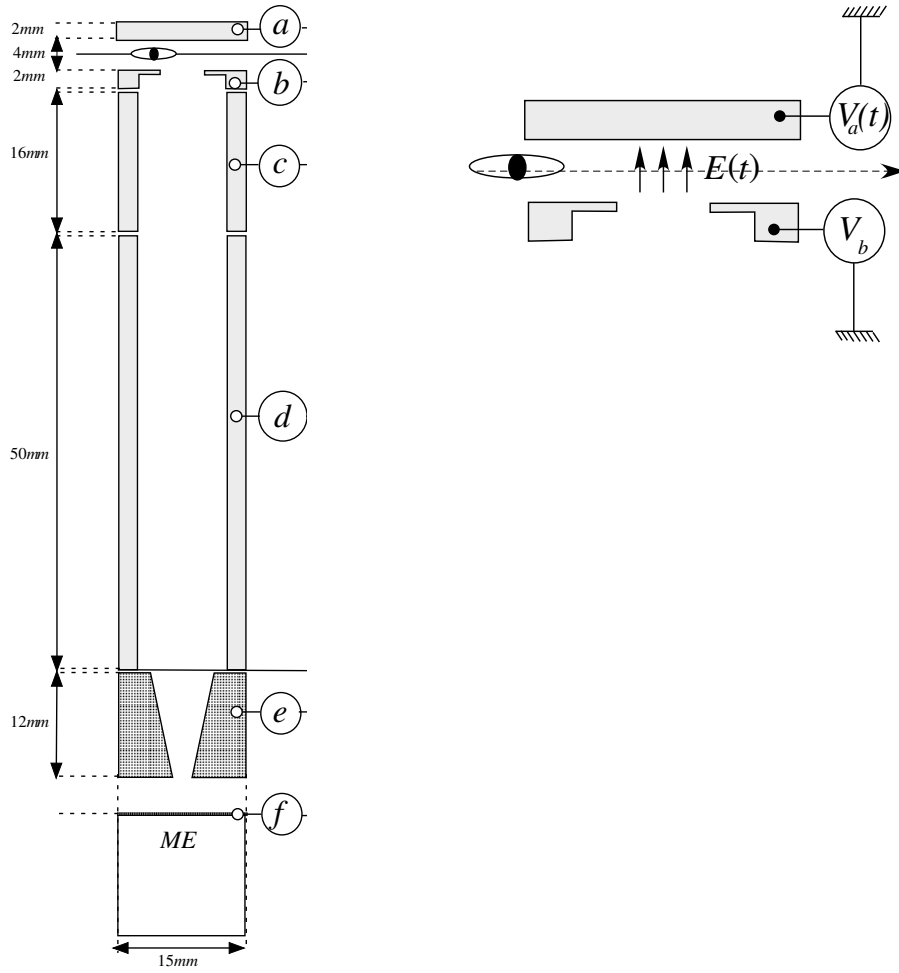


Figure 11 Présentation générale du détecteur et zoom sur la zone d'ionisation

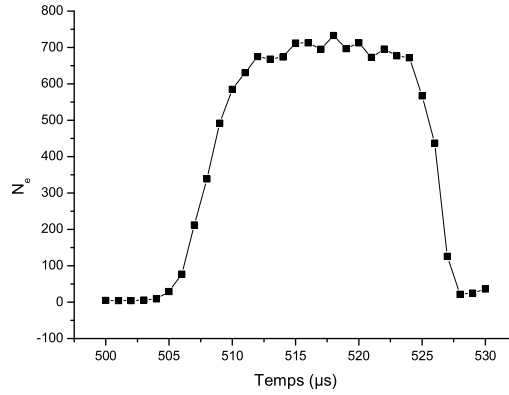


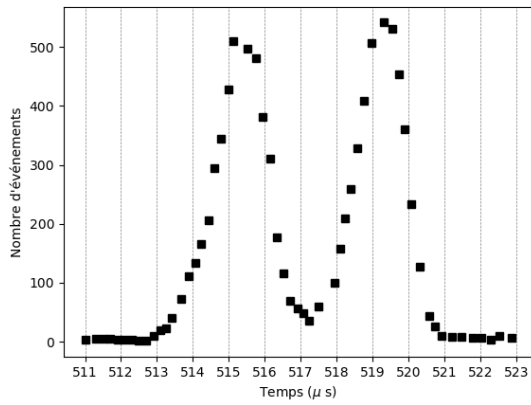
Figure 12 Pointé du centre du diaphragme de la zone d'ionisation

Protocole 2

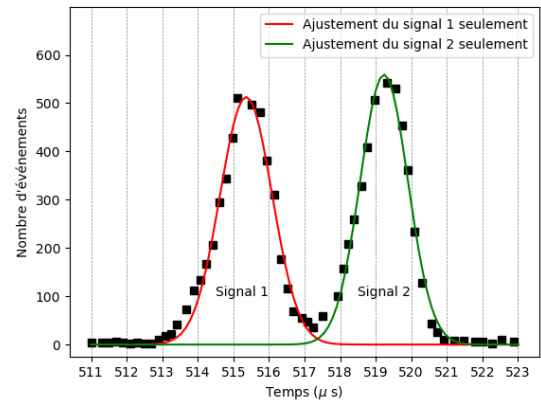
Une fois t_c connu on peut faire varier $V_a(t)$ de manière affine et plus lente que dans le protocole 1, en partant de la valeur V_b . La variation est choisie de manière à ce que les champs d'ionisation $E_{c,50}$ et $E_{c,51}$ des états de Rydberg circulaires $n = 50$ et $n = 51$ soient balayés pendant que l'atome se trouve dans la zone devant le diaphragme. On réitère l'expérience pour un grand nombre d'atomes de même vitesse, la moitié étant préparés dans l'état $n = 50$, l'autre moitié dans l'état $n = 51$. On relève pour chaque instant t le nombre d'atomes N_e ionisés. Le résultat de l'expérience est donné en figure 13.

La rampe est choisie de manière à ce que l'ionisation soit sélective : chaque courbe en cloche correspond à un état de Rydberg ($n = 50$ ou 51) défini.

On ajuste les deux signaux 1 et 2 par une fonction gaussienne de la forme $N_e = a_i \exp\left(-\frac{(t - b_i)^2}{c_i^2}\right)$ avec $i = 1$ ou 2 (figure 13). Les ajustements donnent : $a_1 = 512,8$; $b_1 = 515,4 \mu s$; $c_1 = 1,0 \mu s$; $a_2 = 559,1$; $b_2 = 519,2 \mu s$; $c_2 = 0,9 \mu s$.



Nombre d'ionisations N_e pour chaque instant t où la rampe est appliquée



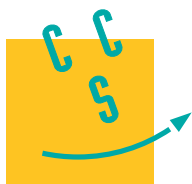
Ajustement des deux signaux par une fonction gaussienne

Figure 13

Principe de la détection

À l'aide de l'étalonnage effectué dans le protocole 2, on se fixe un instant t_l qui délimite la frontière entre les 2 états de Rydberg : un électron qui parviendra au multiplicateur d'électrons avant t_l sera attribué à l'un des deux états de Rydberg, un électron qui parviendra au multiplicateur d'électrons après t_l sera attribué à l'autre état de Rydberg.

• • • FIN • • •



Les deux parties de ce sujet sont indépendantes. Certaines valeurs numériques sont regroupées en fin d'énoncé. Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées. Le barème prend en compte le temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



Figure 1 Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

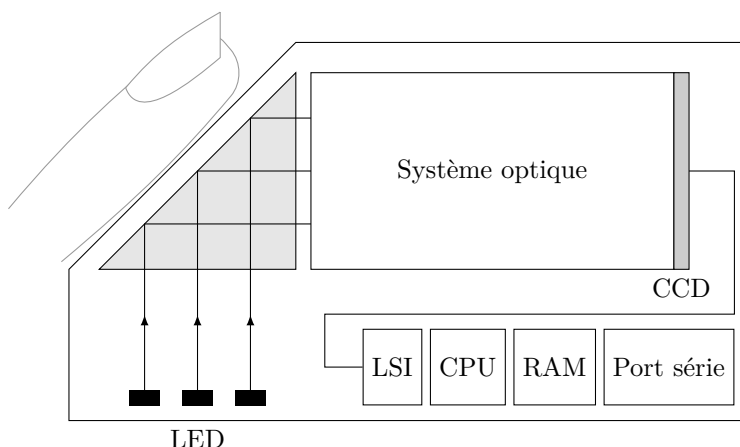


Figure 2 Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre ($\mathcal{D}$) et d'une lentille convergente ($\mathcal{L}$) (figure 3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre ($\mathcal{D}$) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille ($\mathcal{L}$) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A'_1.$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A'_1}, \quad D = \overline{A A'_1}, \quad p = \overline{O A_1}, \quad p' = \overline{O A'_1}.$$

Les sous-parties I.A.1 et I.A.2 sont indépendantes du reste du problème. La sous-partie I.A.3 introduit la suite. Les sous-parties I.B et I.C sont liées par une analogie qu'on souhaite établir entre deux situations, l'une se présentant en physique quantique et l'autre en optique ondulatoire. Néanmoins, en dehors des questions développant l'analogie, les sous-parties sont conçues de manière relativement autonomes.

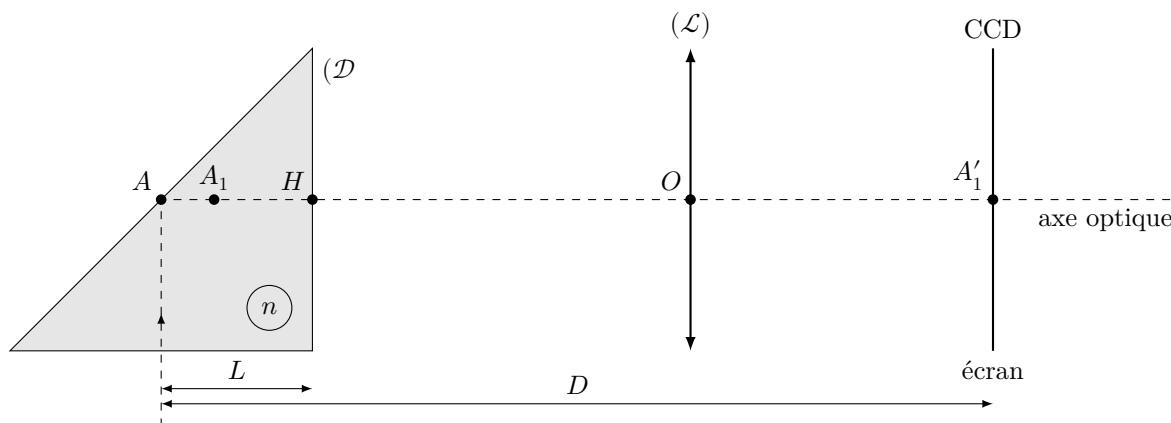


Figure 3 Schéma optique

I.A – Optique géométrique

I.A.1) Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . À cet effet, on donne $n = 1,5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = p'/p$ du système optique.

Q 1. Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit $\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}$.

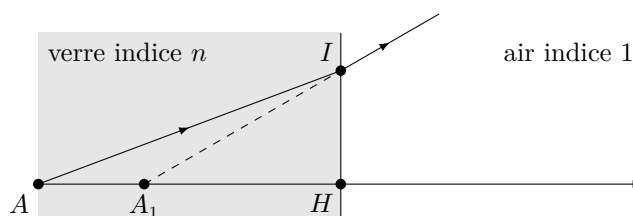


Figure 4

Q 2. Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ . Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.

Q 3. On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport D_1/f' est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par f' .

Q 4. *Applications numériques.* On suppose $\gamma = -2$. À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?

Q 5. On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ($|\gamma|$ maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1 . Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

I.A.2) Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en A_1 au lieu de A .

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 30$ μm et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100$ μm . On note l_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1 , à l'écran CCD (figure 5).

Sur la figure 6, les points M_1 , M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M'_1 , M'_2 et M'_3 détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M'_2 ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ .

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$ avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3 . On note alors $\gamma = p'/p$ le grandissement entre les couples de points conjugués (M_1, M'_1) et (M_3, M'_3) . On a $\gamma = -2$.

Q 6. À quelle condition sur a et sur l_c peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommandez-vous ?

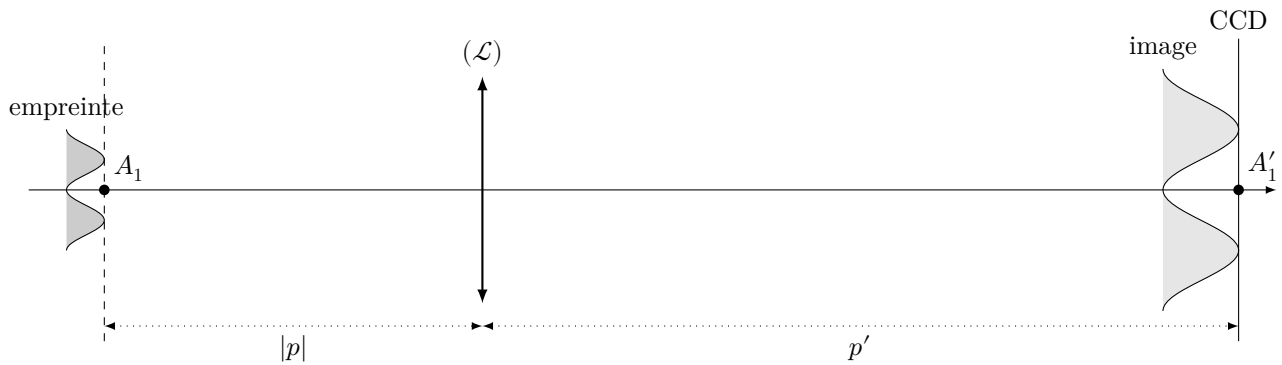


Figure 5

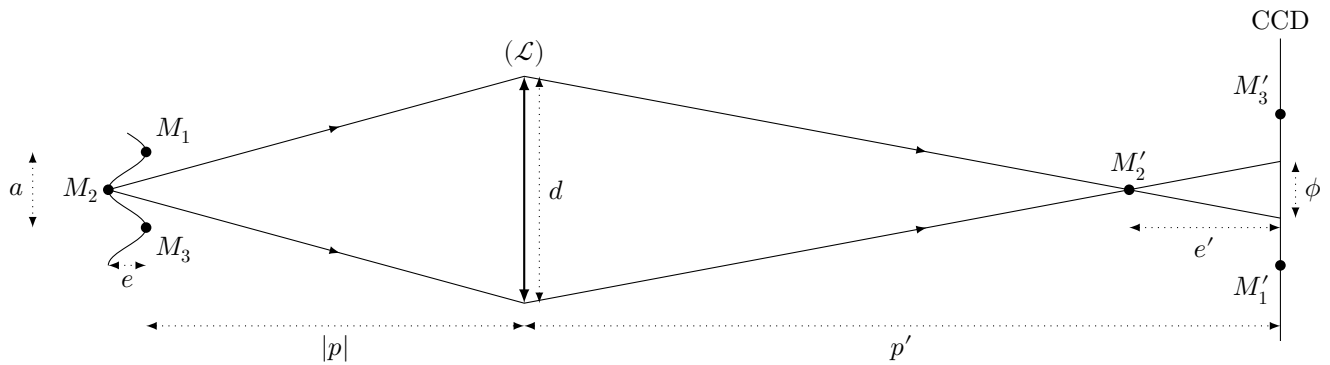


Figure 6 Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

Q 7. On note d le diamètre de la monture de la lentille $(\mathcal{L})$. Montrer que $\phi = \gamma d \frac{e}{p}$, dans l'approximation $e \ll |p|$.

En notant e' la distance de M_2' à la surface du capteur CCD, on pourra montrer $e' \approx \gamma^2 e$.

Q 8. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tache excède la distance $M_1' M_3'$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

I.A.3) Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

Q 9. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

Q 10. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

Q 11. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1,5$.

Dans le montage proposé, la lentille permettra d'obtenir l'image du doigt sur l'écran du CCD. Néanmoins, il faut aborder l'optique ondulatoire pour comprendre comment le doigt est éclairé au travers du prisme.

I.B – Passage d'une onde électromagnétique sur un dioptré

I.B.1) Relation de dispersion

Q 12. Rappeler les équations de Maxwell dans une région vide de courant et de charge. En déduire l'équation de propagation d'une onde électromagnétique, sa relation de dispersion, sa vitesse de phase. Le vide est-il dispersif ?

Q 13. On admet que dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et parfaitement transparent, tout se passe comme si l'on remplaçait dans la relation de dispersion précédente la permittivité du vide ϵ_0 par la grandeur $n^2 \epsilon_0$, appelée permittivité du milieu, où n est l'indice optique du milieu (n est un réel supérieur à 1). On rappelle que la valeur de l'indice optique d'un matériau varie avec la longueur d'onde λ_0 dans le vide. En déduire la nouvelle relation de dispersion et l'expression de la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ?

I.B.2) Coefficients de réflexion et de transmission

On considère une onde électromagnétique monochromatique incidente polarisée rectilignement selon la direction $\vec{e}_y$ et se propageant dans la direction donnée par son vecteur d'onde $\vec{k}_i = k_{ix} \vec{e}_x + k_{iz} \vec{e}_z$. On note $i_1 = (\vec{e}_z, \vec{k}_i)$ l'angle d'incidence de cette onde sur le dioptré plan d'équation $z = 0$. Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \vec{e}_y \exp(-j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})) \quad \text{où} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

On note $k_0 = \omega/c$, le module de son vecteur d'onde dans le vide. Au passage du dioptré, cette onde donne naissance :

— à une onde réfléchie $\vec{E}_r = \underline{r} E_0 \vec{e}_y \exp(-j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}))$,

— à une onde transmise (onde réfractée) $\vec{E}_t = \underline{t} E_0 \vec{e}_y \exp(-j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}))$,

où $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont des nombres complexes appelés coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

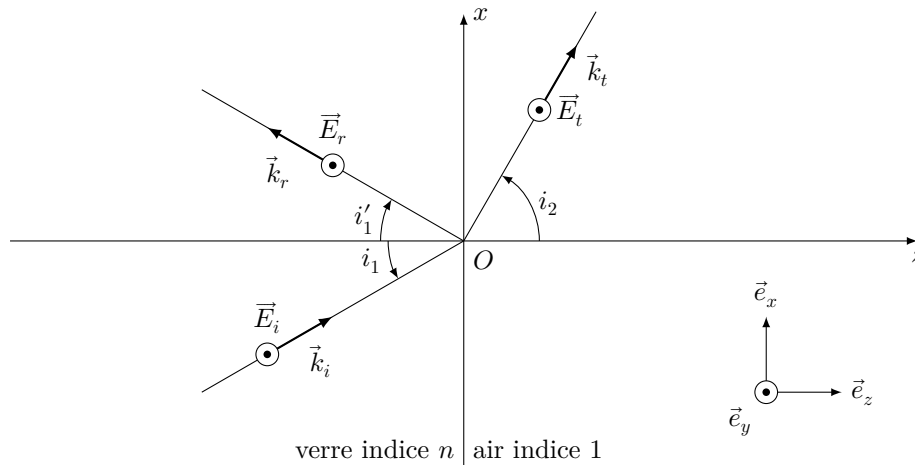


Figure 7 Réflexion et réfraction d'une onde électromagnétique sur un dioptré

De même, on note $\vec{k}_r = k_{rx} \vec{e}_x - k_{rz} \vec{e}_z$ et $\vec{k}_t = k_{tx} \vec{e}_x + k_{tz} \vec{e}_z$.

Enfin, on admet que les champs électriques et magnétiques sont continus à la traversée de ce dioptré.

Q 14. Montrer que, en tout point du dioptré,

$$\exp(jk_{ix}x) + \underline{r} \exp(jk_{rx}x) = \underline{t} \exp(jk_{tx}x) \quad (\text{I.1})$$

Q 15. En déduire une relation notée (I.2) entre $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

Q 16. On admet que (I.1) conduit à l'égalité $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$. En déduire les deux relations de Descartes portant sur les angles i_1 , i'_1 et i_2 .

Q 17. À partir de l'étude du champ magnétique, trouver une deuxième équation notée (I.3) reliant $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

La solution du système d'équation conduit à $\underline{r} = \frac{1 - \underline{\nu}}{1 + \underline{\nu}}$ et $\underline{t} = \frac{2}{1 + \underline{\nu}}$, où l'on a posé $\underline{\nu} = \frac{k_{tz}}{k_{iz}}$, qui est éventuellement un nombre complexe. Nous reviendrons sur ces coefficients dans la sous-partie I.C. Néanmoins, on remarque immédiatement qu'on n'a jamais $\underline{t} = 0$, même dans le cas d'une réflexion totale. Il y a toujours une onde électromagnétique transmise. Dans la suite de cette sous-partie, nous nous intéressons à la forme que prend cette onde transmise.

Q 18. Expliciter les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}_i$ en fonction de n , k_0 et i_1 .

Q 19. En remarquant que $k_{tz}^2 = k_0^2 - k_{tx}^2$, exprimer k_{tz}^2 en fonction de n , k_0 et i_1 . En déduire l'expression de k_{tz} (on distinguera deux cas). Écrire le champ électrique transmis complexe dans les deux cas (sans chercher à expliciter $\underline{t}$).

Q 20. Quelle est la forme de l'onde transmise dans le cas d'une réflexion totale ? Comment la qualifie-t-on ? Exprimer la longueur typique, notée δ , de pénétration de cette onde dans la direction $\vec{e}_z$. Expliquer qualitativement pourquoi il n'y pas, en moyenne, de puissance propagée dans la direction $\vec{e}_z$.

I.C – Barrière de potentiel et effet tunnel en physique quantique. Analogie avec la réflexion totale frustrée

En physique quantique, c'est la description ondulatoire de la matière qui permet d'expliquer l'effet tunnel. En effet, là où une particule décrite dans le cadre de la mécanique classique est arrêtée au pied d'une barrière de potentiel, une particule décrite dans le cadre de la physique quantique voit sa fonction d'onde « déborder » légèrement dans la barrière de potentiel sous forme d'onde évanescente. De la même manière, là où l'optique géométrique interdit à un rayon lumineux de franchir un dioptré en situation de réflexion totale, l'optique ondulatoire montre que l'onde électromagnétique « déborde » légèrement du dioptré sous la forme d'une onde évanescente.

L'objectif de cette sous-partie est donc de construire une analogie entre le comportement d'une onde de de Broglie devant une barrière de potentiel, rencontré en physique quantique, et celui d'une onde électromagnétique dans le cas d'une réflexion totale.

On rappelle que dans le cas d'un état stationnaire la fonction d'onde associée à une particule de masse m vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps : dans une modélisation à une dimension spatiale, on écrit sa fonction d'onde $\Psi(x, t) = \Phi(x) \exp(-j\omega t)$ où $\Phi(x)$ vérifie l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(x) + V(x) \Phi(x) = E \Phi(x)$$

où $E = E_c + V(x)$ est l'énergie totale de la particule, E_c étant son énergie cinétique.

I.C.1) Marche de potentiel

On rappelle que la fonction d'onde ainsi que sa dérivée spatiale sont continues en un point qui connaît une variation finie de potentiel. On considère le profil de potentiel suivant, qui présente une marche en $x = 0$,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et une particule d'énergie E qui, provenant de la région des x négatifs, arrive sur la « marche » de potentiel de hauteur V_0 .

Q 21. Montrer que dans la région $x < 0$ où $V(x) = 0$, la solution générale est de la forme

$$\Phi_G(x) = A \exp(jkx) + B \exp(-jkx)$$

où k est choisi positif. Exprimer k en fonction de E et de la masse m de la particule.

Q 22. Exprimer de même la solution générale de la fonction d'onde dans la région $x > 0$ sous la forme

$$\Phi_D(x) = C \exp(jqx) + D \exp(-jqx).$$

La grandeur q , éventuellement complexe, est choisie avec $\Re(q) \geq 0$ et, si $\Re(q) = 0$, avec $\Im(q) > 0$. En distinguant les situations $E > V_0$ et $E < V_0$, exprimer q en fonction de E , V_0 et m . Que peut-on dire de D ?

Q 23. Exprimer les coefficients complexes $\underline{r}$ et $\underline{t}$ de réflexion et de transmission en amplitude en fonction de la grandeur $\underline{\nu} = \frac{q}{k}$.

Q 24. Dans cette question, on se place dans le cas $E > V_0$. Rappeler pour une onde plane harmonique l'expression du vecteur densité de courant de probabilité, noté $\vec{J}$, en fonction du vecteur d'onde et de la fonction d'onde. Donner la définition des coefficients réels R et T de réflexion et de transmission en probabilité en fonction des vecteurs densité de courant de probabilité incident, réfléchi et transmis $\vec{J}_i$, $\vec{J}_r$ et $\vec{J}_t$. En déduire l'expression de R et T en fonction de ν , r , t , puis de ν seulement. Vérifier alors $R + T = 1$ et interpréter.

Q 25. Dans cette question, on se place dans le cas $E < V_0$. Expliquer qualitativement pourquoi $T = 0$.

I.C.2) Synthèse I.B.2 et I.C.1

Le tableau 1 met en analogie la barrière de potentiel en physique quantique et le franchissement d'un dioptré en optique ondulatoire.

Barrière de potentiel $V_0 > E$	Réflexion totale $n \sin i_1 > 1$
$\frac{\hbar q^2}{2m} + V_0 = E$	$k_{tz}^2 + k_{tx}^2 = k_0^2$
$V_0 > 0 \implies q^2 < 0$ et $q \in j\mathbb{R}$	$k_{tx}^2 > k_0^2 \implies \boxed{?_1}$
Onde évanescence : atténuation au lieu de propagation	Onde évanescence : selon $\vec{e}_z$, atténuation au lieu de propagation
$\underline{\nu} = \frac{q}{k} = \boxed{?_2}$ et $\underline{r} = \boxed{?_3}$	$\underline{\nu} = \frac{k_{tz}}{k_{iz}} = \boxed{?_4}$ et $\underline{r} = \frac{1 - \underline{\nu}}{1 + \underline{\nu}}$
Existence d'une amplitude de probabilité non nulle au delà de la marche de potentiel (sur une petite profondeur δ)	Existence de $\boxed{?_5}$ non nul au delà du dioptré (sur une petite profondeur δ)

Tableau 1

Q 26. Donner le contenu des cinq masques $\boxed{?_i}$.

I.C.3) Effet tunnel et réflexion totale frustrée

Soit le profil de potentiel

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } x > L \end{cases}$$

On suppose $E < V_0$ et on pose $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ et $\nu = \frac{\kappa}{k}$ où $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

On considère une particule d'énergie E qui provient de la région des x négatifs. La figure 8 donne sa fonction d'onde dans les trois régions du potentiel. On montre alors que le coefficient T de transmission en probabilité s'écrit $T \sim \exp(-2\kappa L)$.

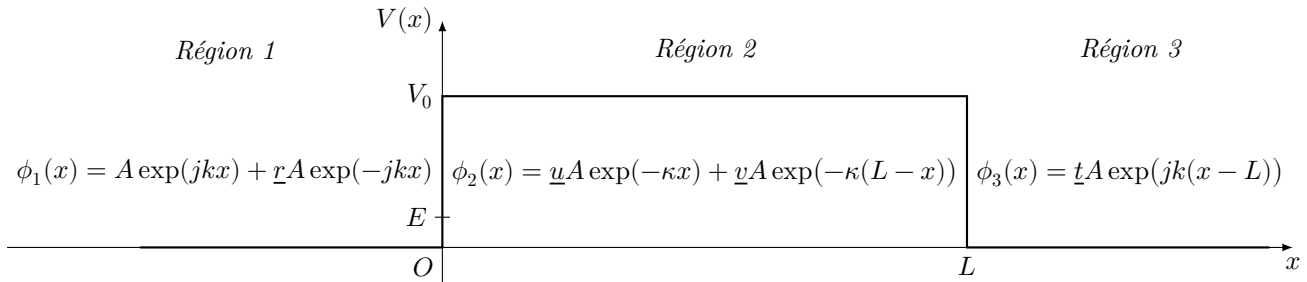


Figure 8 Formes d'une onde de de Broglie dans une barrière de potentiel

L'effet tunnel est associé au fait que l'onde évanescence dans la barrière « déborde » légèrement au-delà de la barrière pour transmettre dans la *Région 3* une onde à nouveau progressive. De manière analogue, dans la situation de la réflexion totale, l'onde électromagnétique « déborde » légèrement au-delà du dioptre dans la situation d'une réflexion totale si bien qu'en approchant un deuxième dioptre, on peut permettre la transmission d'une onde progressive, ce qui est la réflexion totale frustrée. Cette sous-partie propose d'étudier cette configuration en développant l'analogie avec l'effet tunnel.

On considère une onde électromagnétique subissant une réflexion totale dans un prisme rectangle isocèle d'indice $n = 1,5$. On approche tête-bêche un second prisme rectangle isocèle du premier, de sorte que leurs hypoténuses respectives soient parallèles entre elles, comme indiqué sur la figure 9, et on note L la distance qui les sépare dans la direction horizontale. Les coefficients T et R désignent respectivement les coefficients de transmission et de réflexion en énergie. Lorsque L tend vers l'infini, on retrouve la situation d'un seul prisme avec une réflexion totale, à savoir $T = 0$ et $R = 1$. Mais lorsque L devient suffisamment petit, T n'est plus nul : c'est le phénomène de réflexion totale frustrée.

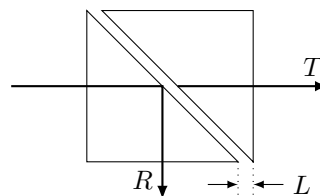


Figure 9

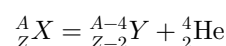
Q 27. On suppose que la crête d'un sillon est en contact avec le prisme et que le creux d'un sillon en est distant de $e = 30 \mu\text{m}$. La diode laser émet à la longueur d'onde $\lambda_0 = 630 \text{ nm}$. À l'aide de l'analogie développée, évaluer le coefficient de transmission en puissance du creux du sillon. Conclure l'étude en expliquant en quoi le dispositif d'un tel capteur optique d'empreinte digitale repose sur le principe de réflexion totale frustrée.

II Stockage de déchets radioactifs à haute activité

II.A – Énergie cinétique des particules α émises et émission thermique d'un échantillon radioactif

II.A.1) Quelques données sur la radioactivité alpha

La radioactivité alpha est le processus de désintégration d'un nucléide radioactif ${}^A_Z X$ selon le bilan suivant



où le noyau ${}^4_2 \text{He}$ est appelé *particule alpha*, tandis que le noyau ${}^A_Z X$ est appelé *père* et le noyau ${}^{A-4}_{Z-2} Y$ *fil*. En pratique, la radioactivité alpha concerne les noyaux lourds, $Z \sim 82 - 96$ et $A \sim 210 - 250$.

La constante radioactive λ du radionucléide est son taux de désintégration par seconde. En notant $N(t)$ le nombre de radionucléides dans un échantillon donné,

$$\lambda = \frac{-\frac{dN}{dt}}{N(t)}.$$

La durée de demi-vie est le temps $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ pendant lequel la moitié des radionucléides d'un échantillon donné se désintègrent.

L'activité d'un radionucléide, exprimée en becquerels (Bq), est le nombre de désintégrations par seconde observées dans un échantillon donné.

La figure 10 met en relation les durées de demi-vie et l'énergie des particules alpha E_α de quelques isotopes de l'uranium ($Z = 92$) et du polonium ($Z = 84$). La loi vérifiée empiriquement (courbe passant au milieu des points expérimentaux) est

$$\log_{10} T = \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2$$

où, pour un élément chimique donné, C_1 et C_2 sont deux constantes.

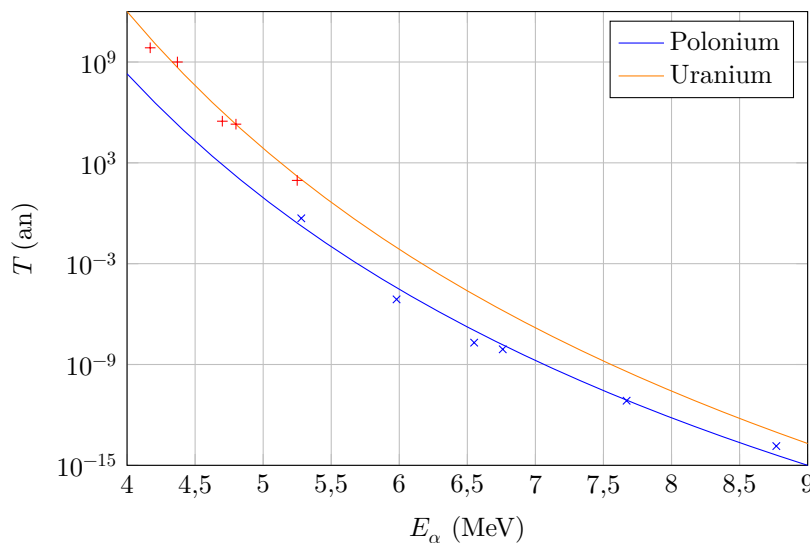


Figure 10 Demi-vie fonction de E_α

II.A.2) Modèle de Gamow (1928)

On suppose que la particule alpha préexiste à l'intérieur du noyau A_ZX et est piégée dans un puits de potentiel qui modélise l'interaction forte entre nucléons, dont la portée n'excède pas une dizaine de femtomètres, soit le rayon du noyau, noté R . À l'extérieur du noyau, soit à une distance $r > R$ comptée depuis son centre, c'est l'interaction coulombienne, répulsive, entre la particule alpha ${}^4_2\text{He}$ (de charge $+2e$, où e est la charge élémentaire) et le noyau fils ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ (de charge $+(Z-2)e$) qui prédomine.

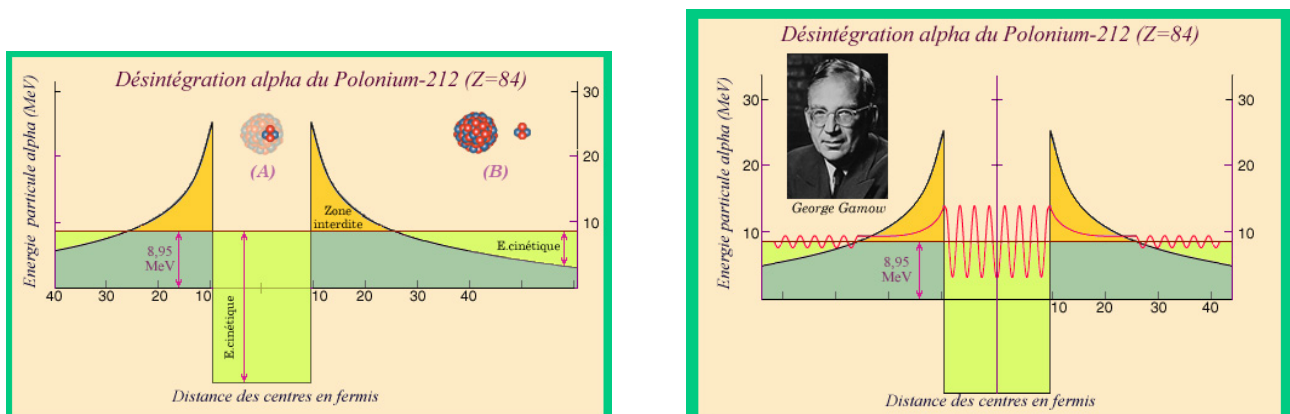


Figure 11 D'après <http://www.laradioactivite.com/>

Classiquement, la barrière de potentiel assure la stabilité du noyau. Gamow interprète la radioactivité alpha par effet tunnel. L'onde de matière associée à la particule alpha n'est pas strictement localisée si bien qu'il existe une probabilité de l'observer en dehors du noyau. La particule alpha, à l'intérieur du noyau, possède une énergie

cinétique : elle vient heurter la barrière à une fréquence f , il y a une probabilité P qu'elle traverse la barrière de potentiel. On montre alors que la constante radioactive s'écrit $\lambda = Pf$.

Calcul de l'effet tunnel

L'énergie potentielle coulombienne, appelée abusivement « potentiel » selon les habitudes de la physique quantique, est notée $V(r)$.

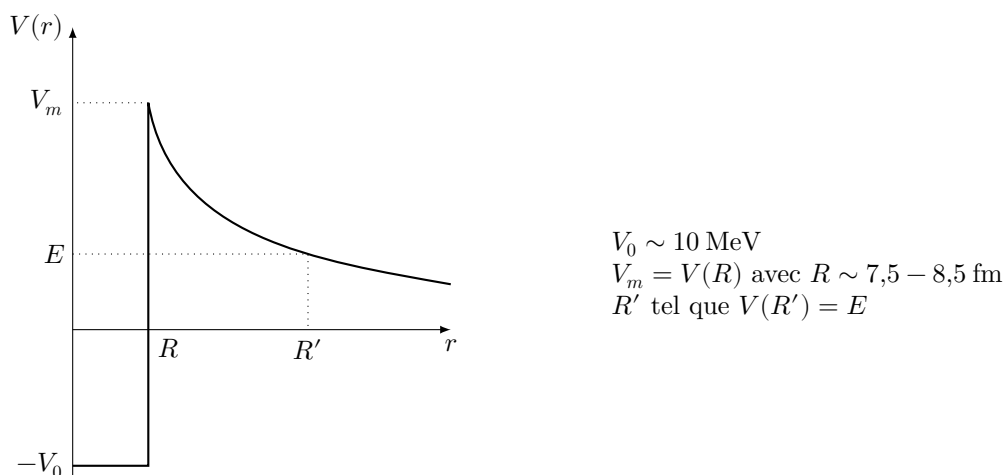


Figure 12

Le calcul de la probabilité de transmission par effet tunnel pour le profil illustré figure 12 a été proposé en 1926 par Brillouin, Kramers et Wentzel (approximation dite BKW) et s'exprime ainsi :

$$P = \exp(-\gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2m(V(r) - E_\alpha)} dr.$$

En introduisant la constante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ appelée constante de structure fine, on obtient :

$$\gamma \approx 2(Z-2)\alpha\sqrt{2mc^2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{E_\alpha}} - \frac{4}{\sqrt{V_m}} \right).$$

La fréquence de collision de la particule alpha avec la barrière s'obtient par une approche classique :

$$f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}.$$

II.A.3) Questions

Q 28. Écrire l'énergie potentielle d'interaction coulombienne, notée $V(r)$, entre la particule alpha et le noyau fils, en fonction de Z , e et de la distance r qui les sépare. On introduira la constante de structure fine.

Q 29. Justifier la formule $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Q 30. Exprimer l'énergie cinétique de la particule alpha, en fonction de son énergie mécanique E_α , quand elle est à l'intérieur du puits. Justifier la formule

$$f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}.$$

Q 31. Avec $\lambda = Pf$, et moyennant des approximations qu'on explicitera, justifier la formule empirique pour un élément chimique

$$\log_{10} T = \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2.$$

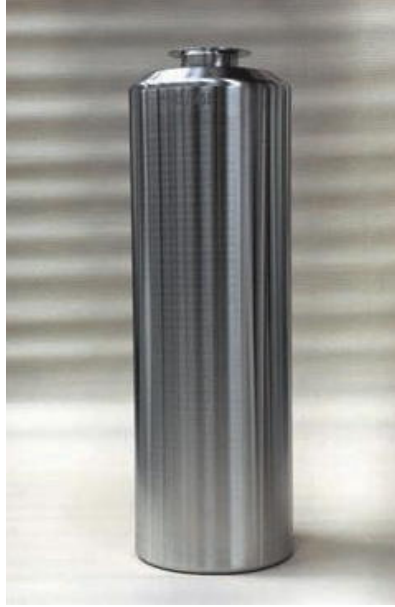
Q 32. On considère un échantillon radioactif alpha d'activité massique $A_m = 3 \times 10^{10} \text{ Bq}\cdot\text{g}^{-1}$. Définir la grandeur intensive « émission thermique massique de l'échantillon », notée w ($\text{W}\cdot\text{kg}^{-1}$). Estimer un ordre de grandeur de w .

Q 33. Que représente la grandeur ρw où ρ est la masse volumique de l'échantillon ?

II.B – Température d'un fût de stockage

II.B.1) Présentation d'un fût de stockage

Les déchets à haute activité issus des centrales nucléaires, sont vitrifiés : ils sont incorporés dans un verre R7T7 destiné à les confiner durablement. Le verre, appelé *colis*, est coulé dans des fûts d'acier inoxydable. L'activité radioactive du colis s'accompagne d'un transfert thermique. On considère que la température du verre ne doit pas dépasser 510 °C pour éviter toute transition de phase vitreuse. L'activité est divisée d'un facteur 3 après 50 ans. Ainsi, après une période initiale durant laquelle il est nécessaire d'entreposer les colis dans des puits ventilés, il est envisagé de les stocker profondément sous terre, sans ventilation, à condition que leur température de paroi soit inférieure à 90 °C. L'émission thermique est de l'ordre de 2 kW par colis dans la première décennie du stockage.



Conteneur

Acier inoxydable

Hauteur 1,338 m

Diamètre 43 cm

Colis

Verre borosilicate

Volume 175 L

Masse des déchets 400 kg

Figure 13 Fût de stockage de déchets à haute activité

II.B.2) Bilan thermique

On propose de faire le bilan thermique d'un fût afin de déterminer, en régime quasi-permanent, la température à la surface du fût. On considère pour cela une géométrie cylindrique et on néglige les effets de bords. On note a le rayon du fût et H sa hauteur. On néglige l'épaisseur de l'enveloppe en acier en raison de son excellente conductivité thermique. La température ne dépend alors que de la seule variable r et est notée $T(r)$. Le flux thermique traversant un cylindre coaxial à l'axe du fût, de même hauteur H que le fût et de rayon $r < a$ est noté $\phi(r)$.

On rappelle la loi phénoménologique de Newton. En un point M de l'interface entre un solide et un fluide et en notant T_s la température du solide à sa surface en M et T_f celle du fluide, on observe un transfert thermique dont le vecteur densité de flux thermique s'exprime par $\vec{j}(M) = -h(T_f - T_s)\vec{n}$, où h est le coefficient de transfert thermique (coefficient conducto-convectif) et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface en M , dirigé du solide vers le fluide.

Q 34. Déterminer la valeur de l'émission thermique volumique (puissance émise par unité de volume) u du colis.

Q 35. Établir soigneusement un bilan local thermique sur une portion de fût délimitée par les surfaces cylindriques de rayons respectifs r et $r + dr$, où $r \in [0, a]$, en tenant compte du transfert thermique cédé au milieu du fait de la radioactivité. En déduire une expression de $\frac{d\phi}{dr}$, notée équation (II.1).

Q 36. Rappeler la loi de Fourier. En déduire une expression de $\phi(r)$ en fonction de $\frac{dT}{dr}$, notée équation (II.2).

Q 37. En intégrant l'équation (II.1), puis à l'aide de l'équation (II.2), déterminer $T(r)$ en fonction de λ , u , r , R et $T(R)$ température à la paroi du fût.

Q 38. Le stockage est-il possible, dans les conditions présentées, lors de la première décennie et à plus long terme ? On argumentera en présentant des évaluations chiffrées de températures.

II.C – Fonte du verre

II.C.1) Verre R7T7

Le verre R7T7 (nom issu de ses ateliers de fabrication) est essentiellement constitué d'anions O^{2-} et de cations Si^{4+} (et, de manière moindre, des cations Al^{3+} , B^{4+} et B^{3+}) au sein duquel on met en solution les constituants

issus de déchets nucléaires. Ce sont quelques dizaines d'éléments, généralement des éléments métalliques oxydés tels que, par exemple, les ions cérium Ce^{4+} et Ce^{3+} , les ions fer Fe^{3+} et Fe^{2+} , etc. Ces éléments sont incorporés dans le verre fondu à une température d'environ 1100 °C.

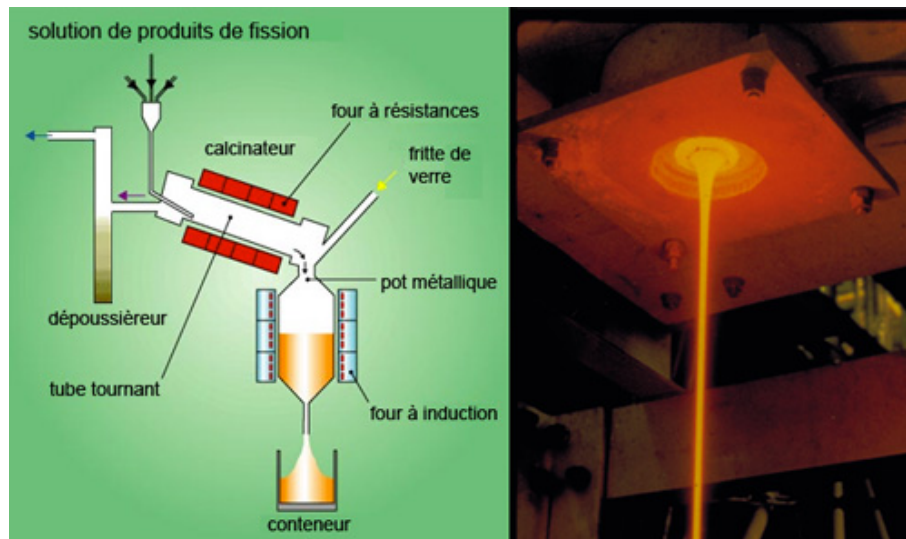


Figure 14 Schéma du procédé de vitrification

Les produits de fission (PF), en solution dans de l'acide nitrique sont calcinés, ce qui permet de les extraire du solvant sous forme oxydée, puis incorporés à de la fritte de verre (les éléments composant le verre) dans le four de fusion. La solution vitreuse obtenue (le « bain de verre ») est directement coulé dans les fûts en acier.

Les espèces présentes appartiennent à des couples redox si bien que, pour chaque élément introduit dans la solution vitreuse, il s'établit un équilibre entre les formes oxydée et réduite qui dépend du potentiel électrique de la solution. En particulier, l'oxygène forme le couple O_2/O^{2-} . Si la solution devient trop oxydante, l'équilibre peut se déplacer en faveur du dioxygène. Il en résulte un moussage de la solution vitreuse dommageable pour le pilotage du procédé de vitrification et pour la qualité finale du verre obtenu (présence de bulles qui, une fois le milieu solidifié, rendraient le verre inhomogène). Ainsi, lors du processus de vitrification des déchets nucléaires, c'est-à-dire lors de la coulée du verre et de la mise en solution des éléments issus des déchets nucléaires, il est important de maîtriser l'équilibre redox du mélange.

II.C.2) Mesure de l'activité du dioxygène dans un bain de verre

On appelle *fugacité en oxygène* la grandeur notée f_{O_2} , homogène à une pression, qui est la pression de l'oxygène physiquement dissout dans le bain de verre. Cette pression peut différer de la pression partielle en dioxygène $P_{\text{O}_2\text{ref}}$ de l'atmosphère placée sur le bain de verre. Une augmentation de $P_{\text{O}_2\text{ref}}$, toute autre chose égale par ailleurs, entraîne une augmentation de f_{O_2} .

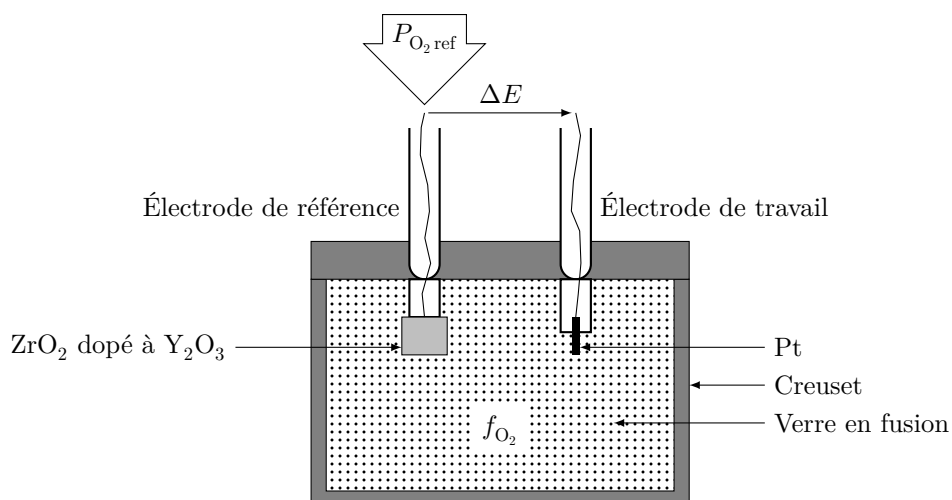


Figure 15

La figure 15 présente un dispositif permettant de mesurer f_{O_2} dans du verre en fusion. L'électrode de référence mesure le potentiel du couple O_2/O^{2-} où :

- la forme oxydée O_2 provient de l'atmosphère, son activité est $a_{\text{ref}} = \frac{P_{\text{O}_2\text{ref}}}{P^\circ}$;
- la forme réduite provient du bain de verre et a la même activité que dans le bain de verre.

On utilise pour cela une membrane (ZrO_2 dopée à Y_2O_3) très perméable aux ions O^{2-} , ainsi le fil de platine de l'électrode voit le dioxygène de l'atmosphère et les ions O^{2-} du bain. L'électrode de travail mesure, quant à elle, le potentiel du bain de verre, à l'équilibre avec le couple O_2/O^{2-} où :

- la forme oxydée O_2 est dans le bain, son activité est $a = \frac{f_{\text{O}_2}}{P^\circ}$;
- la forme réduite est dans le bain.

Il en résulte une différence de potentiel qui s'exprime selon la formule de Nernst :

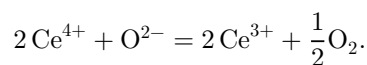
$$\Delta E = \frac{RT}{4F} \ln \frac{f_{\text{O}_2}}{P_{\text{O}_2 \text{ ref}}}.$$

II.C.3) Questions

Q 39. Écrire la demi-équation redox du couple O_2/O^{2-} .

Q 40. En écrivant le potentiel de Nernst de chaque électrode du dispositif de mesure présenté figure 15, retrouver l'expression de la tension mesurée entre les électrodes.

On montre que le taux d'incorporation de déchets riches en cérium croît avec le caractère réducteur de la fonte verrière. Néanmoins, il peut en résulter un moussage de la fonte consécutif à la réaction de réduction du cérium IV en cérium III :



Q 41. Soit $f_{\text{O}_2}^*$ la valeur de la pression de dioxygène dans la fonte verrière pour laquelle on y trouve, à l'équilibre, une même quantité de cérium IV que de cérium III. Exprimer $\log f_{\text{O}_2}^*$ en fonction des potentiels standard des couples $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$ et O_2/O^{2-} et de l'activité $a_{\text{O}^{2-}}$ des ions O^{2-} .

Q 42. Exprimer, à l'équilibre, $\log \frac{a(\text{Ce}^{3+})}{a(\text{Ce}^{4+})}$ en fonction de $\log \frac{f_{\text{O}_2}^*}{f_{\text{O}_2}}$. Que peut-on dire si $f_{\text{O}_2} > f_{\text{O}_2}^*$?

On peut contrôler le rapport redox du cérium en agissant sur :

- le réglage des gaz de l'atmosphère au-dessus du bain de verre ;
- la modification de la basicité du verre, c'est-à-dire de l'activité des ions O^{2-} ;
- l'ajout de matière oxydante ou réductrice.

Q 43. Préciser, pour chaque méthode, le sens du réglage qui convient pour contrôler le rapport redox en faveur de la forme réduite.

Q 44. La solution retenue consiste à incorporer l'élément fer sous forme réduite Fe^{II} , qui consomme alors le dioxygène relâché par la réduction du Ce^{IV} en devenant Fe^{III} . Commenter la figure 16.

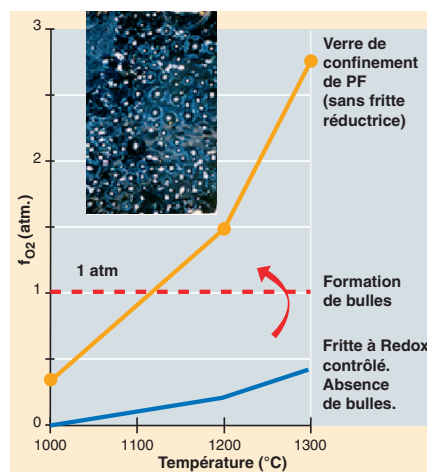


Figure 16

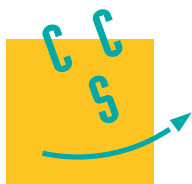
Données

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 6,582 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Constante de structure fine	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$
Masse de la particule alpha	$m = 3727 \text{ MeV}/c^2$
Conductivité thermique du verre	$\lambda = 1 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air/solide (convection naturelle)	$h = 9 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$
Coefficient conducto-convectif air/solide (convection forcée)	$h = 25 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$

Préfixes du système international d'unités

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^1	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

• • • FIN • • •



L'énergie électrique d'origine nucléaire

Le but de ce problème est de regarder, en tant que scientifique non expert du sujet, quelques aspects d'une centrale nucléaire de type EPR (signifiant Evolutionary Pressurised water Reactor), qui est un type de *réacteur à eau pressurisée* (REP).

Les 19 centrales nucléaires actuellement en fonctionnement en France ont été globalement construites sur le même mode. Tous leurs réacteurs utilisent la même technologie, dans laquelle de l'eau sous pression sert à transporter la chaleur produite par les réactions nucléaires. [...]

Les centrales nucléaires regroupent un total de 58 réacteurs dont 34 produisent chacun une puissance électrique de 900 MégaWatt (MWe) — 900 MWe permet d'alimenter près de 500 000 foyers. À cela s'ajoutent 20 réacteurs de 1300 MWe, tandis que les quatre derniers délivrent 1450 MWe. Un 59ème réacteur est actuellement en construction à Flamanville, dans la Manche. De type EPR (Evolutionary Pressurised water Reactor), il développera une puissance électrique de l'ordre de 1600 MWe. Actuellement, ces installations produisent près de 80 % de l'électricité produite en France.

Autorité de Sûreté Nucléaire, informations mises à jour en février 2018

Les trois parties du problème sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées dans toutes les parties.

Les applications numériques seront faites avec un nombre de chiffres significatifs adapté. Les données numériques sont fournies dans le document réponse à rendre avec la copie.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I L'uranium, source d'énergie

I.A – L'uranium naturel

L'uranium est l'élément chimique de numéro atomique 92, de symbole U. Il fait partie de la famille des actinides.

L'uranium est le 48^e élément le plus abondant dans la croûte terrestre, son abondance est supérieure à celle de l'argent, comparable à celle du molybdène ou de l'arsenic, mais quatre fois inférieure à celle du thorium. Il se trouve partout à l'état de traces, y compris dans l'eau de mer.

C'est un métal lourd radioactif (émetteur alpha) de période très longue ($\sim 4,4688$ milliards d'années pour l'uranium 238 et $\sim 703,8$ millions pour l'uranium 235). Sa radioactivité, additionnée à celle de ses descendants dans sa chaîne de désintégration, développe une puissance de 0,082 watt par tonne d'uranium, ce qui en fait, avec le thorium 232 (quatre fois plus abondant, mais trois fois moins radioactif) et le potassium 40, la principale source de chaleur qui tend à maintenir les hautes températures du manteau terrestre, en ralentissant de beaucoup son refroidissement.

L'isotope ^{235}U est le seul isotope fissile naturel. Sa fission libère une énergie voisine de 202,8 MeV par atome fissionné dont 9,6 MeV d'énergie non récupérable, communiquée aux neutrinos produits lors de la fission. L'énergie récupérable est plus d'un million de fois supérieure à celle des combustibles fossiles pour une masse équivalente. De ce fait, l'uranium est devenu la principale matière première utilisée par l'industrie nucléaire.

Le minerai d'uranium qui a été exploité sur Terre possède une teneur en uranium pouvant varier de 0,1 % à 20 %. L'uranium est dit *naturel* quand il est constitué d'isotopes dans leur proportion d'origine (identique pour tous les minerais d'uranium) : soit 99,2743 % d'uranium 238 accompagné de 0,7202 % d'uranium 235 et d'une quantité infime d'isotope 234 (0,0055 %).

Wikipédia

Dans la suite nous négligerons l'apport de l'uranium 234 et considérerons que les proportions *naturelles* de l'uranium sont de 99,28 % pour ^{238}U et de 0,72 % pour ^{235}U . De plus, le terme « proportion d'uranium 235 » sera *toujours* à comprendre comme la proportion d'uranium 235 par rapport à tout l'uranium présent et non pas la proportion d'uranium 235 dans toute la matière présente (au cas où celle-ci ne serait pas composée uniquement d'uranium).

I.A.1) Évolution de la population d'uranium au cours du temps

On rappelle que la radioactivité naturelle (radioactivité α) est telle que, pour un noyau donné, la probabilité de désintégration par unité de temps, notée λ , est une caractéristique intrinsèque et invariable dans le temps. On l'appelle usuellement *constante radioactive*.

Q 1. Quelle est la dimension de la constante radioactive λ ?

Q 2. On considère une population de noyaux radioactifs identiques, dont le nombre à l'instant t est donné par $N(t)$. Relier $N(t + dt)$ à $N(t)$ et λ puis montrer que l'évolution de $N(t)$ est gouvernée par l'équation différentielle $\frac{dN}{dt}(t) + \lambda N(t) = 0$.

Q 3. La *période radioactive*, notée $T_{1/2}$, est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux se sont désintégrés. Établir le lien entre λ et $T_{1/2}$.

Q 4. Calculer numériquement les valeurs des constantes radioactives λ_{238} et λ_{235} des noyaux respectifs d'uranium 238 et 235. Commenter ces valeurs en sachant que la constante radioactive du thorium est de $1,6 \times 10^{-18}$ USI environ.

Q 5. La proportion d'uranium 235 dans les minerais augmente-t-elle ou diminue-t-elle au cours du temps ?

Q 6. Pour faire fonctionner un réacteur nucléaire, il faut disposer d'un minerai contenant beaucoup d'uranium et que cet uranium présente au moins 3 % d'uranium 235 de sorte que la fission puisse s'auto-entretenir. Entre la formation de la Terre et notre époque, y a-t-il eu une période pendant laquelle les minerais naturels étaient suffisamment riches en uranium 235 pour faire fonctionner un réacteur nucléaire ? Si oui, estimer la durée de cette période.

I.A.2) Radioactivité naturelle au XXI^e siècle

De nos jours, on estime qu'une parcelle carrée de 20 mètres de côté contient environ 24 kg d'uranium naturel sur une profondeur de 10 mètres.

Q 7. Estimer la puissance dégagée par la radioactivité de l'uranium sur une telle parcelle. Comparer avec la valeur donnée par l'extrait ci-dessus (0,082 watt par tonne d'uranium).

I.B – Le combustible nucléaire

L'uranium, une fois extrait, est d'abord enrichi en uranium 235 afin de pouvoir servir de combustible. Il est ensuite transformé en dioxyde d'uranium.

I.B.1) Cristal de dioxyde d'uranium

Le cristal de dioxyde d'uranium UO_2 est un cristal ionique (U^{4+} , O^{2-}) qui a la structure d'une fluorite (CaF_2), à savoir :

- les ions d'uranium forment un réseau cubique face centrée ;
- les ions d'oxygène forment un réseau cubique.

La maille correspondante est visible sur la figure A du document réponse.

Q 8. Indiquer sur cette figure la position des ions U^{4+} et O^{2-} . Comment s'appellent les sites du réseau de l'uranium occupés par les ions d'oxygène ?

Q 9. Vérifier que le nombre d'ions est cohérent avec la formule UO_2 .

Q 10. Quelle est la longueur du côté de la maille ? Commenter ce résultat. Comparer cette longueur avec les rayons ioniques des ions uranium et oxygène qui valent respectivement 97 pm et 140 pm.

I.B.2) Combustible utilisé dans les centrales

Le dioxyde d'uranium enrichi à 5 % est d'abord produit sous forme de poudre avant d'être compacté en *pastilles* de 7,5 g (cf figure 1).



Figure 1 Pastilles de combustible d'uranium

Q 11. Quelle est l'énergie E_0 que va dégager cette pastille combustible si tout l'uranium 235 se désintègre naturellement (par radioactivité α) ? Un ordre de grandeur est attendu.

La radioactivité naturelle (radioactivité α) n'est pas utile au fonctionnement d'une centrale nucléaire qui exploite plutôt la fission : lorsqu'un neutron de faible énergie cinétique, dit *lent*, entre en collision avec un noyau d'uranium 235, celui-ci donne deux noyaux fils, en général du krypton 93 et du baryum 140 ou bien du strontium 94 et du xénon 140. Ces deux noyaux emportent de l'énergie sous forme cinétique (environ 200 MeV) qu'ils restituent au matériau dans lequel ils sont présents. En plus de ces noyaux, la fission du noyau d'uranium libère deux ou trois neutrons qui vont, à leur tour, entrer en collision avec un autre noyau d'uranium ou être absorbés par un autre atome. Lorsque les réactions de fission sont nombreuses, le phénomène peut s'emballer car il y a plus de neutrons produits que de neutrons absorbés (on parle de *divergence*). En revanche, si les neutrons sont trop souvent absorbés par d'autres noyaux que l'uranium 235, la réaction s'arrête. Le fonctionnement optimal d'une centrale se fait au point d'équilibre : il est nécessaire qu'il y ait suffisamment de neutrons produits pour engendrer des réactions de fission en chaîne, mais sans excès de manière à éviter l'emballement.

Q 12. Un foyer composé de 4 personnes habitant dans une maison de 150 m² avec chauffage électrique consomme en moyenne une énergie électrique correspondant à 20 000 kW·h en une année. Évaluer les masses de combustible nécessaires pour alimenter un tel foyer en électricité pendant un an dans le cas d'une centrale au charbon, puis d'une centrale nucléaire de type REP. Commenter.

II Le cœur du réacteur

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté figure 2. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée, dans le circuit *primaire*. L'eau du circuit primaire permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit *secondaire* dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit *tertiaire* est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

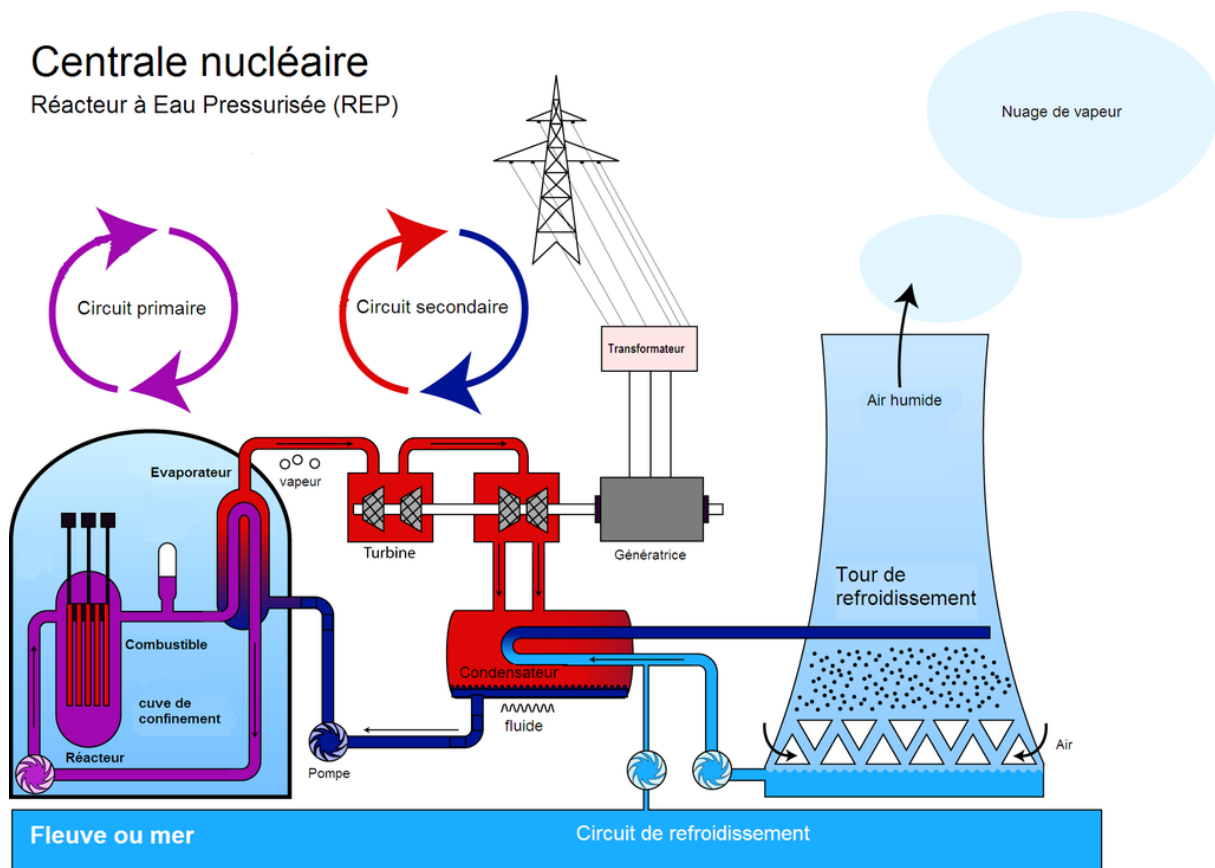


Figure 2 Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Au cœur d'une tranche de centrale (qui comporte en général 2 ou 3 tranches), le combustible nucléaire est sous forme de pastilles cylindriques (figure 1). Ces pastilles sont regroupées en *crayons*, eux-même réunis en *assemblages* (figure 3). Un assemblage contient 600 kg de dioxyde d'uranium enrichi. Un cœur de réacteur est l'association de 241 assemblages (figure 4).

II.A – Quelques analyses préliminaires

Q 13. Pourquoi produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres prêts à mettre dans la gaine du crayon ? Quel est l'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustibles plutôt que quelques-uns, plus gros ?

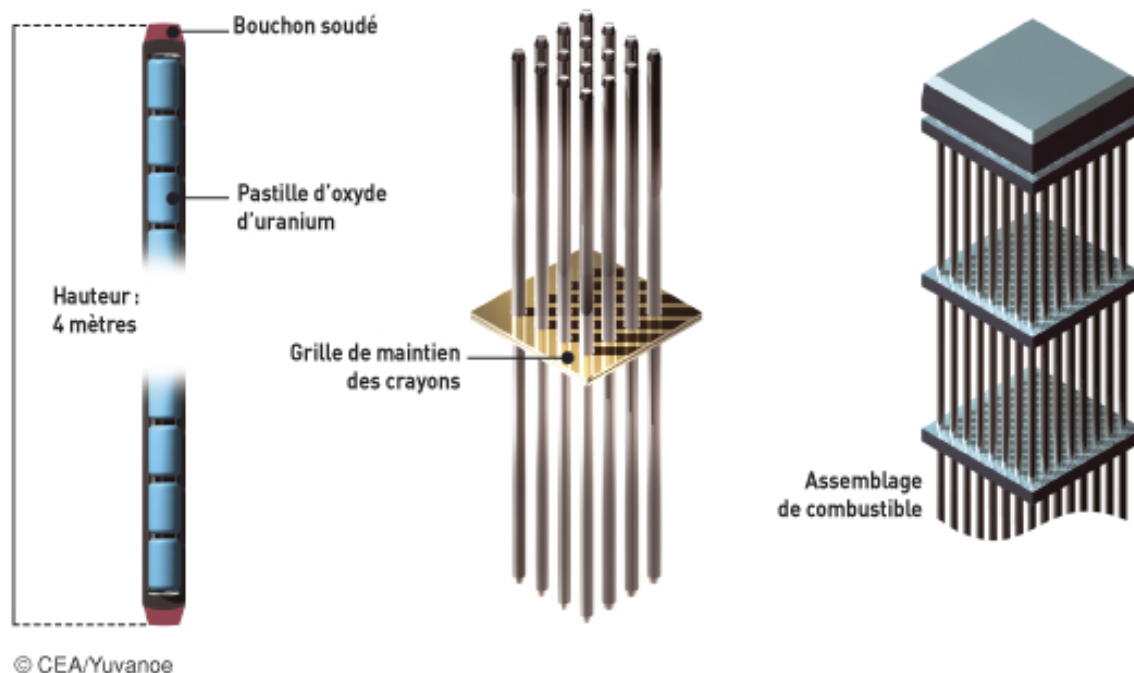


Figure 3 Assemblage du combustible au cœur d'une centrale

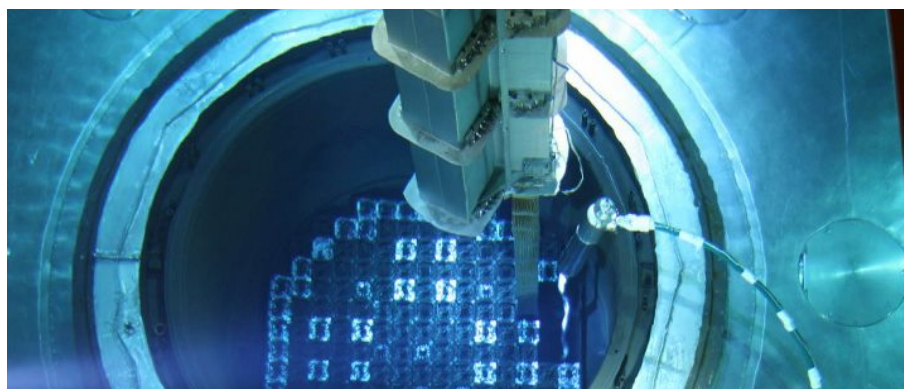


Figure 4 Vue du cœur d'un réacteur

Q 14. Un assemblage est un quadrillage de 17×17 emplacements. Or, il ne contient que 265 crayons de combustible. À quoi peuvent servir les autres emplacements ?

Q 15. Vérifier que la surface totale d'échange entre l'eau du circuit primaire et les crayons indiquée dans les données (environ 8000 m^2) est cohérente avec la structure du cœur du réacteur.

II.B – Approche théorique

II.B.1) Modélisation

On modélise *un* crayon radioactif par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R dans lequel les réactions nucléaires produisent une puissance volumique uniforme. Le régime est considéré stationnaire.

On utilise le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : (r, θ, z) .

Q 16. Justifier que la température est une fonction de r uniquement. Que peut-on en déduire sur la densité de courant thermique $\vec{j}$?

Q 17. La figure 5 présente quatre profils de température à l'intérieur du crayon, ainsi que les expressions analytiques de $T(r)$ associées (pour chacune de ces expressions, la constante K est une constante positive). Parmi ces profils, quel est le seul susceptible de correspondre au crayon radioactif étudié ? Justifier votre réponse à partir d'arguments qualitatifs uniquement (sans aucun calcul).

Q 18. En admettant que le profil identifié représente réellement le champ de température à l'intérieur du crayon, relier la constante K aux grandeurs physiques pertinentes dont les valeurs numériques sont données dans le document réponse.

Q 19. À l'aide des caractéristiques du cœur données dans le document réponse, proposer une estimation de la puissance volumique libérée dans le combustible lorsque le réacteur est en fonctionnement nominal.

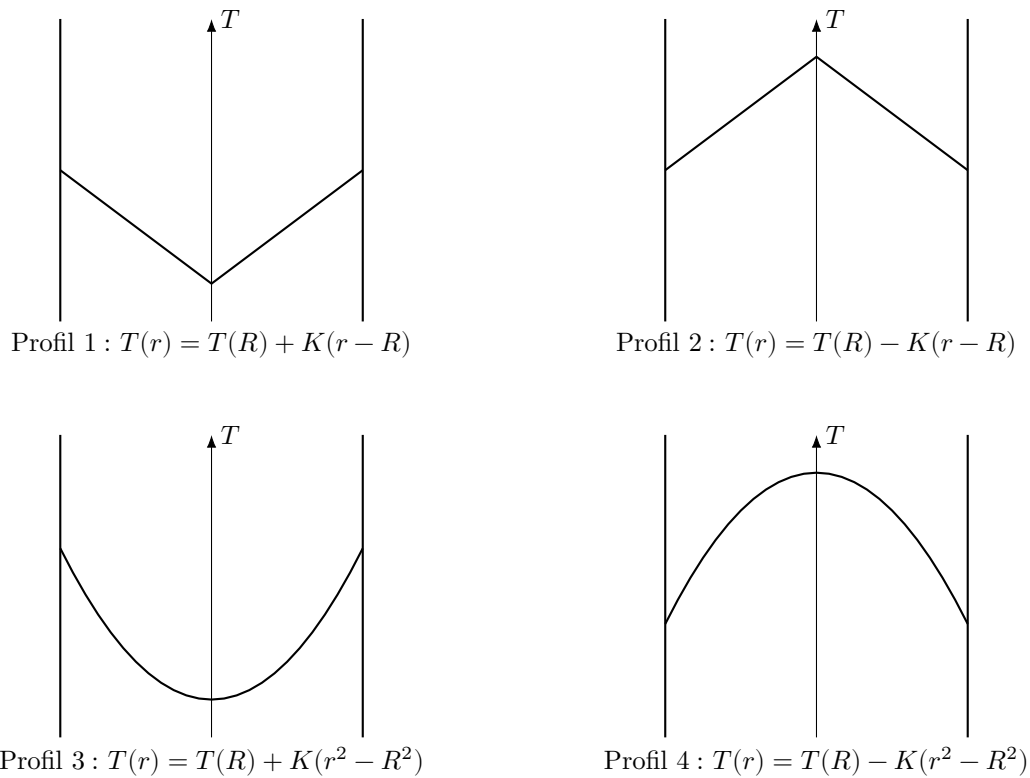


Figure 5

Q 20. Proposer une définition plausible de la *puissance linéique*. Confirmer (ou non) cette définition par un calcul d'ordre de grandeur (une page maximum). Comment expliquer l'existence d'une puissance linéique maximale ?

Q 21. En supposant que la température en $r = R$ est celle de l'eau au voisinage des crayons, calculer numériquement la température au « cœur » du crayon (en $r = 0$). Commenter.

II.B.2) Amélioration du modèle

Q 22. Pourquoi la température en $r = R$ ne vaut-elle pas exactement la température de l'eau indiquée dans les données ?

Q 23. À l'aide d'une démarche à préciser (une page maximum), proposer un modèle conduisant à une meilleure estimation de la température au cœur du crayon en tenant compte du constat précédent. Ne pas hésiter, pour cela, à introduire les grandeurs physiques pertinentes en proposant, le cas échéant, des ordres de grandeur raisonnables.

Q 24. En réalité, la conductivité thermique du dioxyde d'uranium n'est pas indépendante de la température mais possède le profil donné figure 6. Expliquer, de manière qualitative mais argumentée, de quelle manière est modifié le profil de température et, en particulier, si on peut s'attendre à une température plus élevée ou plus basse que celle calculée précédemment.

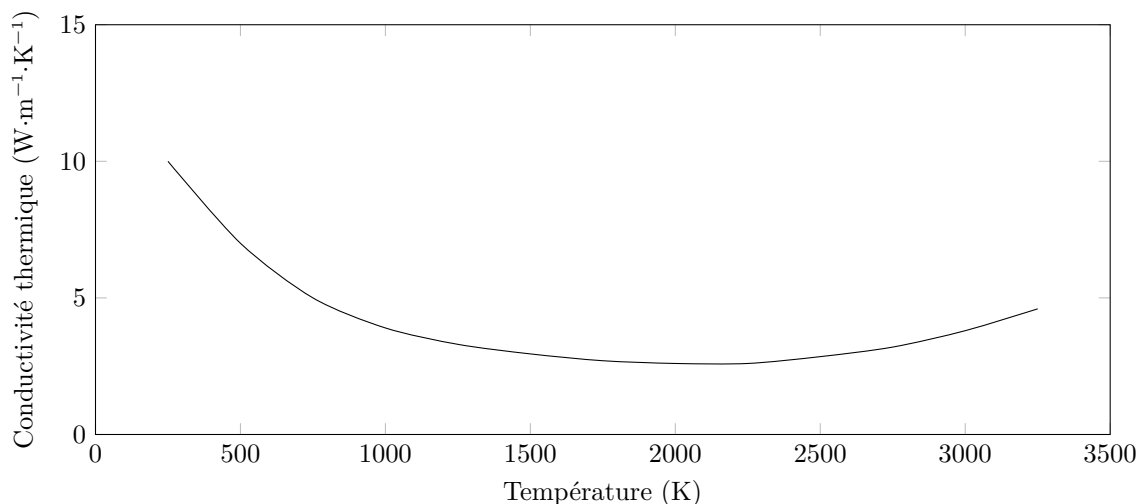


Figure 6

III Du réacteur aux turbines

Au niveau du circuit secondaire, la centrale fonctionne comme représenté sur le schéma de la figure 7. Dans ce schéma x désigne le titre de vapeur, c'est à dire le rapport entre le débit massique de vapeur d'eau et le débit massique total (liquide et vapeur).

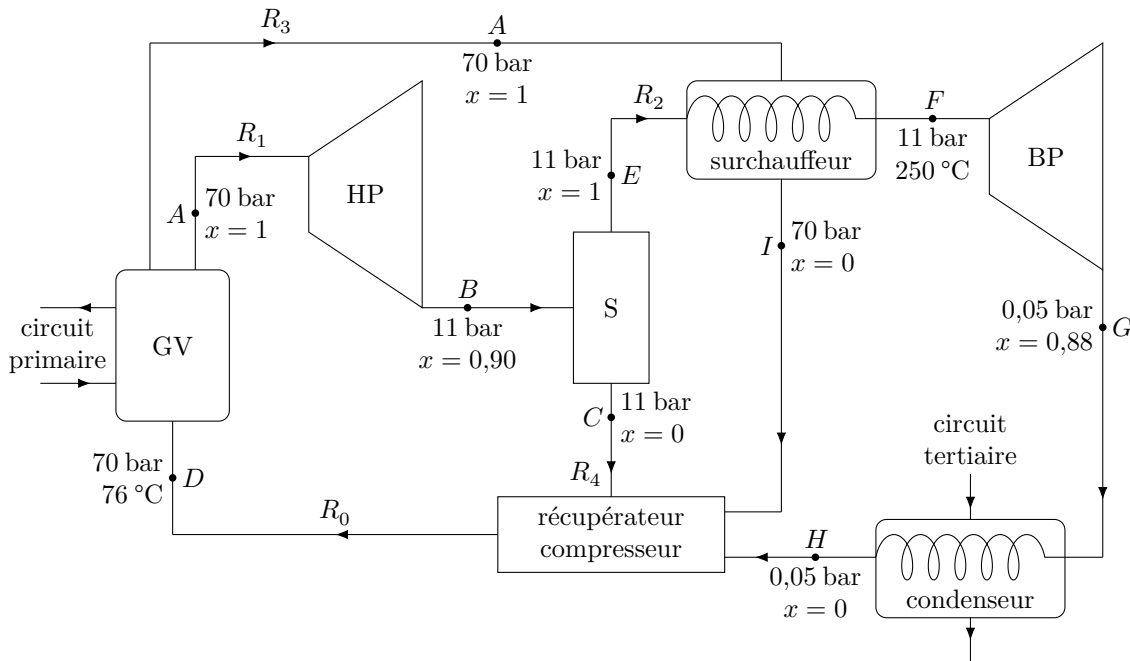


Figure 7

Les échanges d'énergie avec le circuit primaire se font au niveau du générateur de vapeur (GV), dans lequel l'eau du circuit secondaire entre avec un débit R_0 , initialement à l'état (D). À la sortie du générateur de vapeur, l'eau est sous forme de vapeur saturante (état A). La plus grande partie (débit R_1) est dirigée vers la turbine haute pression (HP) ; une autre (débit R_3) est destinée au surchauffeur. Dans la turbine, l'eau passe de l'état (A) à l'état (B). De là, l'eau passe dans un séparateur dont le seul rôle est de répartir les deux phases par gravité. En haut de ce séparateur sort de la vapeur saturante dans l'état (E), avec un débit R_2 , qui est ensuite surchauffée jusqu'à $T_F = 281\text{ °C}$ grâce à la liquéfaction totale jusqu'à l'état (I) d'une partie de la vapeur issue du générateur de vapeur. Une fois surchauffée, la vapeur dans l'état (F) passe dans une turbine basse pression (BP) dont elle sort à l'état (G). Elle est ensuite entièrement liquéfiée par échange thermique avec le circuit tertiaire (en général, de l'eau de rivière ou de mer) jusqu'à l'état (H). Avant d'être réinjectée dans le générateur de vapeur, un récupérateur-compresseur, récolte l'eau entièrement liquide issue du séparateur, du surchauffeur et du condenseur et les comprime jusqu'à l'état (D).

III.A – Approche générale

Soit un élément quelconque, avec une seule entrée et une seule sortie, pour lequel on note :

- R le débit massique de fluide à travers l'élément ;
- P_u la puissance fournie au fluide par les forces autres que pressantes ;
- P_{th} , la puissance thermique fournie au fluide ;
- h_e , l'enthalpie massique du fluide juste avant l'entrée ;
- h_s , l'enthalpie massique du fluide juste après la sortie.

Q 25. Montrer que $R(h_s - h_e) = P_u + P_{th}$.

Dans le cas d'un élément comportant plusieurs entrées et sorties, le bilan précédent se généralise en

$$\sum_{i \text{ (sorties)}} R_i h_{s,i} - \sum_{j \text{ (entrées)}} R_j h_{e,j} = P_u + P_{th}.$$

III.B – Analyse du cycle

Q 26. Placer tous les états A, B, C, ..., I sur le diagramme (T, s) de l'eau fourni dans le document réponse.

III.B.1) Enthalpies massiques

Q 27. Par lecture graphique, déterminer la valeur de l'enthalpie massique h_F de l'eau dans l'état (F).

Q 28. Calculer les valeurs des enthalpies massiques h_B et h_G à partir des données numériques fournies.

Q 29. Estimer la valeur de l'enthalpie massique h_D .

III.B.2) Calcul des différents débits

Q 30. Exprimer les relations simples qui existent entre les débits R_0 , R_1 et R_3 , puis entre R_2 , R_1 et x_B (titre de vapeur au point B) et enfin entre R_4 , R_1 et x_B .

Q 31. Le surchauffeur est un simple échangeur de chaleur entre deux fluides ; il n'y a donc aucune puissance mécanique mise en jeu. En supposant que le surchauffeur soit parfaitement calorifugé, trouver une relation entre les débits R_2 et R_3 faisant intervenir des enthalpies massiques à préciser.

Q 32. Calculer numériquement les différents débits.

III.B.3) Au niveau des turbines

Les machines réalisant la compression ou la détente d'un fluide ont une conception très compacte pour des raisons de poids, d'encombrement et de coût. Pour les mêmes raisons, elles tournent très vite (plusieurs milliers de tours par minute).

Q 33. Les transformations dans les turbines HP et BP sont-elles réversibles ? Justifier soigneusement votre réponse. Dans le cas où les transformations sont irréversibles, quelles sont les causes de cette irréversibilité ?

III.B.4) Au niveau du condenseur

Le condenseur fonctionne de la même manière que le surchauffeur.

Q 34. Déterminer l'expression du débit que doit avoir le circuit tertiaire pour que son élévation de température ne dépasse pas 5°C . Estimer puis commenter son ordre de grandeur. Justifier l'existence d'une limite supérieure de l'élévation de température.

III.C – Rendement du cycle

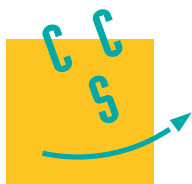
III.C.1) Rendement effectif

Q 35. Définir et calculer un rendement pour l'ensemble du circuit secondaire. Comparer ce rendement à d'autres rendements connus. (Pour information, chaque réacteur est en fait associé à 4 circuits secondaires identiques.)

III.C.2) Intérêt du surchauffeur

Q 36. À l'aide d'une démarche à préciser, déterminer une estimation du rendement que l'on obtiendrait en l'absence de surchauffeur. Commenter.

• • • FIN • • •



À propos de la purification de l'eau du circuit primaire dans une centrale nucléaire

Un réacteur nucléaire à eau sous pression est constitué de trois principaux circuits d'eau qui permettent l'évacuation de la chaleur (figure 1). Le circuit primaire permet le transfert de l'énergie depuis le cœur du réacteur (où se situe le combustible et s'opère la fission nucléaire) vers le générateur de vapeur.

La contamination de l'eau du circuit primaire provient principalement de la corrosion des parois métalliques (cuve de réacteur, tuyaux, pompes, etc.). La conséquence est qu'une fraction des éléments constitutifs des aciers va se solubiliser et ainsi progressivement charger en ions métalliques le fluide primaire en s'y accumulant, car il circule en circuit fermé. Le contrôle et la purification de l'eau sont nécessaires, ce qui est réalisable *via* la mise en dérivation d'une certaine quantité de fluide.

Ce sujet s'intéresse tout d'abord à l'élément plutonium et à son oxyde présent dans la composition du combustible nucléaire MOX (partie I). Il présente ensuite les résines échangeuses d'ions qui sont utilisées pour purifier l'eau (partie II). Enfin, il aborde la technique de spectrométrie ICP-AES qui permet notamment l'étude de l'abondance des éléments métalliques présents dans le fluide primaire (partie III).

Certaines données numériques et un formulaire sont fournis en fin d'énoncé. Il importe d'en prendre connaissance avant de traiter le sujet.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent une prise d'initiative de la part du candidat. Elles sont signalées par une barre dans la marge gauche. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche de résolution, les hypothèses effectuées et d'illustrer le raisonnement, le cas échéant, par des schémas. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions. Les résultats établis dans ces questions ne sont toutefois pas indispensables pour le traitement des autres questions du problème.

De façon plus générale, le candidat est invité à expliciter toutes les hypothèses et initiatives qu'il est amené à prendre, y compris en dehors de ces questions.

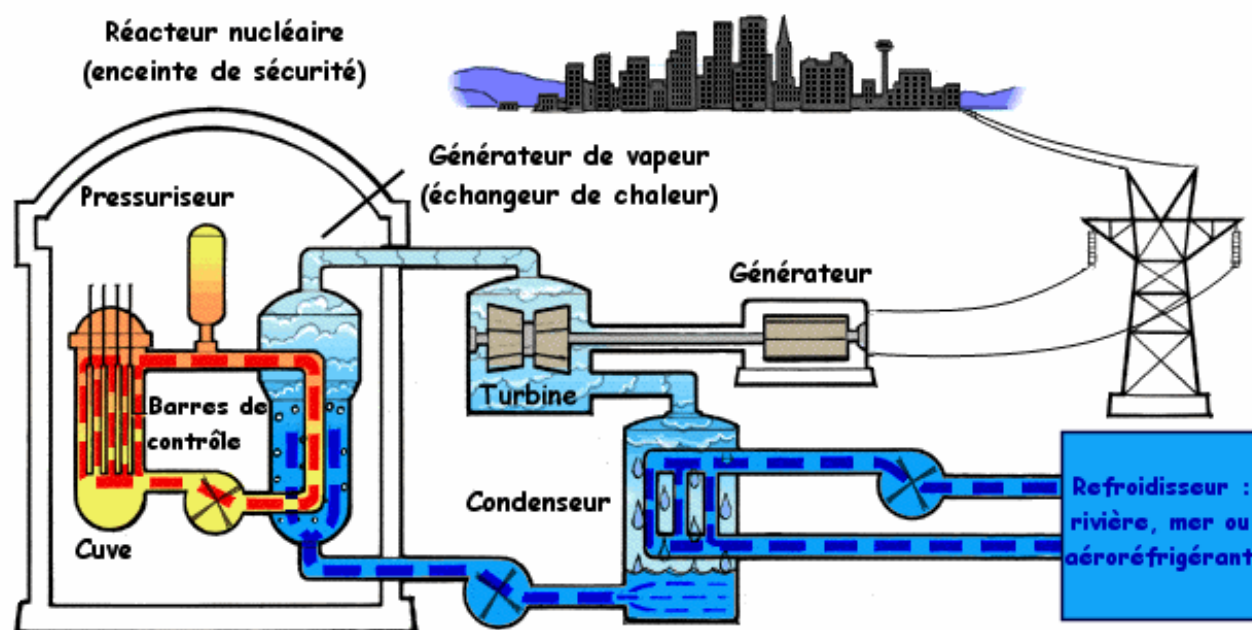


Figure 1 Schéma des trois circuits principaux d'une centrale nucléaire à eau sous pression¹

¹ Frédéric Gressier. Étude de la rétention des radionucléides dans les résines échangeuses d'ions des circuits d'une centrale nucléaire à eau sous pression. Chemical Sciences. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.

I Le plutonium dans le combustible nucléaire MOX

Le combustible nucléaire MOX est utilisé dans certains réacteurs nucléaires. Il s'agit d'un mélange d'oxydes d'uranium et de plutonium dans lequel ce dernier élément intervient à environ 8 %.

I.A – Présentation du plutonium

Le plutonium est un élément chimique qui est des plus rares dans la nature et presque exclusivement produit par l'homme dans le cœur des réacteurs nucléaires de 1940 à nos jours.

Q 1. Le numéro atomique du plutonium est 94 et sa configuration électronique dans son état fondamental est $[\text{Rn}]5f^67s^2$. Indiquer sa place dans la classification périodique (bloc, période). Préciser les électrons de cœur et ceux de valence.

Q 2. Le plutonium possède-t-il des électrons célibataires à l'état fondamental ? Si oui, proposer un quadruplet de nombres quantiques, que l'on nommera, pouvant caractériser l'un des électrons célibataires.

I.B – Oxyde de plutonium

L'oxyde de plutonium Pu_xO_y , qui entre dans la composition du combustible MOX, est un solide ionique constitué d'ions Pu^{4+} et O^{2-} . Il cristallise dans l'une des structures représentées figure 2.

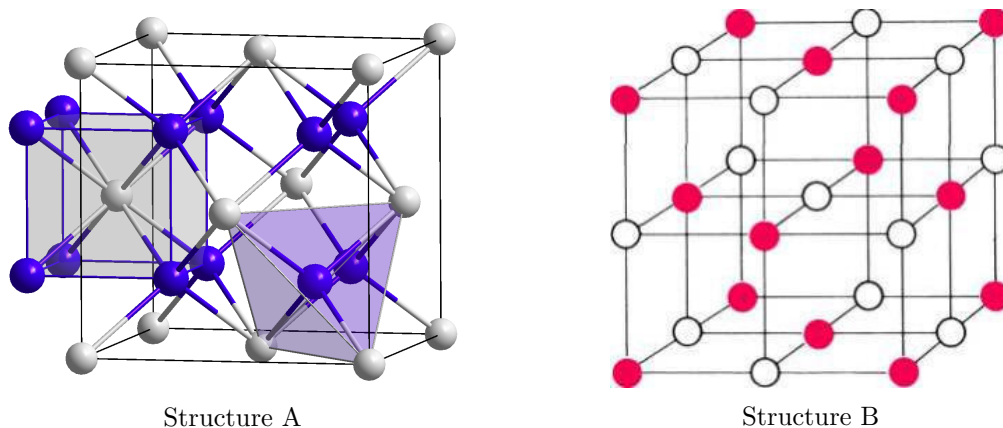


Figure 2

Q 3. Déterminer, pour chaque structure et pour chaque entité, le nombre d'entités en propre dans la maille concernée. Montrer qu'une seule des deux structures est possible pour Pu_xO_y . Donner alors la formule de cet oxyde et le nombre de motifs par maille.

Q 4. Déterminer la coordinence de chacun des ions dans la structure choisie à la question précédente.

Q 5. On donne respectivement le rayon ionique de l'ion oxyde O^{2-} et la masse volumique de l'oxyde de plutonium : $R(\text{O}^{2-}) = 140 \text{ pm}$ et $\rho_{\text{Pu}_x\text{O}_y} = 11,5 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. En admettant la tangence anion-cation, calculer le rayon ionique du plutonium Pu^{4+} . Commenter le résultat obtenu sachant que la valeur trouvée dans la littérature est de 86 pm.

Q 6. Calculer la compacité de cette structure. Commenter la valeur obtenue.

II Les résines échangeuses d'ions et la purification de l'eau

L'eau du circuit primaire d'une centrale nucléaire est traitée à l'aide de filtres et de résines échangeuses d'ions (notées REI dans la suite du sujet). Ce traitement à base de REI permet de décontaminer le fluide tout en conservant ses propriétés physicochimiques.

Les REI possèdent la faculté d'échanger des ions contenus en leur sein avec les ions contenus dans la solution aqueuse qui est mise en contact avec elles. Elles sont constituées de chaînes polymères réticulées entre elles par des agents spécifiques. Les résines échangeuses de cations portent des charges négatives sur leur squelette qui sont compensées par des ions Na^+ ou H^+ appelés « contre-ions ». La figure 3 montre un exemple d'échange de ces ions.

II.A – Synthèse des REI

Les billes de polymères constituant les REI correspondent à un polystyrène réticulé porteur de groupes fonctionnels. Pour les synthétiser, un des précurseurs utilisés est le vinylbenzène, aussi appelé styrène. Nous étudierons dans cette partie une méthode de synthèse industrielle du styrène.

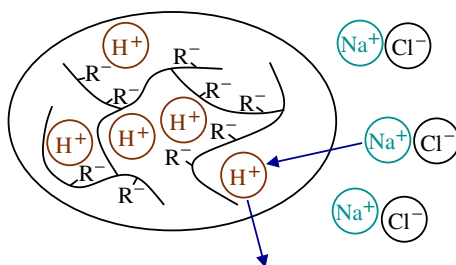
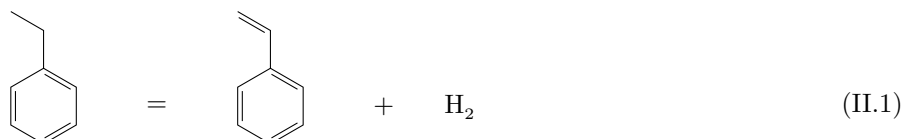


Figure 3

La production de styrène (noté S) est très largement assurée par la déshydrogénation de l'éthylbenzène (noté E), selon une réaction d'équation :



Pour simplifier, nous noterons aussi l'équation de cette réaction : $E = S + \text{H}_2$.

Les gaz seront considérés comme parfaits. La réaction s'effectue en phase gazeuse.

Q 7. À l'aide de la figure 4, calculer l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ et l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$, en considérant qu'elles sont indépendantes de la température dans le domaine de température étudié. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Aurait-on pu prévoir sans calcul le signe de l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$?

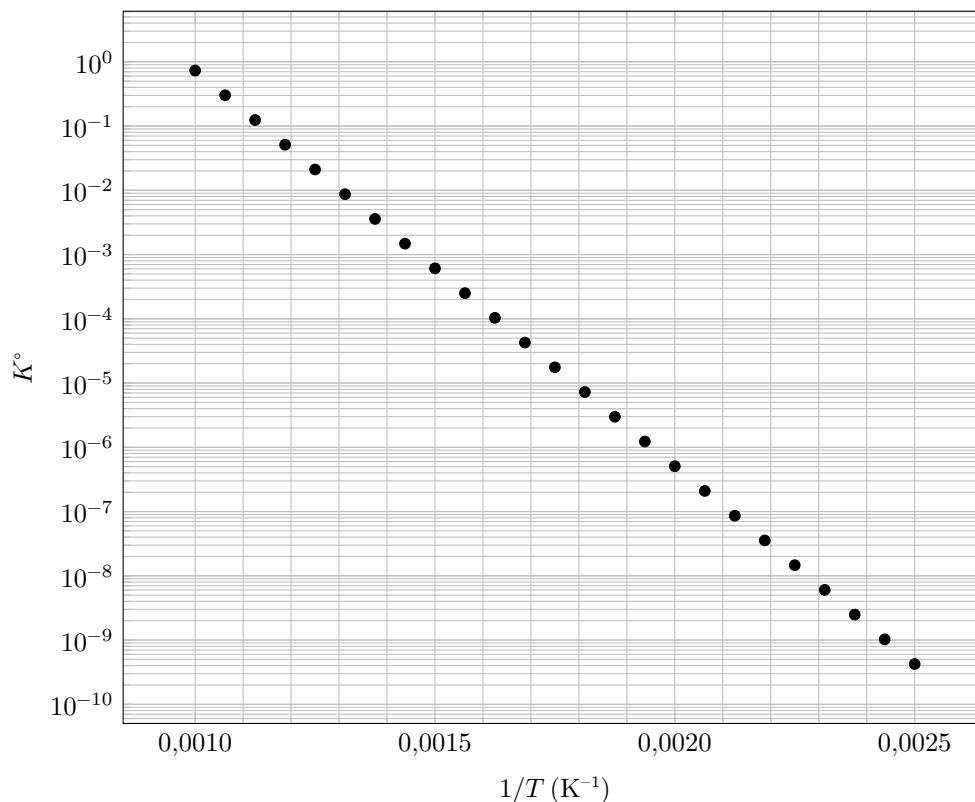


Figure 4

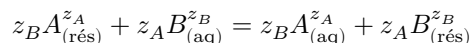
Q 8. Prévoir, justification à l'appui, dans quel sens l'équilibre est déplacé lors d'une augmentation de pression à température et composition constantes.

Q 9. Prévoir, justification à l'appui, dans quel sens l'équilibre est déplacé lors d'une élévation de température à pression et composition constantes.

Q 10. La synthèse industrielle du styrène par déshydrogénation de l'éthylbenzène s'opère généralement dans un réacteur de volume constant où l'on mélange de la vapeur d'eau à l'éthylbenzène (dans un rapport de plusieurs moles d'eau par mole d'éthylbenzène), à une température d'environ 650 °C et à une pression totale voisine de la pression atmosphérique, en présence d'un catalyseur à base d'oxydes de fer. Commenter le choix de ces conditions opératoires.

II.B – Détermination de la capacité d'échange d'une résine

Une résine échangeuse d'ions peut être vue comme un réservoir de contre-ions prêts à être échangés. La capacité d'échange maximale (notée CE) de ce réservoir, c'est-à-dire la quantité de matière de contre-ions qui peuvent être échangés par unité de masse de résine humide, est une donnée essentielle à connaître pour les manipulateurs. Il est précisé que les ions présents sur la résine ne peuvent être impliqués que dans des réactions d'échange, comme celles que l'on peut écrire avec le formalisme de Vanselow. Dans ce formalisme, on part de l'hypothèse fondamentale que l'échange d'ions peut se traduire par une réaction chimique classique. Pour exemple, si la réaction étudiée se fait entre une résine contenant initialement un ion A^{z_A} et une solution contenant le contre-ion B^{z_B} , on écrira pour l'échange



La détermination expérimentale de la valeur de CE d'une résine échangeuse d'ions H^+ peut s'obtenir par un protocole de titrage en retour. L'étude se fera sur la résine IRN 97H.

Une masse m connue de 0,50 g de résine humide est introduite dans un bécher contenant $V = 100,0$ mL d'une solution de soude en excès ($Na^+ + HO^-$) à la concentration $C = 0,025$ mol·L⁻¹. Après 2 h d'agitation, un volume $V_0 = 50,0$ mL de solution est prélevé et la soude en excès est dosée par une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_1 = 0,10$ mol·L⁻¹. Le suivi du titrage se fait par pH-métrie et la courbe obtenue est donnée figure 5. On mesure un volume équivalent noté V_{eq} .

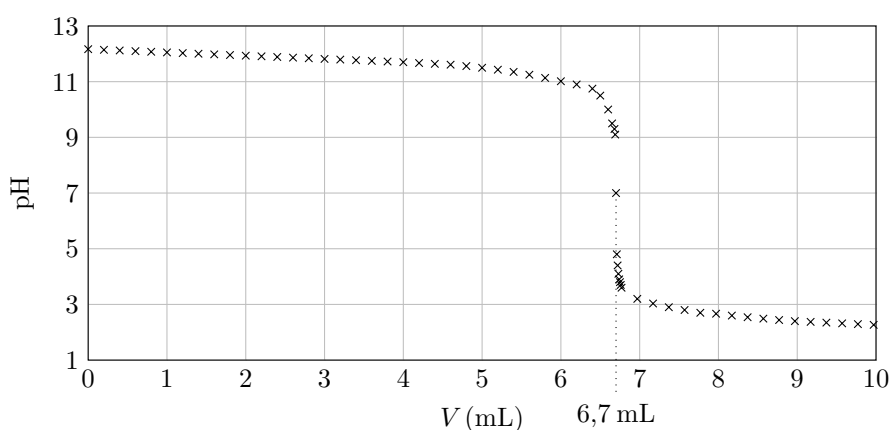


Figure 5 Suivi pH-métrique du titrage de la soude en excès par la solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_1 = 0,10$ mol·L⁻¹

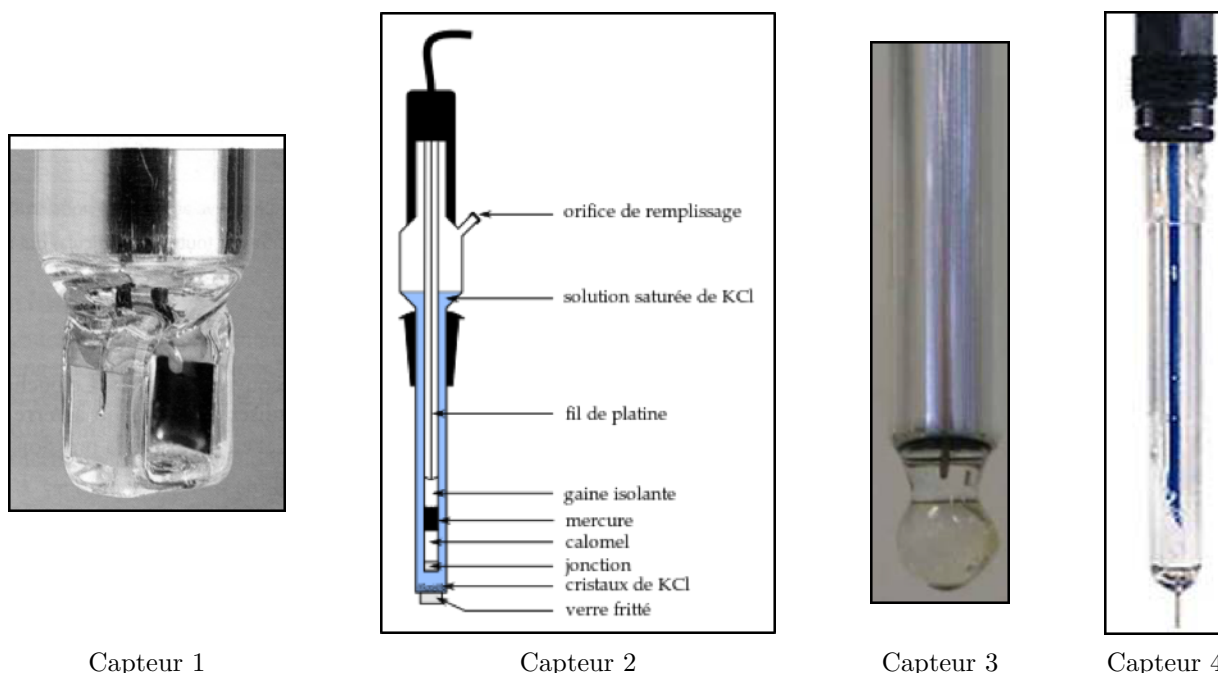


Figure 6 Différents capteurs

Q 11. En utilisant le formalisme d'échange ionique de Vanselow, écrire l'équation bilan traduisant l'échange des ions H^+ sur la résine.

- Q 12.** Écrire l'équation de la réaction support du titrage.
- Q 13.** Proposer un montage expérimental pour réaliser le dosage : choix de la verrerie et choix des capteurs. Vous donnerez le nom de chaque capteur représenté figure 6 et indiquerez celui (ceux) à utiliser pour l'expérience ainsi que leur rôle.
- Q 14.** Exprimer, avec les données littérales fournies, la quantité d'ions hydroxyde HO^- restant, notée $n_{\text{HO}^- - r}$ dans le volume V initial. Faire l'application numérique.
- Q 15.** Lors d'une séance de travaux pratiques, quand on réalise un seul titrage, à quel type d'évaluation de l'incertitude peut-on procéder ? Expliquer. Le volume V_0 a été mesuré avec une pipette jaugée double trait de tolérance 0,1 mL. Identifier au moins une source possible d'incertitude.
- Q 16.** On estime l'incertitude-type sur $n_{\text{HO}^- - r}$ à 1×10^{-5} mol. De quelle manière devez-vous présenter le résultat sur $n_{\text{HO}^- - r}$? On fournira une incertitude élargie pour un niveau de confiance de 95 %.
- Q 17.** Écrire l'expression littérale de la capacité d'échange CE puis faire l'application numérique.

III La spectrométrie ICP-AES

Cette partie s'intéresse à quelques aspects de la spectrométrie ICP-AES, acronyme de *Inductively Coupled Plasma - Atomic Emission Spectrometry* (plasma à couplage inductif - spectrométrie d'émission atomique). Il s'agit d'une technique d'analyse de grande précision permettant la mesure de la nature et de la concentration des éléments qui se trouvent dans les matières solides, les liquides ou les gaz. On peut notamment déterminer grâce à celle-ci l'abondance des métaux lourds dans l'eau du circuit primaire d'une centrale nucléaire ou encore contrôler l'efficacité des résines échangeuses d'ions.

Un spectromètre ICP-AES utilise une torche à plasma (figure 7). À la base de la torche sont introduits de l'argon, ainsi que l'échantillon à analyser à l'état d'aérosol (microgouttelettes d'un diamètre maximum de l'ordre de 100 μm). Le plasma est initié par l'envoi d'une décharge électrique et doit ensuite être entretenu à l'aide d'un bobinage qui crée un champ magnétique variable à haute fréquence.

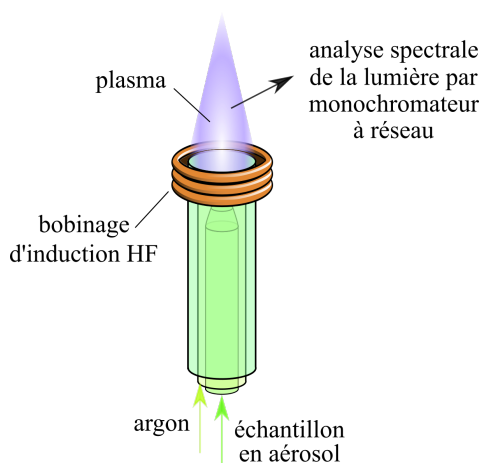
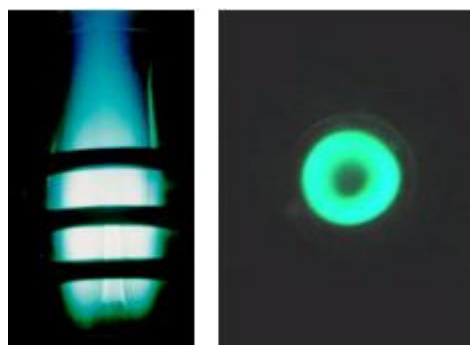


Schéma d'une torche à plasma



Photographies du plasma d'une torche
Vue latérale à gauche et vue axiale à droite

Figure 7

Dans le plasma, à plusieurs milliers de kelvins, l'échantillon est vaporisé, désolvaté, atomisé voire ionisé. Les atomes sont ionisés si leur énergie d'ionisation est inférieure à celle de l'argon, ce qui est le cas de la plupart des éléments chimiques.

Chaque atome ou ion excité émet plusieurs photons (rayonnement lumineux) à des longueurs d'onde qui lui sont propres lors de son retour à l'état fondamental. La lumière est envoyée vers un monochromateur à réseau dont la résolution spectrale en longueur d'onde est très élevée, voisine de 20 pm. Les signaux lumineux sont mesurés par un capteur qui permet l'analyse de longueurs d'onde allant de 166 à 847 nm, l'intensité des pics émis étant fonction de la concentration de l'échantillon initial.

Nous allons dans un premier temps étudier un modèle simple de la partie optique du dispositif. Ensuite, nous nous intéresserons aux effets du champ magnétique variable sur le plasma.

III.A – Spectroscopie et résolution

III.A.1) Interférences à deux ondes

On considère le dispositif de la figure 8. Une pupille dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est percée de deux trous d'Young identiques espacés de la distance a . Une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ (dans l'air, assimilé au vide) éclaire cette pupille en incidence normale. On observe la figure obtenue dans le plan focal image d'une lentille de centre optique O et d'axe optique (Oz). On repère un point M de l'écran recevant les ondes issues des deux trous par ses coordonnées cartésiennes (x, y, f') .

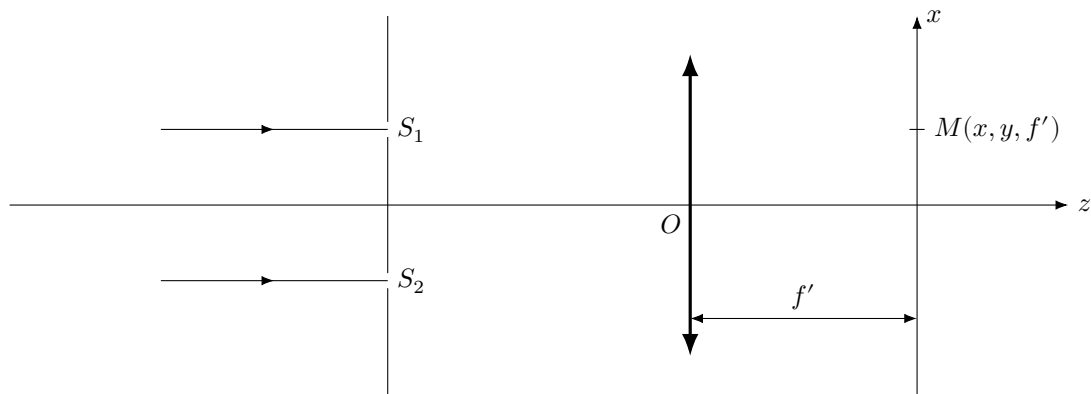


Figure 8

- Q 18.** Établir l'expression de la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de a , x et f' , en faisant les approximations jugées utiles.
- Q 19.** Établir l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$. Décrire la figure que l'on observe sur l'écran.
- Q 20.** Calculer numériquement l'interfrange pour $a = 100 \mu\text{m}$, $f' = 20 \text{ cm}$ et $\lambda = 499,3 \text{ nm}$ (longueur d'onde associée à une raie du nickel présent dans un échantillon).
- Q 21.** La résolution d'un spectromètre est le plus petit écart entre deux longueurs d'onde que l'on peut séparer. Expliquer pourquoi le dispositif précédent à deux trous d'Young ne peut permettre d'atteindre la résolution voisine de 20 pm d'un spectromètre ICP-AES.

III.A.2) Interférences à N ondes

On considère à présent un réseau constitué de N ouvertures identiques ($N > 2$), distantes de a suivant l'axe parallèle à (Ox) . Ces N ouvertures sont éclairées par une onde plane progressive monochromatique en incidence normale de longueur d'onde λ . Sur la figure 9, l'angle θ , orienté selon le sens trigonométrique, indique une direction des interférences à l'infini à N ondes.

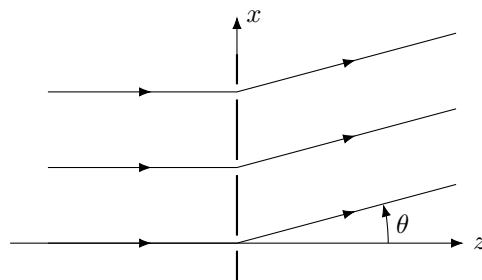


Figure 9

- Q 22.** Expliciter le déphasage φ entre deux ondes issues de trous successifs en fonction de λ , a et θ .
- Q 23.** Justifier qu'on observe un maximum d'intensité si on a $\varphi = 2p\pi$ avec p un entier relatif accessible. Comment appelle-t-on l'entier p ? Exprimer l'angle θ_1 correspondant au pic $p = 1$.
- Q 24.** Le réseau utilisé dans certains spectromètres ICP-AES comporte 1800 ouvertures par millimètre. Calculer numériquement θ_1 pour $\lambda = 499,3 \text{ nm}$. Pourquoi n'est-il plus envisageable d'utiliser le dispositif de projection (lentille et écran) décrit en III.A.1 ?
- Q 25.** Établir que la demi-largeur d'un pic d'intensité lumineuse est donnée par $\Delta\varphi = 2\pi/N$ et en déduire la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic observé dans la direction θ_1 . Évaluer numériquement $\Delta\theta$, sachant que les N ouvertures éclairées du réseau occupent une largeur $\ell = 5 \text{ cm}$.
- Q 26.** On considère que la source émet une deuxième longueur d'onde λ' très proche de λ . On note θ'_1 l'angle d'observation du premier pic ($p = 1$) correspondant à la longueur d'onde λ' . On admet que l'on peut séparer les deux pics seulement si $|\theta'_1 - \theta_1| \geq \Delta\theta$. Obtenir l'expression de la résolution du dispositif en fonction des grandeurs utiles parmi λ , N et a .
- Q 27.** Évaluer numériquement la résolution du réseau utilisé. Proposer des raisons visant à expliquer la différence entre cette valeur et celle, voisine de 20 pm , d'un spectromètre ICP-AES.

III.B – Interaction champs – plasma dans la torche

L'étude analytique du plasma de la torche de la figure 7 est complexe en raison notamment de la géométrie cylindrique du dispositif, de la forme du bobinage d'induction haute fréquence, de l'écoulement du gaz, des effets thermiques... On va néanmoins chercher à dégager quelques aspects physiques à l'aide d'une approche simplifiée en géométrie unidimensionnelle cartésienne.

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le plasma est un gaz composé d'ions supposés fixes et d'électrons mobiles. Il est localement neutre dans tout le domaine $-a < x < a$ qu'il occupe et où sa densité électronique n est uniforme et constante.

Le domaine du plasma est délimité par deux lames planes identiques (épaisseur b) qui modélisent le bobinage inducteur haute fréquence. La lame de droite est parcourue par un vecteur densité de courant électrique uniforme $J(t)\vec{e}_y$ et celle de gauche par le vecteur opposé $-J(t)\vec{e}_y$ (figure 10). On néglige les effets de bords selon les directions y et z .

On admet dans toute la suite que les fréquences de travail sont suffisamment faibles pour se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique. Cette hypothèse permet d'écrire les équations de Maxwell sous la forme approchée suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Q 28. Donner, sans démonstration, l'expression, sous forme intégrale, des quatre équations de Maxwell écrites ci-dessus dans une formulation locale.

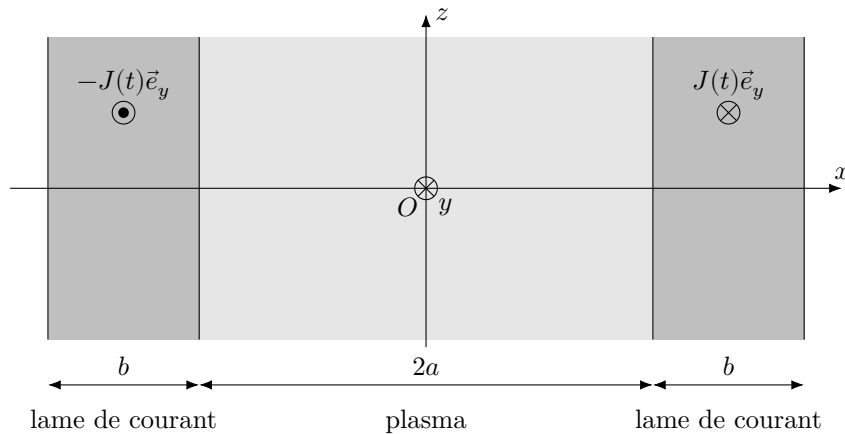


Figure 10

III.B.1) Champ magnétique produit par les lames

Q 29. Déterminer, en explicitant soigneusement l'argumentation, le champ magnétique produit dans tout l'espace uniquement par la lame de gauche (on ne tiendra donc pas compte de l'autre lame et du plasma).

Q 30. En déduire le champ magnétique produit dans tout l'espace par l'ensemble des deux lames, sans tenir compte du plasma. Représenter en fonction de x , pour une valeur donnée de $J(t)$ non nulle, le profil de ce champ magnétique.

III.B.2) Propriétés dans le plasma

Q 31. Expliquer qualitativement pourquoi il peut exister dans le plasma un champ électrique dû aux courants dans les lames. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{E}(x, t) = E(x, t)\vec{e}_y$ et justifier que $E(x, t)$ est une fonction impaire de la variable x .

Q 32. Le champ magnétique qui règne dans le plasma ne correspond pas à celui produit par les lames calculé précédemment. Expliquer qualitativement pourquoi. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{B}(x, t) = B(x, t)\vec{e}_z$ et justifier que $B(x, t)$ est une fonction paire de la variable x .

Q 33. Le vecteur densité de courant électrique dans le plasma s'écrit $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{e}_y$. Expliciter, d'une part, l'équation aux dérivées partielles reliant $E(x, t)$ et $B(x, t)$ et, d'autre part, celle reliant $B(x, t)$ et $j(x, t)$. À ce stade, il manque une loi de réponse du plasma (c'est-à-dire une relation liant $\vec{j}(x, t)$ et $\vec{E}(x, t)$) afin d'accéder aux profils des divers champs en son sein. On souhaite répondre à ce manque en utilisant tour à tour deux modèles très différents. Il s'agit de voir lequel des deux est le plus acceptable pour comprendre ce qu'il se passe dans une torche à plasma dans notre approche simplifiée.

III.B.3) Modèle non collisionnel

Dans ce premier modèle, on néglige les collisions dans le plasma ainsi que la force magnétique. Les électrons, de densité volumique n uniforme et constante, de masse m et de charge $-e$, sont non relativistes et la seule force qui agit sur eux est d'origine électrique. Le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}(x, t)$ et le champ électrique $\vec{E}(x, t)$ sont alors liés par la relation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{j}(x, t)}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}(x, t).$$

Q 34. Montrer que $E(x, t)$ est solution de $\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2} E(x, t) = 0$ où λ est une grandeur à déterminer en fonction des données. Vérifier que l'expression de λ lui confère une dimension cohérente avec celle attendue au regard de l'équation différentielle précédente.

Q 35. Obtenir la forme générale de $E(x, t)$. En déduire que $B(x, t) = \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(a/\lambda)} B_0(t)$ en posant $B_0(t) = B(a, t)$. On ne tiendra pas compte de tout champ magnétique statique.

Q 36. Déterminer $E(x, t)$ et $j(x, t)$ en fonction de $x, a, \mu_0, \lambda, B_0(t)$ et $dB_0(t)/dt$.

Q 37. Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux électrons et l'exprimer en fonction des données du problème. Que vaut-elle en moyenne sachant que l'excitation par le bobinage d'induction haute fréquence est périodique ? Pourquoi ce modèle n'est-il pas acceptable pour décrire l'entretien du plasma de la torche du spectromètre ICP-AES ?

III.B.4) Modèle collisionnel

Dans ce second modèle, on considère que la densité du plasma est telle qu'il n'est plus possible de négliger les collisions en son sein. On admet qu'il se comporte alors comme un milieu ohmique, c'est-à-dire que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où σ est la conductivité électrique du plasma est une grandeur réelle, supposée uniforme et constante.

Q 38. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $B(x, t)$.

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . Le champ magnétique dans le plasma est associé au champ complexe $\vec{B}(x, t) = \underline{f}(x) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$. Le champ électrique est associé au champ complexe $\vec{E}(x, t) = \underline{g}(x) \exp(i\omega t) \vec{e}_y$. Les fonctions $\underline{f}(x)$ et $\underline{g}(x)$ sont à priori à valeurs complexes. On pose la constante réelle $f_0 = \underline{f}(a) = \underline{f}(-a)$.

Q 39. On note $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$. Quelle est la dimension de δ ? Justifier.

Q 40. Déterminer le champ magnétique complexe $\vec{B}(x, t)$ en fonction de x, t, a, ω, δ et f_0 en faisant intervenir la fonction cosinus hyperbolique à variable complexe.

Une fois le champ magnétique déterminé, il est possible d'en déduire l'expression du champ électrique complexe $\vec{E}(x, t)$ dans le plasma, puis la puissance volumique moyenne cédée au plasma.

On choisit les valeurs numériques suivantes proches des conditions de la torche à plasma d'un spectromètre ICP-AES : $a = 1,0 \text{ cm}$ et $\sigma = 1 \times 10^3 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Le profil en fonction de x de la puissance volumique moyenne $\langle P_{\text{vol}} \rangle$, que l'on peut calculer à partir de l'expression du champ électrique dans le plasma, a été représenté sur la figure 11 pour diverses pulsations ω , donc divers rapports a/δ .

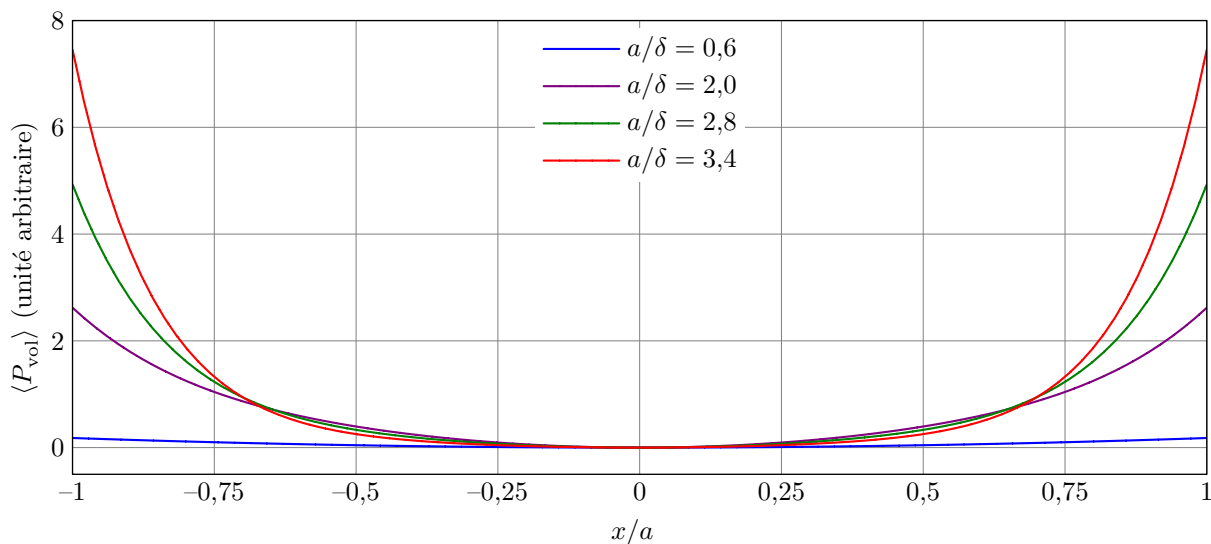


Figure 11

Q 41. Commenter l'évolution observée du profil de $\langle P_{\text{vol}} \rangle$ avec la pulsation en liaison avec les phénomènes physiques sous-jacents. En quoi ce modèle collisionnel est-il davantage acceptable que le modèle non collisionnel pour décrire la torche à plasma ? On pourra discuter la photographie de la vue axiale fournie sur la figure 7 sachant que le rayon externe de l'anneau lumineux est de l'ordre du centimètre et que la fréquence d'alimentation du bobinage d'induction haute fréquence de la torche est de l'ordre de 10 MHz.

Données

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Extrait du tableau périodique (masses molaires en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

Numéro atomique	1	8	11	94
Symbole	H	O	Na	Pu
Masse molaire	1,01	16,0	23,0	244

Formulaire

- On note i l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.
- Pour deux grandeurs $a(M, t)$ et $b(M, t)$ variant sinusoïdalement en fonction du temps avec une pulsation commune ω , on pose

$$a(M, t) = \text{Re}[\underline{a}(M, t)] = \text{Re}[\underline{a}_0(M)e^{i\omega t}] \quad \text{et} \quad b(M, t) = \text{Re}[\underline{b}(M, t)] = \text{Re}[\underline{b}_0(M)e^{i\omega t}]$$

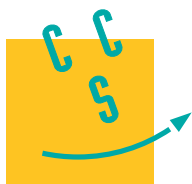
La moyenne temporelle du produit de $a(M, t)$ et $b(M, t)$ est

$$\langle a b \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\underline{a} \underline{b}^*] \quad \text{où } \underline{b}^* \text{ désigne le complexe conjugué de } \underline{b}.$$

- Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique à variable $\underline{z}$ complexe sont définies par

$$\cosh(\underline{z}) = \frac{\exp(\underline{z}) + \exp(-\underline{z})}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(\underline{z}) = \frac{\exp(\underline{z}) - \exp(-\underline{z})}{2}$$

• • • FIN • • •



Géophysique de la planète Terre

Ce sujet propose de traiter de diverses applications de la physique à l'étude de la planète Terre. On s'intéresse dans un premier temps aux méthodes de mesure du champ de pesanteur terrestre (gravimétrie) puis à leurs applications dans le génie civil. Dans un deuxième temps, on étudie les méthodes de prospection électrique des sols utilisées pour sonder des terrains.

Un ensemble de valeurs numériques est disponible en fin d'énoncé.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

I.A – Champ gravitationnel créé par la Terre

Q 1. Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en précisant les analogies entre forces électrostatiques et gravitationnelles. On notera $\vec{g}$ le champ gravitationnel.

La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T , de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C , associé à la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont l'origine O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{e}_z = \vec{e}_r$.

Q 2. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}_T$ créé par la Terre à une altitude $z > 0$.

I.B – Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

Soit un corps de masse m , assimilé à un point matériel, situé à la distance $r = R_T$ du centre C de la Terre (altitude $z = 0$). On définit le vecteur unitaire local $\vec{u}$ perpendiculaire à l'axe (Δ) de rotation de la Terre sur elle-même (figure 1).

Q 3. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel selon la verticale s'écrit, pour $z \ll R_T$: $\mathcal{G}_T(z) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$.

Q 4. Calculer l'altitude dont il faut s'élever pour observer une variation de 1,00% de $\mathcal{G}_T$.

Q 5. Donner l'expression du gradient vertical du champ gravitationnel. Que représente-t-il physiquement ?

Q 6. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Évaluer la valeur du gradient exprimée en $\mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1}$ et commenter.

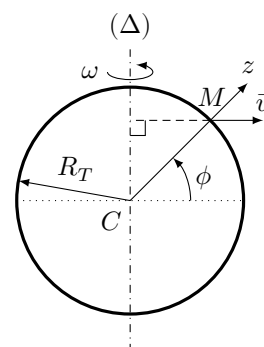


Figure 1

I.C – Champ de pesanteur terrestre

Q 7. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre. Exprimer la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ s'exerçant sur un corps de masse m , situé à la distance $r = R_T$ du centre de la Terre. La vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même est notée ω , la latitude est notée ϕ (figure 1).

Q 8. Le poids d'un objet de masse m ($\vec{P} = m\vec{g}$) est égal, par définition, à la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement. Écrire l'expression du champ de pesanteur $\vec{g}$ et le représenter sur un schéma au point M .

Q 9. Application numérique. Comparer, de manière relative, le terme d'inertie d'entraînement au terme dû au champ gravitationnel calculé à l'équateur. Commenter.

II Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

Pour déterminer le champ de pesanteur localement, les géophysiciens disposent d'instruments appelés gravimètres. Le premier gravimètre utilisé historiquement a été un pendule.

II.A – Le pendule de Richter

Q 10. Pourquoi l'utilisation d'un pendule simple (figure 2) permet-elle de remonter à la mesure de l'intensité du champ de pesanteur g ?

Q 11. En 1672 l'astronome Richter part à Cayenne en Guyane avec une horloge à pendule réglée à Paris (pendule qui bat la seconde), il s'aperçoit qu'elle retarde de 2 min 28 s par jour. En déduire la valeur de g à Cayenne (à Paris $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Pour quelle(s) raison(s) les valeurs de g sont-elles différentes à Cayenne et à Paris ? L'altitude de Paris varie entre 28 et 131 m et l'altitude de Cayenne entre 0 et 105 m.

Q 12. On admet que l'incertitude de mesure provient essentiellement de la mesure de la période T . Quelle devrait être l'incertitude sur la mesure de la période du pendule utilisé par Richter pour que l'incertitude sur la mesure de g soit égale à $1 \mu\text{gal}$ (ordre de grandeur de la précision des gravimètres actuels).

II.B – Le pendule vertical

La mesure de l'élongation d'un ressort vertical au bout duquel est suspendue une masse permet de mesurer les variations du champ de pesanteur. L'ingénieur Lucien LaCoste a inventé un ingénieux ressort à spirale de longueur au repos nulle (figure 3).

Q 13. Si le champ de pesanteur terrestre varie de $10 \mu\text{gal}$, que vaut la variation de l'élongation d'un ressort usuel d'un laboratoire de lycée ?

Q 14. Quel est l'intérêt d'utiliser un ressort de longueur au repos nulle ?

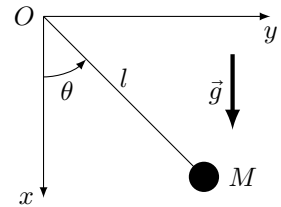


Figure 2

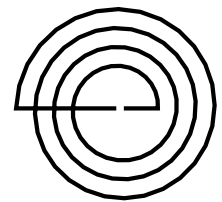


Figure 3

III Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

Le gravimètre de LaCoste et Romberg est un gravimètre qui permet de mesurer l'intensité du champ de pesanteur avec une incertitude typique de $1 \mu\text{gal}$.

Une tige de longueur a , de masse négligeable porte une masse m à l'une de ses extrémités et pivote sans frottement autour de l'axe Oz (figure 4). Le mouvement de la masse est repéré par l'angle θ , orienté par rapport à l'axe (Oz), il est donc positif sur la figure 4. La tige est retenue par un ressort de constante de raideur k , de longueur s et de longueur au repos s_0 . Ce ressort est fixé sur la tige à la distance b du point pivot. La longueur y peut être ajustée. Le dispositif est contenu dans un plan vertical, l'axe Oz est perpendiculaire à ce plan.

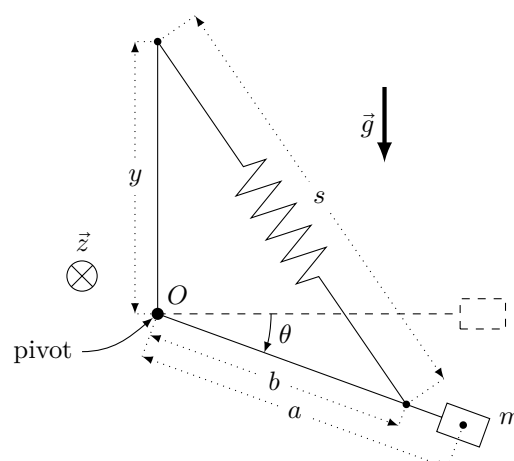


Figure 4

Q 15. Expliquer le fonctionnement du gravimètre.

Q 16. Pour le système gravimètre (tige + ressort + masse m), écrire l'expression de l'énergie potentielle totale E_p (pesanteur et élastique) du système en fonction de m , g , k , a , θ , s et s_0 .

Q 17. Donner l'expression de s en fonction de y , b et θ .

Q 18. Pour un mouvement de rotation pure le couple résultant Γ agissant sur la tige s'écrit $\Gamma = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$. Montrer que

$$\Gamma = \left(mga - kyb + \frac{k y b s_0}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} \right) \cos \theta$$

Q 19. Ce ressort a été fabriqué de telle manière que sa longueur au repos s_0 soit nulle (figure 3). Montrer que l'on peut déterminer la valeur de l'intensité de la pesanteur g en annulant ce couple. Aurait-on pu utiliser un ressort « classique » ?

Pour toute la suite, le ressort a une longueur au repos nulle.

Dans la pratique, on incline le point de support du ressort d'un petit angle ϕ (figure 5).

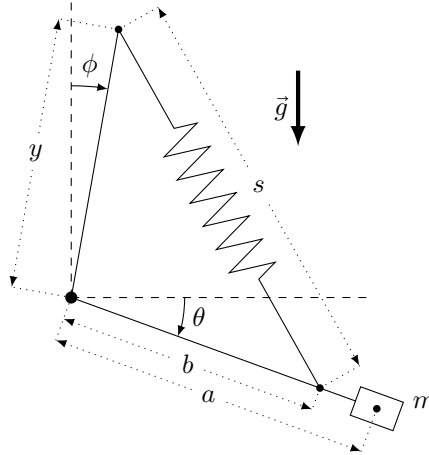


Figure 5

Q 20. Exprimer s , puis l'énergie potentielle E'_p , en fonction de y , b , ϕ et θ .

Les courbes de la figure 6 représentent l'énergie potentielle en fonction de θ du système sans et avec inclinaison du ressort (pour une meilleure visualisation, les valeurs des paramètres utilisés pour tracer ces courbes sont différentes de celles du système réel).

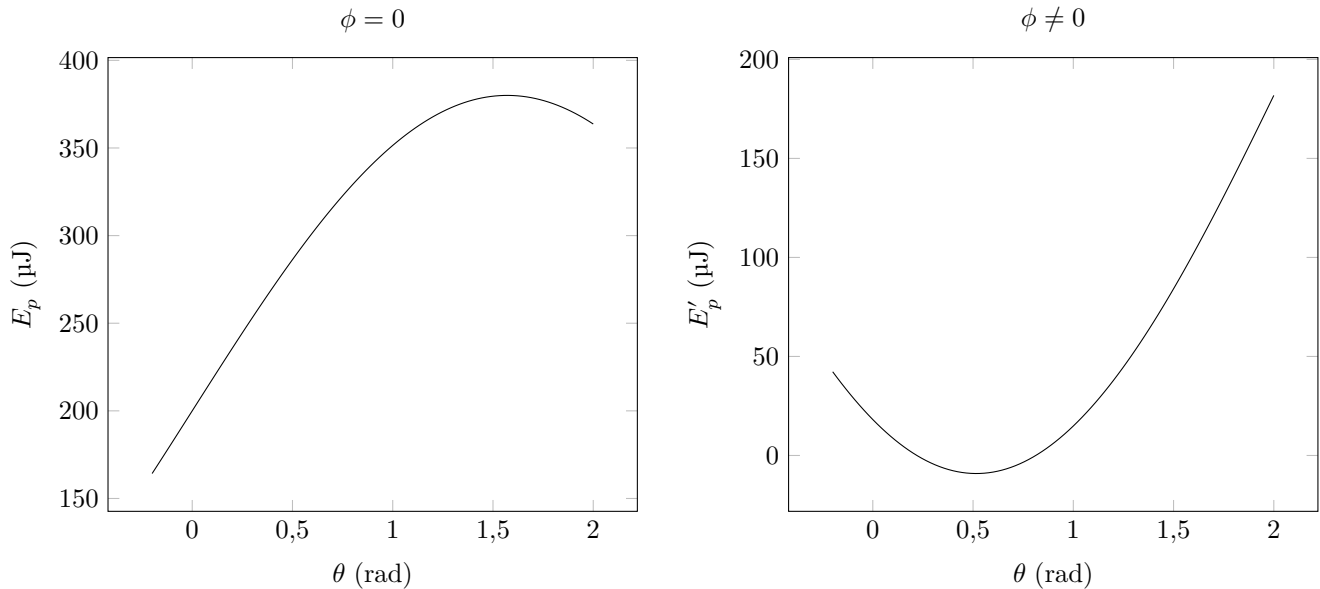


Figure 6

Q 21. Quel est l'intérêt d'avoir incliné le ressort ?

Q 22. Dans le cas où le point de support du ressort est incliné (figure 5), déterminer le nouveau couple Γ' résultant. Montrer qu'il s'écrit

$$\Gamma' = (mga - kyb \cos \phi) \cos \theta - kyb \sin \phi \sin \theta$$

Q 23. Dans la pratique, l'angle θ reste petit. Écrire l'équation différentielle vérifiée par θ . On notera J le moment d'inertie de la tige et de la masse par rapport à l'axe Oz .

Q 24. Déterminer la pulsation propre des oscillations et la position moyenne θ_0 .

On ajuste la longueur y de manière à annuler la position moyenne pour $g = g_0$.

Q 25. *Application numérique.* De quel angle ϕ doit-on incliner l'instrument pour obtenir des oscillations de période 20 s si $g_0 \simeq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a \simeq b = 1,0 \text{ cm}$ et $J = ma^2$?

Q 26. L'appareil est ensuite déplacé dans une zone où $g = g_0 + \Delta g$. Montrer que la nouvelle position moyenne θ'_0 est égale à $\theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0 \tan \phi}$.

Q 27. Si le champ de pesanteur varie de $10 \mu\text{gal}$ quel est l'ordre de grandeur de la nouvelle position moyenne ? Commenter.

IV Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (figure 7).

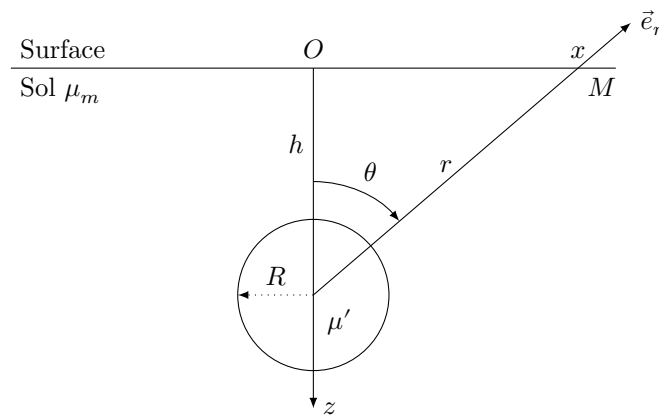


Figure 7

Q 28. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m , $\Delta\mu$, G , R , r , distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ (figure 7).

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0 .

Q 29. Déterminer g_{Bz} , la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.

Q 30. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.

Q 31. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Q 32. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.

Q 33. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?

Q 34. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure 8, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

Q 35. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?

Q 36. La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est $\rho_{\text{or}} = 19\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Q 37. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension (figure 9). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure 10.

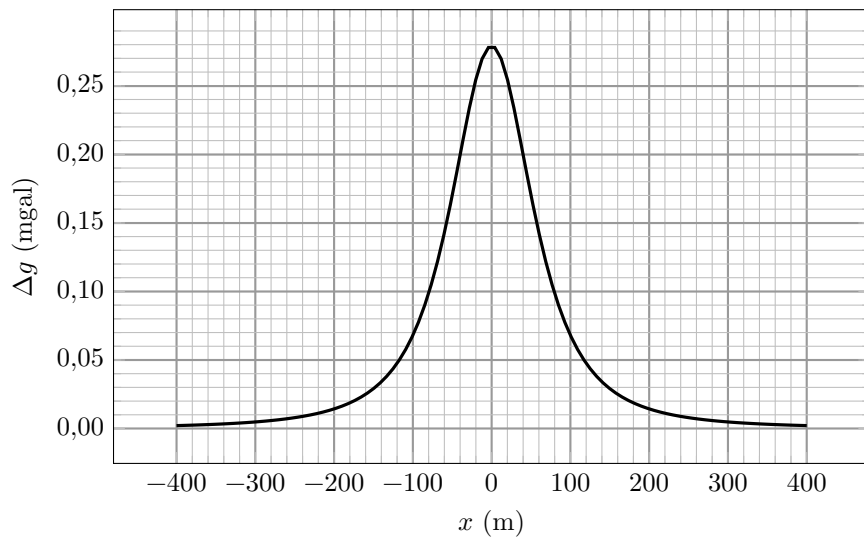


Figure 8 Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

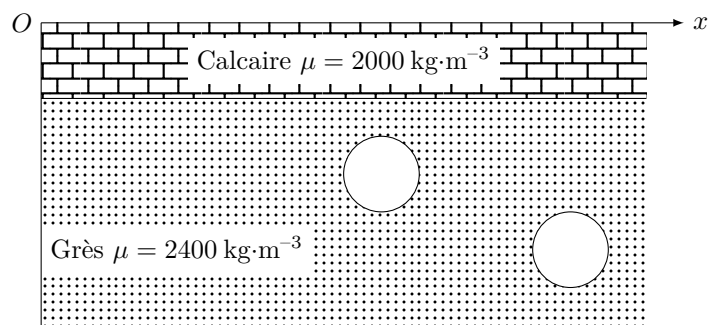


Figure 9

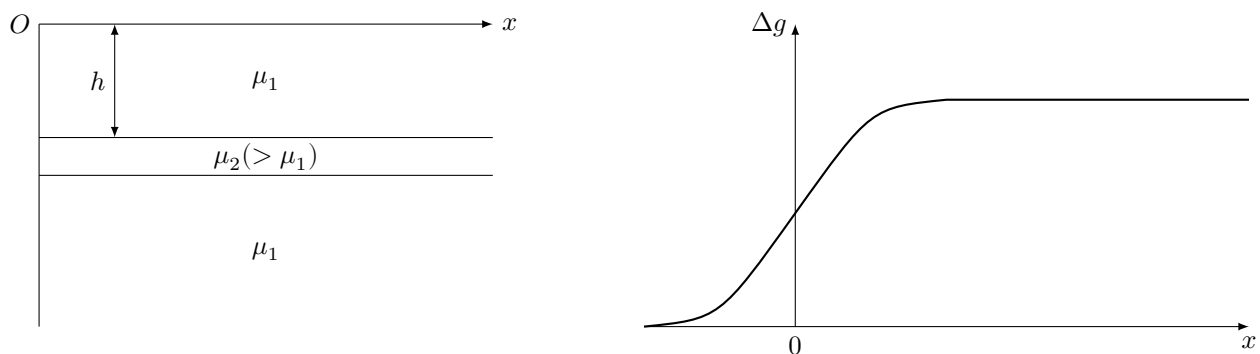


Figure 10 Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie

V Prospection électrique des sols

La prospection électrique est l'une des plus anciennes méthodes de prospection géophysique. Elle repose sur l'interprétation de la résistance électrique du terrain. Ces mesures doivent être réalisées *in situ*, cette mesure ne pouvant être réalisée en laboratoire sur un échantillon sorti de son environnement. Elles sont particulièrement adaptées à l'étude des faibles profondeurs.

V.A – Sol homogène

Q 38. Exprimer la résistance électrique d'un parallélépipède homogène de longueur L , de section A et de résistivité $\rho = 1/\sigma$ où σ est la conductivité électrique du matériau (figure 11).

Pour déterminer la résistance électrique d'un terrain on impose la circulation d'un courant continu d'intensité I à la surface du sol qui se répartit en profondeur. Cette opération est réalisée grâce à des électrodes que l'on plante dans le sol aux points A et B (figure 12). La tension est mesurée à l'aide d'un voltmètre entre les points M et N .

Q 39. Dans la pratique on utilise un courant alternatif très basse fréquence. Pour quelle raison ?

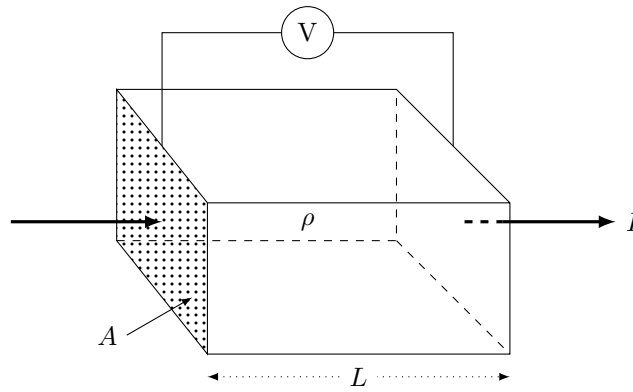


Figure 11

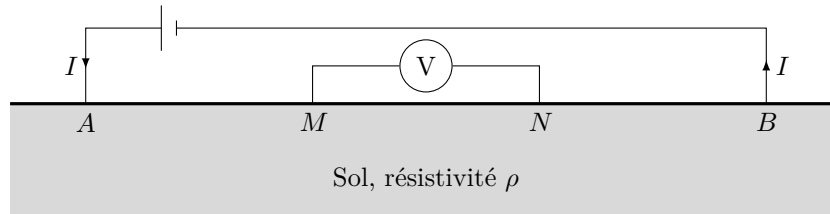


Figure 12

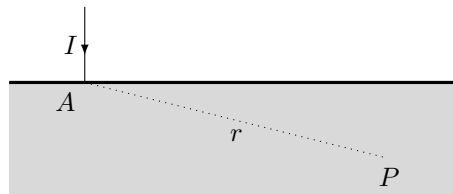


Figure 13

Q 40. Considérons seulement l'électrode placée en A (figure 13). On note $\vec{j}(r)$ le vecteur densité volumique de courant au point P . La terre est considérée comme homogène. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre ? Donner l'expression de $\vec{j}(r)$ en fonction notamment de l'intensité du courant I et de r .

Q 41. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V_A(r)$ au point P en fonction de I , r et ρ . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance.

Q 42. Dans le cas des deux électrodes (figure 14), exprimer le potentiel électrique V au point P en fonction de ρ , r_A , r_B et I . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance. Quelle relation définit les équipotentiellles ?

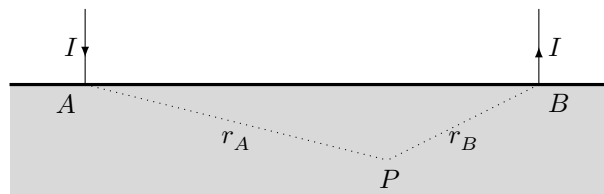


Figure 14

Q 43. Exprimer la différence de potentiel $\Delta V = V_M - V_N$ lue sur le voltmètre (figure 12). Montrer que la résistivité s'écrit $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If}$ où f est le facteur géométrique à exprimer en fonction des distances MA , MB , NA et NB .

Q 44. Dans le cas de la configuration dite de Wenner (figure 15), les points A , M , N et B sont équidistants espacés de la longueur ℓ . Exprimer le facteur géométrique f .

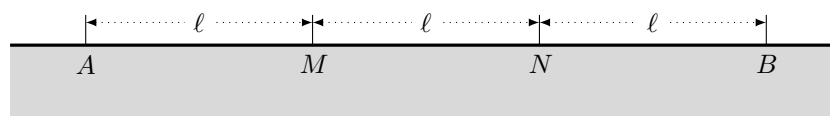


Figure 15

Q 45. Les courbes de la figure 16 présentent le résultat de la simulation des équipotentielles tracées pour deux électrodes distantes de 10 m situées en $\pm 5,0$ m plantées dans un terrain de résistivité $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$. L'intensité du courant est $I = 0,50$ A. Que vaut le facteur géométrique correspondant dans la configuration de Wenner ? Cette valeur est-elle en accord avec la simulation de la figure 16 ?

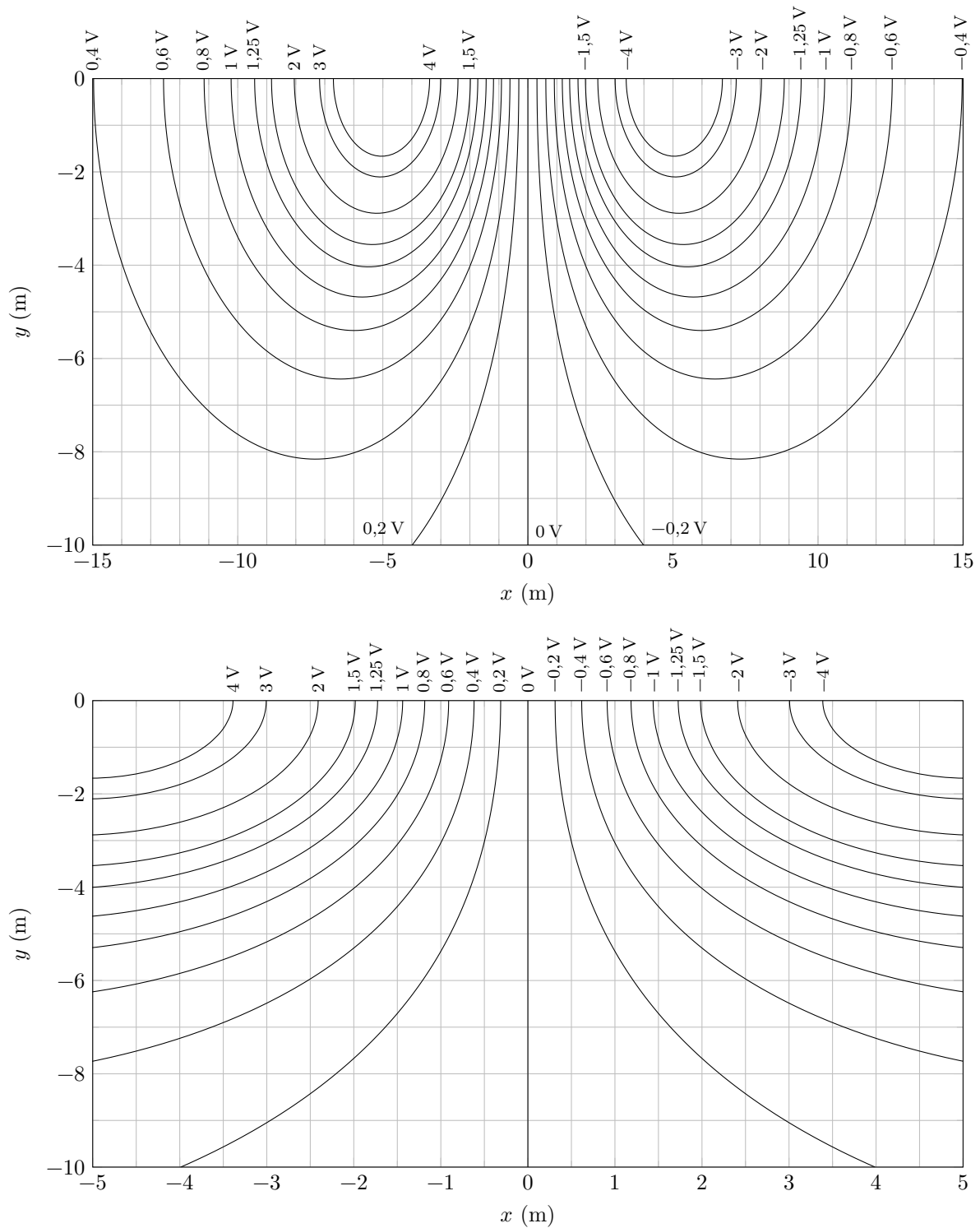


Figure 16

Q 46. Tracer, en expliquant votre démarche, l'allure des lignes de courant.

V.B – Modèle à deux terrains

Dans le cas d'un milieu inhomogène on parle de résistivité apparente. Dans le modèle dit à deux terrains, le sol est constitué de deux couches superposées de résistivité ρ_1 et d'épaisseur h_1 pour la couche supérieure et de résistivité ρ_2 et d'épaisseur infinie pour la couche inférieure (figure 17). La résistivité apparente est mesurée pour différents espacements entre électrodes (distance AB variable).

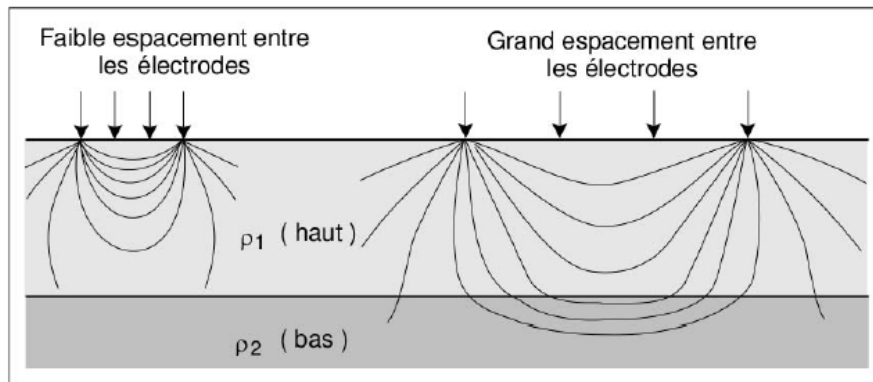


Figure 17 Illustration du sondage électrique (d'après Chouteau et Giroux (2006)), allure des lignes de courant

Q 47. Vers quelle valeur tend à priori la résistivité apparente lorsque AB est faible ? lorsque AB est très grande ?

Q 48. La courbe de la figure 18 représente la résistivité apparente ρ_a mesurée expérimentalement en fonction de la distance $AB/2$. Déterminer la résistivité ρ_1 et ρ_2 des terrains ainsi qu'une estimation de la valeur h_1 , épaisseur de la couche supérieure. On s'aidera de l'abaque CH1 donné figure 19 qui représente ρ_a/ρ_1 en fonction de $AB/2h_1$ en échelle bi-logarithmique. Chaque courbe de cet abaque correspond ainsi à la courbe d'un sondage électrique exécuté sur un sous-sol composé de deux terrains où la première couche a une épaisseur h_1 et une résistivité ρ_1 .

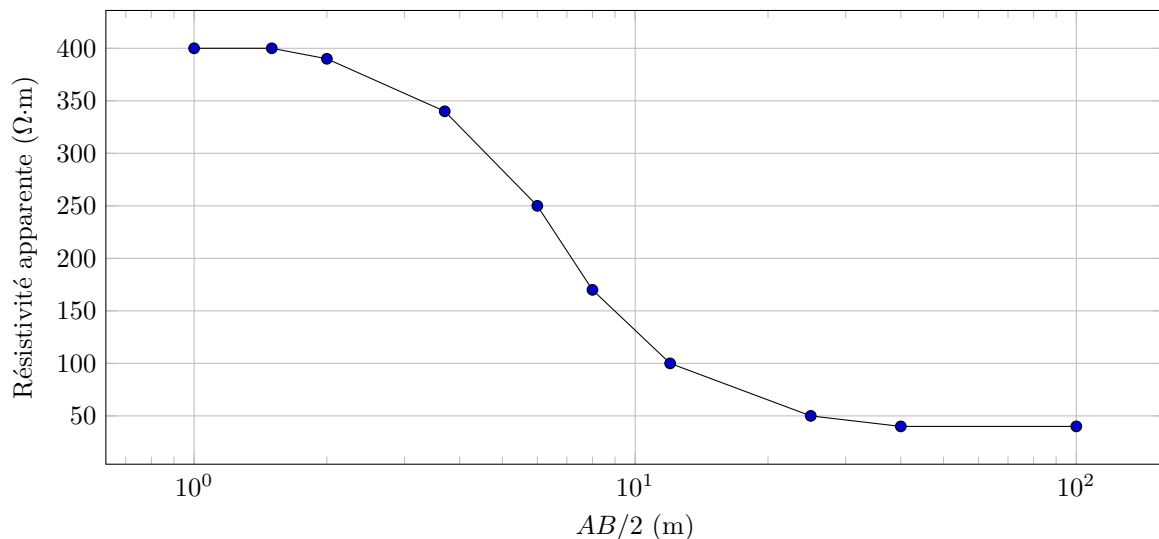


Figure 18 Mesure deux terrains

Données numériques

Constante de gravitation universelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

Rayon de la Terre

$$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Unité de mesure de la pesanteur

$$1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels

$$\Delta g = 1 \text{ } \mu\text{gal}$$

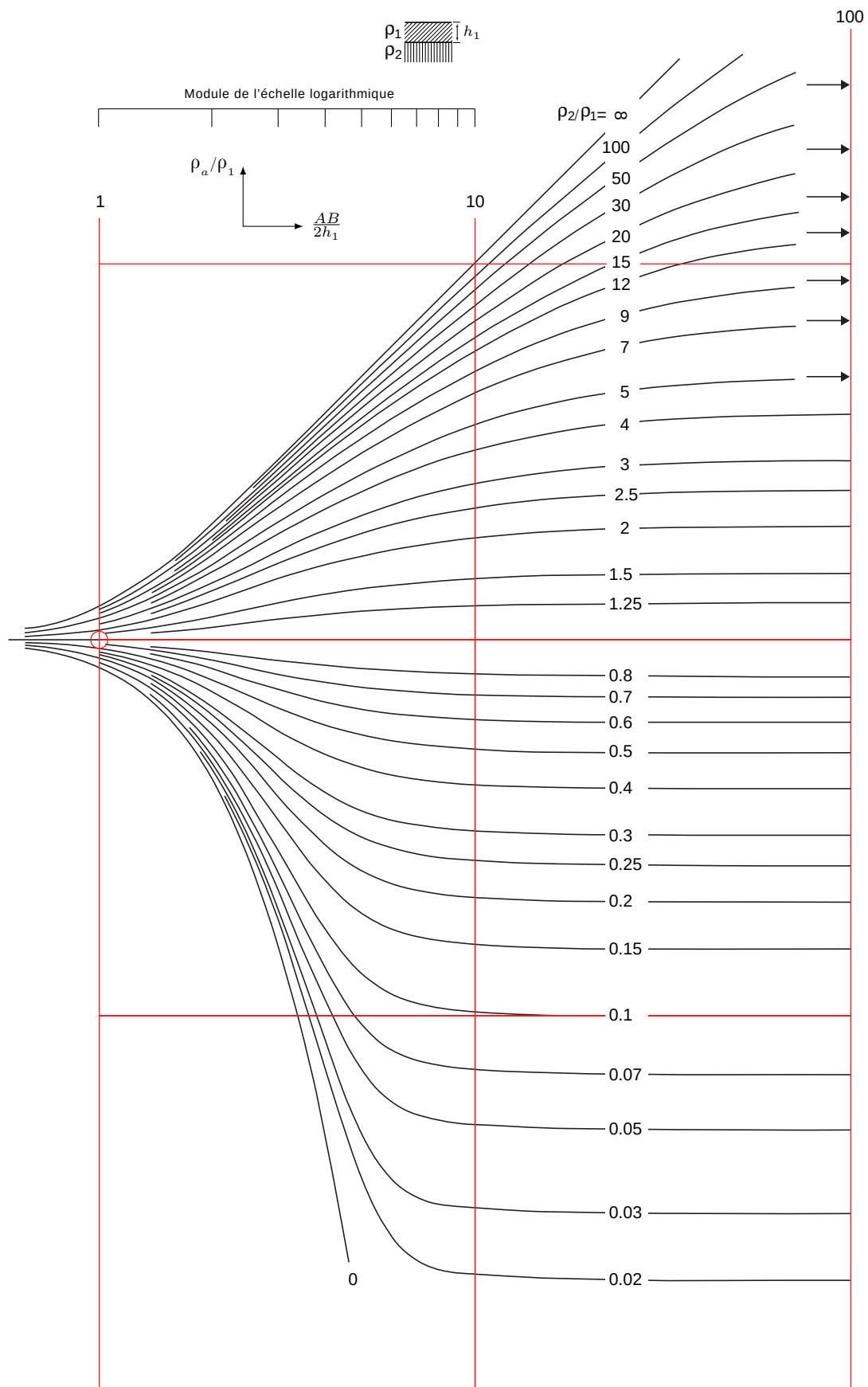
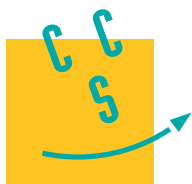


Figure 19 Abaque CH1

• • • FIN • • •



Quelques aspects du transport ferroviaire

La première locomotive à vapeur date de 1804, elle a été conçue par un ingénieur des mines anglais Richard Trevithick, comme une application de la machine à vapeur. Depuis, le transport ferroviaire a connu une évolution rapide ; il apparaît aujourd'hui comme une solution écologique au désir et au besoin de mobilité d'une population mondiale qui ne cesse de croître.



Figure 1 Gauche : La locomotive de Trevithick. Droite : train fonctionnant avec une pile à hydrogène

I La motorisation des trains

Le Coradia iLint est le premier train à hydrogène au monde, propulsé par une pile à combustible. Il est basé sur le Coradia Lint 54, un modèle de locomotive diesel produit par Alstom. Ce type de machines thermiques, dédié aux voies non électrifiées, est très largement répandu sur les lignes régionales en Allemagne mais aussi en France.

L'objectif de cette partie est d'étudier un moteur diesel puis une pile à combustible à hydrogène utilisée à bord du Coradia iLint.

I.A – Le moteur Diesel

Le moteur des locomotives diesel fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. Les premières locomotives « Diesel-mécanique » où la puissance est transmise par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse à pignons furent rapidement remplacées par des locomotives « Diesel-électrique » où le moteur diesel, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction.

On modélise le fonctionnement d'un moteur Diesel en considérant un système fermé, constitué de n moles de gaz parfait diatomique, décrivant le cycle réversible dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous.

- *Admission A_0A* : la soupape d'arrivée de l'air est ouverte, celles d'arrivée de gasoil et celle d'échappement des gaz sont fermées. La pression est $P_{\text{atm}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$ et la température $T_{\text{atm}} = 300 \text{ K}$. Le volume passe de $V_{\min}$ à $V_{\max}$ de façon isobare.
- *Compression AB* : les soupapes sont fermées. Le volume de l'air admis passe de $V_{\max}$ à $V_{\min}$ de manière adiabatique et réversible.
- *Injection et combustion BC* : les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gasoil. Une petite quantité de gasoil est injectée et la combustion se produit. Le volume augmente jusqu'à V_C . On modélise cette phase par une évolution isobare.
- *Détente CD* : les soupapes sont toutes fermées. L'injection cesse en C et le mélange subit une détente adiabatique et réversible jusqu'à atteindre un volume $V_{\max}$.
- *Refroidissement DA* : la soupape d'échappement est ouverte. La pression diminue brutalement jusqu'à P_{atm} , le volume restant constant.
- *Ejection AA_0* : la soupape d'échappement est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de $V_{\max}$ à $V_{\min}$ de façon isobare.

Q 1. Représenter le cycle Diesel $A_0 - A - B - C - D - A - A_0$ dans le diagramme de Watt (P, V).

Q 2. On définit le rapport volumétrique de compression $x = V_{\max}/V_{\min}$, ainsi que le rapport volumétrique de détente $y = V_{\max}/V_C$. Exprimer les pressions P_B et P_D en fonction de P_{atm} , x , y et du rapport $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$, des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant du gaz considéré.

Q 3. Définir le rendement thermodynamique, noté η_D , pour ce moteur et l'exprimer en fonction des températures T_A , T_B , T_C , T_D et du rapport γ .

Q 4. Exprimer η_D en fonction de x , y , et γ puis faire l'application numérique en utilisant les données en fin de sujet. En réalité, le rendement observé est de l'ordre de 0,45. Commenter.

Q 5. Une locomotive à moteur Diesel roule à la vitesse constante $v = 140 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le moteur tourne à la vitesse angulaire, elle aussi constante, de $2000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$, un tour correspondant à un cycle du moteur. Calculer la puissance mécanique moyenne du moteur de la locomotive (en utilisant la valeur du rendement observé) ainsi que sa consommation en gasoil pour 100 km. On utilisera les données en fin de sujet.

I.B – La pile à hydrogène PEMFC (Polymère Exchange Membrane Fuel Cell)

La pile à hydrogène représentée figure 2 est constituée de deux électrodes de platine poreuses, séparées par une membrane polymère permettant le passage des protons H^+ , mais pas celui des électrons. Elle fonctionne avec du dihydrogène et du dioxygène gazeux et produit de l'eau sous forme liquide.

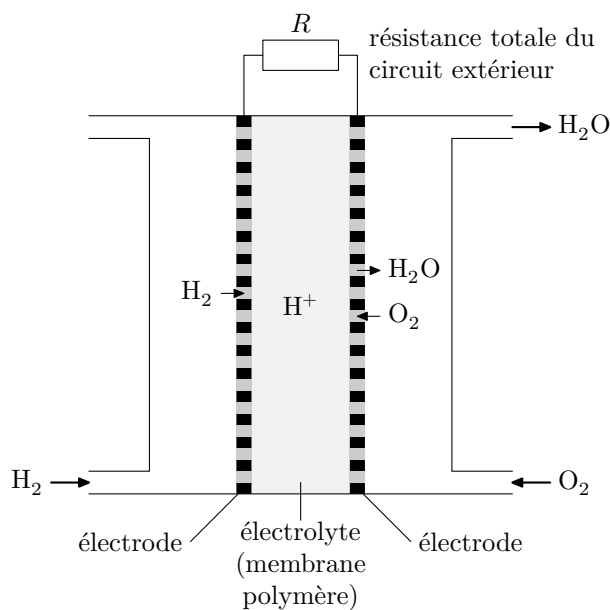
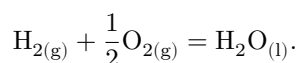


Figure 2 Schéma d'une pile à combustible

Le bilan réactionnel global de la pile à hydrogène, qui met en jeu les couples redox $\text{H}^+/\text{H}_{2(\text{g})}$ et $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ s'écrit :



I.B.1)

Q 6. Définir les termes « anode » et « cathode ». Écrire les demi-équations électroniques mises en jeu au niveau de chacune des deux électrodes de cette pile.

Q 7. Reproduire le schéma de la pile et y faire apparaître le nom des électrodes, le sens du courant, le sens de déplacement des protons responsables du passage du courant au sein de l'électrolyte, et celui de déplacement des électrons. Indiquer également le pôle positif et le pôle négatif de la pile.

Q 8. Calculer, à 298 K, l'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ$ et l'entropie standard $\Delta_r S^\circ$ de la réaction. En déduire la valeur de l'enthalpie libre standard de la réaction à 298 K, puis la force électromotrice standard e° de la pile.

I.B.2) Le rendement η d'une pile est relié à l'énergie électrique fournie à l'extérieur, W_e et à la variation d'enthalpie ΔH du système électrochimique selon

$$\eta = -\frac{W_e}{\Delta H}$$

Q 9. Justifier la présence du signe « - » dans l'expression ci-dessus.

Q 10. À pression et température constantes, établir l'inégalité liant la variation d'enthalpie libre ΔG du système et le travail électrique fourni W_e .

Le rendement maximal est obtenu en considérant un fonctionnement isotherme, isobare et réversible de la pile, avec une tension correspondant à la force électromotrice standard e° (les activités de toutes les espèces physico-chimiques en jeu sont donc prises égales à 1) .

Q 11. Montrer que le rendement théorique maximal dans les conditions standard peut s'écrire

$$\eta_{\max} = 1 - T \frac{\Delta_r S^\circ}{\Delta_r H^\circ}.$$

Q 12. Évaluer le rendement théorique maximal de la pile PEMFC à la température de 60 °C.

Dans les conditions réelles d'utilisation, la force électromotrice de la pile à hydrogène est inférieure à la valeur théorique en raison de différents phénomènes dissipant de l'énergie : surtension d'activation due au transfert électronique (caractère plus ou moins lent des réactions électrochimiques), surtension due au transport de matière (apport des réactifs jusqu'aux électrodes et départ des produits de réaction) et enfin chute ohmique dans l'électrolyte et dans les divers matériaux conducteurs électroniques.

La figure 3 présente la caractéristique tension - courant (U, j), appelée encore « courbe de polarisation », d'une pile à hydrogène élémentaire. Le point de fonctionnement nominal de cette cellule est tel que $U_n = 0,7 \text{ V}$ et $j_n = 0,45 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$.

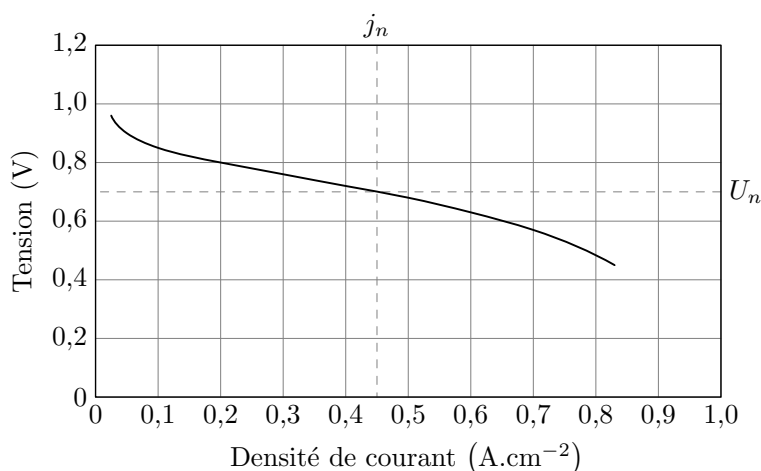


Figure 3 Courbe de polarisation

Pour le train à hydrogène Coradia iLint, son constructeur annonce une autonomie de 1000 km à une vitesse moyenne de 100 km·h⁻¹. La pile utilisée est un ensemble de piles élémentaires montées en série développant une puissance de 200 kW sous une tension $U = 300 \text{ V}$.

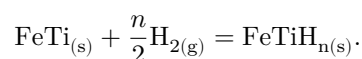
Q 13. Combien de cellules doivent-elles être branchées en série ? Quelle doit être la surface des électrodes d'une cellule ?

Q 14. Évaluer le débit molaire en dihydrogène nécessaire au fonctionnement de la pile ainsi que la masse d'hydrogène assurant l'autonomie annoncée par le constructeur.

I.B.3) À ce jour, trois types de stockage d'hydrogène peuvent être envisagés :

- le stockage sous forme de gaz comprimé, sous une pression égale à 700 bar et à une température de 298 K, dans des réservoirs composites capables de résister à de fortes pressions ;
- le stockage sous forme liquide, à -253 °C sous une pression de 10 bar, ce qui nécessite des réservoirs à l'isolation thermique poussée afin de minimiser l'évaporation ;
- le stockage dans des substrats, sous forme absorbée : l'hydrogène est stocké dans les sites interstitiels du réseau métallique d'un alliage pour former des hydrures non stœchiométriques.

Pour le cas du stockage par adsorption, un substrat possible est l'alliage fer-titane. La réaction d'absorption s'écrit :



L'alliage FeTi a une structure cubique, de paramètre de maille a , comportant un atome de titane à chaque sommet et un atome de fer au centre du cube.

Q 15. Représenter la maille de FeTi et déterminer le paramètre de maille a , à partir des données.

Seuls les sites octaédriques formés par deux atomes de fer et quatre atomes de titane peuvent être occupés par un atome d'hydrogène.

Q 16. Identifier la position de ces sites interstitiels. En déduire la formule stœchiométrique de l'hydrure contenant le maximum théorique d'atomes d'hydrogène.

Q 17. En réalité, l'absorption maximale d'hydrogène correspond à l'hydrure $\text{FeTiH}_{1,9}$. Exprimer puis calculer la capacité volumique d'absorption définie comme la masse d'hydrogène qui peut être insérée dans un mètre cube d'alliage FeTi.

Q 18. Déterminer le volume d'alliage nécessaire pour stocker les 108 kg de dihydrogène permettant d'assurer l'autonomie du Coradia iLint. Comparer ce volume aux deux autres possibilités de stockage et conclure.

II Mécanique du transport ferroviaire

II.A – Démarrage du train de Trevithick

Le premier train qui sera étudié est celui de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse $M_\ell = 1$ t, dont la figure 1 montre une reproduction, a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale $M_c = 10$ t sur une distance $D = 15$ km. Lors de cet essai en ligne droite, conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe Ox , le train parvint à atteindre la vitesse $v_0 = 8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, supposée constante après la phase de démarrage.

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposée galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note $\vec{a}_0$ cette accélération. On définit deux systèmes :

- le système Σ_1 , de masse totale M_c , est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
- le système Σ_2 correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale M_ℓ , et qui compte également quatre roues en acier.

On note $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ la force qu'exerce Σ_2 sur Σ_1 ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails et on suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique) f_a . Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées en annexe.

On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roue de masse négligeable, la force $\vec{F}_{r/1}$ exercée par les rails sur une roue du système Σ_1 est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système Σ_1 . On note également $\vec{F}_{r/2}$ la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec $\vec{F}_{r/2} = \vec{N}_{r/2} + \vec{T}_{r/2}$, où $\vec{N}_{r/2}$ et $\vec{T}_{r/2}$ désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

Q 19. Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur Σ_1 . Exprimer la force $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ en fonction, entre autres, de l'accélération $\vec{a}_0$.

Q 20. Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur Σ_2 . On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.

Q 21. Montrer que $\vec{T}_{r/2}$ est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer $\vec{T}_{r/2}$ en fonction notamment de l'accélération $\vec{a}_0$ et des diverses masses introduites dans l'énoncé.

Q 22. Calculer le temps qu'a mis le train de Trevithick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que $\|\vec{T}_{r/2}\| = 0,1 f_a \|\vec{N}_{r/2}\|$, de sorte que l'absence de glissement est assurée.

II.B – Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

II.B.1) Passage en courbe

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes A_0A et BB_0 formant un angle de 120° (figure 4). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points A et B suit une portion du cercle $\mathcal{C}$ tangent aux deux segments de droites en A et B . On note d_{AB} la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

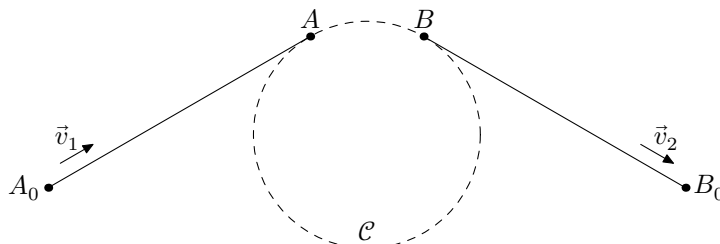


Figure 4 Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes

Q 23. Déterminer le rayon R_c du cercle $\mathcal{C}$ en fonction des données.

Q 24. En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée V_0 (soit $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = V_0$), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant $t = 0$ où il se trouve en A_0 et l'instant t_f où il se trouve en B_0 .

Q 25. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_c entre les points A et B dans le cas où $d_{AB} = 2$ km et $V_0 = 300$ km $\cdot$ h⁻¹.

Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à $E_r = 1400$ mm.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse m_p reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 5 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à 287 km $\cdot$ h⁻¹.



Figure 5 La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est $R_c = 4$ km. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la verticale lorsque le train est à l'horizontale.

Q 26. Estimer la valeur du dévers lors de la réalisation de cette expérience. Préciser à l'aide d'un schéma clair lequel des deux rails, intérieur ou extérieur au virage, est surélevé.

II.B.2) Usure abrasive des rails sur la ligne de TGV Paris-Lyon

Pour cette sous-partie, et pour celle-ci seulement, on considère que le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ est non galiléen et que le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ est galiléen.

Q 27. Décrire le mouvement du référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_g$.

On considère la ligne de TGV Paris-Lyon, dont la longueur est approximativement de 500 km, et sur laquelle les trains (figure 6) roulent à la vitesse $V_0 = 300$ km $\cdot$ h⁻¹ par rapport au référentiel terrestre. La ligne est composée de deux voies : une servant pour le trajet de Paris vers Lyon, l'autre pour le trajet Lyon vers Paris.



Figure 6 Un train de dernière génération circulant sur la ligne Paris-Lyon.

On étudie par la suite un TGV allant de Paris à Lyon, sur un tronçon rectiligne horizontal, localement confondu avec une ligne méridienne nord-sud. La figure 7 schématise le contact entre les rails et les roues de ce train.

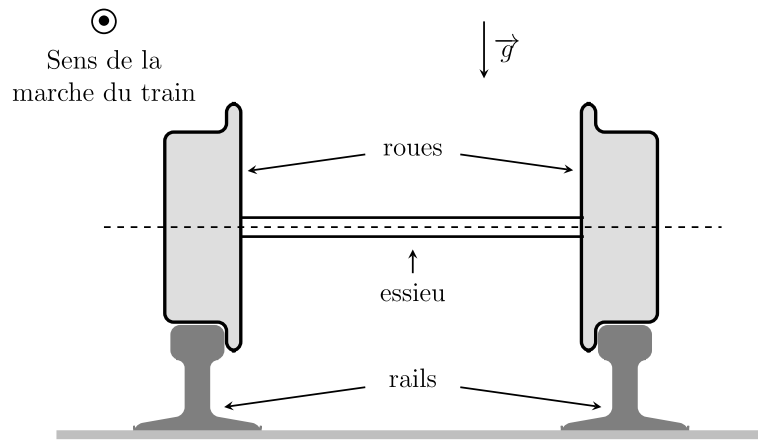


Figure 7 Schéma – en coupe – du contact entre les rails et les roues du TGV (les échelles de distance ne sont pas respectées).

Q 28. La prise en compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre implique l'existence d'une force normale horizontale exercée par l'intérieur d'un des deux rails sur les roues avec lesquelles il est en contact. Identifier, en le justifiant, le rail concerné dans le cas d'un TGV circulant de Paris vers Lyon. Sur un schéma inspiré de celui de la figure 7 faire figurer les forces de contact exercées par les rails sur les roues.

De nos jours, les rails sont réalisés en acier trempé très dur, afin d'en limiter l'usure. Il existe différents types d'usure des rails ; nous n'envisagerons ici que l'usure abrasive, qui a lieu à l'interface entre les roues et le rail. On note que, lorsqu'on étudie l'usure, on prend en compte le fait que le contact roue-rail n'est pas ponctuel : cela implique qu'il y a nécessairement une zone de contact glissant, même en cas d'adhérence. Diverses lois permettent de quantifier cette usure ; nous nous limiterons à la loi d'usure de Preston-Archard selon laquelle le volume de matière usée peut être calculé par la formule

$$V = k \frac{F_n}{H} d$$

où H est la dureté du matériau dont l'unité est $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$, d la distance sur laquelle a eu lieu le glissement, F_n la force normale au glissement et k un coefficient, appelé coefficient d'Archard, qui dépend des conditions expérimentales, matériaux, température, géométrie, etc.

Q 29. Discuter qualitativement la loi de Preston-Achard.

Q 30. Déterminer la dimension du coefficient d'Archard k .

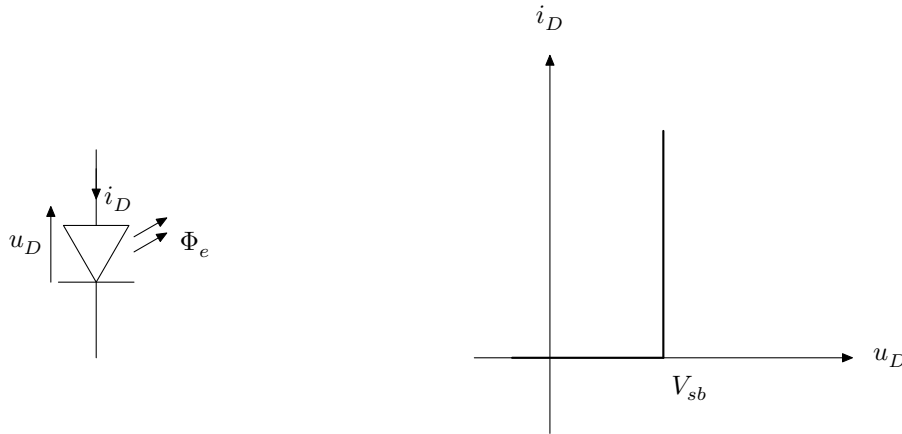
Q 31. Pour le rail identifié dans la question Q 28, comparer le degré d'usure des faces supérieure et intérieure du rail. Préciser les approximations réalisées.

III Connexion à Internet par LiFi

Parmi les nombreux avantages du transport ferroviaire, on peut citer la possibilité d'utiliser le temps du transport comme un temps de travail ou de loisir grâce, notamment, à une connexion Internet individualisée. Dans cette partie est étudiée la technologie LiFi (Light Fidelity), ainsi nommée par analogie avec le WiFi (Wireless Fidelity), une solution innovante pour les connexions Internet individualisées dans des espaces restreints tels que la cabine d'un avion ou un wagon de train. Le LiFi exploite la lumière visible pour transmettre l'information. Son apparition coïncide avec le développement de l'éclairage par les diodes électroluminescentes.

Document

Comme pour les diodes « simples », les diodes électroluminescentes mettent en jeu une jonction entre deux matériaux semi-conducteurs (jonction PN). Les photons sont émis lorsque le courant direct qui traverse la jonction provoque la recombinaison d'une paire électron-trou. La caractéristique d'une diode électroluminescente varie selon la couleur émise. Dans le cas d'une diode émettrice de lumière bleue, la caractéristique courant-tension a l'allure suivante :



Pour $i_D > 0$, la diode considérée émet une lumière bleue de longueur d'onde dans le vide $\lambda_b = 470 \text{ nm}$; la tension à ses bornes est alors égale à $V_{sb} = 2,90 \text{ V}$. Le rendement en puissance de la diode électroluminescente, défini comme le rapport de la puissance lumineuse Φ_e émise sur la puissance électrique reçue, est égal à $\eta_{led} = 33 \%$. En première approximation, on peut considérer que la puissance lumineuse Φ_e est rayonnée de façon isotrope dans le demi-espace qui se situe au-dessus du composant.

Dans ce problème, nous ne considérerons que le flux de données descendant vers l'utilisateur. Le schéma de la figure 8 représente le principe de la transmission d'une information par la lumière. La tension u_e contient le signal informatif. Elle alimente la diode électroluminescente D_1 émettrice de lumière bleue, de sorte que l'amplitude de l'onde lumineuse émise soit modulée par le signal u_e . La diode D_2 , polarisée en sens indirect grâce au potentiel V_0 qui est positif, est photoréceptrice. L'intensité i_2 du courant qui parcourt D_2 est proportionnelle au flux lumineux qu'elle reçoit, de sorte que la tension u_r contient l'information utile.

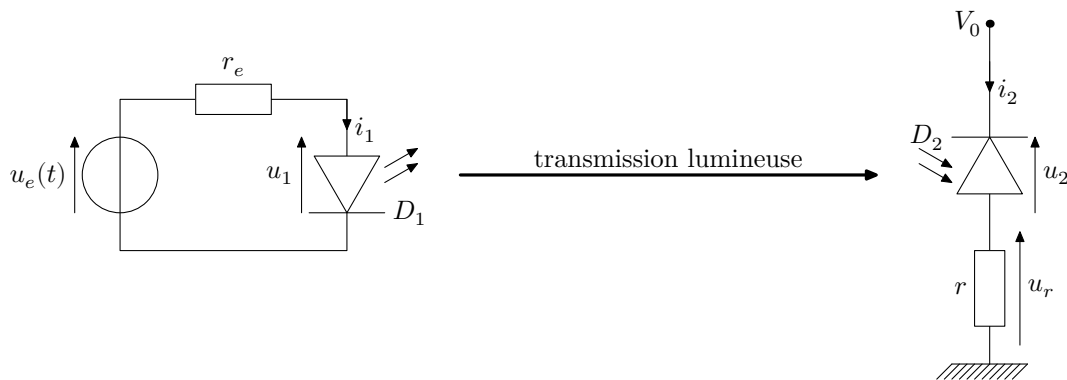


Figure 8 Principe de la transmission d'information par la lumière.

III.A – Émission du signal lumineux

Dans le circuit émetteur, la résistance $r_e = 10 \Omega$ a pour fonction de commander le passage du courant dans la diode par la tension u_e , en même temps qu'elle la protège. La diode émet de la lumière lorsque l'intensité du courant i_1 qui la traverse en sens direct est positif ; on notera la puissance lumineuse moyenne émise Φ_e . Dans le modèle adopté, la puissance moyenne émise est proportionnelle au courant i_1 avec un coefficient de proportionnalité K_e , soit $\Phi_e = K_e i_1$.

Q 32. Déterminer la valeur constante minimale $U_{\min}$ de u_e qui permet d'obtenir une émission lumineuse par la diode.

Q 33. Calculer la valeur constante U_0 de u_e qui permet d'obtenir un courant i_1 constant égal à $i_0 = 0,73$ A à travers la diode. Calculer la puissance lumineuse moyenne correspondante, notée Φ_{e0} , émise par la diode.

Pour transmettre une information par la lumière, la technologie LiFi utilise le principe de la modulation d'amplitude. Le signal porteur correspond au signal lumineux de longueur d'onde λ_b émis par la diode, dont on module l'amplitude à l'aide d'un signal sous-porteur $p(t)$. Par la suite, on considère que le signal sous-porteur est sinusoïdal, d'amplitude p_m , de fréquence $f_p = \omega_p/2\pi$ et de phase à l'origine α_p : $p(t) = p_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)$. On note $a(t)$ la tension correspondant au signal contenant l'information ; les fréquences contenues dans le spectre de $a(t)$, notées f_a sont très inférieures à la fréquence f_p . On génère la tension $u_e(t)$ du circuit émetteur grâce au circuit de la figure 9, qui contient un bloc multiplieur M_1 et un bloc additionneur A_1 . Le bloc multiplieur M_1 réalise le produit des deux tensions d'entrée, soit dans le cas du circuit considéré $m_1(t) = k_m \times p(t) \times a(t)$, avec $k > 0$. Les impédances d'entrée des blocs A_1 et M_1 sont infinies.

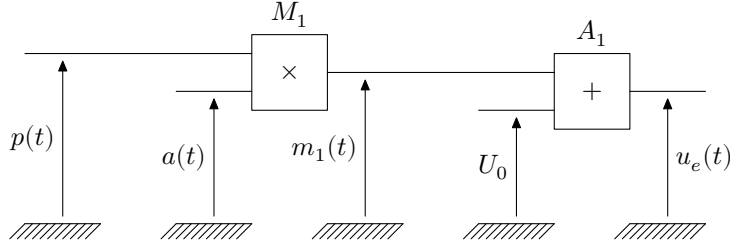


Figure 9 Schéma du circuit de réalisation de $u_e(t)$

Q 34. Exprimer la tension $u_e(t)$ dans le cas où $a(t)$ est un signal sinusoïdal d'amplitude a_m , de fréquence $f_a = \omega_a/2\pi$ telle que $f_a \ll f_p$. Quelle est la valeur maximale du produit $k \times p_m \times a_m$ qui permet de s'assurer que la diode électroluminescente émet toujours de la lumière ?

Q 35. Représenter l'allure du signal $u_e(t)$, ainsi que l'allure de son spectre, dans le cas où le signal $a(t)$ est sinusoïdal de fréquence $f_a = f_p/10$.

Q 36. Représenter l'allure du signal $u_e(t)$, ainsi que l'allure de son spectre, dans le cas où le signal $a(t)$ est un signal créneau variant entre 0 et a_m , de fréquence $f_a = f_p/10$. L'allure d'un spectre d'un tel signal créneau est donné en annexe.

III.B – Réception du signal lumineux et extraction de l'information

La photodiode réceptrice est située à la distance d de la diode émettrice et capte le flux lumineux Φ_r qui arrive sur sa surface, d'aire s_r . Lorsqu'elle est polarisée en inverse comme sur le schéma de la figure 8, le courant i_2 qui la traverse en sens indirect est proportionnel au flux Φ_r et on note $i_2 = K_r \Phi_r$, où K_r est une constante positive.

Q 37. Exprimer la tension $u_r(t)$ en fonction de $u_e(t)$, V_{sb} , d , r , r_e , s_r , K_e et K_r .

Pour extraire le signal informatif du signal u_r , on réalise le montage de la figure 10 dans lequel A_2 est un amplificateur de tension, tel que $u_{r1} = K u_r$, et M_2 est un multiplieur identique à M_1 . Dans le montage figure également le bloc F constitué d'une résistance r_2 et d'un condensateur de capacité C_2 .

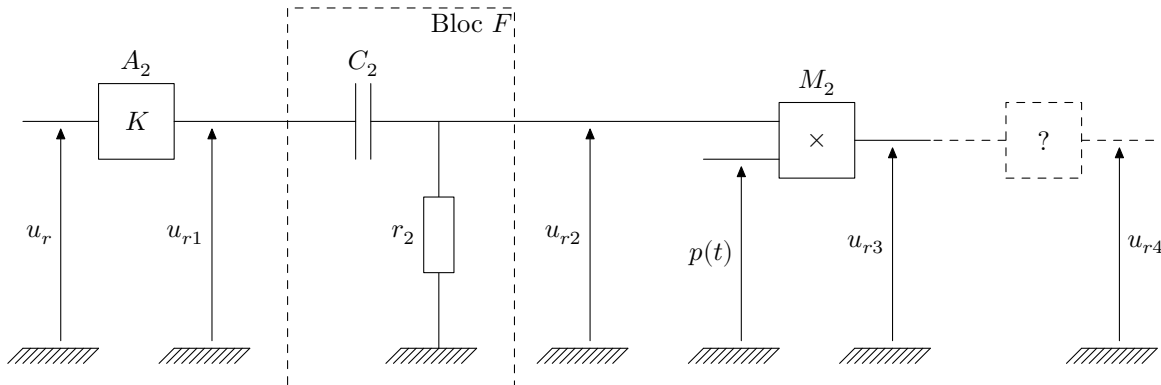


Figure 10 Schéma du circuit d'extraction de l'information à partir de la tension $u_r(t)$.

Q 38. Quelle est la fonction du bloc F ? Exprimer sa fonction de transfert et préciser sa pulsation de coupure ω_c en fonction de r_2 et C_2 .

On considère un signal informatif de la forme $a(t) = a_m \cos(\omega_a t)$, tel que $\omega_c \ll \omega_a \ll \omega_p$.

Q 39. Montrer que la tension u_{r3} peut s'écrire sous la forme $u_{r3} = U_{3m} \cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$; exprimer l'amplitude U_{3m} en fonction des données du problème, puis représenter le spectre du signal u_3 .

Q 40. On souhaite que la tension u_{r4} soit proportionnelle au signal informatif. Proposer un montage pour le bloc inconnu, noté « ? » sur la figure 10.

III.C – Débit binaire du LiFi

En pratique, le signal informatif est un signal binaire, dont l'allure qualitative est présentée figure 11 où T_{ck} est la période d'horloge. Pour que la modulation décrite dans la sous-partie III.A soit correcte, il faut s'assurer que la fréquence d'horloge f_{ck} vérifie la condition $f_{ck} < f_p/100$.

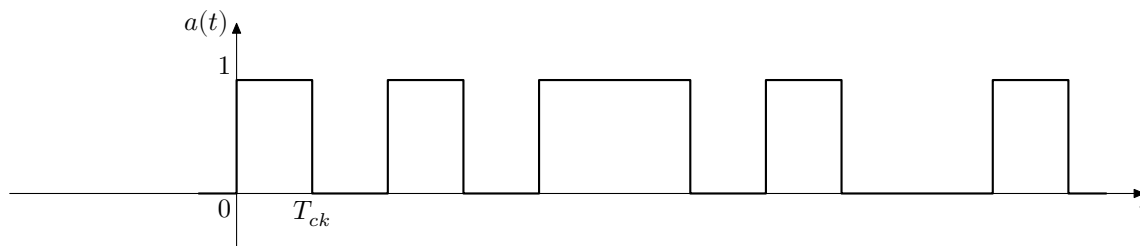


Figure 11 Allure d'un signal informatif pour une transmission binaire

Q 41. Les liaisons WiFi actuelles procurent un débit descendant de l'ordre de $10 \text{ Mbit} \cdot \text{s}^{-1}$, obtenu avec des porteuses dont la fréquence est de l'ordre de quelques GHz. Vérifier que la condition d'une bonne modulation est satisfaite.

On considère désormais le cas d'une installation LiFi utilisant des diodes électroluminescentes émettant une lumière bleue de longueur d'onde $\lambda_b = 470 \text{ nm}$ dans le vide.

Q 42. Calculer la fréquence de la porteuse lumineuse. En déduire l'ordre de grandeur de la fréquence de la sous-porteuse qui peut être utilisée pour la technologie LiFi, puis estimer l'ordre de grandeur du débit binaire maximal que l'on peut obtenir avec le LiFi. Commenter.

Données

Données pour la partie I

Volume maximal du gaz dans le cycle diesel

Rapports des volumes dans le cycle diesel

Rapport des capacités thermiques

Rappel des expressions des capacités thermiques molaires à respectivement volume et pression constants :

Constante des gaz parfaits

Constante de Faraday

Constante d'Avogadro

Masse volumique de l'alliage FeTi

Masse volumique du dihydrogène liquide à 10,0 bar

Enthalpie de combustion massique du gasoil

Enthalpies molaires standard de formation et entropies molaires standard à 298 K

$$V_{\max} = 57 \text{ L}$$

$$x = V_{\max}/V_{\min} = 20 ; \text{ et } y = V_{\max}/V_C = 7$$

$$\gamma = C_{pm}/C_{vm} = 1,4$$

$$C_{vm} = R/(\gamma - 1) \text{ et } C_{pm} = R\gamma/(\gamma - 1)$$

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$1 \text{ F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$\rho_{\text{FeTi}} = 6,35 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{H}_2(\text{l})} = 70,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\Delta_{\text{comb}} h = 46,8 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

	$\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	$\text{H}_2(\text{g})$	$\text{O}_2(\text{g})$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-286	0	0
$S_m^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	0,070	0,131	0,205

Masses molaires et rayons atomiques

	H	Fe	Ti
Masse molaire ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	1,00	55,8	47,9
Rayon atomique (pm)	25,0	132	126

Données pour la partie II

Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Coefficient d'adhérence fonte-acier	$f_a = 0,12$
Latitudes des villes citées	Lyon = $45,8^\circ$ Nord ; Paris = $48,9^\circ$ Nord

Lois de Coulomb du frottement solide, coefficient d'adhérence

Soient deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en mouvement par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}_0$, en contact au point I .

Sans glissement, $v_{I \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{R}_0} = v_{I \in \mathcal{S}_2 / \mathcal{R}_0}$, il y a adhérence. La force $\vec{R}$ qu'exerce $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ a une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ ($\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$) telles que

$$\|\vec{T}\| < f_a \|\vec{N}\|$$

où f_a est le coefficient d'adhérence entre les deux solides.

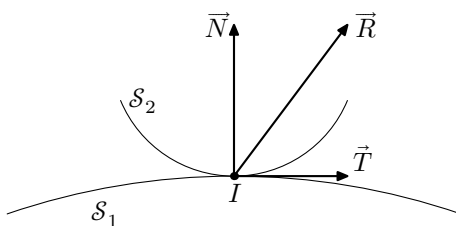
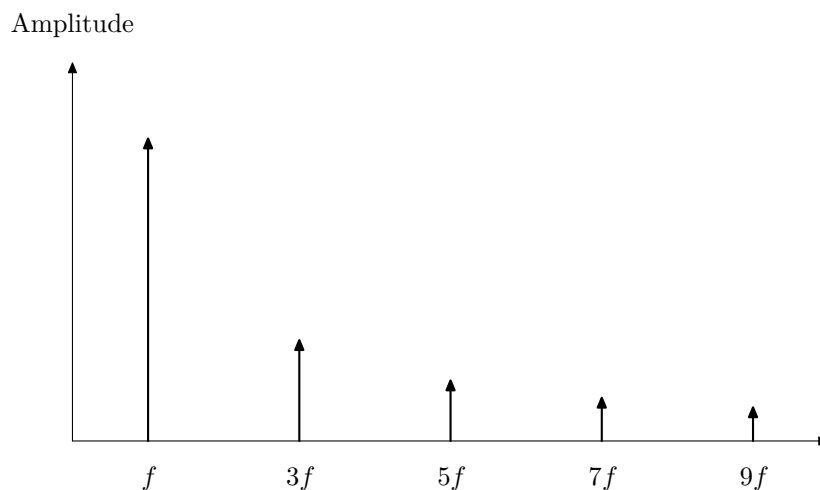


Figure 12 Frottement entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel adhérent

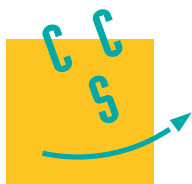
Données pour la partie III

Vitesse de propagation de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
---	--

Spectre en amplitude d'un signal créneau de fréquence f (premières harmoniques)



• • • FIN • • •



Proxima du Centaure

Ce problème est une invitation à regarder vers les étoiles, et tout particulièrement l'étoile la plus proche de la planète Terre après le Soleil : Proxima du Centaure aussi appelée *Proxima Centauri*.

Il est constitué de 4 parties totalement indépendantes. La première partie étudie une caractéristique de l'atmosphère terrestre qui a permis le développement de la vie sur Terre et peut-être un jour sur une exoplanète. La deuxième partie est relative à l'observation de Proxima du Centaure et à la détermination de sa distance et de sa taille. La troisième partie s'intéresse à un vaisseau capable de rejoindre Proxima du Centaure et d'explorer une exoplanète dont la découverte fait l'objet de la dernière partie.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

I Ozone et atmosphère

I.A – De l'importance de l'ozone

La figure 1 présente la répartition de l'ozone (O_3) dans l'atmosphère terrestre. Sa concentration varie avec l'altitude, le maximum se situe entre 30 et 35 km d'altitude avec une moyenne de 8 molécules d'ozone pour un million de molécules d'atmosphère.

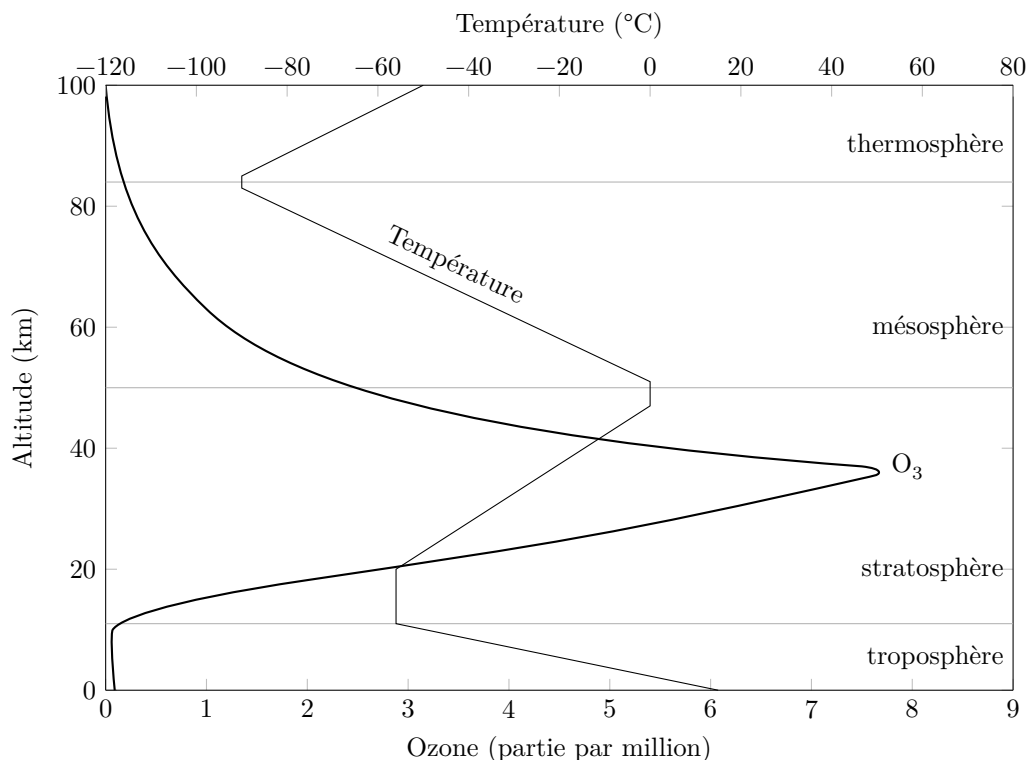


Figure 1 Répartition de l'ozone et température aux latitudes moyennes dans l'atmosphère terrestre

La figure 2 montre le flux solaire ultra-violet reçu au sommet de l'atmosphère et le flux résiduel à la surface de la Terre. La différence est due à l'absorption du rayonnement ultra-violet par la couche d'ozone. Le graphique précise l'absorption moyenne pour chaque bande du rayonnement ultra-violet.

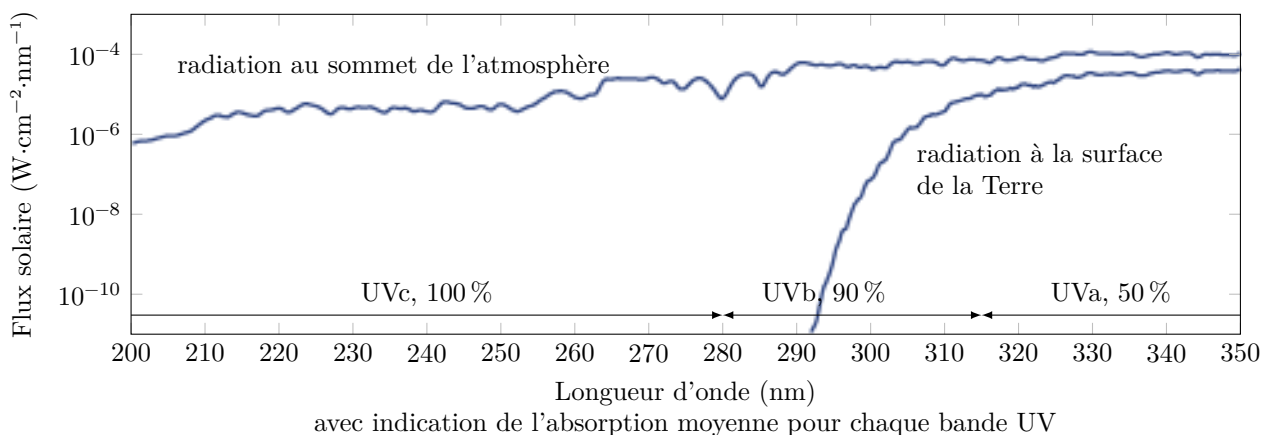


Figure 2 Absorption du rayonnement solaire par la couche d'ozone – d'après NASA Ozone Watch

- Q 1.** Justifier que les rayonnements présentés sur le graphique de la figure 2 correspondent à des rayonnements ultra-violet. Pourquoi les rayonnements ultra-violets sont-ils qualifiés de rayonnements ionisants ?
- Q 2.** Expliquer l'importance de la couche d'ozone dans la protection de la vie terrestre.

I.B – Atome et molécule de l'oxygène

- Q 3.** Donner la configuration électronique de l'oxygène dans son état fondamental.
- Q 4.** Proposer une représentation de Lewis pour la molécule de dioxygène.
- Q 5.** Proposer une représentation de Lewis de la molécule d'ozone sachant qu'elle n'est pas cyclique.

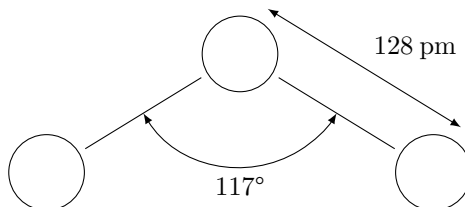
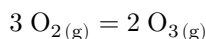


Figure 3 Schématisation d'une molécule d'ozone où chaque sphère représente un atome d'oxygène

- Q 6.** La molécule d'ozone a la structure spatiale présentée sur la figure 3. Justifier l'existence d'un moment dipolaire et le représenter sur un schéma de la molécule.

I.C – Thermodynamique de la formation de l'ozone

Nous étudions l'équilibre



- Q 7.** Calculer la constante de cet équilibre à 25 °C à l'aide des données fournies en fin d'énoncé.
- Q 8.** Calculer la pression partielle en ozone dans l'atmosphère terrestre au niveau du sol.
- Q 9.** Dans quel sens est déplacé cet équilibre lorsqu'on s'élève dans la troposphère ? Que peut-on en dire dans la stratosphère ? Un raisonnement qualitatif argumenté est attendu.

I.D – Cinétique de la formation de l'ozone

Le mécanisme de la production de l'ozone stratosphérique a été élucidé dès 1930 par le géophysicien britannique Sydney Chapman. Pour fabriquer cette molécule constituée de trois atomes d'oxygène, il faut des atomes d'oxygène libres. Aux longueurs d'onde inférieures à 240 nm, le rayonnement ultra-violet peut dissocier les molécules de dioxygène O_2 suivant la réaction (I.1).



Cette première partie du mécanisme est rapide sous l'effet du rayonnement ultra-violet et conduit à un équilibre de constante K_R° .

La seconde partie du mécanisme (I.2) est une réaction simple qui obéit à la loi de van't Hoff en cinétique : les ordres partiels dans l'expression de la vitesse de réaction sont les coefficients stoechiométriques de la réaction. On note k la constante cinétique de cette réaction.



- Q 10.** Expliquer qualitativement que la concentration en ozone dans l'atmosphère présente un maximum à une altitude particulière, comme le montre la figure 1.
- Q 11.** Exprimer la pression partielle en radical $O^\bullet$ en fonction de la pression partielle en dioxygène et de la constante K_R° .
- Q 12.** Quel est l'ordre de la vitesse de formation de O_3 par rapport à la pression partielle en dioxygène ?

II Découverte de Proxima du Centaure

II.A – Première observation de l'étoile

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,44 \times 10^{29}$ kg et de rayon $R_E = 9,81 \times 10^4$ km. Elle est située à $D_E = 3,99 \times 10^{13}$ km soit 4,22 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{\text{obs}} = 600$ nm.

Q 13. Justifier, par un argument d'ordre de grandeur, que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut être approximée à 4,22 années-lumière.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1 , de foyer principal objet F_1 , de foyer principal image F'_1 et de distance focale image $f'_1 = 8$ m ;
- une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2 , de foyer principal objet F_2 , de foyer principal image F'_2 et de distance focale image $f'_2 = -0,02$ m.

Si le point objet A et le point image A' sont conjugués par la lentille L de focale f' et de centre O , d'après la Formule de Descartes on a

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

et le grandissement transversal est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

Q 14. Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1 , appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.

Q 15. Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction du rayon R_E de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif L_1 .

Q 16. La lentille de projection L_2 , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance O_1O_2 pour respecter ces contraintes.

Q 17. Illustrer par un schéma la position de A_1B_1 , de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).

Q 18. En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, composée de cristaux de $10 \mu\text{m}$ de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?

Q 19. À l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ? L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne « naissance » à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30 %.

Q 20. Sachant que la puissance surfacique reçue sur Terre par le Soleil dans le visible est de $600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50$ cm, de combien d'électrons sera composé le signal résultant de l'étoile pour une exposition de 12 minutes du capteur ? Quelle est la charge produite par le capteur ?

Q 21. La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ?

II.B – Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit.

La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines (figure 4).

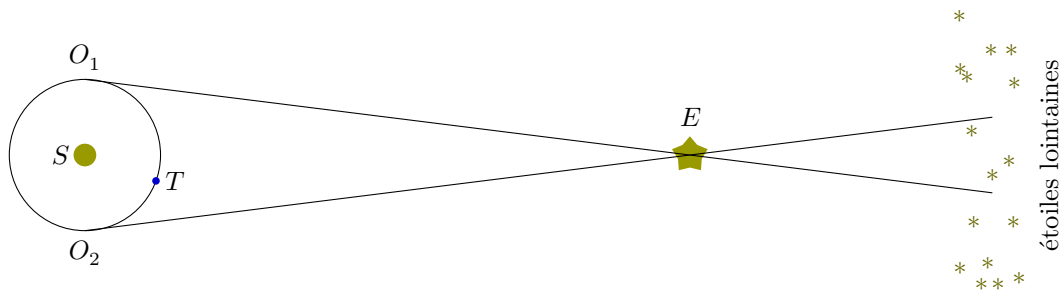


Figure 4 Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure 4, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2 .

Le satellite Hipparcos (High Precision Parallax Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1545$ millisecondes d'arc pour *Proxima Centauri*.

Q 22. Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E , la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.

Q 23. Pourquoi la distance entre la Terre et le Soleil varie-t-elle au cours de l'année ?

II.C – Mesure du rayon de l'étoile

En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* : $\alpha \simeq 1,02 \pm 0,08$ milliseconde d'arc. Connaissant sa distance, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

II.C.1) L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointée sur elle. L'étoile se situe à l'infini sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre S . Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'Young de taille identique, respectivement en T_1 et T_2 , séparés d'une distance a réglable. Ce dispositif est placé devant la lentille convergente L_1 de l'instrument d'optique. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte dans cette partie de la seconde lentille L_2 et les observations sont donc effectuées dans le plan de l'image intermédiaire. Un point M dans ce plan est repéré par son abscisse x (figure 5).

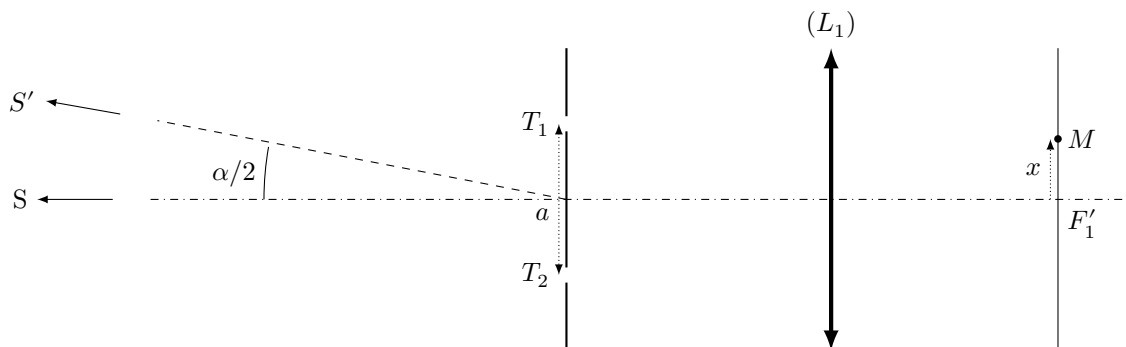


Figure 5 Schéma du dispositif d'interférométrie pour la mesure du rayon de l'étoile *Proxima Centauri*

Q 24. Faire un schéma des deux rayons lumineux passant par T_1 et T_2 qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

Q 25. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_S(M)$, produit par la source S au point M .

Q 26. Décrire alors la figure d'interférences.

Q 27. En notant I_0 l'intensité moyenne, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ dans le plan d'observation.

II.C.2) L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire α . On considère un autre point source S' à la périphérie de l'étoile (figure 5).

Q 28. Faire un schéma des deux rayons lumineux issus de S' , passant par T_1 et T_2 et qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

Q 29. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_{S'}(M)$ produit par la source S' au point M .

Q 30. En déduire l'expression de la plus petite valeur de a qui conduit au brouillage de la figure d'interférence produite par les deux sources incohérentes S et S' .

Q 31. Faire l'application numérique et commenter.

Q 32. Expliquer qualitativement pourquoi le raisonnement précédent, utilisant deux sources ponctuelles l'une située au centre et l'autre sur le bord apparent de l'étoile, rend compte des observations obtenues avec l'objet étendu qu'est la véritable étoile.

III Voyager vers Proxima du Centaure

Pour accomplir un voyage hypothétique vers Proxima du Centaure, on envisage un vaisseau à voile solaire, propulsé grâce à la réflexion du rayonnement électromagnétique du Soleil sur la voile. Plus la voile est grande et réfléchissante, plus grande est la force de propulsion.

Une onde plane progressive monochromatique, se propageant selon $\vec{u}_x$ depuis les $x < 0$, arrive sur la voile solaire, métal de conductivité réelle γ , assimilée dans un premier temps à un demi espace infini $x > 0$ (dénommé dans la suite approximation espace infini).

L'onde incidente dans le demi espace vide des $x < 0$ s'écrit, en notation complexe,

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

et arrive en $x = 0$ sur un métal de conductivité γ .

Q 33. Rappeler sans démonstration l'équation dont le champ électrique est solution dans le vide. En déduire la relation de dispersion liant k et ω en fonction de la célérité c de l'onde. Comment qualifier la propagation de cette onde ?

Q 34. Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde incidente.

Q 35. Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting associé à cette onde incidente.

Cette onde incidente donne naissance à l'interface avec la voile solaire à :

— une onde réfléchie (se propageant selon $-\vec{u}_x$ dans l'espace $x < 0$) de la forme

$$\vec{E}_r = r \underline{E}_0 \exp(j(\omega t + kx)) \vec{u}_y ;$$

— une onde transmise (se propageant selon $+\vec{u}_x$ dans l'espace $x > 0$) de la forme

$$\vec{E}_t = t \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}_m x)) \vec{u}_y.$$

Dans le métal (demi espace $x > 0$), le champ électrique de l'onde transmise vérifie l'équation différentielle

$$\Delta \vec{E}_t = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2}. \quad (\text{III.1})$$

Q 36. Proposer une simplification de l'équation (III.1) pour une onde, dans le domaine du visible ou de l'infrarouge, se propageant dans l'or de conductivité $\gamma = 45 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

Q 37. Exprimer le vecteur d'onde complexe $\underline{k}_m$ en fonction d'une longueur δ dont on donnera l'expression et la signification.

Q 38. Proposer une épaisseur raisonnable pour la voile solaire afin que l'approximation espace infini puisse être conservée. Sachant que la masse volumique de l'or est $\rho = 19,3 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, estimer la masse d'une voile solaire de surface 100 m^2 .

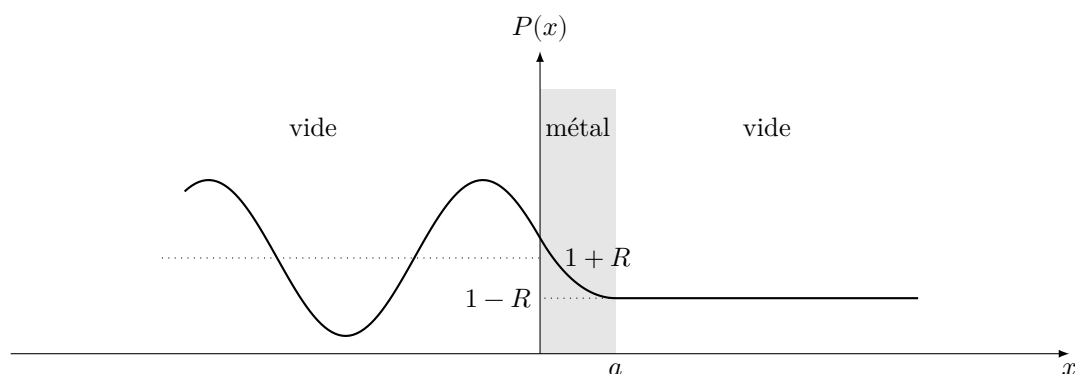


Figure 6

La figure 6 représente l'évolution spatiale de la norme du vecteur de Poynting moyen pour une voile pour laquelle l'approximation espace infini n'est plus vérifiée. R est le coefficient de réflexion en énergie de la voile.

Q 39. Commenter cette figure. À quel phénomène la situation étudiée est-elle analogue ?

Q 40. En utilisant le modèle corpusculaire de la lumière, proposer une expression de la force qui s'exerce sur la voile en fonction, entre autres paramètres, de la puissance électromagnétique moyenne incidente par unité de surface et de R , coefficient de réflexion en énergie de la voile. Évaluer l'ordre de grandeur de cette force à proximité de la Terre où la puissance surfacique du rayonnement solaire est d'environ $1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

IV Une exoplanète : *Proxima Centauri b*

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de *Proxima Centauri b*, une planète « super Terre » rocheuse de masse M_P d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de *Proxima Centauri* (soit dans la zone habitable). Cette exo-planète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.

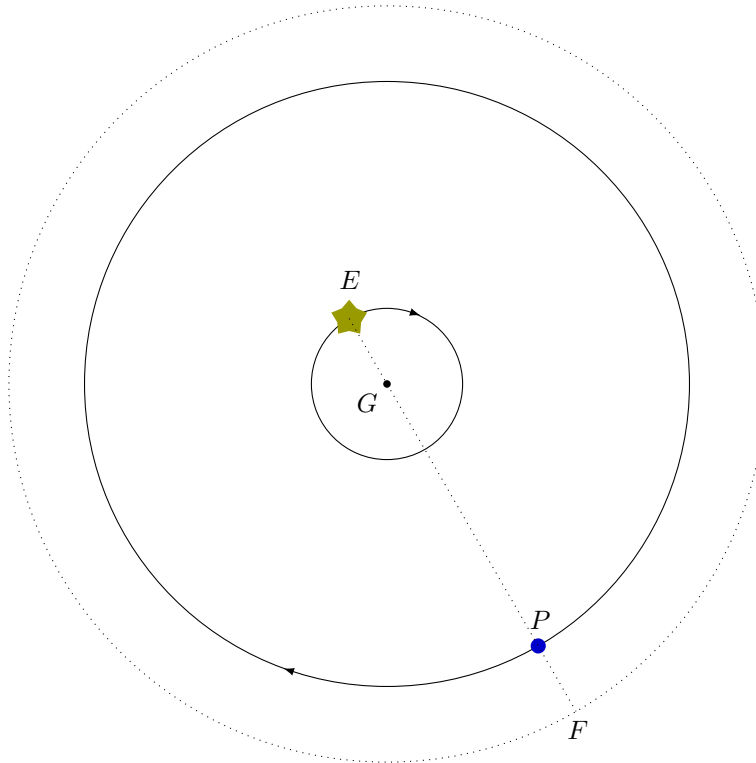


Figure 7 Schéma représentant l'étoile E et la planète P en rotation autour du point G , centre de masse du système {étoile + planète} ; le point F est un point utilisé pour étudier le mouvement de E et P autour de G

IV.A – Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse G du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile E et la planète P tournent toutes les deux autour du centre de masse G du système complet (figure 7).

Le centre de masse G est défini par l'une des deux relations

$$(M_E + M_P)\overrightarrow{AG} = M_E\overrightarrow{AE} + M_P\overrightarrow{AP} \quad \text{pour tout point } A$$
$$M_E\overrightarrow{GE} + M_P\overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

Toutes les forces autres que la force d'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre G dont les 3 axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

Q 41. Établir la relation $\overrightarrow{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P}\overrightarrow{EP}$. Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.

On note pour la suite $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$ et $\|\vec{r}\| = r$.

Q 42. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète P dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$.

On considère le point F défini par $\vec{r} = \overrightarrow{GF}$. Ce point est en mouvement circulaire, de période T , autour de G .

Q 43. Établir la relation

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(M_E + M_P)}{4\pi^2}.$$

Quel nom porte cette loi ?

Q 44. Justifier que E a un mouvement circulaire uniforme autour de G et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de M_P , M_E , r et T .

IV.B – Résultats ayant conduit à la découverte de la planète *Proxima Centauri b*

Dans le cas le plus favorable à l'observation, la Terre est dans le plan des trajectoires de *E* et *P* (figure 7), l'étoile *E* possède alors un mouvement apparent oscillant et la mesure de sa composante *V* de vitesse selon l'axe de visée depuis la Terre est possible par effet Doppler-Fizeau, qui entraîne un décalage des raies spectrales de l'étoile par rapport à leur position mesurée sur Terre, selon la relation

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{V}{c}$$

où f_{em} et f_{obs} représentent respectivement la fréquence à l'émission et la fréquence observée sur Terre.

Le professeur Bouchy de l'observatoire astronomique de Provence propose, en 2005, dans son intervention sur les exoplanètes la formule suivante pour le décalage Doppler lors de la détection indirecte d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = - \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_P \sin i}{(M_P + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c\sqrt{1-e^2}}$$

où M_P et M_E sont respectivement les masses de la planète et de l'étoile, T la période de la planète, e l'excentricité de l'orbite et i l'angle entre la ligne de visée et la perpendiculaire au plan orbital du système. L'excentricité e vérifie $0 \leq e < 1$, avec $e = 0$ pour une orbite circulaire.

Q 45. En utilisant les résultats de la sous-partie précédente (IV.A), établir une formule analogue à la formule proposée par le professeur Bouchy. Commenter les différences.

Q 46. Connaissant la masse de *Proxima Centauri*, $M_E = 2,44 \times 10^{29}$ kg déterminée grâce à l'analyse de son rayonnement, exploiter les données expérimentales de la figure 8 pour déterminer la masse de la planète *Proxima Centauri b*.

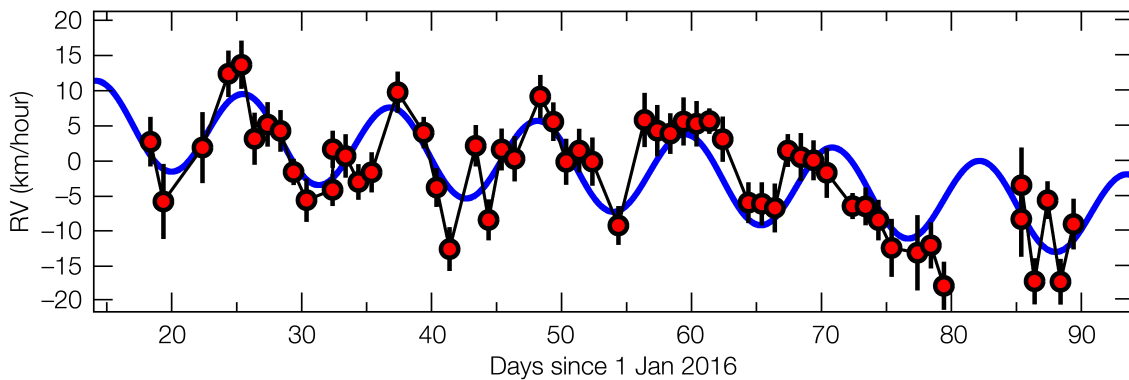
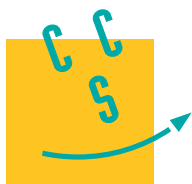


Figure 8 Variations de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* au cours du premier trimestre 2016 — Source : European Southern Observatory, Guillem Anglada-Escudé

Données

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante universelle de la gravitation	$\mathcal{G} = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	$D_{TS} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masse volumique de l'eau pure à 10 °C	$\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Énergie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental	$-13,6 \text{ eV}$
Numéro atomique de l'oxygène	8
Masse molaire atomique de l'oxygène	$16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Enthalpie molaire standard de formation de O ₃	$141,9 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (à 298 K)
Entropie molaire standard de O ₂	$205 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ (à 298 K)
Entropie molaire standard de O ₃	$239 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ (à 298 K)

• • • FIN • • •



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique-chimie 1

MP

2021

4 heures

Calculatrice autorisée

La ruée vers l'or

Introduction¹

Les nanoparticules sont des objets dont les trois dimensions sont inférieures à 100 nm. Ces nano-objets se situent donc au confluent des échelles macroscopique (matériaux massifs) et moléculaire (ou atomistique). D'un point de vue fondamental, l'étude des nanoparticules apparaît essentielle afin d'élargir notre compréhension de la matière. Toutefois, l'intérêt de la communauté scientifique pour les nanoparticules ne s'arrête pas là. En effet, ces nanomatériaux présentent des propriétés particulières et originales attribuables à des effets de taille. Ainsi, certaines nanoparticules semi-conductrices (quantum dots) présentent un élargissement de l'écart entre les bandes de valence et de conduction lorsque leur taille décroît, leur conférant des propriétés optiques originales. Les nanoparticules de métaux nobles (Au, Ag, Pt) montrent une forte bande d'extinction dans le domaine visible (bande plasmon).

En outre, ces objets nanométriques sont assimilables à des briques de base vers la construction de dispositifs fonctionnels de tailles micrométriques. On note leur utilisation dans des domaines aussi divers que la santé (crèmes solaires, cosmétiques...), la biologie, le photovoltaïque, le stockage de l'information, l'imagerie, l'électronique ou encore la catalyse.

Les nanoparticules d'or

Les suspensions de nanoparticules d'or (« or colloïdal ») sont connues depuis l'Antiquité pour leur couleur rouge intense. Elles ont été notamment utilisées pour la coloration d'objets en verre [...]. La coloration rouge rubis des vitraux de la cathédrale de Chartres est due à la présence de nanoparticules d'or. L'étude scientifique de ces nanoparticules a débuté avec les travaux de Michaël Faraday au milieu du XIX^e siècle et elles sont à l'heure actuelle l'objet d'un intérêt scientifique intense et présentent plusieurs applications prometteuses. Parmi ces applications, on peut citer la dépollution, notamment la catalyse par les nanoparticules d'or de la transformation du monoxyde de carbone CO en dioxyde de carbone CO₂ ainsi que des applications en biologie (agents de contraste pour localiser des cellules cancéreuses et thérapie par hyperthermie). Les propriétés optiques des nanoparticules d'or dépendent fortement de leur taille, de leur forme, de leur état d'agrégation et de leur environnement local.

Ce sujet propose l'étude de quelques propriétés physico-chimiques des nanoparticules d'or. La première partie illustre le rôle que peuvent jouer les nanoparticules d'or dans le domaine de la catalyse pour la dépollution des gaz. Dans la seconde partie, on propose une étude de l'imagerie des nanoparticules d'or en lien avec leurs propriétés thermiques. Les deux dernières parties abordent la modélisation de la réponse d'une nanoparticule d'or à une excitation électromagnétique.

Un ensemble de valeurs numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé et doivent *impérativement* être lus avant de commencer à traiter le sujet.

À toute grandeur sinusoïdale réelle de pulsation ω , fonction du temps t , de la forme $a(t) = \tilde{a} \cos(\omega t - \varphi)$, où $\tilde{a}$ et φ sont deux constantes, on fait correspondre une grandeur complexe $\underline{a}(\omega) = \tilde{a} \exp(i(\omega t - \varphi))$, appelée *représentation complexe* de la grandeur $a(t)$.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent une prise d'initiative de la part du candidat. Elles sont signalées par une barre dans la marge gauche. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche de résolution, les hypothèses effectuées et d'illustrer le raisonnement, le cas échéant, par des schémas. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions. Les résultats établis dans ces questions ne sont toutefois pas indispensables pour le traitement des autres questions du problème.

De façon plus générale, le candidat est amené à expliciter toutes les hypothèses et initiatives qu'il est amené à prendre, y compris en dehors de ces questions.

I Utilisation des nanoparticules d'or en catalyse hétérogène

La combustion du carburant dans un moteur thermique automobile conduit à la formation de monoxyde de carbone, gaz toxique inodore et incolore. Le pot catalytique vise à réduire la nocivité des gaz d'échappement. Le monoxyde de carbone y est oxydé en dioxyde de carbone au contact d'éléments catalyseurs qui contiennent des métaux nobles comme le platine, le palladium ou le rhodium.

Jusqu'à la fin des années 1980, l'or était considéré comme un métal inactif en catalyse, contrairement aux autres métaux nobles précédemment cités. C'est en 1987 qu'une équipe de recherche japonaise a mis en évidence non seulement les propriétés de catalyse remarquables de nanoparticules d'or de taille inférieure à 5 nm dans la réaction d'oxydation du monoxyde de carbone, mais aussi que l'or était le seul métal capable de catalyser cette réaction à température ambiante, voire à plus basse température.

I.A – Influences de la température, de la pression et de la composition du mélange gazeux sur l'oxydation du monoxyde de carbone

On étudie l'équilibre chimique résultant de l'oxydation du monoxyde de carbone par le dioxygène. Toutes les espèces chimiques considérées sont en phase gazeuse à la température T et à la pression totale P fixées et sont assimilées à des gaz parfaits.

Q 1. Écrire l'équation de la réaction qui modélise l'oxydation en phase gazeuse du monoxyde de carbone en dioxyde de carbone en se ramenant à une mole de dioxygène.

Q 2. Calculer la valeur de la constante thermodynamique $K^o(T)$ de cet équilibre chimique dans le cas particulier où $T = 298$ K.

Q 3. L'état initial est constitué d'un mélange idéal de monoxyde de carbone et de dioxygène gazeux seulement. On définit la proportion initiale de dioxygène par le paramètre σ , égal au rapport de la quantité initiale de dioxygène sur la quantité initiale de monoxyde de carbone. On définit aussi le taux de conversion du monoxyde de carbone comme étant la quantité de monoxyde de carbone qui a réagi, rapportée à la quantité initiale de monoxyde de carbone. On le note α .

Établir la relation qui lie le taux de conversion du monoxyde de carbone à l'équilibre α_e à la constante thermodynamique d'équilibre $K^o(T)$ à la température T , à la pression totale P du mélange gazeux, à la pression standard P^o et à la proportion initiale de dioxygène σ .

Q 4. Indiquer quelles sont les conditions de température et de pression qui favorisent l'oxydation du monoxyde de carbone. Dans ces conditions, discuter de l'intérêt d'utiliser un catalyseur.

Le graphe de la figure 1 représente les variations de la fonction $F : \alpha \mapsto \frac{\alpha^2(1 + \sigma - \alpha/2)}{(1 - \alpha)^2(\sigma - \alpha/2)}$ en fonction de α pour différentes valeurs de σ , dans une échelle semilogarithmique.

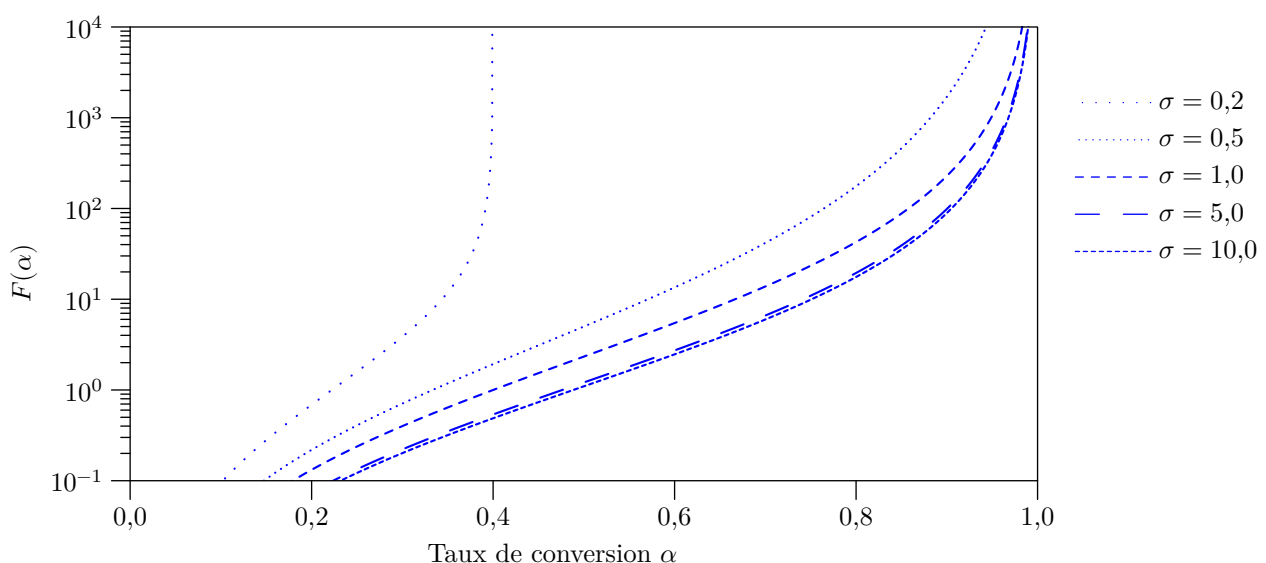


Figure 1

Q 5. Indiquer comment il convient de choisir la proportion initiale de dioxygène σ pour favoriser l'oxydation du monoxyde de carbone.

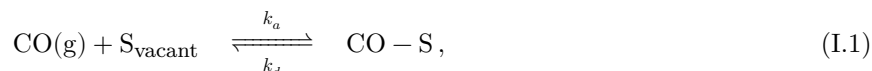
I.B – Modèle de Langmuir de l'adsorption

La catalyse de l'oxydation du monoxyde de carbone par des nanoparticules d'or fait intervenir une étape d'adsorption (plus précisément de chimisorption) au cours de laquelle les molécules de monoxyde de carbone viennent se lier, par liaison chimique, à certains sites d'adsorption sur la surface d'une nanoparticule. Un site d'adsorption lié à une molécule de monoxyde de carbone est qualifié d'*occupé*, par opposition à un site *vacant*.

On propose de déterminer à l'aide d'un modèle de cinétique chimique dans un premier temps, puis grâce à des arguments de thermodynamique statistique dans un second temps, la fraction des sites d'adsorption occupés à l'équilibre thermodynamique à la température T en fonction de la pression p en monoxyde de carbone. Cette fraction, également appelée *taux d'occupation*, est notée θ . Elle est égale au nombre de sites occupés divisé par le nombre total de sites.

I.B.1) Modèle cinétique

L'adsorption d'une molécule de monoxyde de carbone sur une surface est modélisée par le processus



où un site d'adsorption vacant est noté S_{vacant} et un site occupé par une molécule de monoxyde de carbone adsorbée est noté CO-S . La constante de vitesse de la réaction d'adsorption est notée k_a alors que la constante de vitesse du processus réciproque, appelé désorption, est notée k_d .

On suppose que la vitesse de la réaction d'adsorption est d'ordre 1 par rapport à la pression partielle en monoxyde de carbone, notée p , et d'ordre 1 par rapport au taux de sites vacants. De même, on suppose que la vitesse de la réaction de désorption est d'ordre 1 par rapport au taux de sites occupés.

Q 6. Établir l'expression de la vitesse d'apparition des sites occupés, $\frac{d\theta}{dt}$, en fonction de k_a , k_d , θ et p .

Q 7. Exprimer θ , lorsque l'équilibre est établi, en fonction du rapport $K = k_a/k_d$ des constantes de vitesse et de la pression p . L'expression obtenue a été établie pour la première fois par Irving Langmuir, physicien et chimiste américain, récipiendaire du prix Nobel de chimie en 1932 pour ses travaux en physico-chimie des surfaces.

I.B.2) Modèle statistique

On propose de retrouver l'expression du taux d'occupation, établi à la question 7 précédente, à l'aide d'arguments de thermodynamique statistique. Pour cela, on considère l'ensemble des N sites d'adsorption et des molécules de monoxyde de carbone, à la pression p et à la température T , supposées maintenues constantes. L'énergie d'un site vacant est choisie arbitrairement nulle, alors que l'énergie d'un site occupé est notée $-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. La probabilité d'occupation d'un site est donnée par le facteur de Boltzmann. Tous les sites sont indiscernables. Une configuration microscopique du système étudié est définie par le nombre n ($0 \leq n \leq N$) de sites occupés.

On pose $\beta = 1/(k_B T)$ où k_B est la constante de Boltzmann.

Q 8. Donner l'expression de l'énergie $E(n)$ associée à une configuration microscopique où n sites, parmi les N , sont occupés. On note g_n le nombre de réalisations de cette configuration microscopique. Exprimer g_n en fonction de n et N .

On définit la *fonction de partition* Z comme étant la quantité :

$$Z = \sum_{n=0}^N g_n \exp(-\beta E(n)). \quad (\text{I.2})$$

Q 9. Donner l'expression de la probabilité $P(n)$ que le système soit dans une configuration où n sites sont occupés, en faisant intervenir Z , g_n et le facteur de Boltzmann.

Q 10. On note $\langle n \rangle$ le nombre moyen de sites occupés à l'équilibre thermodynamique. Montrer qu'on peut le calculer ainsi : $\langle n \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$.

Q 11. Établir l'expression du taux d'occupation θ à l'équilibre thermodynamique en fonction de la pression p du monoxyde de carbone sachant qu'une étude plus approfondie permet d'établir que le facteur $\exp(\beta\varepsilon)$ est proportionnel à la pression p . Par comparaison avec le résultat établi à la question 7, proposer une expression du coefficient de proportionnalité.

I.B.3) Confrontation de mesures expérimentales au modèle de Langmuir

La figure 2 représente des mesures d'adsorption du monoxyde de carbone sur des nanoparticules d'or : le taux d'occupation θ est représenté en fonction de la pression p en monoxyde de carbone à température ambiante fixée. On cherche à modéliser ces données par le modèle de Langmuir qui fournit l'expression de θ en fonction de p obtenue aux questions 7 et 11.

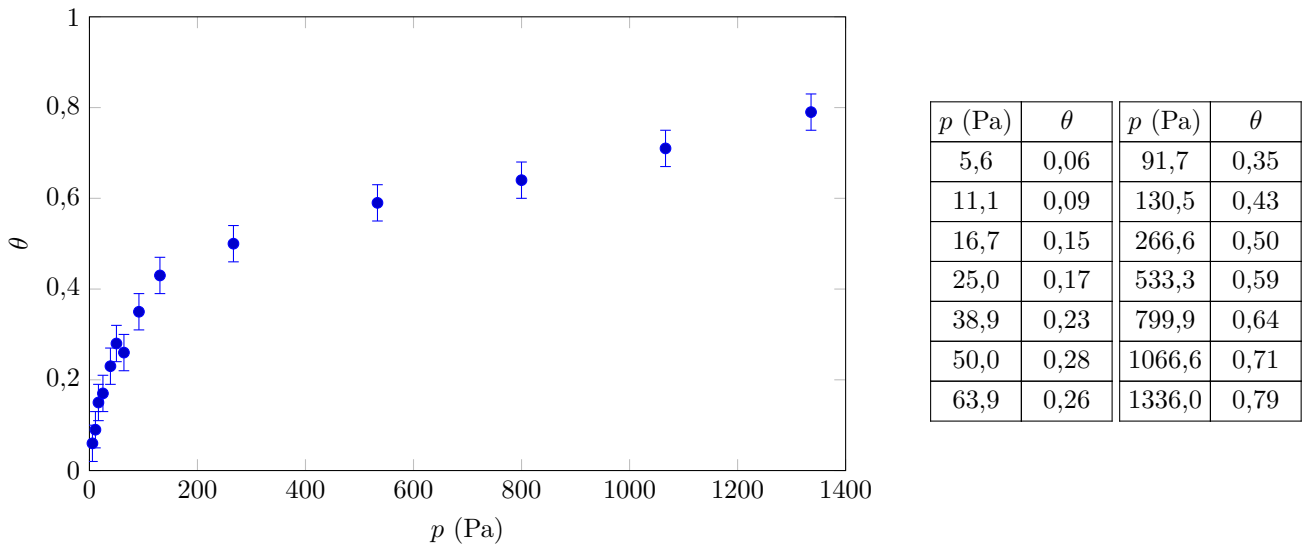


Figure 2 Taux d'occupation θ de la surface du catalyseur (nanoparticule d'or) en fonction de la pression p en monoxyde de carbone, à température ambiante²

Q 12. On choisit de modéliser les données expérimentales données dans la figure 2 à l'aide du modèle de Langmuir. Estimer une valeur approchée du rapport K des constantes de vitesse compatible avec les mesures dans la limite des faibles pressions. Expliquer de façon argumentée (en s'appuyant par exemple sur une représentation graphique) si cette valeur permet d'accorder le modèle de Langmuir avec les mesures réalisées aux plus hautes pressions.

II Imagerie des nanoparticules d'or

Les nanoparticules sont trop petites pour être visualisées avec un microscope. Des techniques d'imagerie indirecte sont donc développées pour les détecter.

Une équipe de l'université Bordeaux 1 a mis au point il y a une quinzaine d'années une technique de microscopie photothermique qui permet de détecter et de localiser, dans un échantillon, des particules d'or dont le rayon n'excède pas quelques nanomètres. Une étape de ce protocole consiste à chauffer la particule par un faisceau laser et fait l'objet de cette partie.

On considère une sphère d'or, de rayon $a = 10\text{nm}$, immobilisée dans un gel constitué très majoritairement d'eau, et chauffée par un faisceau laser.

Le milieu (le gel) entourant la sphère est considéré comme homogène, infini et initialement à la température T_0 . On note κ la conductivité thermique du milieu et C_g sa capacité thermique volumique. On supposera que, dans le domaine de températures exploré, ces grandeurs sont indépendantes de la température.

On note $P_{\text{abs}}(t)$ la puissance totale absorbée par la sphère et C_{Au} la capacité thermique volumique de l'or.

Compte tenu de la taille de la nanosphère, on admet que sa température est partout égale à sa température de surface, que l'on note $T_s(t)$.

On suppose que le contact thermique entre le gel et la nanoparticule est parfait donc que $T(a^+, t) = T_s(t)$.

II.A – Équation de la diffusion thermique en géométrie sphérique

Q 13. Montrer, à l'aide d'un argument simple, que la température T en un point du milieu ne dépend spatialement que de r , distance séparant le centre de la nanosphère du point considéré.

Q 14. Effectuer un bilan énergétique entre t et $t + dt$ pour un système bien choisi et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(r, t)$ dans le milieu :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) (r, t). \quad (\text{II.1})$$

Cette équation se met sous la forme (le calcul n'est pas demandé) :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}(r, t).$$

II.B – Température dans le milieu en régime stationnaire

On se place en régime stationnaire, c'est-à-dire que les températures de la sphère et du milieu ne dépendent pas du temps.

Q 15. Établir l'expression de la température $T(r)$ dans le milieu en fonction de a , r , T_0 et T_s .

Q 16. En déduire l'expression de la puissance fournie par la nanosphère au milieu extérieur, $P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}}$, en fonction de a , κ et $\delta T_s = T_s - T_0$ sous la forme :

$$P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}} = 4\pi a \kappa \delta T_s.$$

II.C – Température de surface de la nanosphère

On suppose maintenant que l'intensité du faisceau laser chauffant la nanosphère d'or est modulée sinusoïdalement, la puissance absorbée par la sphère étant donnée par :

$$P_{\text{abs}}(t) = P_0(1 + \cos(\Omega t)),$$

où P_0 est une constante positive. On admet que l'expression de $P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}}$ établie à la question 16 est valable même en régime variable.

Q 17. En effectuant un bilan énergétique pour la nanosphère entre t et $t + dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par $\delta T_s(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\delta T_s(t) + \tau \frac{d(\delta T_s)}{dt} = \frac{P_{\text{abs}}(t)}{4\pi \kappa a},$$

où τ est une constante dont on donnera l'expression en fonction des données du problème et dont on vérifiera qu'elle est bien homogène à un temps.

On donne $P_0 = 0,375 \mu\text{W}$ et $\frac{\Omega}{2\pi} = 700 \text{ kHz}$.

Q 18. Justifier que la température $T_s(t)$ se met sous la forme approchée :

$$T_s(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi \kappa a}(1 + \cos(\Omega t)).$$

Q 19. Donner l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T_s}$ de la température de la surface de la sphère et calculer sa valeur.

II.D – Température du gel autour de la sphère

On admet que la solution de l'équation de la diffusion thermique dans le gel s'écrit :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left(1 + \exp\left(-\frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \right),$$

où α est une constante réelle et $r_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega C_g}}$.

Q 20. Interpréter physiquement la constante r_{th} et citer un autre domaine de la physique où l'on rencontre une situation similaire.

Q 21. Établir l'expression de la constante α en fonction de P_0 et κ .

Q 22. En considérant que $a \ll r_{\text{th}}$, déterminer l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T} = \langle T(r, t) - T_0 \rangle$ de la température du milieu contenu dans une sphère de rayon r_{th} autour de la nanoparticule, la moyenne étant effectuée sur le temps puis sur le volume de la sphère de rayon r_{th} . L'exprimer en fonction de a , r_{th} et de $\overline{\delta T_s}$ (voir question 19). Évaluer numériquement $\overline{\delta T}$.

Q 23. Proposer une technique permettant de révéler les variations faibles de l'indice optique du gel induites par cette variation de température.

III Propriétés optiques du métal or

On souhaite modéliser les propriétés optiques de l'or à l'état métallique à l'aide du modèle de Drude. Pour ce faire, on considère que le métal est composé d'un ensemble d'ions supposés fixes, qui constituent le réseau cristallin, et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer sur des distances très largement supérieures aux distances interatomiques. Chaque électron porte la charge $-e$ et possède une masse notée m_e .

En l'absence d'excitation électromagnétique extérieure, l'état du métal est stationnaire et qualifié d'état de repos. Il est désigné par les grandeurs physiques suivantes, indicées par 0, indépendantes du temps. Les champs électrique et magnétique au repos, en un point M , sont identiquement nuls : $\vec{E}_0(M) = \vec{0}$ et $\vec{B}_0(M) = \vec{0}$. Les électrons sont animés d'un mouvement d'agitation thermique, mais la vitesse moyenne des électrons qui se situent au voisinage d'un point M est nulle : $\vec{v}_0(M) = \vec{0}$. Au repos, le métal est électriquement neutre à l'échelle locale : le nombre moyen d'électrons par unité de volume est égal au nombre moyen d'ions par unité de volume. On note n_{e0} le nombre moyen d'électrons par unité de volume dans l'état de repos du métal, supposé uniforme.

La propagation d'une onde électromagnétique vient perturber localement l'état de repos du métal. On suppose que cette perturbation est d'amplitude suffisamment faible pour que les différentes grandeurs physiques puissent s'écrire comme la somme de la valeur de cette grandeur au repos, indicée par 0 et d'une valeur perturbée, indicée par le chiffre 1. Ainsi, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de vitesse des électrons et le nombre moyen d'électrons libres par unité de volume s'écrivent respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= \vec{E}_0(M) + \vec{E}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{E}_1(M, t), \\ \vec{B}(M, t) &= \vec{B}_0(M) + \vec{B}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{B}_1(M, t), \\ \vec{v}(M, t) &= \vec{v}_0(M) + \vec{v}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t), \\ n_e(M, t) &= n_{e0} + n_{e1}(M, t).\end{aligned}$$

Les grandeurs $\vec{E}_1(M, t)$, $\vec{B}_1(M, t)$, $\vec{v}_1(M, t)$ et $n_{e1}(M, t)$ sont associées à la propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu. Leurs amplitudes respectives sont supposées suffisamment faibles pour qu'on se limite à un traitement linéaire : tous les calculs se limiteront à des termes qui s'expriment au premier ordre vis-à-vis des amplitudes indicées par le chiffre 1. Ci-dessous est présenté un exemple de linéarisation au premier ordre du produit de deux grandeurs $a(M, t)b(M, t)$ où le terme du second ordre est finalement négligé :

$$\begin{aligned}a(M, t)b(M, t) &= (a_0 + a_1(M, t))(b_0 + b_1(M, t)) \\ &= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{a_1(M, t)b_1(M, t)}_{\text{ordre 2 négligeable}} \\ &\simeq a_0 b_0 + a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t).\end{aligned}$$

III.A – Mouvement des électrons libres

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement des électrons libres. Le gaz d'électrons libres est assimilé à un fluide. On note respectivement m_e et $-e$ la masse et la charge électrique d'un électron. On suppose qu'en plus de la force d'interaction avec le champ électromagnétique de l'onde, les électrons sont soumis à une force dissipative qui modélise leurs interactions avec le réseau cristallin : $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}_1(M, t)$. Le mouvement des électrons est supposé non relativiste ($\|\vec{v}_1\| \ll c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide). Dans l'approximation linéaire, l'équation du mouvement des électrons se met sous la forme approchée

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M, t) = -e \vec{E}_1(M, t) - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}_1(M, t). \quad (\text{III.1})$$

Q 24. Expliquer pourquoi, compte tenu des hypothèses retenues, la composante magnétique de la force exercée par l'onde électromagnétique sur les électrons n'apparaît pas dans l'équation du mouvement (III.1).

Q 25. Exprimer, dans l'approximation linéaire, la densité volumique de courant électrique $\vec{j}_1(M, t)$ dans le métal en fonction, entre autres, de la vitesse moyenne des électrons $\vec{v}_1(M, t)$, puis établir l'équation différentielle liant $\vec{j}_1(M, t)$ et $\vec{E}_1(M, t)$.

III.B – Relation de dispersion

On suppose que le métal est soumis à une onde électromagnétique, harmonique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit ainsi en notation complexe :

$$\vec{E}_1(M, t) = \tilde{E}_1 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right) \vec{e}_y, \quad (\text{III.2})$$

où $\underline{n} \in \mathbb{C}$ est appelé *indice complexe* du métal. L'espace est rapporté à la base orthonormée cartésienne $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Q 26. Justifier que l'onde électromagnétique considérée peut être qualifiée de plane, progressive, transverse et que son état de polarisation est rectiligne.

Q 27. Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le milieu considéré, en faisant intervenir $n_{e1}(M, t)$, $\vec{j}_1(M, t)$, $\vec{E}_1(M, t)$ et $\vec{B}_1(M, t)$.

Q 28. Montrer que les caractéristiques de l'onde électromagnétique imposent $n_{e1}(M, t) = 0$.

Q 29. Établir l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution spatiale et temporelle du champ électrique $\vec{E}_1(M, t)$ dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma définie par la relation $\omega_p = \sqrt{\frac{n_{e0}e^2}{m_e\epsilon_0}}$.

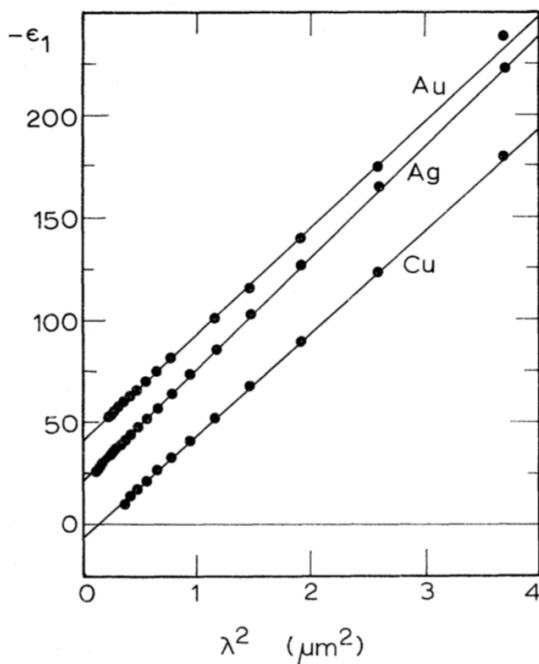
Q 30. Établir que le champ électrique (III.2) est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente à condition que :

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (\text{III.3})$$

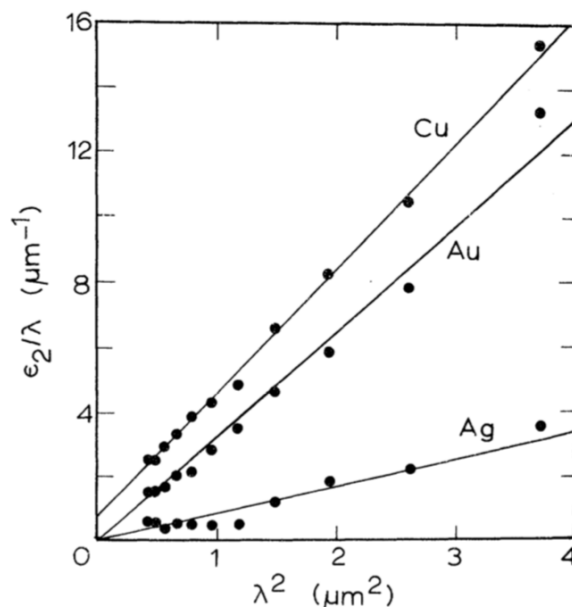
Q 31. Déterminer les expressions des constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 (qui sont des grandeurs réelles) telles que $\underline{n}^2 = \epsilon_1 - i\epsilon_2$. Exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de ω , ω_p et τ .

Q 32. En déduire les expressions asymptotiques des constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 dans la limite où $\omega\tau \gg 1$, et comparer ϵ_1 et ϵ_2 dans cette limite.

La figure 3 représente un ensemble de données expérimentales relatives aux constantes diélectriques de différents métaux. L'or correspond au symbole Au. Sur la figure de gauche est représentée l'allure de $-\epsilon_1$ en fonction de la longueur d'onde ($\lambda = 2\pi c/\omega$) au carré, et sur la figure de droite, ϵ_2/λ en fonction de la longueur d'onde au carré λ^2 , dans une certaine gamme de longueurs d'onde.



(a) Tracé de $-\epsilon_1$ en fonction de λ^2



(b) Tracé de ϵ_2/λ en fonction de λ^2 .

Figure 3 Évolution des constantes diélectriques de différents métaux en fonction de la longueur d'onde³ ; par souci de lisibilité, l'ordonnée à l'origine des droites représentant $-\epsilon_1$ en fonction de λ^2 pour l'or (Au) et l'argent (Ag) est arbitraire

Q 33. Exploiter la figure 3 et les résultats théoriques précédents pour déterminer des valeurs numériques approchées du nombre moyen d'électrons libres n_{e0} dans le métal or et de la constante de temps τ . Comparer la valeur de n_{e0} obtenue à celle qu'on peut déduire des données relatives à l'or qui figurent en fin d'énoncé.

IV Résonance plasmon des nanoparticules d'or

IV.A – Pulsation propre d'une nanoparticule d'or

— Les nanoparticules d'or¹ —

Lorsqu'une particule métallique est soumise à un champ électromagnétique dont la longueur d'onde λ est beaucoup plus grande que la taille des particules, tous les électrons libres subissent le même champ et oscillent collectivement et en phase. En effet, lorsque le nuage d'électrons est déplacé par rapport aux noyaux métalliques par interaction avec le champ électrique, il se crée une force de rappel due à l'attraction coulombienne entre noyaux et électrons (figure 4). Lorsque la fréquence de l'onde incidente correspond à la fréquence propre de ces oscillations, il se produit un phénomène de résonance, appelé résonance de plasmon de surface.

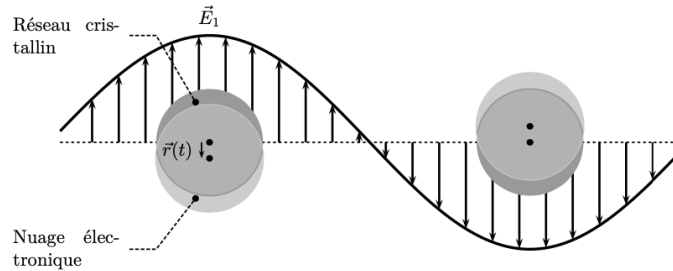


Figure 4 Représentation schématique des oscillations de plasmon pour une nanoparticule sphérique, montrant le déplacement des électrons libres par rapport au réseau cristallin des noyaux métalliques

La fréquence de résonance plasmon dépend de la nature du métal. Elle a lieu dans le domaine du visible, seulement pour l'or, le cuivre et l'argent, d'où la coloration particulière de ces nanoparticules. Si la particule est sphérique et beaucoup plus petite que la longueur d'onde (rayon $<$ quelques dizaines de nanomètres) alors la position de la résonance plasmon est indépendante de la taille de la particule [...]. Elle dépend alors des propriétés du métal et du milieu environnant. Ainsi, des nanoparticules d'or de 20 nm ont une bande de résonance plasmon vers 520-530 nm (absorption dans le vert) et sont rouges. L'or sous forme de nanoparticules perd donc sa couleur dorée si caractéristique.

Pour interpréter le rappel du nuage des électrons libres et en déduire une expression de la pulsation propre Ω de son mouvement d'oscillation, il faut s'intéresser à la séparation des charges électriques qui résulte du déplacement de ce nuage électronique. La figure 4 suggère qu'on peut modéliser cette distribution de charges électriques par la superposition de deux boules, de même rayon R , qu'on peut considérer uniformément chargées en volume, l'une correspondant au nuage des électrons libres, l'autre au réseau cristallin des noyaux métalliques, et dont le décalage est donné par le vecteur $\vec{r}(t)$. Ce déplacement reste bien inférieur au rayon R de la nanoparticule.

Q 34. Déterminer une expression du champ électrostatique à l'intérieur de la nanoparticule, qui résulte du déplacement du nuage électronique par rapport au réseau cristallin. Commenter le résultat obtenu.

IV.B – Modélisation de la réponse d'une nanoparticule à une excitation électromagnétique

On considère une nanoparticule d'or sphérique, de rayon R , placée dans le vide. En première approche, on assimile son nuage électronique à un oscillateur harmonique, de masse égale à $\frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} m_e$, et de pulsation propre $\Omega = \omega_P / \sqrt{3}$ excité par le champ électrique d'une onde électromagnétique incidente. On note $\vec{E}_1(O, t)$ le champ électrique de cette onde au centre O de la nanoparticule, à l'instant t . On admet que ce centre se confond avec le centre du réseau cristallin, considéré comme fixe dans le référentiel d'étude. On suppose également que le champ électrique est uniforme à l'échelle de la nanoparticule.

Q 35. Justifier que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur déplacement $\vec{r}(t)$ du nuage électronique par rapport au centre O de la nanoparticule s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} + \Omega^2 \vec{r}(t) = -\frac{e}{m_e} \vec{E}_1(O, t).$$

On se place désormais en régime sinusoïdal forcé où $\vec{E}_1(O, t) = \tilde{E}_1 \cos(\omega t - \varphi) \vec{e}_y$ où φ est une constante.

Q 36. Déterminer l'expression de la représentation complexe du déplacement $\vec{r}$ en régime sinusoïdal forcé en fonction, entre autres, de $\tilde{E}_1$, représentation complexe du champ électrique de l'onde incidente.

Q 37. En déduire l'expression du moment dipolaire électrique $\vec{p}$ de la nanoparticule en fonction de $\vec{E}_1$ sous la forme

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}_1.$$

Q 38. Expliciter la polarisabilité complexe $\underline{\alpha}(\omega)$ en fonction de ω , Ω , ω_p et R . Préciser la dimension du module $|\underline{\alpha}(\omega)|$ de la polarisabilité complexe.

La polarisabilité complexe de la nanoparticule traduit sa réponse à une excitation électromagnétique sinusoïdale extérieure.

Q 39. Étudier et interpréter qualitativement le comportement de $|\underline{\alpha}(\omega)|$ en fonction de la pulsation ω . Indiquer quelle modification principale entraîne la prise en compte d'effets dissipatifs dans le mouvement du nuage électronique.

Un modèle plus précis, tenant à la fois compte du caractère dissipatif du mouvement du nuage électronique et de l'indice optique n_0 du milieu transparent dans lequel se trouve la nanoparticule d'or, conduit à l'expression suivante de la polarisabilité complexe :

$$\underline{\alpha}(\omega) = 4\pi R^3 \frac{\underline{n}^2 - n_0^2}{\underline{n}^2 + 2n_0^2}, \quad (\text{IV.1})$$

où $\underline{n}^2$ est l'indice complexe de l'or au carré, donné par la relation (III.3). On montre aussi que la puissance électromagnétique absorbée par une nanoparticule d'or est proportionnelle à la valeur absolue de la partie imaginaire de sa polarisabilité complexe $\underline{\alpha}(\omega)$.

Q 40. Vérifier que la relation (IV.1) est compatible avec l'expression, déterminée à la question 37, de la polarisabilité complexe d'une nanoparticule placée dans le vide lorsqu'on néglige les phénomènes dissipatifs ($\omega\tau \gg 1$).

Q 41. Calculer la valeur de la longueur d'onde principalement absorbée par des nanoparticules d'or présentes dans le verre d'un vitrail ($n_0 = 1,5$). Conclure quant à la couleur par transmission des vitraux de la cathédrale de Chartres mentionnés dans l'introduction du sujet.

Données et formulaire

Constantes physiques

Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Données thermodynamiques à 298 K

	O ₂ (g)	CO(g)	CO ₂ (g)
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ (kJ·mol ⁻¹)		-110,6	-393,5
Entropie molaire standard S° (J·K ⁻¹ ·mol ⁻¹)	204,8	197,6	213,7

Données relatives à l'or

Symbole de l'élément chimique or	Au
Type de réseau cristallin	cubique à faces centrées
Rayon atomique	135 pm
Configuration électronique à l'état fondamental	[Xe] 6s ¹ 4f ¹⁴ 5d ¹⁰
Capacité thermique volumique	$C_{\text{Au}} = 2,5 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$

Données relatives au gel (partie II)

Conductivité thermique du gel	$\kappa = 0,6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
capacité thermique volumique	$C_g = 4,2 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$

Formulaire

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

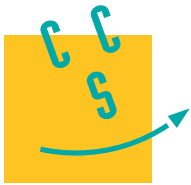
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

• • • FIN • • •

¹ D'après l'article **Synthèse et détermination de la taille de nanoparticules d'or**, par J. Piard *et al.*, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 107, mars 2013.

² Données extraites de : H. Hartshorn, C.J. Pursell, B.D. Chandler (2009). Adsorption of CO on supported gold nanoparticle catalysts: a comparative study. *Journal of Physical Chemistry C*, 113 (24), 10718–10725.

³ D'après P.B. Johnson et R.W. Christy, Optical constants of the noble metals, *Phys. Rev. B* **6**, 4370 (1972).

**Centres de données**

Un centre de données — *data center* en anglais — est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (*data*). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

Ce problème est composé de deux parties, elles-mêmes divisées en différentes sous-parties, totalement indépendantes. La première partie propose une étude thermodynamique et thermique de dispositifs utilisables pour le refroidissement d'un centre de données. La deuxième partie porte sur le projet de délocalisation des centres de données dans l'espace.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

I Refroidir les centres de données, quelques solutions techniques contemporaines**I.A – À l'échelle des composants**

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe (Ox) , de rayon a , de longueur $b \gg a$ et de conductivité thermique λ . Elle est accolée en $x = 0$ au composant de température T_d ; le contact thermique en $x = 0$ est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température T_a uniforme.

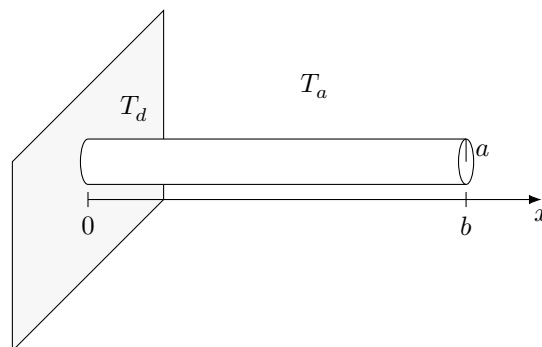


Figure 1 Modélisation de l'ailette

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température $T(x)$ est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse x pour tout $x \in [0, b]$.

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme T_a , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a) \vec{n}$$

où $\vec{j}_{cc}$ correspond à la densité de flux conducto-convectif et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient h , dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fin d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

Sur la figure 2 est représentée la solution « normalisée » de l'équation (I.1), définie par $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$, en fonction de l'abscisse adimensionnée x/b , pour différentes valeurs du rapport b/δ .

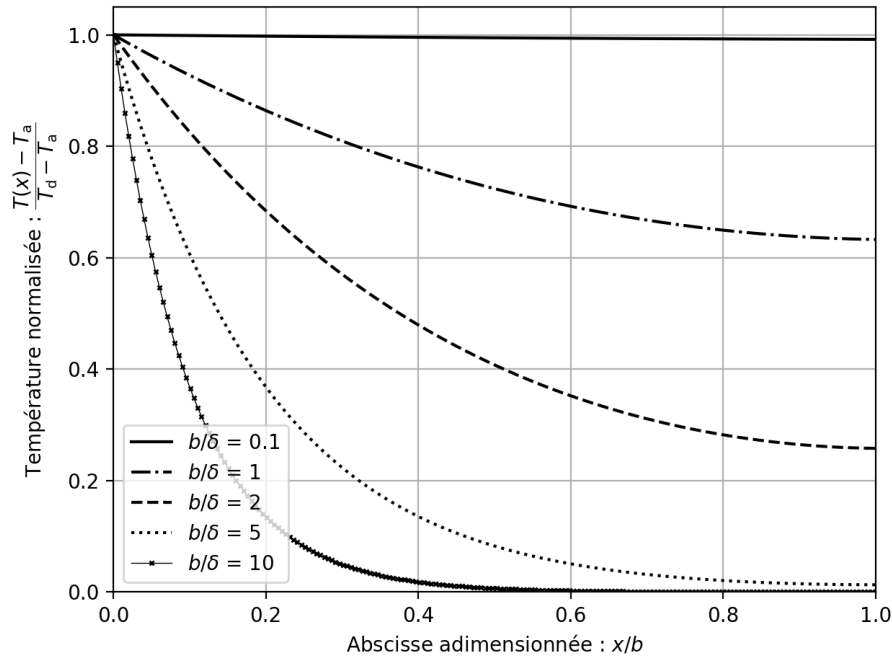


Figure 2 Représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium (solution de l'équation (I.1)) pour différentes valeurs du rapport b/δ

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

On définit la résistance thermique R_{th} de l'ailette de refroidissement par $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2$ cm. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1$ mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par 60 °C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

I.B – À l'échelle des locaux

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse au système de refroidissement d'une salle informatique de 25 m³, située dans le sud de la France, dans laquelle sont placés plusieurs serveurs de données. L'objectif est de maintenir la température de la salle à une valeur inférieure ou égale à $T_{max} = 35$ °C, sachant que les serveurs de données dégagent une énergie thermique de 100 kW·h chaque jour.

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.

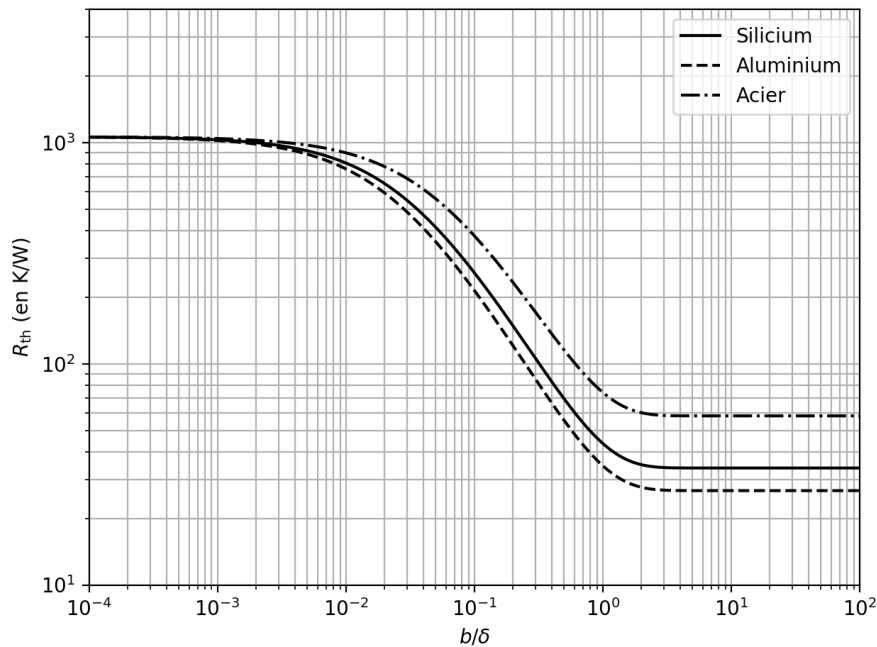


Figure 3 Évolution de la résistance thermique d'une ailette de rayon $a = 1$ mm, en présence de ventilation, en fonction du rapport b/δ

Afin de réduire les dépenses engagées pour le refroidissement de la salle, une alternative intéressante est celle du *free-cooling*, qui consiste à ventiler la salle tout en exploitant la fraîcheur de l'air extérieur. Pour ce faire, on a recours à l'installation d'un ventilateur pouvant remplacer l'air de la pièce avec le débit de volume $D_v = 830 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. La puissance absorbée par le ventilateur est $P_v = 60 \text{ W}$.

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température $T_{\max}$. Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m , en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

Les relevés annuels de température à l'extérieur de la salle sont présentés sur la figure 4.

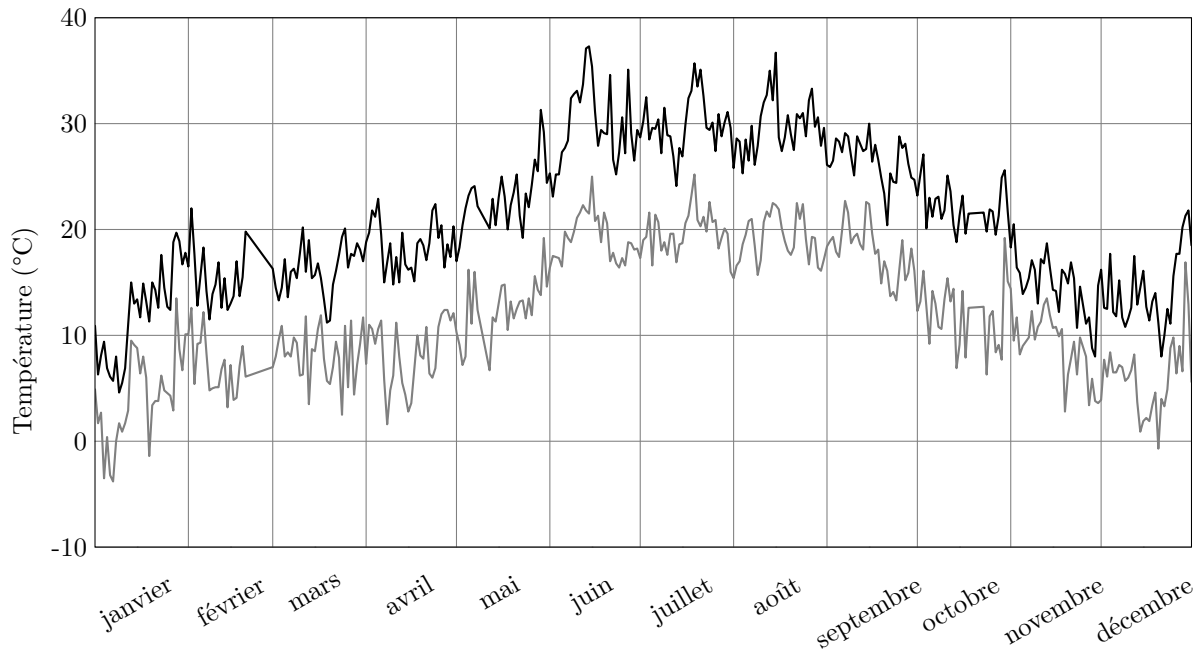


Figure 4 Relevé des températures journalières minimales et maximales à l'extérieur de la salle pour l'année 2021 (source infoclimat.fr)

Lorsque le système de *free-cooling* ne permet pas de maintenir la température de la salle à une température inférieure ou égale à $T_{\max}$, le système de conditionnement d'air prend le relais et le système de *free-cooling* s'arrête.

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de *free-cooling* est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de *free-cooling* dans cette salle informatique.

II Délocaliser les centres de données, une solution d'avenir ?

Afin de lutter contre les cyberattaques, mais surtout de profiter d'un refroidissement optimal et « gratuit », une start-up californienne projette de stocker des données dans des satellites en orbite à basse altitude autour de la Terre. Le projet prévoit la mise en orbite de 10 satellites en tout.

II.A – De la difficulté d'une communication directe

Chaque satellite est assimilé à un point matériel M de masse $m_S = 4\text{ t}$, en orbite circulaire à l'altitude $h = 650\text{ km}$ autour de la Terre de centre O , de rayon R_T et de masse M_T . On suppose que la Terre est un astre présentant une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O . Les frottements sont négligés ; seule la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est à prendre en compte.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, de repère associé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, supposé galiléen. L'axe (Oz) est défini de sorte que la trajectoire du satellite considéré soit contenue dans le plan $z = 0$. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à ce plan (figure 5).

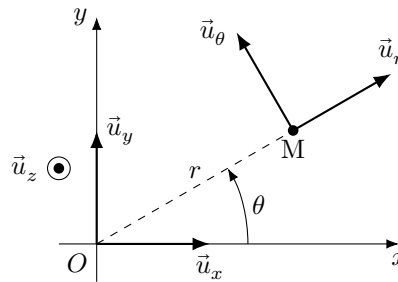


Figure 5

Q 12. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

Q 13. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite v_0 sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle G et des paramètres M_T , R_T et h .

Q 14. Évaluer numériquement la vitesse v_0 , ainsi que la période de révolution T_0 correspondante.

Pour appréhender la difficulté à communiquer avec les satellites de basse altitude directement depuis la surface de la Terre, on peut se référer à un article publié sur le site Internet du journal Le Monde le 13 janvier 2017, intitulé « Comment communique-t-on en direct avec l'ISS ? ». Dans cet article, publié lors du premier séjour de l'astronaute Thomas Pesquet à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS), on peut lire l'extrait suivant.

« La Station Spatiale Internationale (ISS) étant sur une orbite basse, elle survole la surface terrestre d'assez près (environ 400 kilomètres). À cette altitude, la vitesse orbitale est très rapide (environ 27 500 km/h, soit 7,6 km par seconde), rendant toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute. La communication avec l'ISS passe donc par des satellites relais positionnés très haut, sur une orbite dite « géostationnaire », à 36 000 kilomètres d'altitude, qui permet aux satellites qui y sont de rester au-dessus d'un point de la surface terrestre de façon fixe. [...] Ces satellites servent de relais de communication aussi bien pour des équipages humains que pour de nombreux satellites placés sur une orbite basse qui ont également besoin de communiquer avec les équipes au sol. »

Q 15. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».

II.B – Communication avec les satellites relais

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique ε_0 et pour perméabilité magnétique μ_0 .

II.B.1) Propagation dans le vide

L'onde de communication envoyée depuis la surface de la Terre vers le satellite est supposée plane, progressive selon l'axe (Ox) et harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $k\vec{u}_x$. En notation complexe, son champ électrique s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

où $i^2 = -1$ et E_0 est un nombre qui peut être supposé réel grâce à un choix judicieux de l'origine des temps.

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\vec{E}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé au champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

II.B.2) Propagation dans le plasma

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres n_e de charge $-e$, de masse m_e , et une densité volumique de cations $n_c = n_e$ de charge $+e$, de masse m_c ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \vec{u}_y$$

où on pose $\underline{k} = k' + i k''$. On considère que n_c , n_e , E_0 , ω , k' et k'' sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où $k' \geq 0$ et $k'' \leq 0$.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant c .

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\vec{v}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\vec{v}_c\|$ par rapport à $\|\vec{v}_e\|$?

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\vec{j}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \simeq -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}.$$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le plasma.

Q 24. En déduire l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c , e , ε_0 , m_e et n_e .

On suppose dans un premier temps $\omega < \omega_p$.

Q 25. Expliciter l'expression de $\underline{k}$ et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω , ω_p et c .

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue. On suppose désormais que $\omega > \omega_p$.

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de $\underline{k}$. En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Tracer v_g et v_φ en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

En réalité, la densité électronique n_e dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La figure 6 présente son évolution.

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

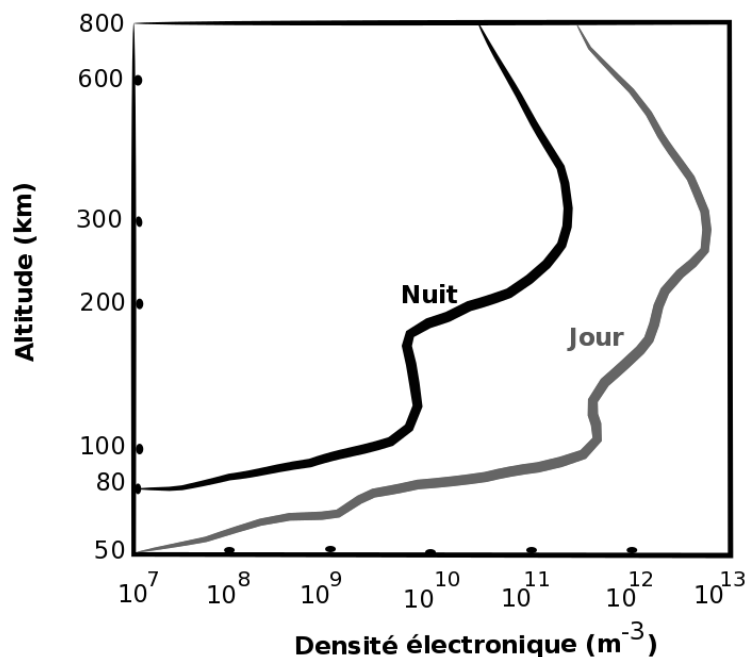


Figure 6 Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

II.C – Disposer d'une source d'énergie

Les batteries lithium-ion sont actuellement les plus utilisées pour alimenter en électricité les appareils nomades, notamment grâce à leur importante énergie massique.

II.C.1) L'élément lithium

L'isotope le plus abondant du lithium est le ${}^7_3\text{Li}$.

Q 31. Donner la configuration électronique de l'élément lithium dans l'état fondamental. À quelle famille appartient-il ?

Q 32. Justifier le caractère réducteur du lithium. Quel ion le lithium peut-il former le plus facilement ?

II.C.2) Obtention du lithium

Le lithium peut être extrait à partir de différentes espèces minérales. L'une d'elles, le spodumène, est broyée dans un broyeur à boulets dans lequel est ajouté de l'acide sulfurique en excès. Cette lixiviation avec de l'eau permet de libérer le lithium en solution. Les impuretés sont précipitées par neutralisation à la chaux, puis le lithium est précipité par du carbonate de sodium Na_2CO_3 à l'état de carbonate de lithium. Le sodium appartient à la même famille que le lithium.

Le carbonate de lithium Li_2CO_3 est un composé peu soluble dans l'eau. Sa solubilité est égale à $13,1 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ à 20°C et vaut $7,2 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ à 100°C .

Le composé purifié est alors transformé en chlorure par réaction avec l'acide chlorhydrique, puis le lithium métal est obtenu par électrolyse.

Q 33. Écrire l'équation de la réaction (R) de dissolution du carbonate de lithium.

Q 34. Calculer la valeur de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction (R). Commenter son signe.

II.C.3) Accumulateur lithium-ion

Un accumulateur lithium-ion fonctionne par l'échange réversible d'ions lithium entre une électrode négative et une électrode positive (figure 7).

Au pôle $\ominus$ de l'accumulateur, les atomes de lithium sont insérés dans une structure carbonée de type graphite, que l'on peut noter $\text{C}_{6(s)}$. En effet, lors de la charge, les ions lithium sont réduits et les atomes de lithium s'insèrent dans la structure de type graphite. La formule chimique du composé d'insertion obtenu est LiC_6 . À l'inverse, lors de la décharge, les atomes de lithium sont oxydés et les ions lithium se « désinsèrent » ; chaque atome de lithium peut alors libérer un électron.

Q 35. Écrire la demi-équation électronique de réduction des ions Li^+ , la réaction d'insertion des atomes de lithium dans le graphite, puis en déduire la demi-équation électronique bilan modélisant l'ensemble de ces phénomènes pendant la charge.

Q 36. Déterminer le nombre maximum d'atomes de lithium qui peuvent être insérés dans 1 g de carbone solide. En déduire la charge électrique maximale que peut délivrer l'électrode de graphite lors de la décharge en A·h, par kilogramme de graphite.

Le pôle $\oplus$ est constitué d'une source de lithium métallique, comme le dioxyde de cobalt et de lithium, de formule brute LiCoO_2 .

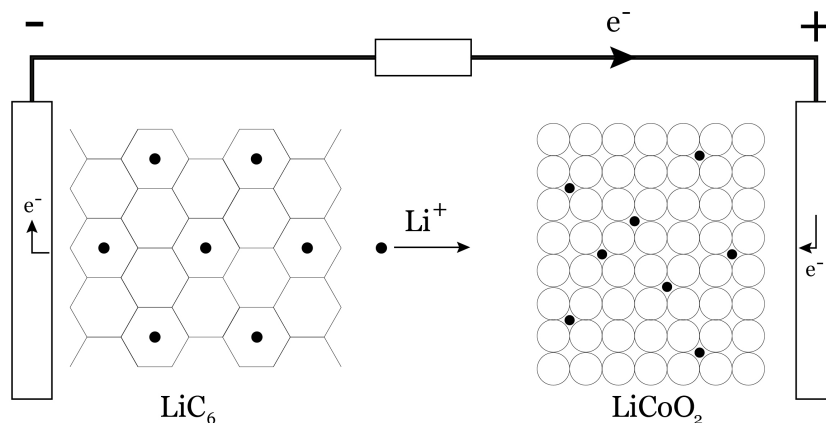


Figure 7 Schéma de fonctionnement de la pile lithium-ion lors de la décharge

Q 37. Les espèces LiCoO_2 et CoO_2 forment un couple rédox. Identifier l'oxydant et le réducteur dans ce couple sachant que le nombre d'oxydation dans l'espèce LiCoO_2 est égal à la charge de l'ion monoatomique stable qu'il forme. En déduire la demi-équation électronique qui se produit lors de la charge au niveau de l'électrode contenant du cobalt.

Q 38. Écrire l'équation bilan du fonctionnement de l'accumulateur lors de la décharge et lors de la charge. Plusieurs batteries sont associées en série pour obtenir la tension souhaitée. Par analogie avec d'autres satellites sur des orbites d'altitudes similaires, on peut prévoir que le générateur solaire du satellite se trouvera dans l'ombre de la Terre à chaque révolution pendant une durée d'environ 35 min et éclairé durant 65 min.

Q 39. Déterminer la masse minimale de graphite nécessaire pour faire fonctionner une des batteries de sorte qu'elle débite un courant de 10 A lorsque le satellite est dans l'ombre.

Données

Conductivité thermique du silicium	$\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'aluminium	$\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'acier	$\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique)	$h_s = 30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé)	$h_r = 300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Prix du kW·h	0,17 €
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du lithium	$M_{\text{Li}} = 6,94 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du carbone	$M_{\text{C}} = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'azote	$M_{\text{N}} = 14,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'oxygène	$M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Formulaire

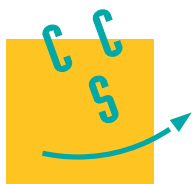
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

Soit deux fonctions sinusoïdales f et g , scalaires ou vectorielles, de même période et d'écritures complexes respectives $\underline{f}$ et $\underline{g}$. La valeur moyenne de la fonction $f \times g$, le symbole $\times$ signifiant une opération de produit (scalaire ou vectoriel), vérifie la relation

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

où Re désigne la partie réelle et $\underline{g}^*$ le conjugué de la fonction complexe $\underline{g}$.

• • • FIN • • •



Les bouées houlographes Waverider

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Le fonctionnement du Waverider repose sur une ingénieuse combinaison de principes physiques que ce problème aborde au travers de modèles simples.

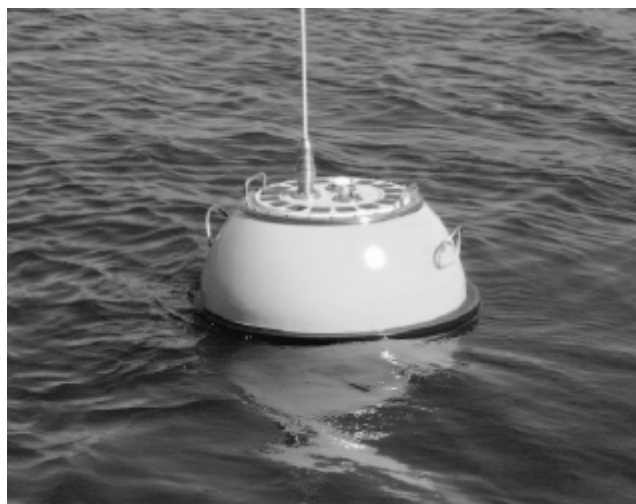


Figure 1 Photographies d'une bouée houlographe Waverider

Cet énoncé, formé de quatre parties largement indépendantes, est accompagné d'un document réponse à utiliser à plusieurs reprises et à rendre avec la copie. Diverses valeurs numériques et un formulaire d'analyse vectorielle sont regroupés à la fin du texte.

I Prévention de la corrosion

La coque des bouées Waverider est faite d'acier AISI 316, un alliage de fer, de carbone (moins de 1 %) et de chrome. L'oxydation du chrome permet la formation d'une couche superficielle de passivation et rend en principe l'acier « inoxydable », donc apte à demeurer longtemps en milieu marin. Cependant, la présence d'ions chlorures entraîne une dégradation locale de la couche de passivation, déclenchant irrémédiablement la corrosion du fer. Dans cette partie, on étudie la corrosion de l'acier en milieu marin et le moyen choisi par Datawell pour s'en prémunir.

I.A – Thermodynamique de la corrosion du fer

La figure A du document réponse est un diagramme potentiel-pH du fer tracé pour la concentration en espèces dissoutes $C_{\text{tra}} = 1,0 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Les espèces prises en compte sont $\text{Fe}_{(\text{s})}$, $\text{FeOOH}_{(\text{s})}$, $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$, $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$, $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{3+}$ et $\text{HFeO}_2^{-}(\text{aq})$. Les frontières associées aux couples d'oxydoréduction de l'eau ont été superposées en pointillés gris.

- Q 1.** Compléter ce diagramme potentiel-pH en attribuant à chaque domaine une espèce contenant Fe.
- Q 2.** À partir du diagramme, déterminer le potentiel standard du couple $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(\text{s})}$ et le $\text{p}K_s$ de $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$.
- Q 3.** Sans utiliser le diagramme, déterminer la pente de la frontière séparant Fe^{2+} et $\text{FeOOH}_{(\text{s})}$.
- Q 4.** À partir du diagramme, écrire la réaction se produisant quand une pièce de fer est laissée à l'abandon dans une solution aqueuse saturée en dioxygène et dont le pH vaut 7.

I.B – Cinétique de la corrosion de l'acier

Dans une étude publiée en 2016 dans la revue *Ocean Engineering*, Kim *et al.* analysent la corrosion de l'acier dans une solution aqueuse de chlorure de sodium modélisant l'eau de mer, saturée en dioxygène et de pH égal à 8,2. Afin de relever la courbe courant-potentiel d'une pièce d'acier, ils utilisent une contre électrode en platine et une électrode de référence au calomel saturé, de potentiel $E_{\text{ref}} = 0,25 \text{ V}$.

- Q 5.** Donner précisément le schéma du dispositif permettant d'enregistrer la courbe courant-potentiel.
- Q 6.** La courbe obtenue, en raisonnant en densité de courant, est représentée sur la figure 2. Quelles sont les réactions électrochimiques se produisant sur les portions repérées par les lettres (a), (b) et (c) ?

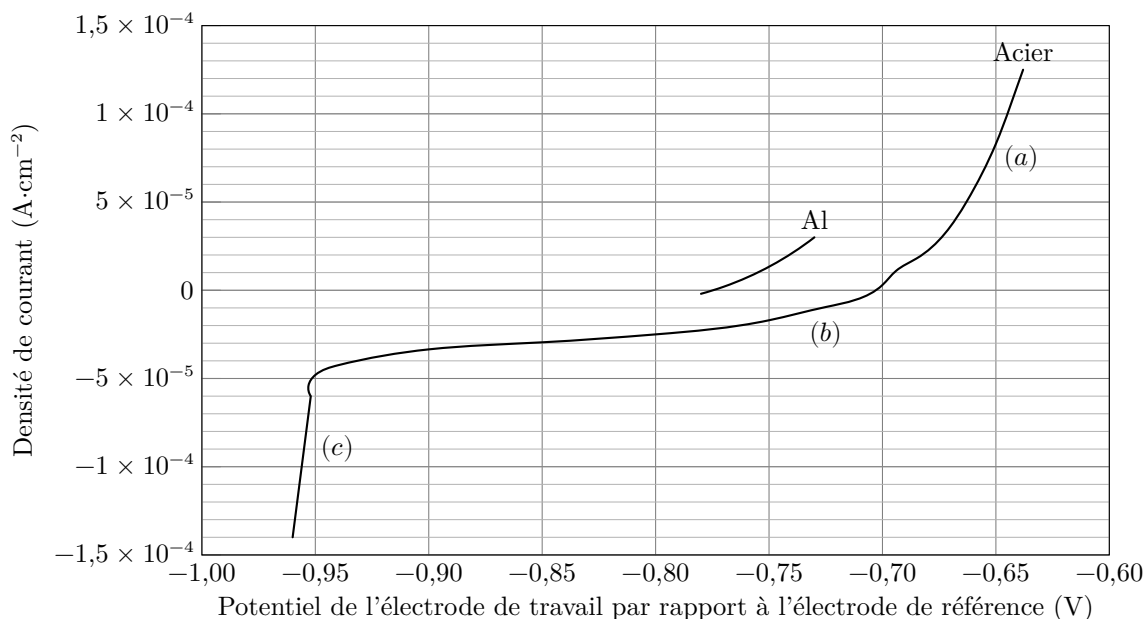


Figure 2 Courbe densité de courant-potentiel d'une pièce d'acier plongeant dans une solution modélisant le milieu marin et courbe densité de courant-potentiel anodique pour l'aluminium

- Q 7.** Estimer numériquement la surtension cathodique associée au couple H^+/H_2 . Dans leur étude, Kim *et al.* publient différentes courbes courant-potentiel obtenues pour le même système modèle, en modifiant la vitesse d'écoulement de l'eau salée autour des électrodes (figure B du document réponse). En les exploitant, ils montrent que la densité de courant de corrosion j_{corr} dépend de la vitesse d'écoulement de l'eau salée autour de l'électrode. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 1 où seule la vitesse d'écoulement change entre les différentes mesures effectuées.

vitesse d'écoulement ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	0	2	5
densité de courant de corrosion ($\text{A}\cdot\text{cm}^{-2}$)	$1,79 \times 10^{-5}$	$2,46 \times 10^{-4}$	$8,49 \times 10^{-4}$

Tableau 1 Valeurs des densités de courant de corrosion en fonction de la vitesse d'écoulement du fluide autour de l'électrode

- Q 8.** Pour chacune des courbes représentées sur la figure B, entourer la partie correspondant à un phénomène de limitation du courant lié à la cinétique de transport du dioxygène dissout dans l'eau.
- Q 9.** Proposer une interprétation qualitative à l'augmentation de la densité de courant de corrosion avec la vitesse d'écoulement du fluide autour de l'électrode.

I.C – Protection par anode sacrificielle

Pour protéger de la corrosion la coque en acier inoxydable du Waverider, on lui associe une anode sacrificielle en aluminium. L'aluminium s'oxyde en Al^{3+} .

Pour comprendre le rôle de la pièce d'aluminium, on s'appuie sur la figure 2 sur laquelle la courbe densité de courant-potentiel anodique d'une pièce d'aluminium a été juxtaposée à celle de l'acier.

- Q 10.** Afin de décrire les phénomènes se produisant lorsque l'acier en contact avec l'aluminium est laissé à l'abandon dans un milieu marin, compléter le schéma de la figure C du document réponse en portant dans chaque cadre rectangulaire le nom d'une espèce physico-chimique.

On suppose que les pièces d'acier et d'aluminium présentent la même surface active et que les réactions électrochimiques s'y répartissent uniformément.

- Q 11.** Estimer numériquement la densité de courant de corrosion j_{corr} associée à cette situation, en $\text{A}\cdot\text{cm}^{-2}$. Dans ces conditions, une certaine épaisseur Δe_{Al} d'aluminium est consommée pendant une durée Δt .

- Q 12.** Déterminer l'expression de $\Delta e_{\text{Al}}/\Delta t$ en fonction de j_{corr} , $\mathcal{F}$, ρ_{Al} , M_{Al} , puis calculer numériquement l'épaisseur d'aluminium consommée en une année.

- Q 13.** La sphère d'acier inoxydable présente un diamètre de 70 cm et les anodes d'aluminium une surface de l'ordre de 30 cm^2 et une épaisseur de 3 cm. Le constructeur recommande de renouveler ces anodes tous les trois ans. Confronter ces données aux résultats de la question précédente et proposer une explication aux éventuelles divergences.

II La plateforme stabilisatrice

Le Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe qui mesure la projection de l'accélération $\vec{a}_W$ de la bouée sur une direction particulière $\vec{u}_z$. Cette direction est liée à l'accéléromètre : si celui-ci se réoriente dans l'espace, le vecteur $\vec{u}_z$ se modifie généralement et l'accéléromètre mesure la projection de $\vec{a}_W$ sur une nouvelle direction. Cependant, afin d'accéder à la hauteur des vagues, ce sont les accélérations *verticales* qu'il convient de mesurer et il est donc impératif que la direction sensible de l'accéléromètre, définie par le vecteur $\vec{u}_z$, demeure en permanence colinéaire à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. Il s'agit d'une véritable gageure, car l'accéléromètre est embarqué dans une bouée sujette à des mouvements complexes provoqués par les vagues. Pour maintenir fixe l'orientation de l'accéléromètre malgré ces mouvements perturbateurs, celui-ci est placé sur une plateforme stabilisatrice pendulaire. Ce dispositif, protégé par des brevets, est au cœur de la technologie Waverider. La figure 3 montre une photographie et donne une description sommaire de la plateforme stabilisatrice.

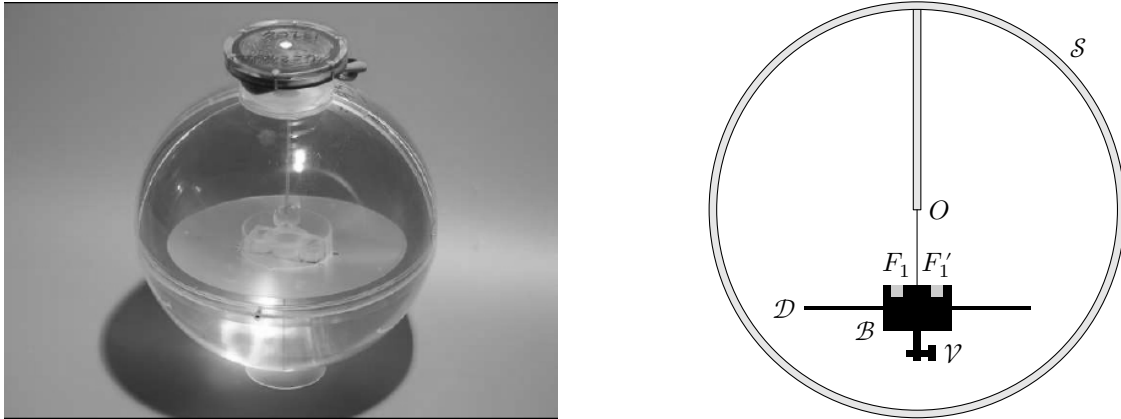


Figure 3 Plateforme stabilisatrice

La plateforme stabilisatrice est enfermée dans une sphère transparente $\mathcal{S}$ (figure 3), elle-même placée dans la bouée. Attention à ne pas confondre la sphère $\mathcal{S}$ et la coque de la bouée qui est, elle aussi, grossièrement sphérique.

L'accéléromètre (non représenté) est solidaire d'un bloc en plastique $\mathcal{B}$ prolongé vers le bas par une tige du même matériau, elle-même traversée par une vis en métal $\mathcal{V}$ que l'on peut enfoncer plus ou moins pour la déplacer de droite à gauche. Dans sa partie supérieure, le bloc est évidé sur deux régions F_1 et F'_1 et les cavités sont comblées avec un matériau moins dense. L'ensemble est fixé sur un disque $\mathcal{D}$ constituant la plateforme proprement dite, puis suspendu par un fil très fin au centre O de la sphère $\mathcal{S}$, lui-même lié rigidement à la paroi sphérique par une tige. La sphère est enfin remplie d'un liquide judicieusement choisi.

II.A – Flottabilité

Le principe d'Archimède, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen, peut s'exprimer ainsi.

Soit un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. Un corps immergé dans ce fluide subit de sa part des forces de pression dont la somme est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (poussée d'Archimède). Cette poussée s'applique au centre de masse du fluide déplacé.

Q 14. On considère un solide homogène de masse volumique ρ et de volume V entièrement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ en équilibre dans le champ de pesanteur. Par une analyse des forces qu'il subit, discuter la propension de ce solide à remonter vers la surface pour y flotter ou, au contraire, à couler vers le fond.

Q 15. Toujours soumis au champ de pesanteur, le liquide est dans cette question en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}$ en translation rectiligne, d'accélération $\vec{a}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_T$. Comment faut-il modifier le principe d'Archimède ?

II.B – Horizontalité statique de la plateforme

Les éléments F_1 , F'_1 et $\mathcal{V}$ ont pour rôle d'assurer l'horizontalité statique de la plateforme. Pour comprendre le principe du dispositif, on considère un système modèle Σ constitué de trois parties (figure 4) :

- un solide homogène S_0 de volume V_0 , de centre de masse G_0 , formé d'un matériau de masse volumique ρ_0 , modélisant le bloc en plastique et le disque $\mathcal{D}$;
- un solide homogène S_1 de volume V_1 , de centre de masse G_1 et de masse volumique $\rho_1 < \rho_0$, modélisant F_1 et F'_1 ;
- un solide homogène S_2 de volume V_2 , de centre de masse G_2 et de masse volumique $\rho_2 > \rho_0$, modélisant la vis $\mathcal{V}$ et les parties métalliques de l'accéléromètre.

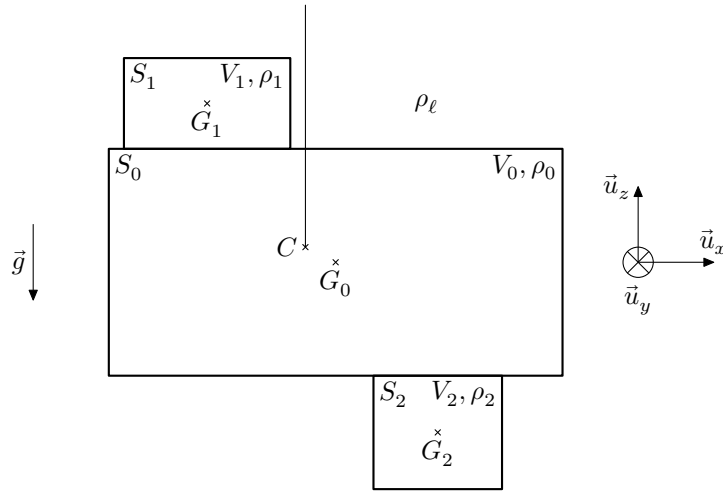


Figure 4 Modélisation de la plateforme par un système Σ en trois parties

L'ensemble est suspendu par un fil fixé en C et immergé dans le liquide, choisi de telle manière que sa masse volumique ρ_ℓ soit proche de ρ_0 . Dans cette sous-partie seulement, nous prendrons $\rho_\ell = \rho_0$ pour simplifier, bien qu'un léger écart existe entre ces deux valeurs. On se limite à une description bidimensionnelle dans le plan de la figure 4 et on envisage une possible inclinaison du système Σ par rotation autour de l'axe $(C, \vec{u}_y)$, le fil restant toujours vertical (il ne touche le solide S_0 qu'en C).

On note $\vec{\Pi}_0$ (respectivement $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$) la poussée d'Archimède appliquée en G_0 (respectivement G_1 et G_2) que subirait le solide immergé S_0 (respectivement S_1 et S_2) en l'absence des deux autres solides (le liquide l'entourant donc totalement).

On admet que la poussée d'Archimède due au liquide sur le système Σ peut être remplacée par les trois forces $\vec{\Pi}_0$, $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$.

Q 16. Exprimer la résultante $\vec{R}$ et le moment $\vec{\Gamma}_C$ en C des forces de pression et de pesanteur que Σ subit en fonction des grandeurs judicieuses parmi ρ_ℓ , ρ_1 , ρ_2 , V_0 , V_1 , V_2 , $\vec{CG}_0$, $\vec{CG}_1$, $\vec{CG}_2$ et $\vec{g}$.

Q 17. Les sous-systèmes S_1 et S_2 procurent respectivement à Σ une propension à flotter ou à couler. À quelle condition ces effets antagonistes se compensent-ils ? Exprimer la réponse sous la forme d'une relation entre ρ_ℓ , ρ_1 , ρ_2 , V_1 et V_2 .

Q 18. La relation précédente est supposée satisfaite. Montrer que le moment en C des forces s'exerçant sur l'ensemble Σ s'exprime sous la forme

$$\vec{\Gamma}_C = M_m \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge \vec{g}$$

et donner l'expression de M_m en fonction de ρ_ℓ , ρ_2 et V_2 .

Q 19. Proposer une situation électrostatique analogue à celle étudiée ici. En particulier, détailler cette analogie terme à terme pour la relation précédente.

Q 20. Dédurre de la relation précédente l'orientation prise par le vecteur $\overrightarrow{G_1 G_2}$ à l'équilibre stable de Σ . Vérifier la cohérence de la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un ou de plusieurs dessins pertinents.

Q 21. En revenant au système réel de la figure 3, expliquer le rôle de la vis $\mathcal{V}$.

II.C – Oscillations du pendule et longueur effective

Dans cette sous-partie, on suppose la sphère $\mathcal{S}$ et le point O fixes dans $\mathcal{R}_T$ et on étudie un mouvement pendulaire de la plateforme $\mathcal{D}$ dans le cadre d'un modèle simplifié :

- La plateforme et ses accessoires sont remplacés par un solide Σ_0 quasi ponctuel de volume V_0 et de masse volumique ρ_0 immergé dans le liquide de masse volumique $\rho_\ell < \rho_0$, suspendu en O par un fil souple de longueur ℓ et de direction indiquée par un angle θ (figure 5).
- On utilise encore le principe d'Archimède pour exprimer la résultante des forces du liquide sur le solide Σ_0 , malgré les mouvements de ceux-ci (on néglige donc notamment dans cette sous-partie toute force de frottement due au liquide sur le solide).
- On augmente l'inertie du solide Σ_0 pour tenir compte du fait qu'il entraîne dans son déplacement du liquide qui se trouve autour de lui : pour ce faire, on affecte à Σ_0 une « masse effective » m_{eff} *uniquement pour le calcul de ses éléments cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique)*. Cette masse effective est supposée constante et est bien supérieure à la masse réelle de la plateforme et de ses accessoires.

Attention : la « masse effective » n'intervient pas dans l'expression du poids de Σ_0 qui ne dépend que de sa masse *réelle* $\rho_0 V_0$.

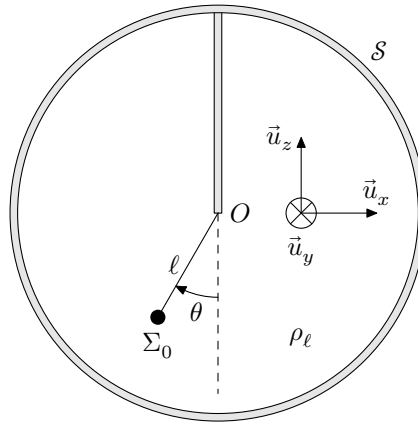


Figure 5 Modélisation de la plateforme en pendule simple (d'après l'orientation du vecteur $\vec{u}_y$, l'angle θ représenté sur cette figure est positif)

Q 22. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ dans l'approximation des petits angles. Identifier une pulsation propre ω_0 de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}}$$

et donner l'expression de ℓ_{eff} en fonction de ℓ , m_{eff} et de la masse apparente $m_{\text{app}} = (\rho_0 - \rho_\ell)V_0$.

Q 23. L'auteur du brevet original estime que le volume de fluide entraîné par le pendule est égal à $20V_0$ de sorte que $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 20\rho_\ell V_0$. La masse volumique du liquide est de 1 % inférieure à ρ_0 . Sous ces hypothèses, comparer la période propre T_0 du pendule à celle $T_{0\text{vide}}$ que l'on observerait en l'absence de liquide.

Q 24. Dans les brochures commerciales Datawell, on peut lire la phrase suivante : *La période propre d'oscillations de la plateforme est de l'ordre de 40 s, ce qui correspondrait à un pendule de 400 m.* Cette affirmation vous paraît-elle cohérente ? Peut-on estimer la longueur réelle ℓ ?

II.D – Effet stabilisateur

On rappelle que la sphère de la figure 3 est embarquée dans une bouée. Sous l'effet de la houle, son centre O subit, en plus des accélérations verticales à mesurer, des accélérations horizontales perturbatrices.

Comme dans la sous-partie II.C, on représente la plateforme par un pendule simple et on étudie ses oscillations, repérées par l'angle θ . On envisage une situation dans laquelle le point de fixation O subit, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen, une accélération $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$. On raisonne dans le référentiel $\mathcal{R}_S$ d'origine O et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}_T$. La poussée d'Archimède et l'effet de masse effective interviennent comme dans la sous-partie précédente et on prend de surcroît en compte une force de frottement visqueux $\vec{F}_v = -\beta\vec{v}$ sur le solide Σ_0 de vitesse $\vec{v}$.

Q 25. En tenant compte de la question 15, donner l'expression de la poussée d'Archimède. Quelle autre force s'exerce sur le pendule faut-il considérer pour rendre compte du mouvement accéléré de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}_T$? Dans l'expression de cette force, on fera intervenir la masse *réelle* $\rho_0 V_0$ de Σ_0 et non pas sa masse *effective*.

Q 26. Dans l'approximation des petits angles, démontrer que l'équation du mouvement du pendule est dorénavant de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}}$$

et donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de m_{eff} , β et ω_0 .

On procède à une étude de la réponse harmonique du pendule.

L'accélération $a(t)$ est de la forme $a(t) = \text{Re}(a_0 e^{j\omega t})$ et on pose $\theta = \text{Re}(\underline{\theta}_m e^{j\omega t})$.

Q 27. Exprimer $\underline{\theta}_m$ en fonction de a_0 , ℓ_{eff} , ω , ω_0 et Q .

On note θ_0 la valeur de $\underline{\theta}_m$ obtenue pour $\omega = 0$ puis on pose $\underline{H}(j\omega) = \underline{\theta}_m / \theta_0$.

Q 28. Donner l'expression de $\underline{H}$. À quel type de filtre une telle fonction de transfert est-elle associée ?

Q 29. Quelle expression $\underline{H}_1$ (en fonction de ω , g et ℓ) la fonction de transfert prendrait-elle si le pendule oscillait dans l'air, le liquide étant absent ? On néglige dans ce cas les effets de viscosité et tout autre phénomène dissipatif.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 et 1 Hz. La figure 6 représente la partie gain des diagrammes de Bode correspondant aux fonctions de transfert $\underline{H}$ et $\underline{H}_1$.

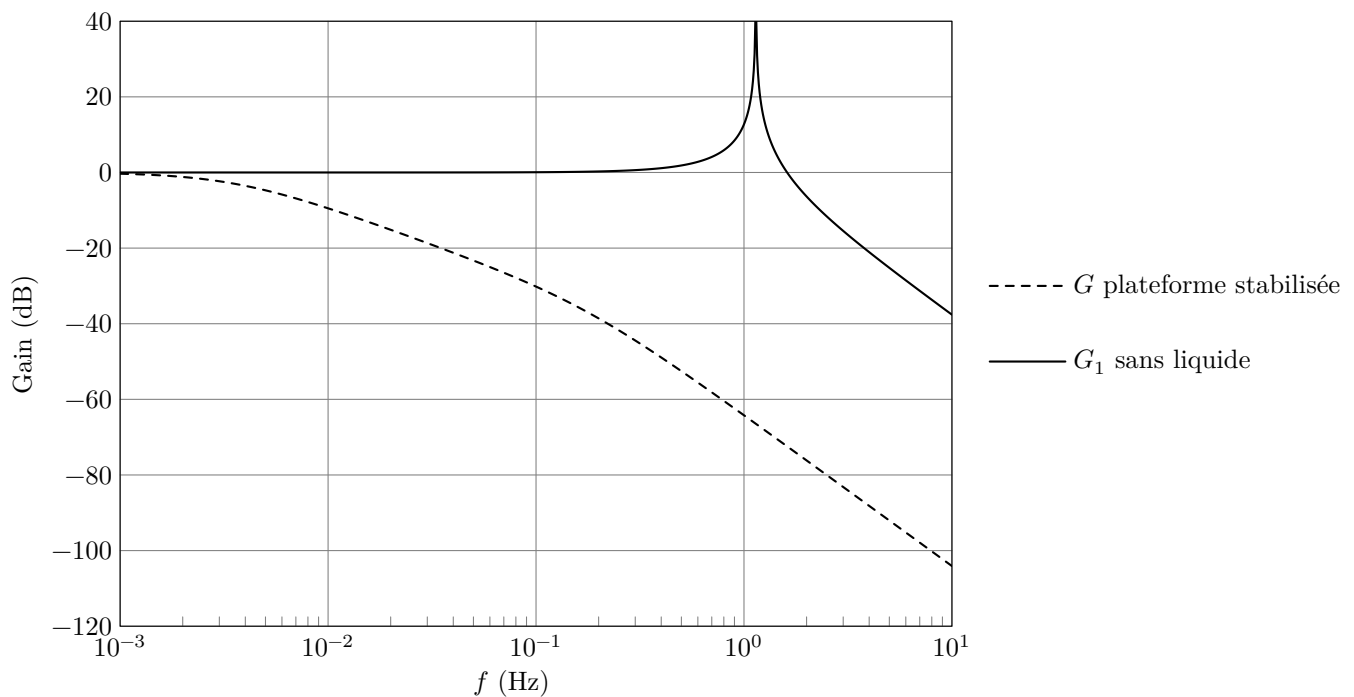


Figure 6 Diagrammes de Bode

Q 30. Commenter ces courbes. Quelle inclinaison maximale (en degrés) atteint-on si $a_0 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$?

III Traitement du signal

L'accéléromètre fournit un signal analogique de tension U , pollué par du bruit dont les composantes spectrales de fréquence supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures sans apporter aucune information sur l'état de la mer. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

Q 31. Parmi les trois types de filtres A, B et C représentés sur la figure 7, lequel convient ? Justifier la réponse.

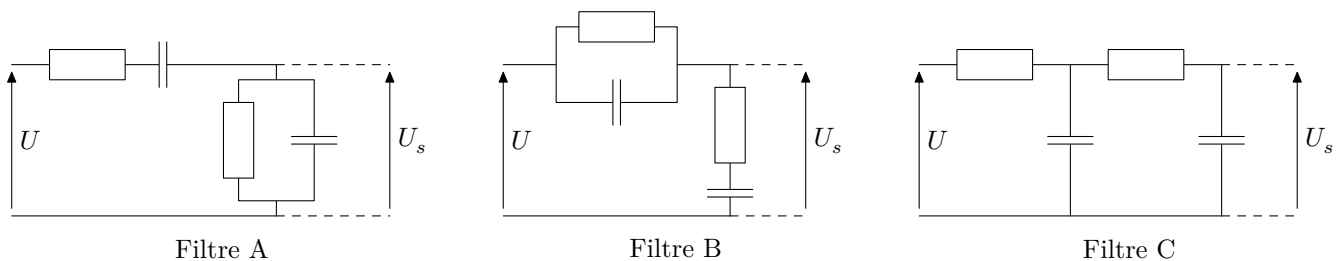


Figure 7 Exemples de filtre analogiques composés de résistors et de condensateurs

Q 32. Les deux résistors présentent la même résistance R et les deux condensateurs la même capacité C . Donner, en la justifiant, l'expression non simplifiée de la fonction de transfert $\underline{H}_F(j\omega)$ du filtre choisi, en fonction de R , C et $j\omega$.

Dans la suite, en admet que cette fonction se simplifie en

$$\underline{H}_F(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}.$$

Q 33. Quelles valeurs proposez-vous pour R et C ?

Certains modèles de Waverider ne sont pas munis d'un filtre analogique, mais seulement d'un filtre *numérique*. Le signal U fourni par l'accéléromètre est échantillonné à la fréquence de 10,24 Hz puis traité numériquement pour obtenir un signal filtré U_s . Soit $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ les valeurs échantillonnées du signal et $\{U_{Sk}, k \in \mathbb{N}\}$ celles que l'on obtient à la sortie du filtre.

Q 34. Proposer un traitement numérique permettant de passer des $\{U_k\}$ aux $\{U_{Sk}\}$. Vous explicitez les opérations à effectuer et donnez la valeur numérique d'éventuelles constantes.

Après divers traitements, le signal final est échantillonné à la fréquence de 2,56 Hz. Toutes les 200 secondes, 512 échantillons sont envoyés à un microprocesseur qui calcule le spectre des hauteurs de vagues.

Q 35. Sur quel intervalle de fréquence convient-il d'afficher le spectre obtenu ?

IV Mesure de l'inclinaison de la bouée

Afin de déterminer la direction des vagues, certains Waveriders sont équipés de deux autres accéléromètres, non pas placés sur la plateforme comme le premier, mais *rigidement liés à la bouée*. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure de deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limitons ici au seul angle φ (figure 8).

La mesure de φ s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines.

- Une paire de bobines plates $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}''_1\}$ est collée à la paroi extérieure de la sphère $\mathcal{S}$. Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}_3$.
- Une bobine-sonde $\mathcal{C}_2$ est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.

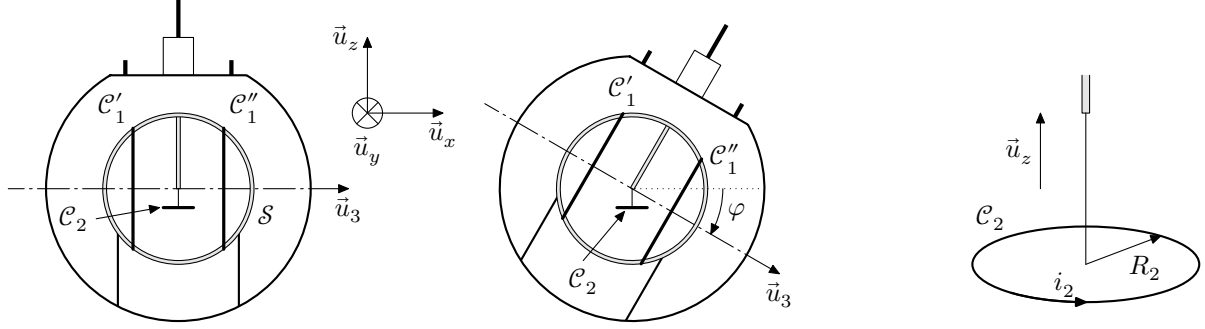


Figure 8 La bouée, la sphère $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}''_1$ s'inclinent alors que $\mathcal{C}_2$ se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. À droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde $\mathcal{C}_2$

IV.A – Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}''_1$ sont placées dans la configuration dite « de Helmholtz » : assimilables à deux cercles de centres O'_1 et O''_1 , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de N_1 spires parcourues par un courant d'intensité i_1 et sont séparées d'une distance égale à leur rayon R_1 (figure 9).

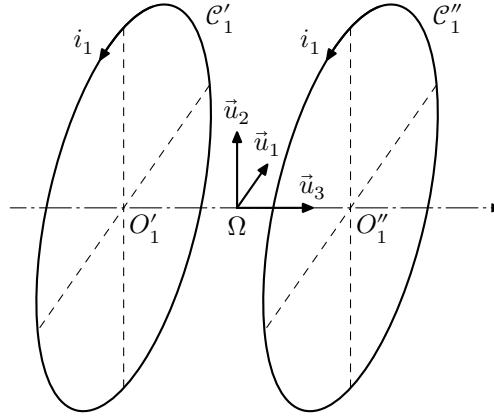


Figure 9 Les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base orthonormée directe

Ce dispositif est réputé produire un champ magnétique presque uniforme dans une région relativement étendue autour du milieu Ω de $[O'_1 O''_1]$. Afin de préciser la justesse de cette affirmation, un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres $R_1 = 20$ cm, $N_1 i_1 = 1$ A. Ses résultats sont fournis sur les figures D et E du document réponse. Avant de les exploiter, on s'assure de sa compatibilité avec les lois de l'électromagnétisme.

En plus des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) d'origine Ω , on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) d'axe $(\Omega, \vec{u}_3)$. On voit que x_3 joue le rôle de la coordonnée usuellement notée z , mais on prendra garde à ne pas confondre $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_z$ (figure 8). Dans le plan de la figure D, défini par $\theta = 0$, r se confond avec $|x_1|$ et le vecteur unitaire d'habitude noté $\vec{u}_r$ vaut $\pm \vec{u}_1$ selon le signe de x_1 . On note $B_3(r, x_3) = \vec{B}(r, x_3) \cdot \vec{u}_3$, $B_{\text{axe}}(x_3) = B_3(0, x_3)$, $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ et $B_1 = \vec{B} \cdot \vec{u}_1$.

La plupart des questions de cette sous-partie demandent un travail sur les figures du document réponse. On fera clairement apparaître les constructions graphiques qui concourent au raisonnement. Leur lisibilité et la clarté de leur utilisation feront partie des critères de notation de l'épreuve.

Q 36. Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la figure D se limite au plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$. Pourquoi cela ne constitue-t-il pas une perte d'information ? En quels points de ce plan la

direction du champ était-elle prévisible, et par quels arguments ? Sur le document réponse, représenter par une flèche le champ magnétique en quelques-uns de ces points.

Q 37. Quelle équation de Maxwell exprime la conservation du flux de $\vec{B}$? En quoi cette propriété s'illustre-t-elle sur la carte fournie ? En utilisant les figures D et E, vous apporterez une réponse *quantitative* avec au moins deux valeurs numériques du champ à l'appui.

On s'intéresse à la ligne de champ $\mathcal{C}$ passant par les points D et E . De l'un à l'autre, elle traverse sur une longueur d'environ 12 cm une zone de champ très intense. Ailleurs au contraire, le champ paraît beaucoup plus faible.

Q 38. Les valeurs du champ observées le long de $\mathcal{C}$ sont-elles compatibles avec l'intensité circulant dans les bobines ?

Deux constatations se dégagent des figures D et E :

- dans la région située entre les bobines, le champ reste presque colinéaire à $\vec{u}_3$ si on ne s'éloigne pas trop de l'axe ;
- B_{axe} est presque uniforme dans la région délimitée par les bobines.

On se propose d'établir un lien entre ces deux observations.

Q 39. Considérons à titre d'exemple le point $A(x_{1A} = 5 \text{ cm}, x_{3A} = 20 \text{ cm})$, près duquel la ligne de champ est légèrement inclinée. Que valent $B_3(A)$ et $B_r(A)$? Ces valeurs sont-elles cohérentes avec l'inclinaison de la ligne de champ en A ? Une application numérique est attendue.

Q 40. En utilisant, au voisinage d'un point de l'axe (coordonnées (r, x_3) avec $r \ll R_1$), l'équation de Maxwell de la question 37, démontrer que

$$B_r(r, x_3) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}.$$

Q 41. Cette relation est-elle satisfaite en A ?

Q 42. À partir des graphiques fournis, déterminer le facteur μ tel que

$$B_{\text{axe}}(0) = \mu N_1 i_1.$$

Conventionnellement, on considère que le champ est quasi-uniforme dans le cylindre de rayon r_{max} défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{R_1}{4} \leq x_3 \leq \frac{R_1}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \left| B_3\left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}\right) - B_{\text{axe}}(0) \right| = \frac{1}{10} B_{\text{axe}}(0).$$

Q 43. Déterminer r_{max} et représenter ce cylindre sur la figure D.

IV.B – Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine-sonde $\mathcal{C}_2$ présente un rayon R_2 et une inductance propre L_2 . Elle est formée de N_2 spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité i_2 , enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à $\vec{u}_z$. On suppose qu'elle reste entièrement dans la région où le champ créé par $\mathcal{C}_1$ est quasi-uniforme. On note L_1 l'inductance propre de $\mathcal{C}_1$ et on néglige les résistances de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Q 44. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle induction M entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'exprimer en fonction de N_1 , N_2 , R_2 , μ et φ .

On applique une tension alternative $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t)$ aux bornes de $\mathcal{C}_1$. La bobine $\mathcal{C}_2$ est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.

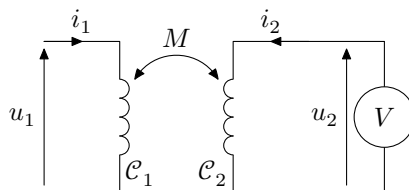


Figure 10

Q 45. Écrire les équations électriques régissant le fonctionnement de ces deux circuits, sans tenir compte, à ce stade, de la « très grande impédance » du voltmètre.

Q 46. À quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la « très grande impédance » du voltmètre ? En déduire une relation entre u_1 , u_2 , L_1 et M .

Q 47. Application numérique : $U_{1m} = 5,00 \text{ V}$, $U_{2m} = 170 \text{ mV}$, $L_1 = 3,6 \text{ mH}$, $R_2 = 5,0 \text{ cm}$, $N_1 = 50$, $N_2 = 200$. Calculer le coefficient de mutuelle induction M (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison φ (supposé positif) en degrés.

Données numériques

Masse molaire de l'aluminium	$M_{\text{Al}} = 27,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique de l'aluminium	$\rho_{\text{Al}} = 2,72 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Produit ionique de l'eau	$K_e = 1 \times 10^{-14}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e = 96,5 \times 10^3 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$	

Potentiels standards

Couple	$\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$	H^+/H_2
E°	1,23 V	0 V

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta\psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\vec{\text{rot}} A(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

• • • FIN • • •



Prénom

[illegible]

Épreuve : Physique-chimie 2 MP

Feville

Figure A Digramme potentiel-pH du fer

The graph shows the current density (mA·cm⁻²) on the y-axis versus the potential difference (V) on the x-axis. The y-axis ranges from -1.0 to 0.2 with increments of 0.2. The x-axis ranges from -1.0 to -0.4 with increments of 0.1. Three curves are plotted: a solid line for 0 m·s⁻¹, a dashed line for 2 m·s⁻¹, and a dotted line for 5 m·s⁻¹. The 0 m·s⁻¹ curve starts at approximately (-0.96, -0.25), rises to a plateau near 0 mA·cm⁻² between -0.9 and -0.7 V, and then increases to about 0.15 mA·cm⁻² at -0.65 V. The 2 m·s⁻¹ curve starts at approximately (-0.83, -1.0), rises to a plateau near -0.5 mA·cm⁻² between -0.8 and -0.7 V, and then increases to about 0.2 mA·cm⁻² at -0.55 V. The 5 m·s⁻¹ curve starts at approximately (-0.77, -1.0), rises to a plateau near -0.9 mA·cm⁻² between -0.75 and -0.7 V, and then increases to about 0.2 mA·cm⁻² at -0.48 V.

Figure B Courbes densité de courant-potentiel d'une pièce d'acier plongeant dans une solution modélisant le milieu marin et s'écoulant à différentes vitesses

Ne rien écrire

dans la partie barrée

P049-DR/2022-01-13 20:34:36

Question 10

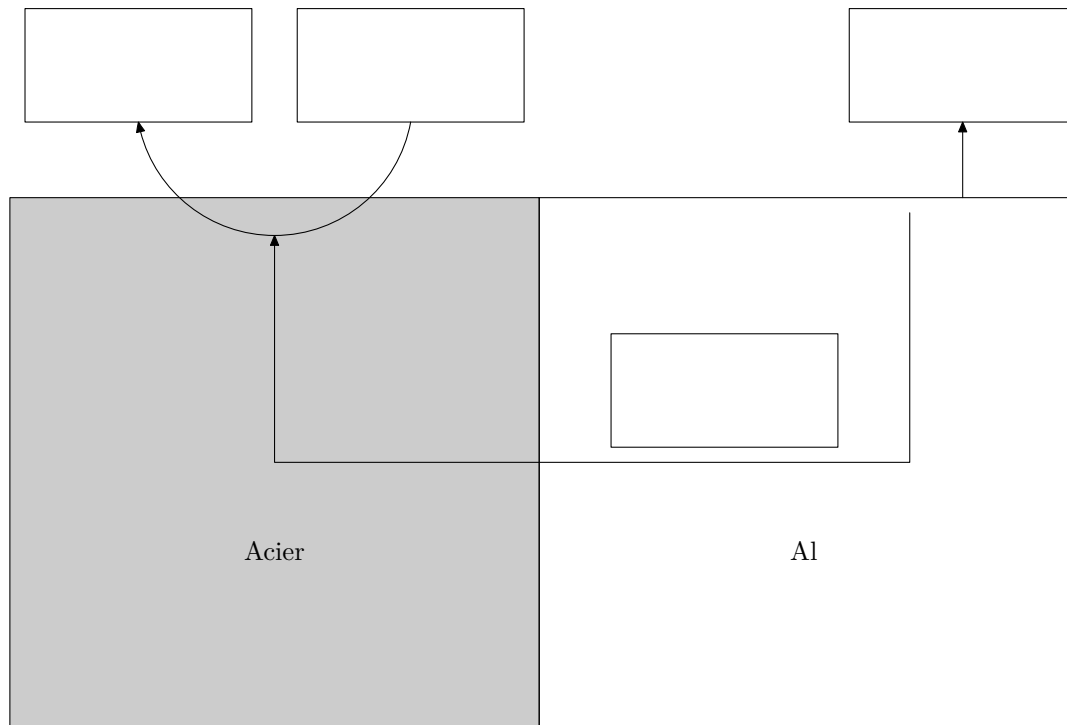


Figure C Acier et aluminium en contact dans l'eau de mer

Sous-partie IV.A

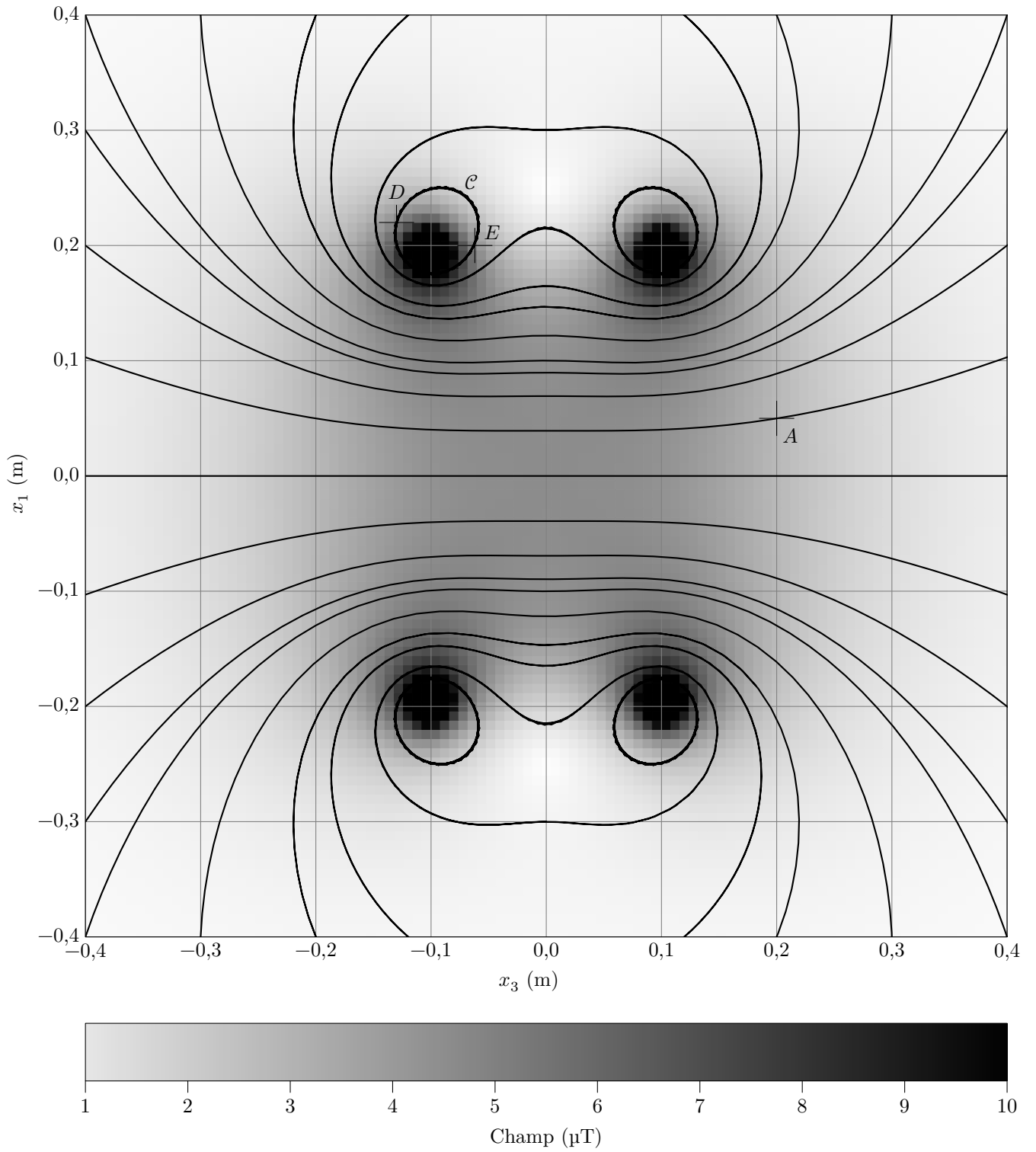


Figure D Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan $(O_1, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$

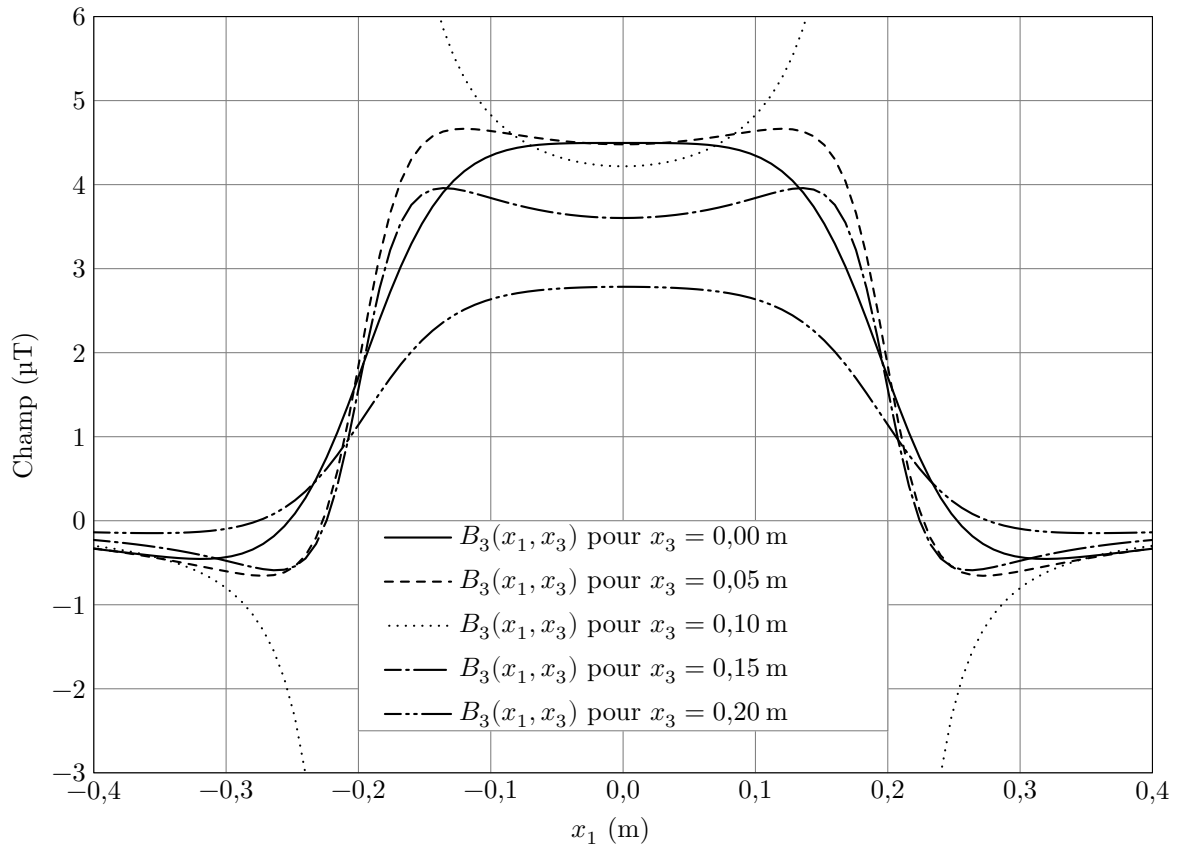
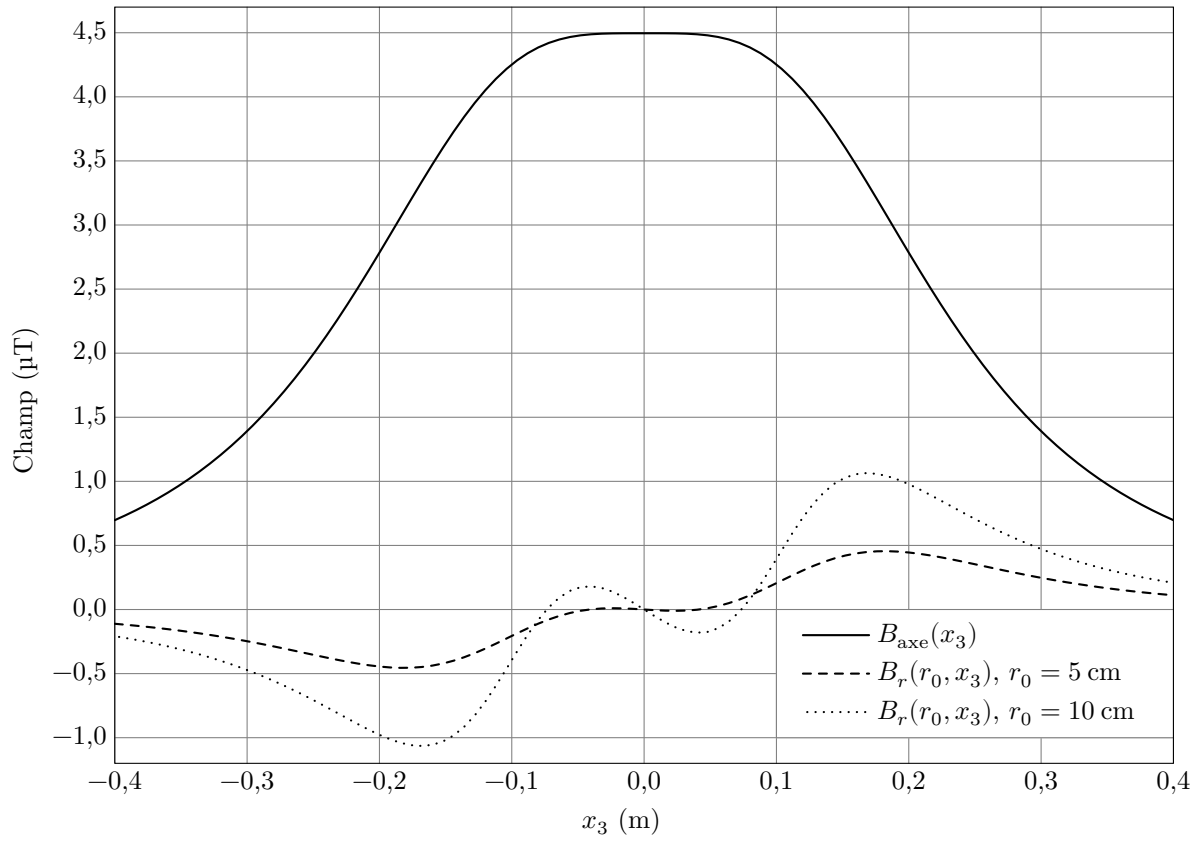
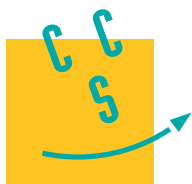


Figure E Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique, r est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote x_3 . Sur le second graphique, x_3 est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée x_1 .



Atténuer le changement climatique

Ce sujet aborde différentes solutions pour prévenir ou atténuer le changement climatique. La première partie s'intéresse à la possibilité d'installer, entre la Terre et le Soleil au voisinage du point de Lagrange L_1 , un écran atténuateur du rayonnement solaire. La seconde aborde un aspect particulier de la transition énergétique qu'on peut mettre en œuvre sur Terre pour réduire les émissions de gaz à effet de serre : la rénovation énergétique des bâtiments.

Les deux parties sont totalement indépendantes de même qu'un bon nombre de questions. Certaines données sont fournies en fin d'énoncé, d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie.

I Installer un écran solaire dans l'espace ?

Des études scientifiques ont montré que pour compenser l'augmentation de l'effet de serre qu'engendrerait un doublement de la concentration atmosphérique en dioxyde de carbone par rapport à l'ère préindustrielle, il faudrait réduire d'une fraction $\mu = 1,8\%$ la puissance du rayonnement solaire reçu par la Terre. Cette partie est consacrée à l'étude de la faisabilité technique et économique de la mise en place, au voisinage du point de Lagrange L_1 , d'un « écran » entre la Terre et le Soleil réalisant une telle réduction de puissance.

I.A – Préliminaires

Q 1. Soit T le centre de masse de la Terre et S le centre de masse du Soleil. On modélise l'écran atténuateur de puissance par une lentille mince géante d'axe optique (ST) et de centre optique Ω situé à une distance $l = 1,5 \times 10^9$ m du point T . Le rayon du diaphragme de la lentille est égal au rayon R_T de la Terre. À l'aide d'un modèle simple, dont vous préciserez les principales hypothèses, estimer numériquement la distance focale f' de cette lentille équivalente pour qu'elle réalise une diminution relative $\mu = 1,8\%$ de la puissance lumineuse reçue par la Terre.

Un *astre à répartition sphérique de masse* est un astre dont la masse volumique ρ ne dépend que de la distance r à son centre.

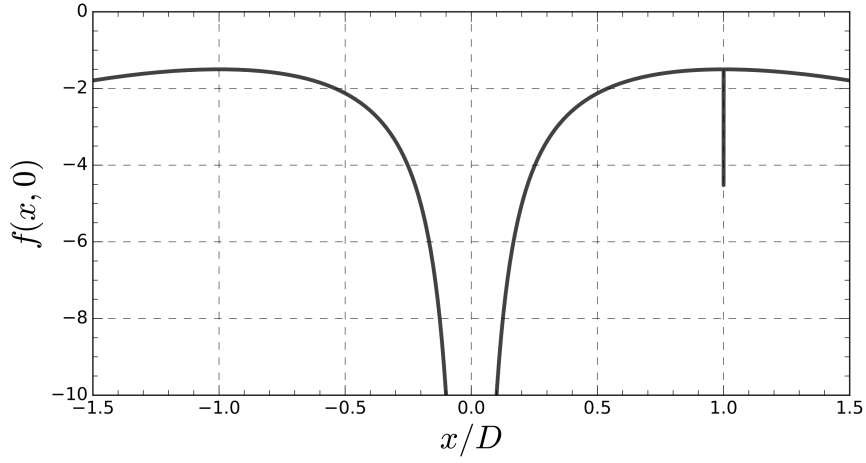
Q 2. Démontrer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}(r)$ puis du potentiel gravitationnel $V(r)$ engendrés par un astre à répartition sphérique de masse, de masse M et de rayon R , à une distance $r \geq R$ de son centre O . On prendra le potentiel nul à l'infini.

Q 3. On considère un point matériel P de masse m en orbite circulaire de rayon r autour de l'astre précédent. Exprimer la vitesse angulaire ω du mouvement de P en fonction de la constante gravitationnelle G , de la masse M de l'astre et de la distance r .

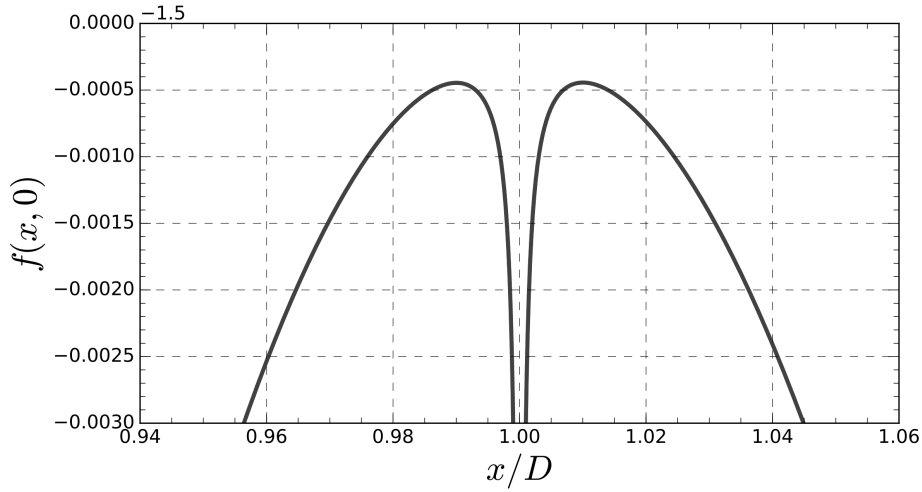
I.B – Les points de Lagrange

On considère le système formé par la Terre, de centre de masse T et de masse M_T , et le Soleil, de centre de masse S et de masse M_S . On note $D = ST$ la distance Terre-Soleil et $A \in [ST]$ le centre de masse du système (figure 1). On définit le référentiel de Copernic $(\mathcal{R}_c) = (A, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ supposé galiléen. Dans ce référentiel, la Terre et le Soleil sont en rotation autour de A à la vitesse angulaire ω calculée à la question 3 en prenant $r = D$ et $M = M_S + M_T$. On définit alors le référentiel $(\mathcal{R}) = (A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ animé d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe (Az) fixe dans $(\mathcal{R}_c)$.

On appelle points de Lagrange, les points d'équilibre gravitationnel dans le référentiel $(\mathcal{R})$ précédent. On démontre qu'il en existe cinq notés L_1 , L_2 , L_3 , L_4 et L_5 . Leurs positions sont fonction du rapport de masse $a = \frac{M_T}{M}$.



(a) $f(x, 0)$ en fonction de x/D



(b) zoom sur la courbe précédente au voisinage de la Terre

Figure 2 Énergie potentielle d'un flyer dans le référentiel d'étude le long de l'axe (Sx) : $f(x, 0) = \frac{E_p(x, y = 0)}{E_{p,0}}$, avec $E_{p,0} = \frac{GMm}{D}$

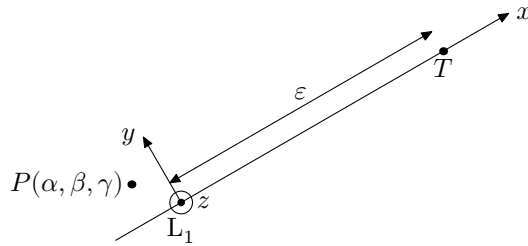


Figure 3 Déplacement d'un flyer au voisinage de L_1

Q 10. Sans chercher à établir le système, identifier l'origine physique de chacun des termes de la première équation du système (I.3).

Q 11. Caractériser le mouvement du flyer dans la direction $(L_1 z)$. Commenter.

On souhaite résoudre numériquement le système d'équations (I.3). Pour cela, dans un premier temps, on définit les variables $u_p = \frac{du}{d\tau}$, $v_p = \frac{dv}{d\tau}$, $w_p = \frac{dw}{d\tau}$. On pose aussi, pour alléger les expressions, $A = 1 + \frac{2a}{\epsilon^3} + \frac{2(1-a)}{(1-\epsilon)^3}$, $B = 1 - \frac{a}{\epsilon^3} - \frac{1-a}{(1-\epsilon)^3}$ et $C = \frac{a}{\epsilon^3} + \frac{1-a}{(1-\epsilon)^3}$.

Q 12. Écrire le système d'équations différentielles du premier ordre vérifié par u , v , w , u_p , v_p , w_p .

Q 13. Présenter succinctement le principe d'une résolution numérique approchée de ce système d'équations différentielles s'appuyant sur une méthode analogue à la méthode d'Euler, pour un pas temporel constant h . On

précisera, en particulier, comment on obtient les valeurs des paramètres u, v, w, u_P, v_P, w_P à l'instant $t + h$, connaissant les valeurs de ces paramètres à l'instant t .

Q 14. Compléter la fonction Python ébauchée sur la figure B du document réponse.

Q 15. La résolution numérique du système d'équations permet d'obtenir le graphe présenté en figure 4. Commenter cette figure.

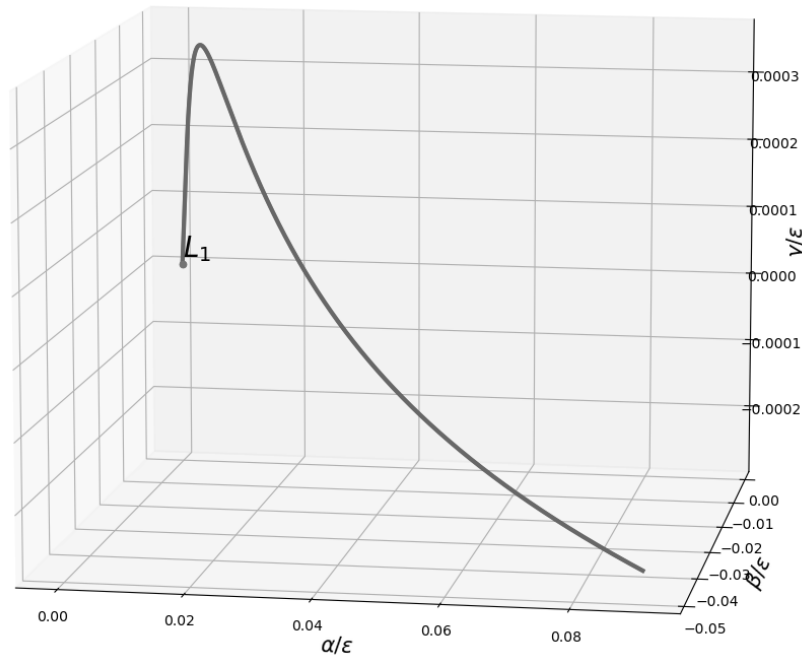


Figure 4 Mouvement d'un flyer au voisinage du point de Lagrange L_1 pour une vitesse initiale non nulle

Q 16. À partir de la figure 4, estimer numériquement la durée pendant laquelle un flyer reste au voisinage de L_1 .

I.C.3) Effet de la pression de radiation

La lumière du Soleil échange de la quantité de mouvement avec les flyers du nuage. Cet échange se traduit par l'existence d'une force $\vec{F}_p$ dite de « pression de radiation » subie par les flyers :

$$\vec{F}_p = \frac{2\mathcal{L}_S}{4\pi r^2 c} R A \vec{e}_x \quad (\text{I.4})$$

où R est le coefficient de réflexion en énergie des flyers, $\mathcal{L}_S$ la luminosité du Soleil, r la distance du nuage de flyers au Soleil, c la célérité de la lumière dans le vide et A la surface du nuage de flyers.

Q 17. Comment est qualitativement modifiée la position d'équilibre du nuage de flyers par la pression de radiation ? Décrire qualitativement l'influence du coefficient de réflexion R sur le déplacement de cette position d'équilibre.

On admet que la pression de radiation peut également être mise à profit pour stabiliser la position d'équilibre du nuage.

I.D – Fabrication des flyers

Pour des raisons de coûts, on a intérêt à construire les flyers les plus légers possible tout en conservant la résistance mécanique requise. Pour cela, l'utilisation d'un assemblage à base de nanotubes de dioxyde de titane TiO_2 est envisagée.

I.D.1) Le dioxyde de titane

La structure cristalline thermodynamiquement stable du dioxyde de titane est le rutile. Le dioxyde de titane y cristallise suivant un réseau quadratique dans lequel les sommets et le centre de la maille conventionnelle sont occupés par un atome de titane (figure 5).

Q 18. Donner la population de la maille. Est-ce cohérent avec la formule statistique du dioxyde de titane ?

Q 19. Calculer de la masse volumique ρ du dioxyde de titane $\text{TiO}_{2(s)}$.

I.D.2) Synthèse du dioxyde de titane par anodisation

L'anodisation est une technique électrochimique utilisée dans l'industrie pour faire croître des couches compactes et épaisses d'oxyde à la surface de métaux. Le dispositif expérimental consiste en un montage à deux électrodes immergées dans un électrolyte et reliées hors de la solution à une alimentation électrique, comme illustré sur la figure 6. L'électrode de travail, reliée à la borne positive de l'alimentation, est la pièce à anodiser (ici le titane).

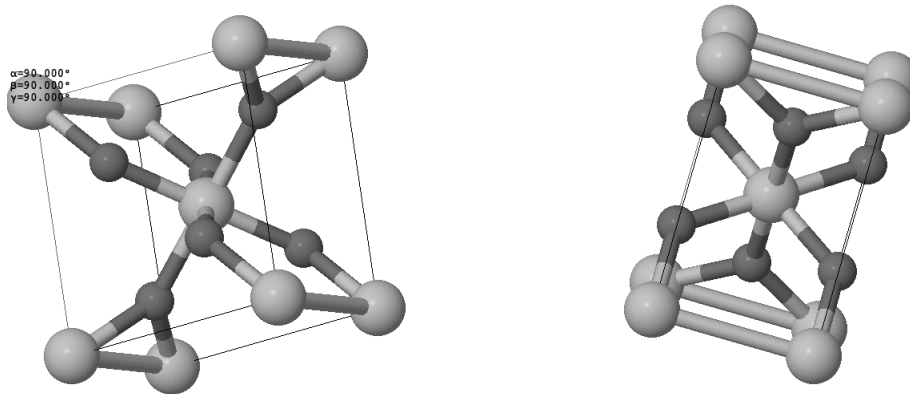


Figure 5 La maille est un pavé droit d'arêtes a, b, c telles que $a = b = 459,4$ pm et $c = 295,9$ pm. En clair les atomes de titane, en foncé les atomes d'oxygène.

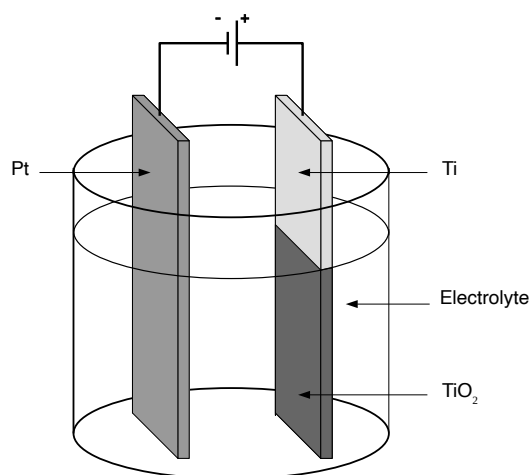


Figure 6 Anodisation d'une lame de titane métallique

La contre-électrode, reliée à la borne négative de l'alimentation, est un métal inerte (présentant une grande surface), typiquement du platine (ou du carbone).

Les couples mis en jeu sont $\text{H}_2\text{O}_{(l)}/\text{H}_{2(g)}$ et $\text{TiO}_{2(s)}/\text{Ti}_{(s)}$.

Q 20. Identifier l'anode et la cathode puis écrire les demi-équations électroniques associées aux réactions qui s'y produisent et l'équation-bilan de l'anodisation.

En utilisant un électrolyte particulier, l'anodisation du titane conduit à la formation de nanotubes de dioxyde de titane en lieu et place d'une couche compacte. On réalise l'anodisation à courant constant $I = 25$ mA d'une électrode de titane de surface $S = 3,14$ cm² pendant 900 s dans de l'éthylène glycol enrichi en eau (5 %) et en fluorure d'ammonium (0,3 %). La couche de nanotubes de dioxyde de titane obtenue est imagée par un microscope à balayage électronique figure 7.

Q 21. Sous certaines hypothèses à préciser, estimer la masse volumique ρ_{nano} de la couche de nanotube de dioxyde de titane figure 7.

On définit l'efficacité de croissance θ des nanotubes par :

$$\theta = \frac{Q_g}{Q}$$

où Q est la charge électrique totale débitée pendant l'anodisation et Q_g est la charge électrique qui a conduit à la croissance des nanotubes de dioxyde de titane pendant la même durée d'anodisation.

Q 22. Calculer l'efficacité de croissance de l'anodisation ayant conduit à la couche figure 7. Commenter.

I.E – Coût de la mise en orbite des flyers

Le réseau de courbes paramétrées par R de la figure 8 exprime la condition d'équilibre mécanique du nuage de flyers au voisinage de L_1 compte tenu de la pression de radiation et le réseau de courbes paramétrées par ρ_s exprime la condition de réduction d'un facteur $\mu = 1,8$ % de la puissance lumineuse atteignant la Terre.

Q 23. Donner une interprétation physique de l'asymptote commune aux courbes paramétrées par R .

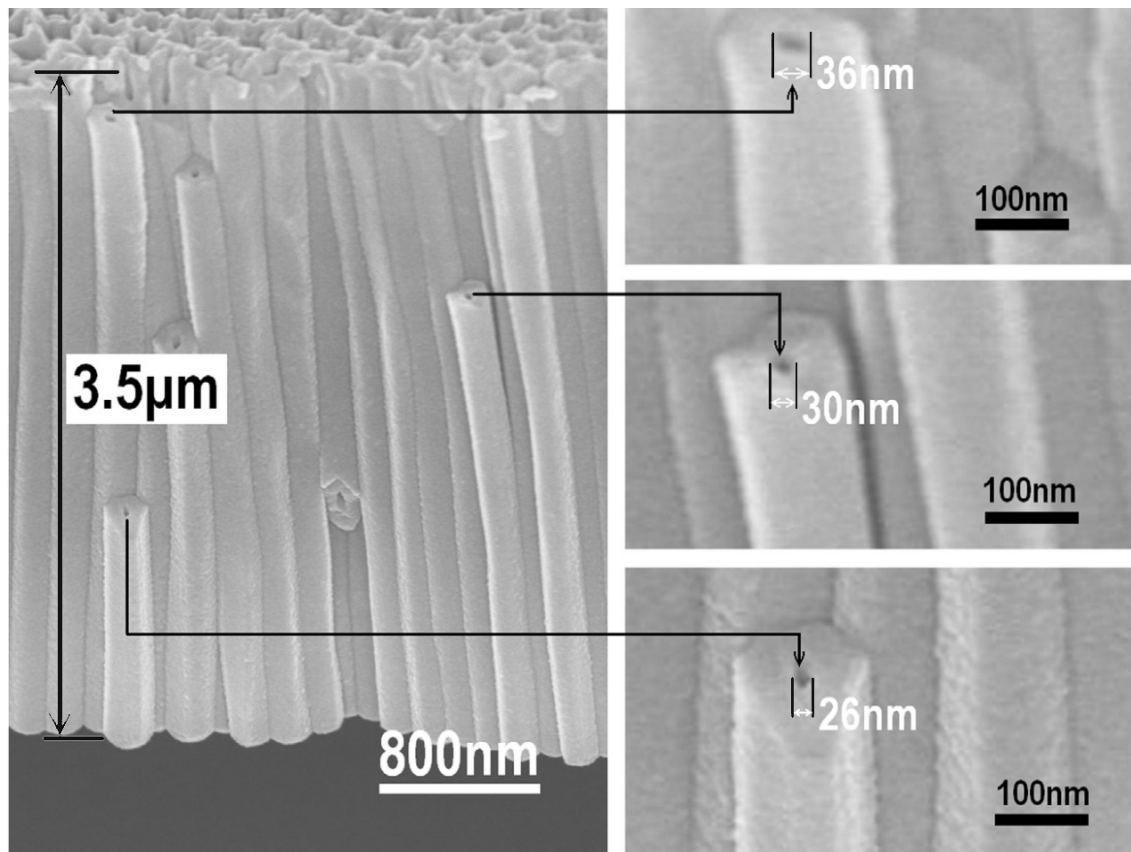


Figure 7 Nanotubes formés après 900 s d'anodisation galvanique à 25 mA

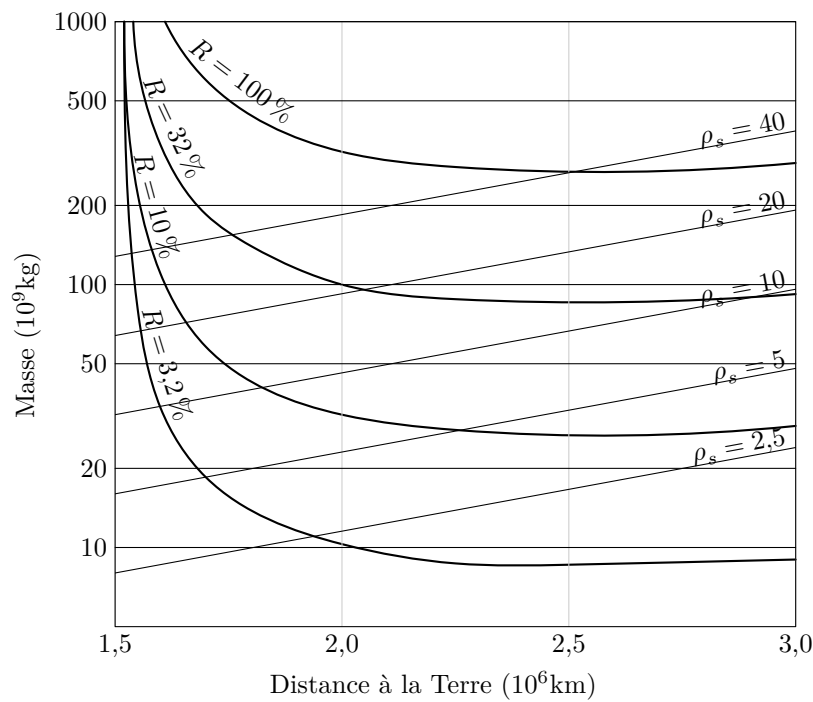


Figure 8 Masse du nuage de flyers à mettre en orbite en fonction de la distance de sa position d'équilibre à la Terre. ρ_s est la densité surfacique de masse des flyers exprimée en $\text{g}\cdot\text{m}^{-2}$. R est le coefficient de réflexion en énergie des flyers.

Un scénario optimiste prévoit le développement de lanceurs électromagnétiques pour un coût de transport de la Terre au voisinage du point de Lagrange L_1 égal à $100 \$\cdot\text{kg}^{-1}$ et la production industrielle de flyers de densité surfacique $\rho_s = 5 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ et de coefficient de réflexion $R = 3,2\%$.

Q 24. Dans le cadre de ce scénario, évaluer le coût du déploiement entre la Terre et le Soleil du nuage atténuateur de puissance. Commenter.

II Agir sur Terre — Rénovation énergétique des bâtiments

Dans cette partie, on s'intéresse aux économies d'énergie et à la réduction des émissions de gaz à effet de serre (dioxyde de carbone essentiellement) qu'on peut réaliser sur Terre en améliorant la thermique des bâtiments : isolation, entretien, mode de chauffage. On prend l'exemple d'une copropriété dont voici une description succincte :

- la résidence est constituée de 10 bâtiments équivalents (3 bâtiments doubles + 4 bâtiments simples, figure 9) ;
- les murs et les toitures des bâtiments ne disposent d'aucun revêtement isolant spécifique ;
- le chauffage est assuré par une chaudière centrale à gaz de puissance nominale égale à 998 kW située au sous-sol du bâtiment 3 (figure 10) ;
- chaque logement est équipé de 6 radiateurs en fonte (figure 10) alimentés par l'eau chaude sortant de la chaudière centrale via un réseau de tuyaux.



Figure 9 Plan de la résidence



(a) Chaudière



(b) Radiateur

Figure 10 Le chauffage est assuré par une chaudière centrale à gaz. L'énergie thermique est transférée aux logements par de l'eau chauffée à environ 70 °C circulant dans des radiateurs en fonte

Cette partie s'intéresse à quelques actions à court et à moyen terme qui peuvent être envisagées dans cette copropriété dans le but de réduire sa consommation énergétique et ses émissions de gaz à effet de serre.

II.A – L'existant

II.A.1) Puissance de chauffage nécessaire à la résidence

La puissance de chauffage nécessaire à un bâtiment est évaluée en estimant les déperditions thermiques de ce bâtiment (tableau 1) et en supposant une température extérieure $T_{e,\text{ref}} = -7\text{ °C}$. Le confort thermique des habitants est assuré si la température intérieure des logements vaut $T_{i,\text{ref}} = 19\text{ °C}$.

Type	U ($\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$)	Surface S (m^2)	ψ ($\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$)	Longueur L (m)
Murs extérieurs	3,16	5650	—	—
Toiture	0,67	3514	—	—
Ouvrants (fenêtres et portes)	2,32	2496	—	—
Plancher	1,17	3514	—	—
Ponts thermiques	—	—	0,47	8249

Tableau 1 Sources de déperdition thermique de la résidence — Le coefficient de déperdition thermique U est égal à la puissance thermique perdue par unité de surface et par unité d'écart de température entre un intérieur chauffé à 19 °C et l'extérieur ; pour les ponts thermiques, le coefficient de déperdition thermique est noté ψ et s'exprime par unité de longueur

Q 25. En régime stationnaire, calculer la puissance thermique P_c nécessaire au chauffage de la résidence.

II.A.2) Chauffage au gaz naturel

La chaudière fonctionne au gaz naturel qui est composé en très large majorité de méthane CH_4 .

Q 26. En 2021, le chauffage de la résidence a nécessité 1900 MW.h. Estimer la masse m_{CO_2} de dioxyde de carbone rejetée dans l'atmosphère.

II.B – Action à court terme : équilibrage du réseau de chauffage

Des gains énergétiques peuvent être réalisés immédiatement en équilibrant le réseau de chauffage, c'est-à-dire en faisant en sorte que la température dans les appartements soit la même (environ 19 °C) quels que soient leurs positionnements sur le réseau de chauffage. On modélise ce réseau par un unique échangeur thermique cylindrique de longueur totale L , de rayon a constant, de conductance thermique linéique $g = 1/r$ (figure 11). L'eau chaude de chauffage y circule avec un débit de masse Q_m .

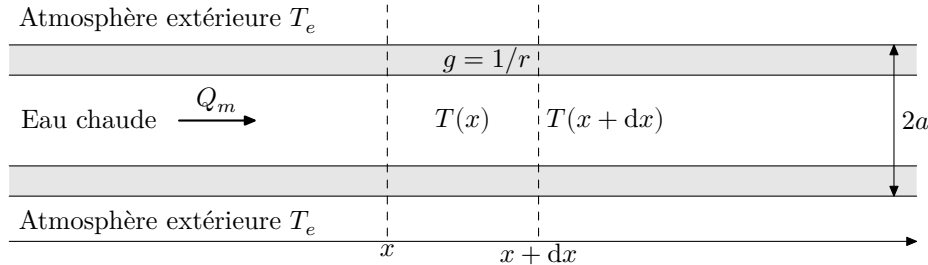


Figure 11 Modélisation du réseau de chauffage

Q 27. En régime stationnaire, montrer que, en négligeant la diffusion thermique interne à l'eau, le champ de température $T(x)$ dans l'eau vérifie :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{T}{\xi} = \frac{T_e}{\xi} \quad (\text{II.1})$$

avec $\xi = Q_m c r$ où c est la capacité thermique massique de l'eau liquide.

Q 28. En déduire l'expression de $T(x)$ en fonction de x . On notera T_0 la température en $x = 0$.

Plus précisément, les canalisations du réseau de chauffage sont en contact avec l'air des appartements, à température $T_i(x)$, eux-mêmes séparés de l'atmosphère extérieure (température T_e) par des parois de conductance thermique linéique moyenne $g_2 = 1/r_2$ (figure 12).

Q 29. En négligeant les échanges thermiques entre les logements, déterminer l'expression du champ de température $T_i(x)$ en fonction de $T(x)$, T_e , r_1 et r_2 .

Pour la suite, on prend les valeurs numériques suivantes :

- $r_1 = 1,05\text{ K}\cdot\text{W}^{-1}\cdot\text{m}$,
- $r_2 = 0,32\text{ K}\cdot\text{W}^{-1}\cdot\text{m}$,
- $Q_m = 1,0\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$,
- $T_e = 7\text{ °C}$,
- $L = 2,0\text{ km}$.

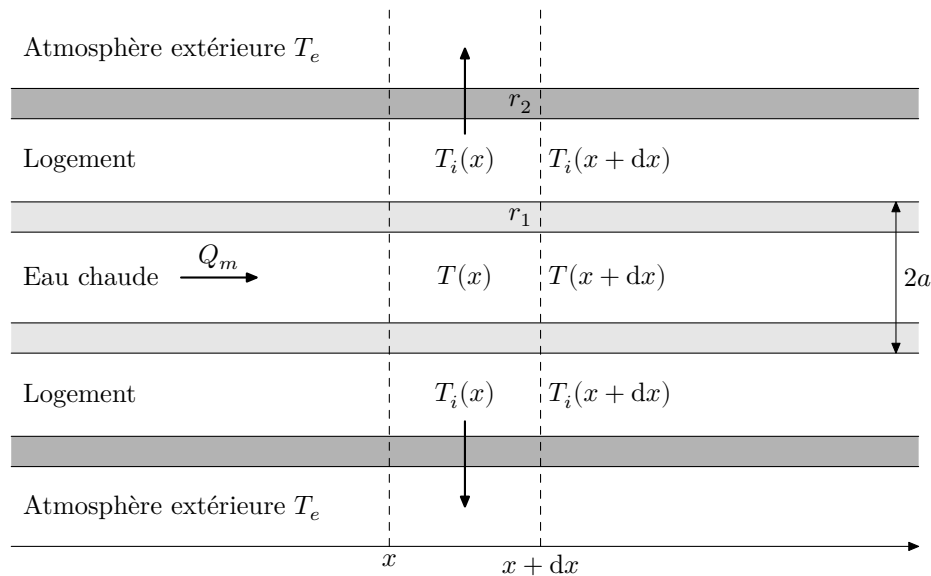


Figure 12 Détail de la modélisation du réseau de chauffage

Q 30. À quelle température T_0 doit-on chauffer l'eau en entrée du réseau de chauffage pour que la température de chaque logement soit au moins égale à $T_{\min} = 19^\circ\text{C}$?

Q 31. Quel surcoût énergétique relatif ce modèle prédit-il par rapport à un mode de chauffage qui conduirait à une situation parfaitement équilibrée où tous les appartements sont à la température $T_{\min}$?

On propose un schéma de principe d'équilibrage du réseau. Au lieu d'utiliser un circuit hydraulique à une seule maille, on opère une dérivation d'une partie de l'eau sortant de la chaudière par une canalisation calorifugée pour la réinjecter plus loin dans le circuit (figure 13). Une vanne d'équilibrage permet d'ajuster le débit $Q_{m,2}$ d'eau chaude prélevée au circuit principal.

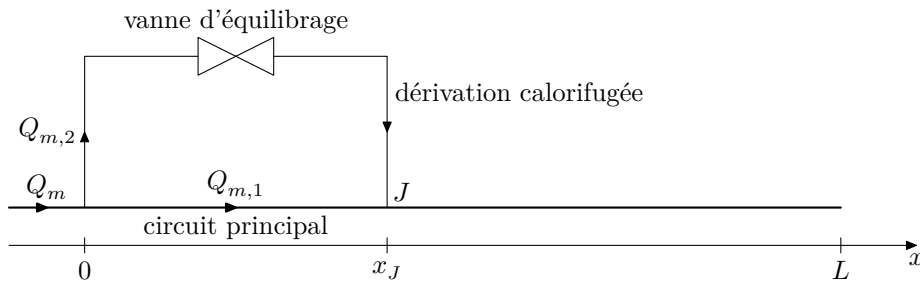


Figure 13 Principe d'équilibrage d'un réseau de chauffage

Q 32. Exprimer la température de l'eau juste après le point de jonction J en fonction de Q_m , $Q_{m,2}$, x_J notamment.

La température des logements en fonction de leur position dans le circuit de chauffage est représentée figure 14 pour différents débits de masse $Q_{m,2}$ avec Q_m fixé à $1\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $x_J = L/2$.

Q 33. Parmi les valeurs de $Q_{m,2}$ testées, laquelle semble la plus intéressante ? Justifier brièvement.

Q 34. Estimer l'économie relative d'énergie réalisée par rapport au réseau non équilibré.

II.C – Actions à moyen terme

II.C.1) Isolation thermique par l'extérieur

L'isolation par l'extérieur consiste à recouvrir les murs des bâtiments d'une couche d'isolant thermique. Un des isolants les plus utilisés est la laine de roche dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2.

Q 35. Exprimer l'épaisseur d'isolant à appliquer sur les murs pour réduire d'une fraction μ les déperditions énergétiques de l'ensemble de la résidence, toutes choses égales par ailleurs. En déduire le nombre de couches de plaques de laine de roche qu'il faut appliquer sur les murs de la résidence pour réduire ses déperditions énergétiques de $\mu = 45\%$. Est-il intéressant d'ajouter une couche supplémentaire de laine de roche à l'isolation précédente ?

II.C.2) Remplacement de la chaudière par une pompe à chaleur

Cette section étudie l'opportunité de remplacer la chaudière à gaz par une pompe à chaleur. Le principe d'une pompe à chaleur est rappelé sur la figure 15 et les caractéristiques de la pompe à chaleur dont l'installation est envisagée sont données dans la figure D du document réponse.

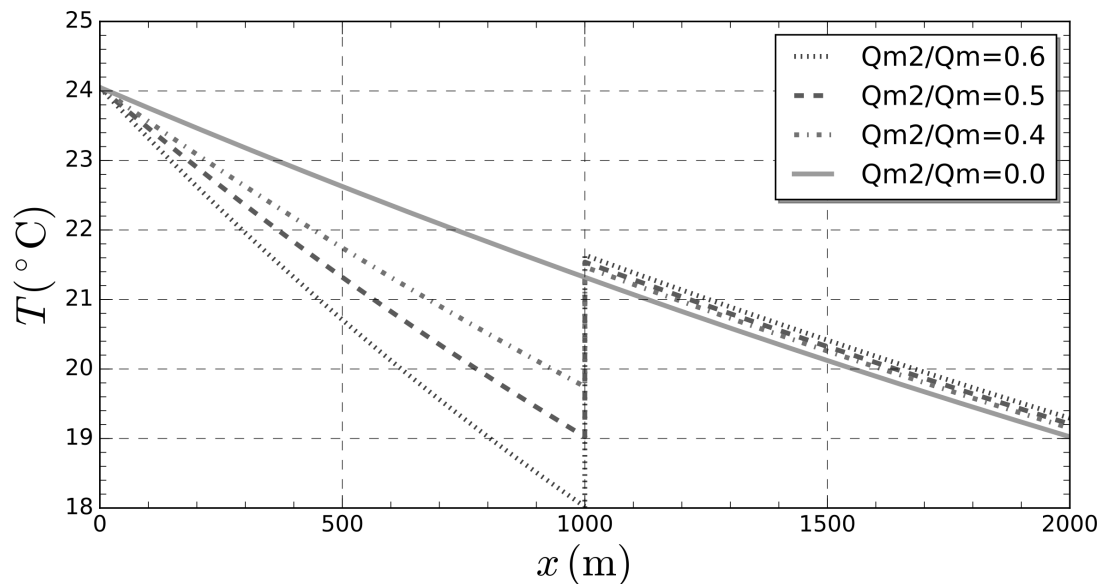


Figure 14 Champ de température au sein des logements

Épaisseur	12 cm
Conductivité thermique	$0,037 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$
Prix unitaire	$250 \text{ €}\cdot\text{m}^{-2}$

Tableau 2 Caractéristiques d'un panneau de laine de roche

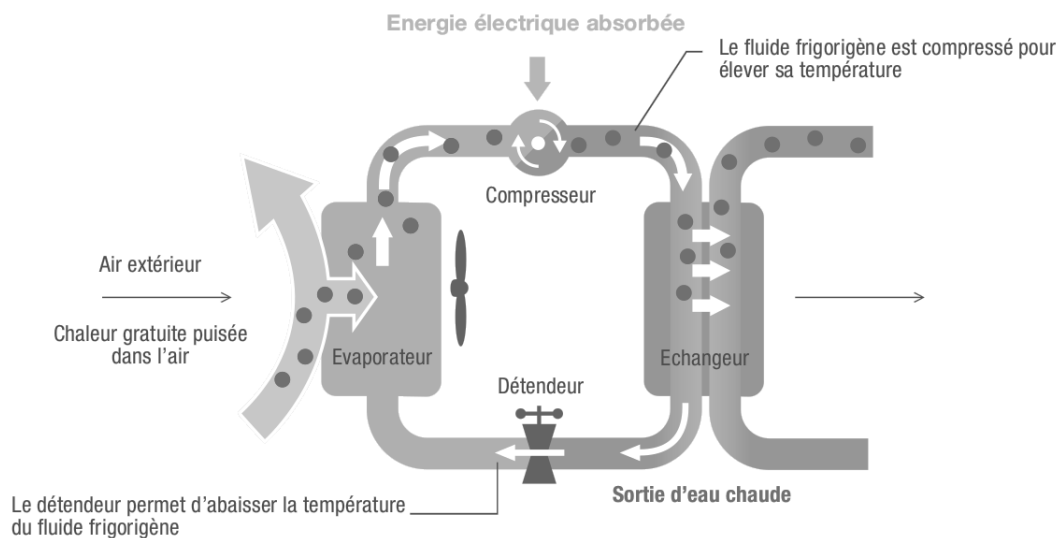


Figure 15 Schéma de principe d'une pompe à chaleur

Q 36. Évaluer le coefficient de performance COP_{rev} de la pompe à chaleur en supposant qu'elle fonctionne de façon réversible, au sens de la thermodynamique, pour les conditions de température représentatives de la copropriété étudiée (source chaude à 70°C , source froide à 7°C). Comparer la valeur obtenue aux valeurs du COP fournies dans la documentation de la pompe à chaleur considérée.

Le R407C, fluide frigorigène utilisé par la pompe à chaleur, est un mélange des fluides frigorigènes R32, R125 et R134a, miscibles en toutes proportions. Il décrit le cycle thermodynamique suivant

- 1-2 : compression isentropique de vapeur surchauffée à 10°C sous une pression de 6 bar jusqu'à une température de 90°C ;
- 2-3 : refroidissement isobare et liquéfaction isobare totale au contact de la source chaude ;
- 3-4 : détente isenthalpique jusqu'à atteindre la pression 6 bar ;
- 4-1 : vaporisation isobare et surchauffage isobare au contact de la source froide.

Q 37. Tracer le cycle thermodynamique sur le diagramme (p, h) du fluide R407C (figure C du document réponse).

Q 38. Évaluer le COP. Comparer à la documentation technique et expliquer d'éventuelles différences.

- Q 39.** Évaluer le débit de masse D_m du fluide frigorigène lorsque la pompe à chaleur fonctionne en mode « priorité puissance ». Commenter.
- Q 40.** Toujours en mode priorité puissance, combien de pompes à chaleur faut-il associer pour satisfaire le besoin en chauffage de la résidence dans son état actuel ?
- Q 41.** L'utilisation de radiateurs en fonte nécessite une injection d'eau à environ 70 °C. Est-il intéressant, du point de vue financier et du point de vue de l'émission de gaz à effet de serre, de remplacer la chaudière de la copropriété par un ensemble de pompes à chaleur produisant de l'eau à cette température ? On prendra 200 €/MWh pour le coût de l'électricité et 90 €/MWh pour le coût du gaz. Discuter.

Données

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante de gravitation universelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$$

Masse du Soleil

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Distance Terre-Soleil

$$D = 1 \text{ u.a.} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$$

Rayon de la Terre

$$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$$

Rayon du Soleil

$$R_S = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$$

Luminosité du Soleil

$$\mathcal{L}_S = 3,828 \times 10^6 \text{ W}$$

Le watt-heure

$$1 \text{ W} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^3 \text{ J}$$

Produit intérieur brut (PIB) mondial (2021)

$$96 \times 10^{12} \text{ \$}$$

Enthalpie molaire de vaporisation de l'eau

$$\Delta_v H(\text{H}_2\text{O}) = 40,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Capacité thermique massique de l'eau à 298 K

$$c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Masses molaires ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

O	Ti	CO ₂	CH ₄
16,0	47,9	44,0	16,0

Enthalpies molaires standard de formation à 298 K
($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)

CO _{2(g)}	CH _{4(g)}	H ₂ O _(l)
-393	-75	-285

• • • FIN • • •



Numéro de place

--	--	--	--	--	--

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--

Signature

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve : Physique-chimie 1 MP

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

--	--

 /

--	--

Question 6

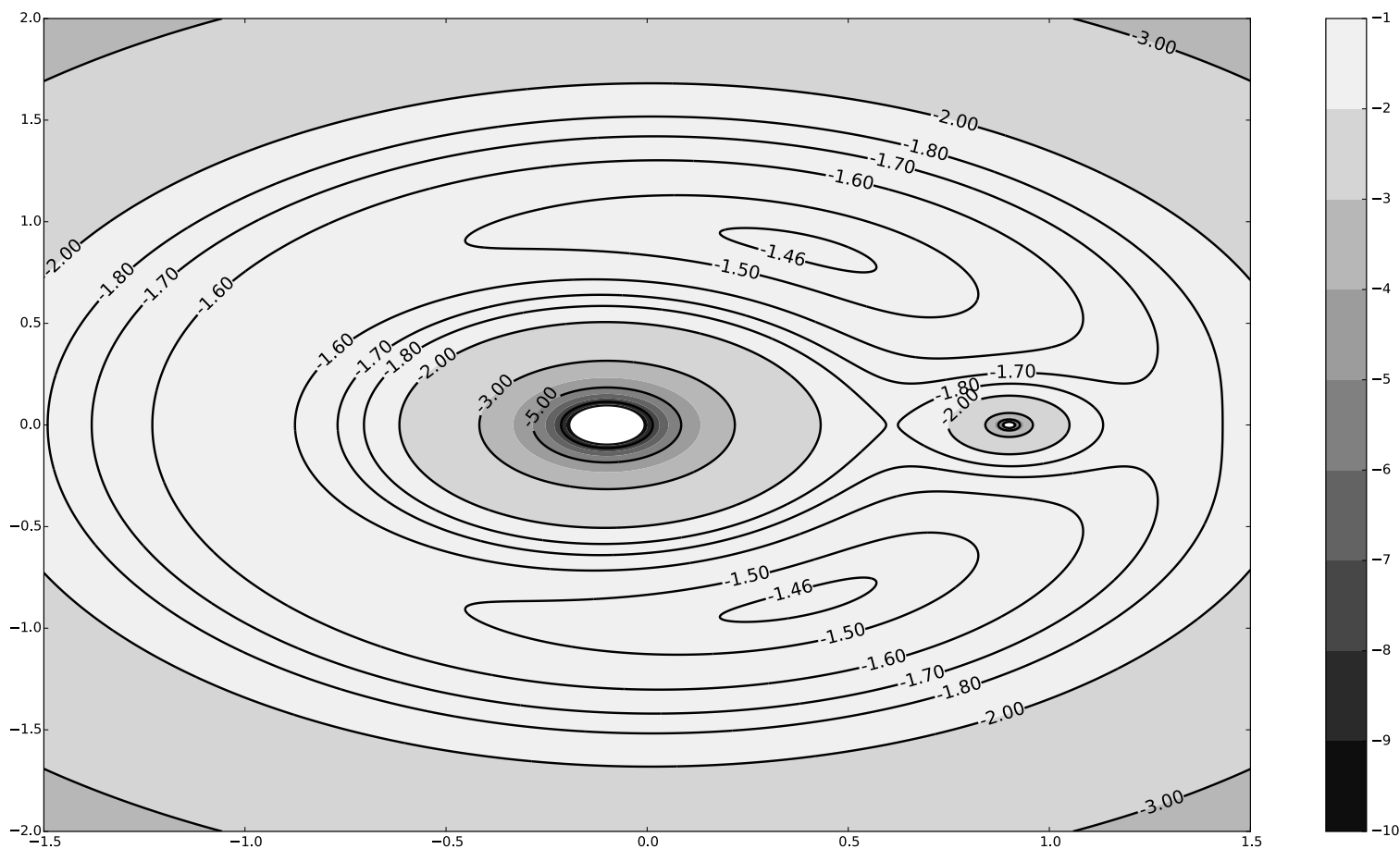


Figure A Courbes isoénergies potentielles dans le référentiel $(\mathcal{R})$ d'étude. Par souci de lisibilité, la carte est représentée pour $a = \frac{1}{10}$ ne correspondant pas au vrai rapport de masse $\frac{M_T}{M}$ du système {Terre+Soleil}

Ne rien écrire**dans la partie barrée**

P056-DR/2023-03-20 20:27:39

Question 14

Compléter les lignes de code dans les cadres prévus à cet effet. Dans la zone quadrillée, des lignes de code complètes sont attendues.

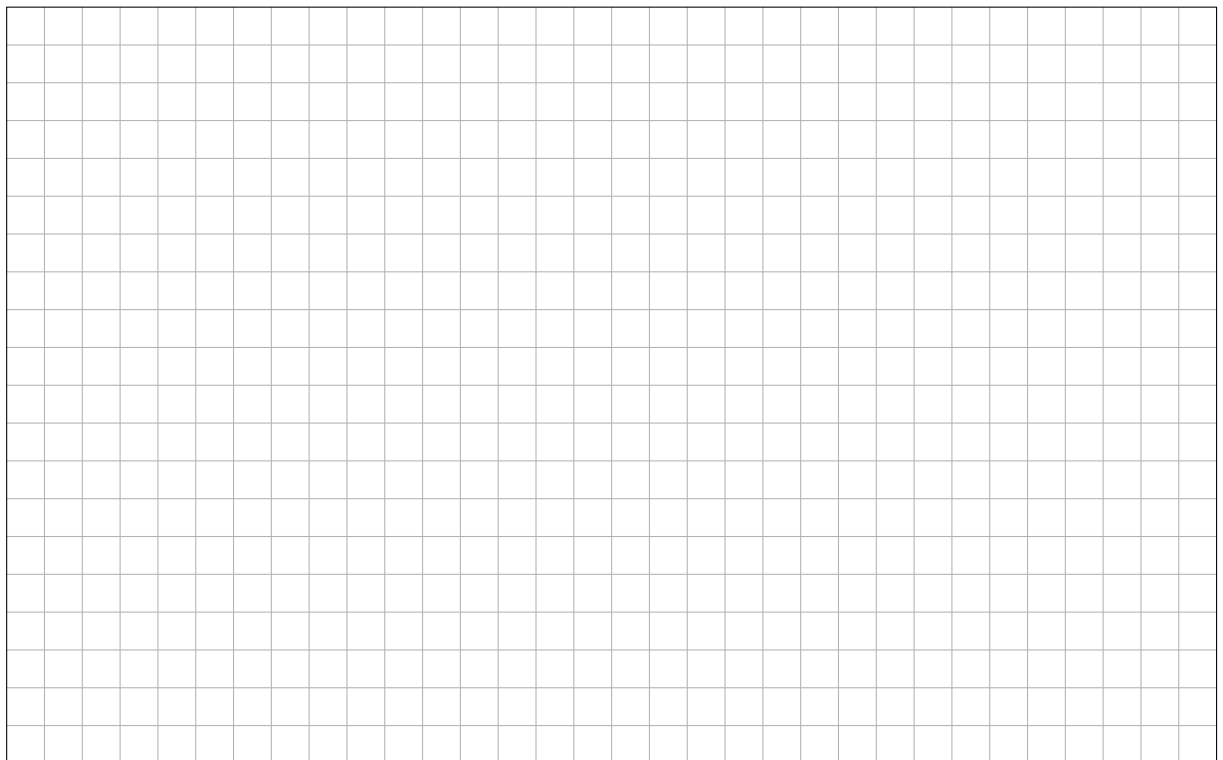
```
import numpy as np
# np.pi fournit la valeur du nombre pi=3.14151....

def resol(init, tau_f, N):
    """
    init : ndarray, vecteur contenant les valeurs initiales de u, v, w, up, vp, wp
    tau_f : float, on resout le probleme sur l'intervalle de temps [0, tau_f]
    N : int, nombre de points de calcul
    """
    global A, B, C # coefficients du système d'équations

    h =  # pas temporel

    tau = np.arange(0, tau_f, h)
    u = np.zeros(N); v = np.zeros(N); w = np.zeros(N) # vecteurs contenant N zéros
    up = np.zeros(N); vp = np.zeros(N); wp = np.zeros(N)

    u[0], v[0], w[0], up[0], vp[0], wp[0] = 
```



```
return tau, u, v, w, up, vp, wp
```

Figure B Fonction de résolution numérique du système d'équations (3)

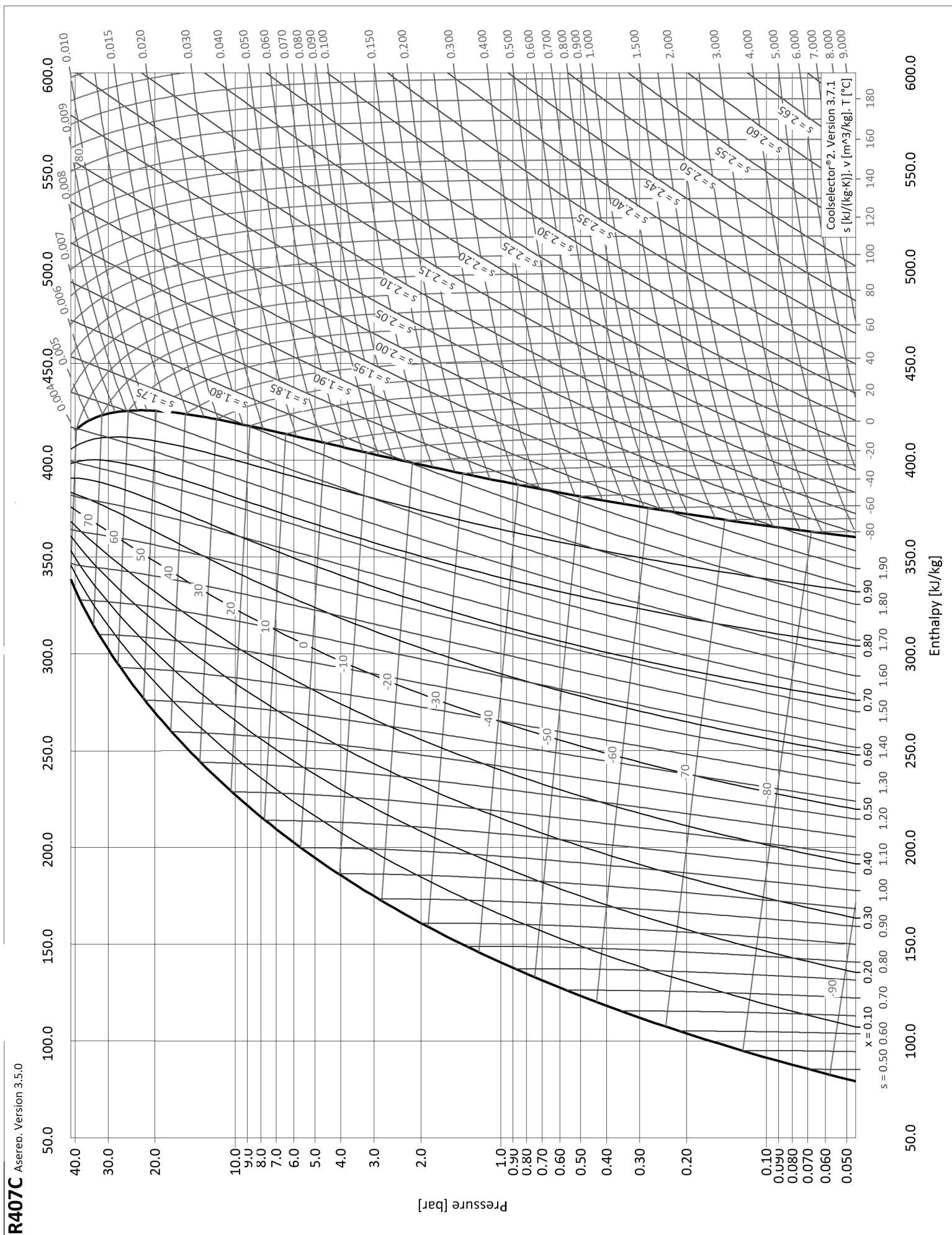
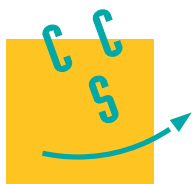


Figure C Diagramme enthalpique du fluide R407c

	Priorité COP	Priorité puissance
Température de l'eau : entrée 30 °C, sortie 35 °C (température extérieure +7 °C)		
Puissance nominale (kW)	45,00	63,40
Puissance absorbée nominale (kW)	10,90	17,70
COP à puissance nominale	4,13	3,58
Température de l'eau : entrée 40 °C, sortie 45 °C (température extérieure +7 °C)		
Puissance nominale (kW)	45,00	63,20
Puissance absorbée nominale (kW)	12,90	20,90
COP à puissance nominale	3,49	3,02
Température de l'eau : sortie 70 °C (température extérieure +7 °C)		
Puissance nominale (kW)	45,00	58,70
Puissance absorbée nominale (kW)	25,60	32,60
COP à puissance nominale	1,76	1,80
Température de l'eau : entrée 30 °C, sortie 35 °C (température extérieure +20 °C)		
Puissance nominale (kW)	45,00	73,90
Puissance absorbée nominale (kW)	7,40	15,30
COP à puissance nominale	6,08	4,83
Poids net à vide (kg)	526	526
Débit minimum / nominal (kg·h ⁻¹)	3950 / 7900	3950 / 7900
Diamètre entrée / sortie du circuit de chauffage (mm)	38,1 / 38,1	38,1 / 38,1
Plage de fonctionnement température extérieure garantie (°C)	-20 / +40	-20 / +40
Fluide / charge	R407C / 5,5 kg × 2	R407C / 5,5 kg × 2
PRG / équivalent CO ₂ (- / kg)	1774 / 19 514	1774 / 19 514
Alimentation électrique unité extérieure ~ 50 Hz	400 V – 3P + N + T	400 V – 3P + N + T

Figure D Caractéristiques de la pompe à chaleur

*Errare humanum est, perseverare diabolicum*

Ce sujet propose d'étudier deux découvertes qui finalement n'en furent pas ! Il est constitué de deux parties indépendantes.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Les grandeurs complexes sont notées soulignées.

Certaines données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé ; d'autres données relèvent de l'initiative du candidat.

I La chasse au péritio

En astronomie, les sursauts radio rapides (*fast radio burst*) sont de brèves émissions radio intenses, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (*perytions*), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

Après s'être intéressé à la structure d'un miroir de radiotélescope, on détaillera les péritios, pour en arriver à leur origine, finalement identifiée en 2015.

I.A – Un miroir pour les ondes électromagnétiques**I.A.1)**

Q 1. Énoncer les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans une région vide de charges et de courants ?

On se placera dans cette situation dans toute la sous-partie I.A.

Q 2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique (équation de d'Alembert).

On considère une onde électromagnétique dans le demi-espace $x < 0$, dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation. Établir la relation, dite relation de dispersion, entre k et ω .

Cette onde rencontre une plaque métallique plane, constituée d'un conducteur parfait, dont la surface est située en $x = 0$ (figure 1).

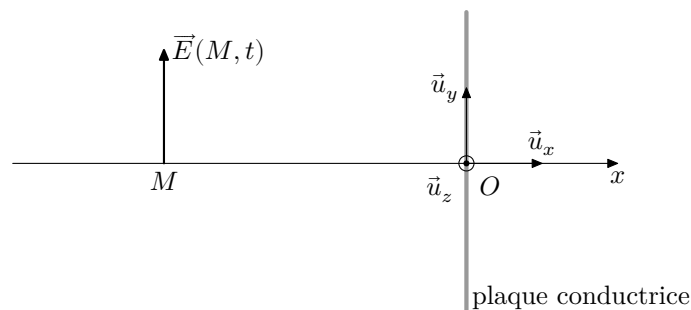


Figure 1 Onde électromagnétique rencontrant un conducteur parfait

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique entre un milieu 1 et un milieu 2,

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.3})$$

où M est un point de l'interface, $\vec{E}_i(M, t)$ et $\vec{B}_i(M, t)$ les limites des champs dans le milieu i en un point $M_i \rightarrow M$, $\sigma(M, t)$ la densité surfacique de charge en M , $\vec{j}_s(M, t)$ la densité de courant surfacique à l'interface et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à l'interface en M , dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

Q 4. Rappeler la définition d'un conducteur parfait. Que peut-on alors dire du champ $\vec{E}(M, t)$ dans un tel milieu ?

Q 5. Le champ électrique de l'onde décrite par l'équation (I.1) vérifie-t-il la relation de passage (I.2) ? Dans le demi-espace $x < 0$, règne aussi une onde de la forme $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega't + k'x)$. En utilisant les relations de passage, déterminer $\vec{E}_{0r}$, ω' et k' . Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation.

Q 6. Dans le milieu $x < 0$, établir l'expression des champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ résultants. Comment qualifier l'onde correspondante ?

I.A.2)

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite figure 2, où E est un émetteur d'ondes centimétriques, P une plaque métallique, A une antenne reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle \vec{E}^2 \rangle$ du champ électromagnétique au niveau de l'antenne A.

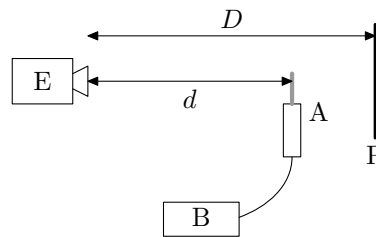


Figure 2 Dispositif expérimental à ondes centimétriques

On place la plaque P à une distance D d'environ 46 cm de l'émetteur et on relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la distance d entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en figure 3.

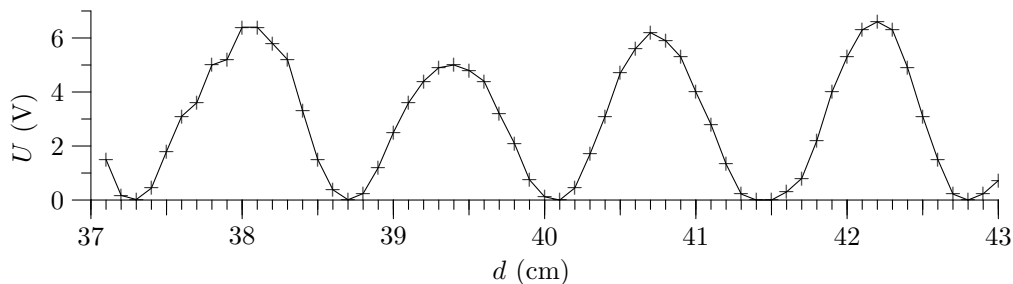


Figure 3 Tension U en fonction de la distance d entre l'antenne et l'émetteur

Q 7. Dédurre de l'enregistrement de la figure 3 la fréquence f des ondes utilisées.

Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1$ GHz, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6$ GHz.

Q 8. Estimer l'incertitude-type sur la fréquence déterminée expérimentalement et discuter de l'acceptabilité de la mesure par rapport aux données constructeur par un calcul d'écart normalisé.

I.A.3)

La figure 4 présente une deuxième expérience. E et R sont respectivement un émetteur et un récepteur d'ondes centimétriques, P_1 et P_2 sont deux plaques métalliques et S est une plaque de bois aggloméré. Le récepteur R fonctionne comme l'antenne et le boîtier électronique utilisés lors de l'expérience précédente.

Les deux plaques P_1 et P_2 étant perpendiculaires entre elles, on déplace la plaque P_2 selon l'axe Ox et on mesure la tension U délivrée par le récepteur, la position x de la plaque étant relevée par rapport à une origine arbitraire.

Q 9. Expliquer le rôle des éléments P_1 , P_2 et S. À quel autre montage rencontré en travaux pratiques ce montage est-il analogue ?

Q 10. Établir l'expression de la tension $U(x)$ en introduisant les grandeurs utiles. Dédurre des mesures une estimation de la fréquence des ondes.

Q 11. Estimer le contraste associé à la courbe expérimentale et proposer une explication à sa valeur.

I.A.4)

On rappelle que le champ magnétique est nul dans un conducteur parfait.

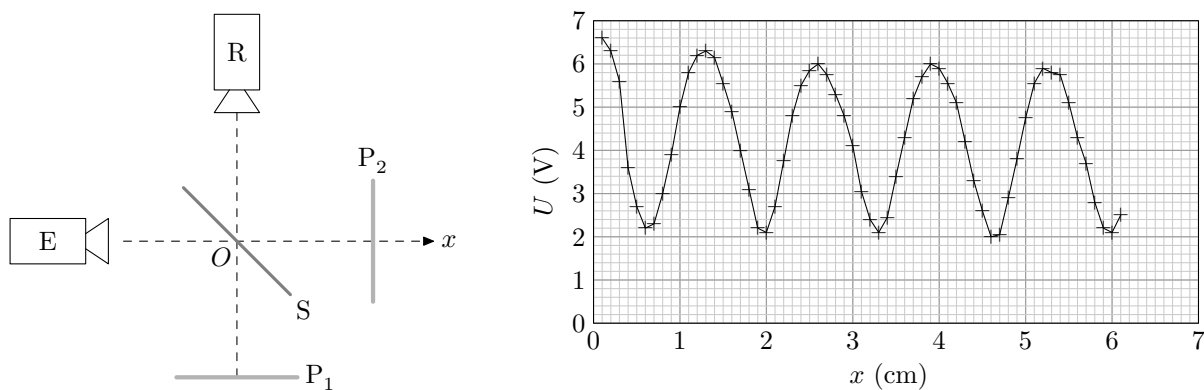


Figure 4 Expérience en ondes centimétriques

Q 12. Déterminer la densité de courant surfacique $\vec{j}_s(M, t)$ sur le conducteur dans le cas représenté figure 1. Quelle est la source physique du champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$?

On utilise un émetteur d'ondes centimétriques, générant un champ $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$. On remplace le plan métallique de la figure 1 par une grille métallique, constituée de barreaux parallèles séparés d'une distance très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique émise par le générateur. On admet que, dans ce cas, la grille se comporte comme un plan conducteur dans lequel les seuls courants électriques qui peuvent s'établir ont même direction que les barreaux.

On considère trois situations différentes par l'orientation de la grille par rapport au champ $\vec{E}$ (figure 5).

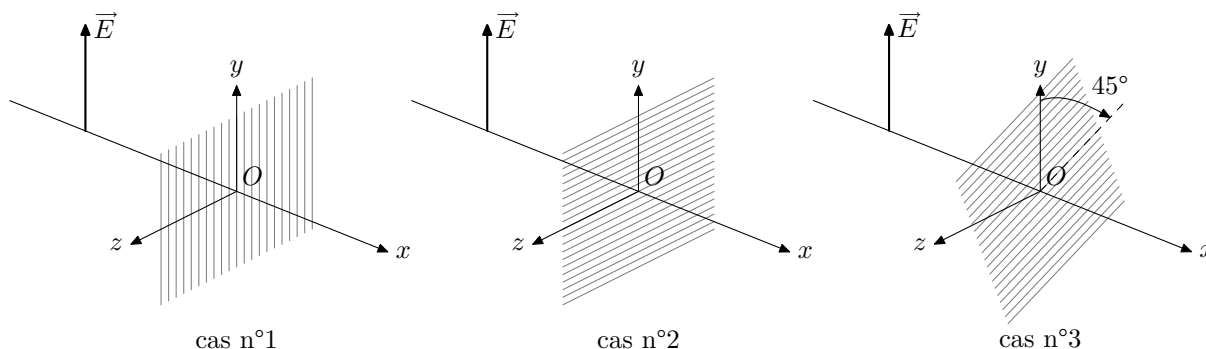


Figure 5 Onde électromagnétique incidente sur une grille métallique

Q 13. Dans chacun de ces trois cas, décrire le plus précisément possible le champ électrique observé en $x > 0$.

Q 14. À quel dispositif rencontré en travaux pratiques cette grille fait-elle penser ?

I.A.5)

Pour étudier les ondes électromagnétiques d'origine spatiale, on utilise un radiotélescope, basé sur le même principe qu'un télescope optique : un miroir parabolique réfléchit les ondes vers des capteurs situés à son foyer.

Q 15. Proposer une réalisation pratique du miroir d'un radiotélescope de très grande dimension (de l'ordre de la centaine de mètres) fonctionnant dans le domaine des ondes centimétriques.

I.B – L'énigme des péritios

L'observatoire de Parkes, en Australie, dispose d'un radiotélescope de 64 m de diamètre, utilisé entre autres pour l'étude des pulsars. En 2007, il a permis de découvrir des sursauts radio rapides, observés dès 2001, dont on a établi l'origine extragalactique. Ils seraient émis par des étoiles à neutrons particulières.

En analysant d'anciens enregistrements, on a trouvé qu'en 1998 le télescope de Parkes a détecté des signaux similaires aux sursauts rapides, appelés « péritios ». Leur origine fut une énigme, résolue seulement en 2015.

Les péritios sont des signaux radio d'une durée de quelques centaines de millisecondes, présentant une variation de fréquence similaire à la dispersion des impulsions émises par les pulsars s'étant propagées à travers un plasma froid dilué. La figure 6 représente la structure temporelle et fréquentielle d'un péritio qui est donc un signal quasiment sinusoïdal dont la fréquence varie lentement avec le temps.

I.B.1)

Afin de caractériser la variation temporelle de fréquence caractéristique lors de la réception d'une impulsion radio, détaillons la modélisation d'un plasma froid dilué. Il est constitué :

- de cations de masse M , de charge $+e$ à la densité volumique n_c ;
- d'électrons de masse m , de charge $-e$ à la densité volumique n_e .

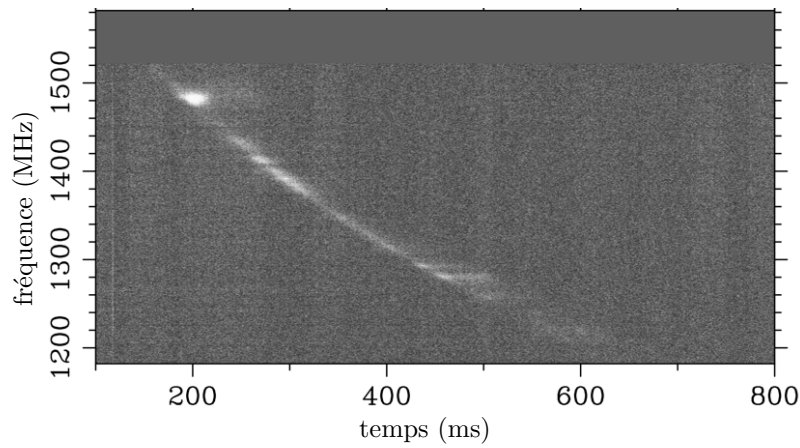


Figure 6 Structure temporelle et fréquentielle d'un péroto

On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les interactions entre les particules (plasma peu dense), elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;
- comme $M \gg m$, les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles ; c'est le modèle du « plasma froid » où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme « froids » ;
- en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique n ;
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique *transverse*

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k}x))$$

avec $\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x = 0$ pour une onde transverse se propageant selon $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

Q 16. Montrer que le plasma reste localement neutre en présence de l'onde. Que peut-on alors dire de la densité volumique n_e d'électrons dans le plasma ?

Q 17. En considérant que les électrons ne sont soumis qu'à la seule force électrique (on néglige l'effet du champ magnétique), montrer que la densité volumique de courant dans le plasma est reliée au champ électrique par une relation de la forme

$$\vec{j} = \underline{\theta}_B \vec{E}$$

et exprimer la conductivité complexe $\underline{\theta}_B$ en fonction des données.

Q 18. À partir des équations de Maxwell, établir la relation de dispersion sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où l'on exprimera la pulsation plasma ω_p en fonction de n , m , e et ϵ_0 .

Q 19. À quelle condition sur ω l'onde peut-elle se propager dans le plasma ?

Q 20. Établir alors l'expression de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω , ω_p et c .

I.B.2)

On considère une onde électromagnétique émise par un astre à une distance L de la Terre. Le temps de parcours de la composante de l'onde à la pulsation ω est

$$t(\omega) = \int_0^L \frac{d\ell}{v_g(\omega)}.$$

Q 21. Pourquoi ne peut-on pas écrire a priori $t(\omega) = \frac{L}{v_g}$?

Q 22. Établir l'expression de $t(\infty)$. Quelle est son interprétation physique ?

Q 23. Quel est le signe de $\tau(\omega) = t(\omega) - t(\infty)$ et quel sens concret donner à cette grandeur ?

On définit la mesure de dispersion DM (pour *dispersion measure*) par

$$DM = \int_0^L n_e d\ell.$$

Pour un plasma interstellaire, on a typiquement $n_e \approx 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$.

Q 24. Montrer que pour des ondes d'une fréquence f de l'ordre du gigahertz, on peut écrire

$$\tau(f) = A \frac{\text{DM}}{f^2}$$

où l'on exprimera A en fonction de e , ε_0 , m et c .

Q 25. Calculer la valeur de A .

Q 26. Cette relation est-elle qualitativement en accord avec l'enregistrement de la figure 6 ?

Dans la définition $\text{DM} = \int_0^L n_e d\ell$, on exprime usuellement la densité électronique n_e en cm^{-3} et la distance L en parsec, unité de distance astronomique ; la mesure de dispersion est alors donnée en $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Q 27. À partir de la figure 6, estimer la mesure de dispersion DM, en exprimant le résultat d'abord en unités du système international puis en $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Q 28. Les mesures de dispersion mesurées pour des objets extragalactiques sont usuellement de quelques centaines de $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$. Peut-on exclure une origine extragalactique aux péritios ?

Différents indices ont fait pencher la balance vers une origine terrestre des péritios : détections dans des directions en dessous de la ligne d'horizon, ou sur un large champ de visée. Et surtout, ces phénomènes se produisent pendant les heures de bureau, en semaine.

En 2014, l'observatoire de Parkes s'est doté d'un enregistreur plus performant, pouvant couvrir une bande de fréquence allant de 402 MHz à 3 GHz, l'équipement utilisé jusqu'alors ne permettant d'explorer qu'une bande de 400 MHz de large, centrée sur 1382 MHz.

Des chercheurs ont alors découvert que plusieurs péritios sont associés à une émission d'onde électromagnétique dans le domaine de fréquence de 2,3 à 2,5 GHz, inaccessible avec l'ancien matériel. Il est apparu que les péritios sont toujours accompagnés d'une émission à 2,4 GHz, mais que l'on observe de nombreuses émissions à 2,4 GHz non accompagnées de péritio. L'analyse des enregistrements sur deux mois montre que les péritios sont répartis pendant la journée, entre 9h et 17h. Ces observations ont permis aux chercheurs de trouver le coupable : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire. La sous-partie I.C étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péritios observés.

I.C – Le four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2,45 \text{ GHz}$, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$.

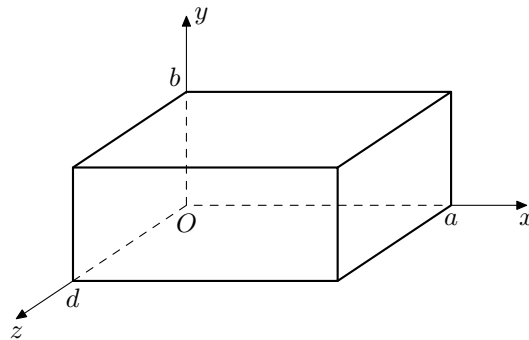


Figure 7 Cavité d'un four à micro-ondes

I.C.1)

On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide.

On cherche le champ électrique sous la forme

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Q 29. Montrer que seules des valeurs discrètes de k_x , k_y et k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m , n et ℓ .

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre.

Q 30. En déduire l'expression des fréquences $f_{mn\ell}$ des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures $a = 36,0$ cm, $b = 24,0$ cm et $d = 26,5$ cm, alimenté par un klystron de fréquence $f = 2,45$ GHz. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ($\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La figure 8 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

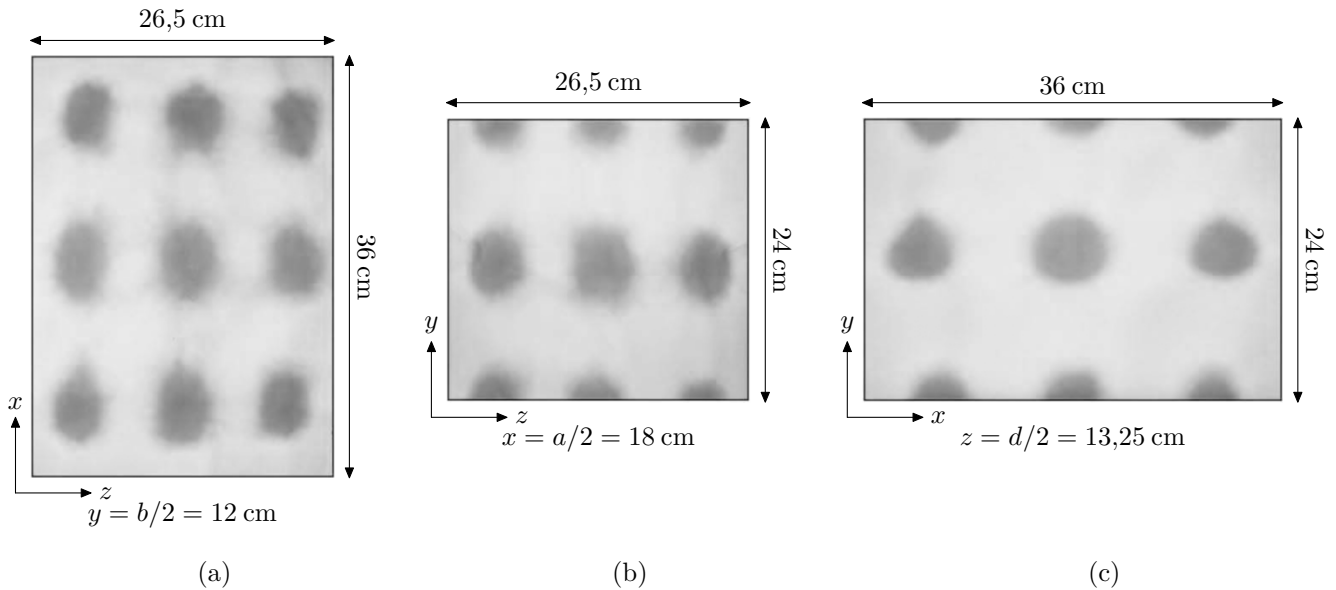


Figure 8 Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four — les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

Q 31. Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ) .

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ?

Justifier précisément l'aspect de la figure 8b en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

L'ouverture de la porte d'un four à micro-ondes déclenche l'arrêt du klystron générant l'onde. Cependant, des ondes électromagnétiques ont été détectées lorsque l'on ouvre la porte d'un four en cours de fonctionnement. Nous allons déterminer au bout de quelle durée l'onde présente dans le four s'atténue.

I.C.2)

On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface S , situées en $x = 0$ et $x = a$. Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

où n est un entier positif.

On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.

Q 32. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dans la cavité. On notera B_0 son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de E_0 .

Q 33. Établir l'expression W de l'énergie électromagnétique totale contenue dans la cavité, en fonction de B_0 , des caractéristiques de la cavité et de μ_0 . Que constate-t-on ?

I.C.3)

Pour rendre compte de la décroissance du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie σ des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Nous allons étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un conducteur métallique.

On considère un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité σ , occupant le demi-espace $x > 0$.

Q 34. Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si $\varepsilon_0 f \ll \sigma$? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

Q 35. Établir alors l'équation vérifiée par $\vec{B}(M, t)$ dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine $x > 0$ sous la forme

$$\vec{B}(x, t) = \underline{f}(x) \exp(i\omega t) \vec{u}_z.$$

Q 36. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{f}(x)$, sachant que l'on impose en $x = 0$ le champ $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$. On posera une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de μ_0 , σ et ω .

Q 37. Commenter l'expression du champ $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur. Donner l'interprétation de δ .

Q 38. Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.

Q 39. Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section S , en fonction de B_0 , ω , δ , S et μ_0 .

On définit le facteur de qualité de la cavité par

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}.$$

Q 40. En admettant que l'on puisse prendre en première approximation l'expression de l'énergie totale établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de a et δ .

Q 41. Calculer la valeur de Q pour un four à micro-ondes, avec $a = 36$ cm.

Q 42. Montrer que l'énergie totale $W(t)$ décroît avec un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de ω et Q .

Q 43. Calculer numériquement τ . Peut-on expliquer les périclits par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

II Le mystère des étoiles à éruptions de potassium

Les astronomes utilisent des spectrographes pour décomposer la lumière des étoiles afin d'obtenir des informations sur leur température et leur composition.

En 1962, à l'observatoire de Haute-Provence, Daniel Barbier et Nina Morguleff observent l'apparition brève de raies de potassium intenses dans le spectre d'une étoile (figure 9). Ils ont, par la suite, observé d'autres éruptions de potassium, apparemment aléatoires. Beaucoup d'autres enregistrements effectués par d'autres observatoires ont été examinés pour chercher des éruptions similaires, mais personne n'a pu en trouver.

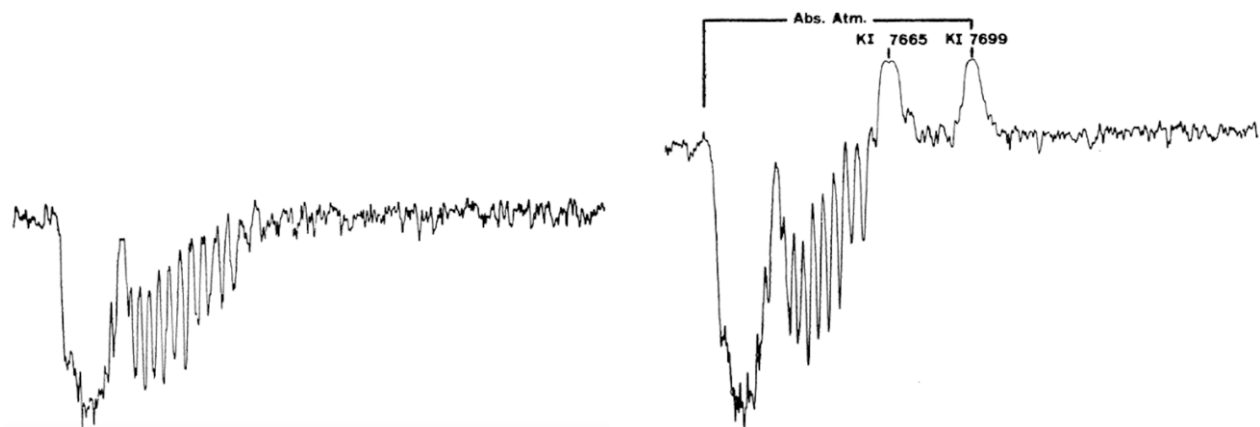


Figure 9 À gauche, spectre usuel d'une étoile — À droite, éruption de potassium avec des raies à 7665 Å et 7699 Å

Les chercheurs sont donc partis en quête d'autres sources de potassium et ont fini par déterminer qu'une allumette produit les mêmes raies d'émission que celles observées à l'observatoire de Haute-Provence. Il s'agissait en fait d'un opérateur qui fumait près du foyer du télescope.

Nous nous intéressons dans cette partie au potassium et au chlorate de potassium, constituant présent dans les allumettes.

Q 44. Donner la structure électronique du potassium ($Z = 19$). À quelle famille appartient-il ? Quel nombre d'oxydation non nul usuel peut-on prévoir ?

Le chlorate de potassium, de formule KClO_3 , est une substance blanche cristalline, utilisée comme agent oxydant, comme désinfectant ou comme explosif. La méthode d'obtention utilisée commence par l'électrolyse d'une solution de saumure (chlorure de sodium concentré), afin de préparer dans un premier temps du chlorate de sodium NaClO_3 .

Q 45. D'après les potentiels standard des couples en présence, écrire les réactions prévisibles à l'anode et à la cathode.

Q 46. En réalité, on observe l'oxydation des ions chlorure à l'anode. Expliquer cette observation en appuyant votre réponse sur des courbes intensité-potential schématisées.

La figure 10 donne le diagramme potentiel-pH du chlore. Par convention, une frontière entre les domaines de deux espèces dissoutes correspond à l'égalité des concentrations de ces deux espèces, tandis que la pression partielle d'une espèce gazeuse est prise égale à 1 bar sur une frontière. On note c_0 la concentration de tracé. Les espèces considérées sont $\text{Cl}_{2(g)}$, $\text{Cl}_{(aq)}^-$, $\text{HClO}_{(aq)}$ et $\text{ClO}_{(aq)}^-$.

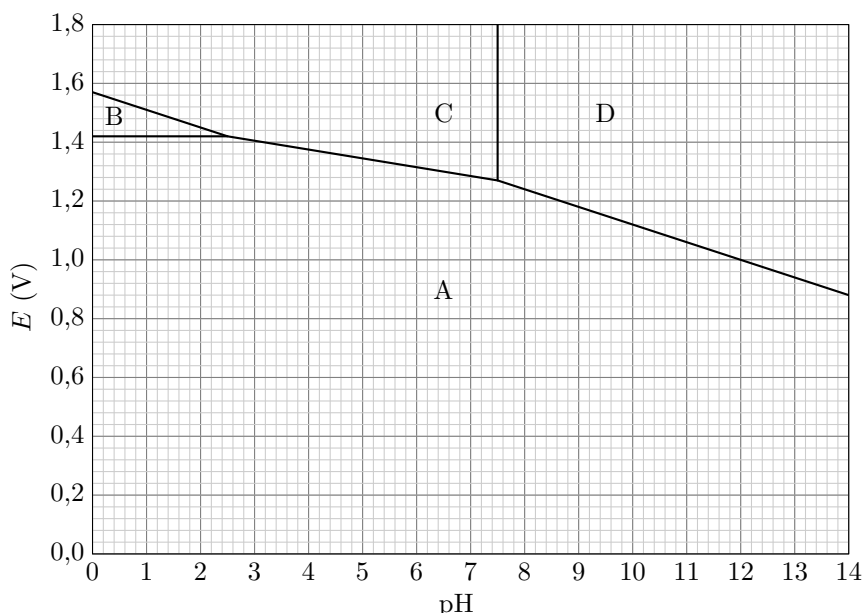


Figure 10 Diagramme potentiel-pH du chlore

Q 47. Identifier, en justifiant les réponses, les espèces correspondant aux domaines A, B, C et D.

Q 48. On donne $E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,36 \text{ V}$. Quelle est la valeur de la concentration de tracé c_0 utilisée pour ce diagramme ?

Q 49. Qu'arrive-t-il à l'espèce B quand on la met en solution pour $\text{pH} > 2,5$? Écrire la réaction correspondante pour $2,5 < \text{pH} < 7,5$ et pour $\text{pH} > 7,5$. Comment s'appelle cette réaction ?

Les ions chlorate ClO_3^- interviennent dans les couples $\text{ClO}_3^-/\text{HClO}$ et $\text{ClO}_3^-/\text{ClO}^-$. La figure 11 présente le diagramme potentiel-pH de ces couples superposé à celui du chlore.

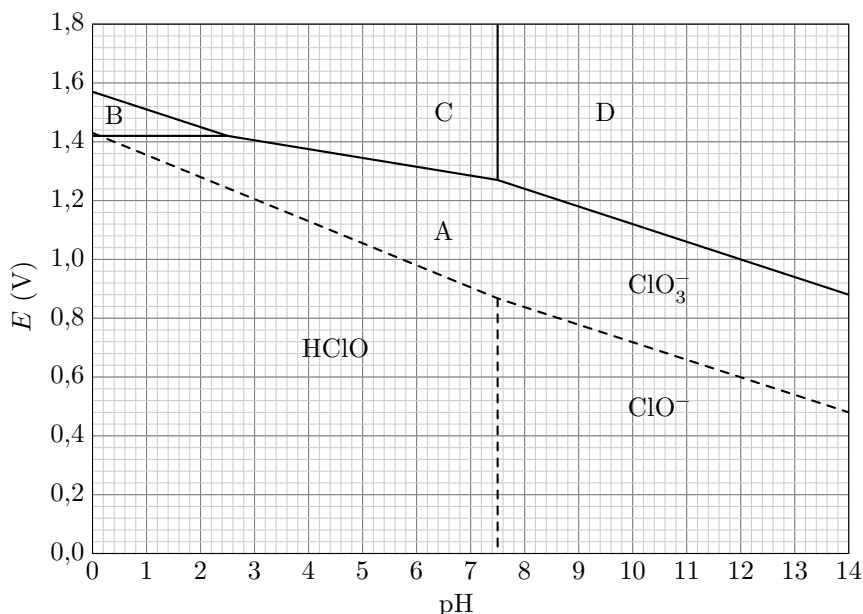
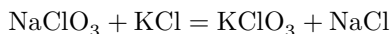


Figure 11

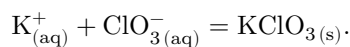
Q 50. Montrer que les ions ClO^- ne sont pas stables et se décomposent selon une réaction dont on écrira l'équation bilan et dont on calculera la constante d'équilibre.

Après évaporation et filtration, on obtient NaClO_3 cristallisé, que l'on fait réagir avec du chlorure de potassium, sous une température de 75°C selon la réaction



puis on refroidit à 10°C pour forcer la précipitation de KClO_3 .

On considère l'équilibre de précipitation



Q 51. À partir des données thermodynamiques, justifier qu'un refroidissement favorise la précipitation de KClO_3 .

Q 52. Calculer la solubilité en gramme par litre de KClO_3 dans l'eau pure à 75°C et à 10°C .

Données

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$
Constante des gaz parfait	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Élément	K	Cl	O
Masse molaire ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)	39,1	35,5	16

Couple	Na^+/Na	H^+/H_2	$\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$	Cl_2/Cl^-	ClO^-/Cl^-	$\text{ClO}_3^-/\text{ClO}^-$
E° potentiel redox standard à 25°C (V)	-2,71	0,00	1,23	1,36	1,73	1,32

Composé	$\text{KClO}_{3(\text{s})}$	$\text{K}_{(\text{aq})}^+$	$\text{ClO}_{3(\text{aq})}^-$
$\Delta_f H^\circ$ ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)	-397,7	-252,4	-104,0
S_m° ($\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$)	143,1	102,5	162,3

$$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,06 \text{ V à } 25^\circ\text{C}.$$

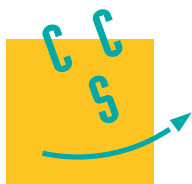
Formulaire

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel s'exprimant en coordonnées cartésiennes par $\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

• • • FIN • • •



Les téléphones portables

En 1973, Martin Cooper invente, avec son équipe, le premier téléphone cellulaire. Depuis, l'usage du téléphone portable n'a cessé de croître, ce qui en fait l'un des biens de consommation les plus répandus de la planète. Cependant, malgré cet essor, il reste des problèmes technologiques non encore résolus. En effet, les batteries utilisées (de technologie lithium-ion principalement) sont capables de délivrer une énergie par unité de masse élevée à température ambiante, mais sont sensibles aux températures extrêmes. Ainsi, le constructeur d'une célèbre marque de téléphone portable indique que la gamme d'utilisation de ses modèles varie de 0 °C à 35 °C.



Figure 1 Messages d'alerte en cas d'utilisation d'un téléphone à haute et basse température

Ce sujet contient quatre parties, une première partie axée sur l'appareil photographique du téléphone, une seconde sur les pixels de l'écran du smartphone. La troisième partie s'intéresse aux batteries lithium-ion et à leurs limites d'utilisation. La quatrième étudie un système de refroidissement utilisé pour reproduire des conditions extrêmes afin d'étudier les performances d'un téléphone portable à très basse température.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions. Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

Ce sujet utilise la syntaxe des annotations pour préciser le type des arguments et du résultat des fonctions Python. Ainsi,

```
def maFonction(n:int, x:float) -> (int, np.ndarray):
```

signifie que la fonction `maFonction` admet deux arguments, le premier est un entier, le second un nombre à virgule flottante et qu'elle renvoie un couple dont le premier élément est un entier et le deuxième un tableau numpy. Il n'est pas demandé aux candidats de recopier les entêtes avec annotations telles qu'elles sont fournies dans ce sujet, ils peuvent utiliser des entêtes classiques.

Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Ce document réponse regroupe une liste de fonctions Python et certaines données utiles.

I Étude du module photographique d'un smartphone

I.A – Etude du capteur de l'appareil photographique

On considère dans un premier temps les paramètres géométriques du capteur principal, afin de vérifier si le phénomène de diffraction dégrade ou non l'image formée sur le capteur. Tous les pixels considérés sont carrés.

Q 1. À partir des données du téléphone portable fournies dans le document réponse, déterminer la longueur et la largeur du capteur de ce téléphone. En déduire la taille approximative d'un pixel du capteur.

Le nombre d'ouverture N de l'appareil photographique est défini par la formule ci-après, où D est le diamètre de l'ouverture et f' la distance focale de l'objectif,

$$N = \frac{f'}{D}.$$

Q 2. Après avoir justifié la longueur d'onde lumineuse choisie, déterminer la taille caractéristique de la tache de diffraction visible sur le capteur si l'objectif est éclairé par un « point unique » situé à l'infini.

Q 3. Proposer une justification au choix de l'entreprise de configurer par défaut la prise d'image en full HD (1920 × 1080 pixels) au lieu de la résolution 4K (3840 × 2160 pixels).



Figure 2 Module photographique d'un smartphone (source : wikimediacommons)

I.B – Étude des aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique

La lentille de forme plano-convexe est constituée de silice fondue associée à du quartz. On peut la modéliser dans un premier temps comme une demi-boule de rayon de courbure R et d'indice de réfraction n , plongée dans l'air dont l'indice de réfraction est pris égal à 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon $r_m < R$, arrive sous incidence normale sur la face plane de cette lentille. On note C l'intersection de la face plane de la demi-boule avec l'axe optique (Ox) et S l'intersection de la face hémisphérique avec ce même axe.

On s'intéresse au rayon lumineux incident qui arrive parallèle à l'axe optique et à une distance r de cet axe.

I.B.1) Condition de traversée de la lentille

Q 4. Compléter sur la figure A du document réponse le trajet de ce rayon lumineux lors de son passage à travers la lentille. On notera i l'angle incident sur le dioptré verre-air et t l'angle réfracté correspondant. Déterminer l'expression de r_0 , valeur limite du rayon du faisceau si l'on souhaite que tous les rayons incidents émergent de la lentille. Calculer numériquement la valeur de r_0 . En réalité, le constructeur a choisi un diamètre de la lentille $\Phi = 5,0$ mm. Justifier ce choix.

I.B.2) Étude des rayons proches de l'axe optique

Q 5. On note A' la position de l'intersection du rayon incident avec l'axe optique après son passage au travers de la lentille. Montrer que la distance algébrique $\overline{CA'}$ vérifie

$$\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t - i)}.$$

Q 6. En déduire, en fonction de R et n , l'expression de la limite $\overline{CF'}$ de $\overline{CA'}$ lorsque la distance r tend vers 0. Calculer numériquement $\overline{CF'}$.

Q 7. Dans quelle condition peut-on considérer que le point F' est stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe ? Comment peut-on nommer le point F' ?

I.B.3) Étude de l'aberration sphérique de la lentille

Le capteur de l'appareil photographique est placé dans le plan focal image de la lentille (figure 3). On s'intéresse à présent au rayon lumineux qui arrive parallèle à l'axe optique à la distance $r = r_0$ de l'axe (question 4).

Q 8. Déterminer numériquement la distance TSA (*transversal spherical aberration*) entre F' et le point où ce rayon extrême rencontre le capteur. Un schéma faisant apparaître la distance TSA est attendu. Comparer la distance TSA à la taille de la tache de diffraction obtenue en question 2 et à la dimension d'un pixel. Conclure sur l'adéquation de cette lentille au téléphone portable considéré.

I.B.4) Détermination du profil d'une lentille asphérique

On souhaite modifier le profil de la surface courbe de la lentille afin que tous les rayons incidents parallèles à l'axe Ox convergent au même point F' , comme indiqué en figure 4. La lentille obtenue est dite asphérique.

Pour déterminer le profil de la lentille, il est commode d'adopter une approche ondulatoire en imaginant une onde plane incidente se propageant parallèlement à l'axe Ox venant frapper la face plane de la lentille. Après celle-ci, l'onde convergera au point F' si, depuis la source, les chemins optiques associés à tous les rayons traversant la lentille et parvenant en F' sont identiques.

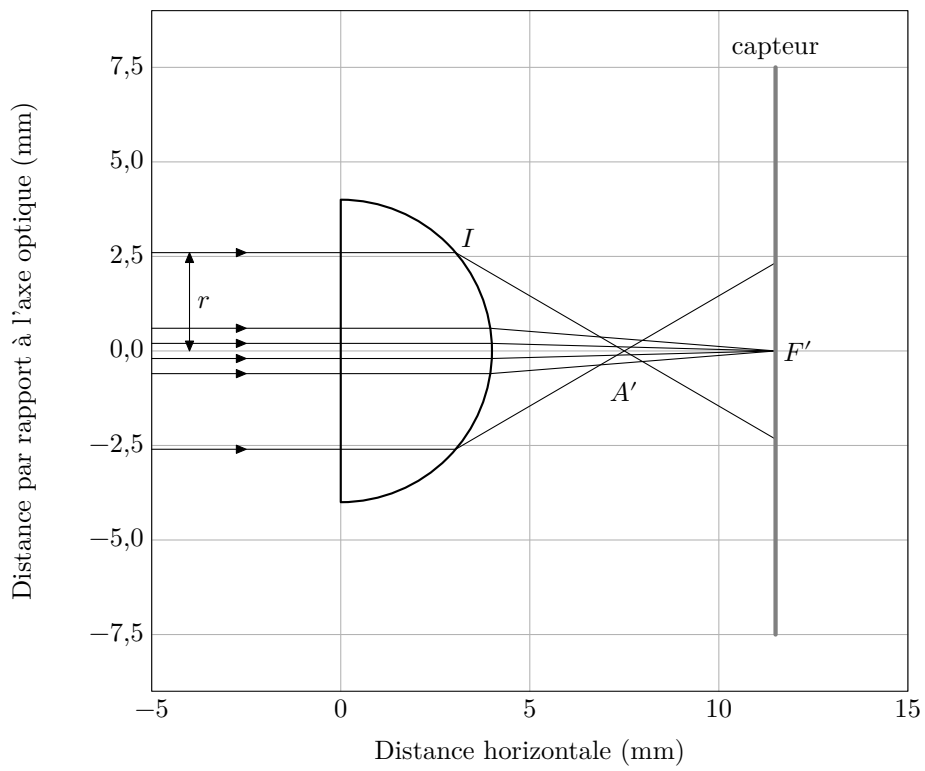


Figure 3 Aberration sphérique

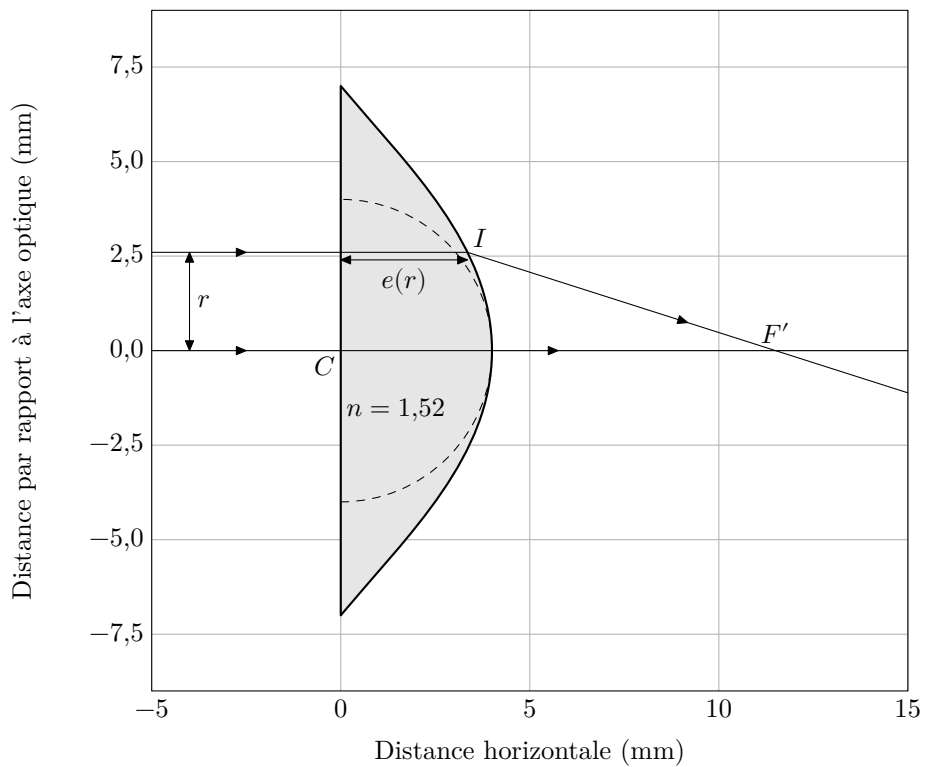


Figure 4 Lentille asphérique

Q 9. Montrer que l'épaisseur $e(r)$ de la lentille à la distance r de l'axe doit vérifier

$$ne(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r) \right)^2} = nR + \frac{R}{n-1}.$$

Q 10. Exprimer le rapport $e(r)/R$ lorsque $r \ll R$. Montrer qu'alors le profil de la lentille asphérique est pratiquement confondu avec celui de la lentille demi-boule.

Quand on résout cette expression pour $e(r)$, grâce à une méthode numérique par exemple, on peut tracer le profil en figure 4.

II Étude des pixels de l'écran d'un smartphone

II.A – Estimation de la taille d'un pixel

Depuis l'apparition des premiers smartphones, la qualité des écrans a fait des progrès considérables. Un célèbre constructeur de téléphones affirme que « la densité de pixels des écrans est si élevée qu'à l'œil nu et à une distance normale, il est impossible de discerner les pixels individuels ».

L'objectif de cette sous-partie est de vérifier si l'écran de l'objet d'étude vérifie ou non ce critère.

Q 11. Montrer qu'il existe une taille de pixel maximale pour satisfaire à la description précédente. Calculer sa valeur numérique.

Q 12. Estimer la dimension a d'un pixel de l'écran présenté dans la figure 5, ainsi que l'incertitude $u(a)$ de cette mesure. La photographie a été grossie 10 fois par rapport à l'image réelle.

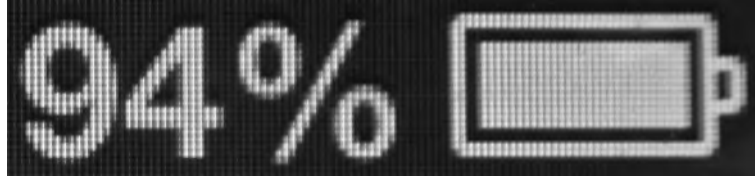


Figure 5 Écran de téléphone (source wikimediacommons)

II.B – Dispositif expérimental de mesure d'un pixel

Dans cette sous-partie, on souhaite concevoir une expérience qui permet de mesurer expérimentalement la distance qui sépare les pixels de l'écran d'un téléphone portable. Pour cela, on dispose du matériel suivant au laboratoire :

- un banc optique et divers supports ;
- une lampe spectrale à sodium ;
- un laser ;
- deux lentilles convergentes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de distances focales respectives $f'_1 = 10,5$ mm, $f'_2 = 45,5$ mm ;
- un écran percé d'un trou ;
- un téléphone portable.

L'idée est d'étudier les interférences observées par réflexion sur les pixels de l'écran. Ceux-ci sont modélisés dans la suite comme de petits miroirs.

II.B.1) Premier montage

On envisage tout d'abord le dispositif expérimental présenté en figure B du document réponse. Une lampe spectrale, considérée monochromatique de longueur d'onde λ , éclaire l'écran percé d'un très petit trou. Celui-ci peut être considéré comme une source ponctuelle (S) qui est initialement placée sur l'axe optique, au point O . Les rayons issus de (S) traversent la lentille $\mathcal{L}_2$ et arrivent en incidence normale sur deux pixels, considérés comme de petits miroirs positionnés parallèlement à l'axe (Oy). Les rayons sont alors réfléchis et diffractés par les deux miroirs P_1 et P_2 , traversent à nouveau la lentille $\mathcal{L}_2$ et viennent interférer au point M : une figure d'interférence est visible sur l'écran. On note (y, z) les coordonnées du point M dans le plan Oyz formé par l'écran et on ne considère que les points voisins de l'axe : $|y| \ll f'_2$ et $|z| \ll f'_2$.

Q 13. À quelle distance de la lentille $\mathcal{L}_2$ doit-on placer l'écran pour que les rayons issus de (S) ressortent parallèles à l'axe après la lentille $\mathcal{L}_2$? Sur la figure B du document réponse, compléter le trajet des deux rayons issus de (S) interférant au point M placé sur l'écran. Justifier que les rayons issus de P_1 et de P_2 convergeant au point M sont parallèles entre eux avant d'atteindre la lentille $\mathcal{L}_2$.

Q 14. En utilisant notamment le théorème de Malus, montrer que $\delta(M)$, la différence de marche des deux rayons au point M , est égale à la distance P_1H (figure B). Montrer que cette différence de marche s'écrit

$$\delta(M) = \frac{ay}{f'_2}.$$

Q 15. En déduire l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Décrire la figure d'interférence observée. Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.

Q 16. Après avoir déterminé son expression, tracer sur votre copie l'intensité lumineuse $I(y)$ sur l'écran en fonction de y , la coordonnée du point M sur l'axe (Oy). On notera I_0 l'intensité que l'on obtiendrait avec un miroir seulement.

Q 17. Le point source (S) est déplacé dans le plan de l'écran, ses coordonnées deviennent (y_S, z_S) . En s'appuyant sur un schéma, déterminer l'expression de la différence de marche au point M en fonction de y , y_S , a et f'_2 . Décrire le changement que le déplacement de la source (S) induit sur la figure d'interférence observée sur l'écran.

Pour obtenir une figure plus lumineuse, on souhaite remplacer le petit trou pratiqué dans l'écran par une fente de largeur c , parallèle à l'axe Oz . Cette fente est éclairée par la lampe spectrale. Dans un modèle simple, on peut considérer que chaque petit élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle, incohérente avec les autres éléments de la fente.

Q 18. À l'aide d'un critère semi-quantitatif, basé par exemple sur l'ordre d'interférence au point M , déterminer l'expression de la largeur maximale $c_{\max}$ au-delà de laquelle la figure d'interférence sera brouillée. Calculer numériquement $c_{\max}$ dans le cas de la lampe à sodium en prenant $f'_2 = 45,5 \text{ cm}$, $a = 400 \mu\text{m}$ et une longueur d'onde $\lambda = 589 \text{ nm}$. Conclure.

II.B.2) Modélisation numérique de l'expérience du premier montage

Afin d'étudier plus précisément l'effet de l'élargissement de la fente source, on adopte un modèle numérique discret dans lequel la fente large est modélisée par un grand nombre de sources ponctuelles incohérentes entre elles, uniformément réparties entre les ordonnées $y = -c/2$ et $y = c/2$.

Pour calculer l'intensité résultante, on suppose les variables correspondant aux constantes f'_2 , a , λ , c et i déclarées en Python. De plus, on dispose de la fonction `intensite(y, yS)`, d'arguments d'entrée y l'ordonnée d'un point M situé sur l'écran et yS l'ordonnée de la source (S). La fonction `intensite(y, yS)` renvoie un flottant correspondant au calcul de l'intensité lumineuse au point M due à une source ponctuelle unique de position yS .

Q 19. Écrire en langage Python une fonction d'entête

```
def Itot(y:float, c:float, K:int) -> float:
```

qui, à partir de la position y du point M , de la distance c et du nombre de sources ponctuelles K , permet de calculer l'intensité résultante au point M .

Q 20. On s'intéresse à présent au contraste de chaque figure d'interférence. Écrire en langage Python une fonction d'entête

```
def contraste(I:np.ndarray) -> float:
```

qui, à partir d'un vecteur (ou d'une liste) I (correspondant aux valeurs d'intensité sur l'écran pour différentes positions du point M), renvoie un flottant correspondant au calcul du contraste de la figure d'interférence.

Grâce à la fonction `Itot`, on étudie l'intensité résultante en fonction de l'ordonnée y du point M sur l'écran. Le résultat est donné en figure 6 pour $K = 500$ sources. On choisit quatre extensions spatiales de la lampe : $5,5 c_{\max}$, $c_{\max}$, $0,5 c_{\max}$ et $0,1 c_{\max}$.

La figure 6a représente $I/(4I_0)$ en fonction de y/i avec I_0 l'intensité due à un seul miroir et i la valeur de l'interfrange telle que définie en question 15.

La figure 6b représente le contraste obtenu en fonction de la largeur relative $c/c_{\max}$.

Q 21. Commenter les figures 6a et 6b. Le calcul semi-quantitatif effectué en question 18 est-il confirmé par les résultats de la figure 6b ?

II.B.3) Montage avec laser

Afin d'éviter les problèmes inhérents à l'utilisation d'une lampe spectrale précédemment décrits, celle-ci est remplacée par un laser comme indiqué en figure 7. De plus, on insère une lentille $\mathcal{L}_1$ entre le laser et l'écran.

Q 22. Soit d_{laser} le diamètre du faisceau laser avant sa traversée de la lentille $\mathcal{L}_1$ et D_{laser} le diamètre du faisceau laser après sa traversée de la lentille $\mathcal{L}_2$. Exprimer le rapport de ces deux grandeurs en fonction des paramètres du système.

On envisage à présent l'utilisation de $N = 4$ miroirs (représentant 4 pixels) disposés selon un carré de côté a (figure 8). Ces miroirs sont notés P_1 à P_4 . Les interférences sont observées en un point M de l'écran, de coordonnées (y, z) .

Q 23. En utilisant les résultats de la question 14, exprimer sans calculs les différences de marches au point M , $\delta_{i/1}(M)$ avec $i = 2, 3, 4$, entre l'onde passant par le miroir P_i et celle passant par le miroir P_1 , en fonction de y , z , a et f'_2 . Déterminer les coordonnées des points de l'écran pour lesquels les ondes issues des 4 miroirs sont en phase. Montrer que ces maxima d'éclairement forment un réseau carré de points de coordonnées

$$\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a}, \quad z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right),$$

où k et m sont deux nombres entiers.

Q 24. On modélise l'écran du téléphone par un réseau carré de N pixels assimilés à de petits miroirs répartis périodiquement avec une période a selon y et selon z . Montrer que l'éclairement obtenu est maximal aux points de coordonnées (y_k, z_m) déterminés à la question précédente et qu'il vaut $I_{\max} = N^2 I_0$, I_0 étant l'éclairement que l'on obtiendrait avec un miroir seul.

Q 25. Exprimer, en fonction de N , le rapport entre l'éclairement maximal et l'éclairement moyen observé sur l'écran. Que peut-on en conclure sur l'allure de la figure d'interférence observée lorsque N est très grand ?

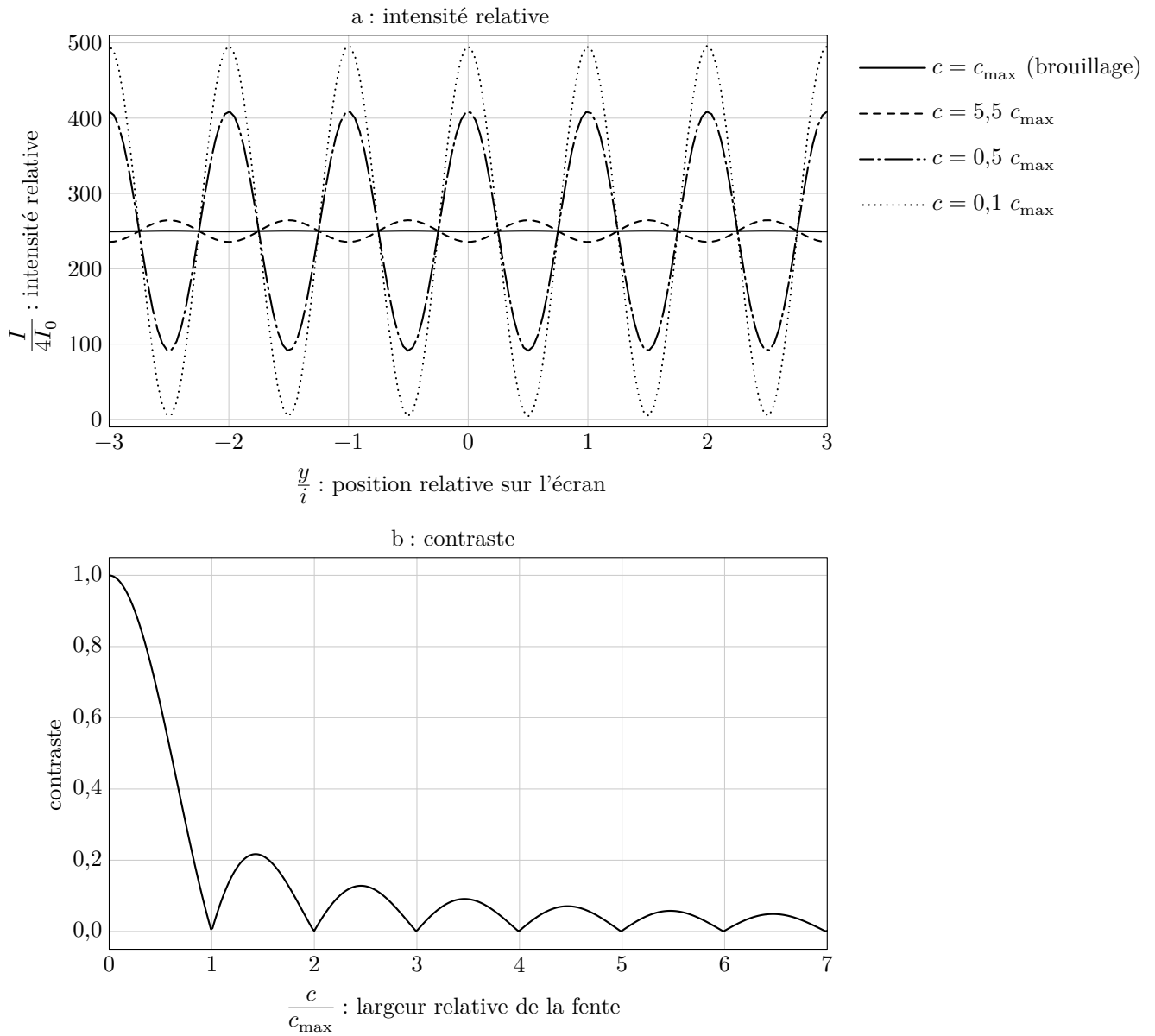


Figure 6

a : intensité résultante en un point de l'écran M d'ordonnée y due à $K = 500$ sources ponctuelles uniformément réparties entre les ordonnées $-c/2$ et $c/2$
b : contraste pour différentes extensions spatiales de la source

II.B.4) Détermination de la taille d'un pixel

Le réseau bidimensionnel de N miroirs considéré dans la section précédente modélise l'écran d'un téléphone comportant N pixels. Le montage est représenté sur la figure 9 et est réalisé comme suit.

- On place sur un banc optique, dans l'ordre de la droite vers la gauche, un laser, une lentille $\mathcal{L}_1$, un écran troué en son centre, une lentille $\mathcal{L}_2$ et le téléphone.
- On s'assure du centrage du système, la tache du laser est visible sur l'écran du smartphone.
- Sur la face gauche de l'écran, une figure géométrique caractéristique d'un phénomène de diffraction est visible, cette figure est exploitée ci-après.
- Les distances focales utilisées sont $f'_1 = 10,50\text{cm}$ et $f'_2 = 45,50\text{cm}$. Leur incertitude-type vaut $u(f') = 0,30\text{cm}$. La figure 10 présente une image obtenue au cours de cette expérience, avec un laser vert ($\lambda_v = 532\text{nm}$ avec son incertitude-type $u(\lambda_v) = 10\text{nm}$). Le trou au centre est celui par lequel passe le laser, il possède un diamètre de $4,0\text{mm}$.

Q 26. Déterminer la distance entre deux pixels avec une estimation de son incertitude-type. Comparer ce résultat à celui de la question 12 par le calcul d'un écart normalisé et conclure.

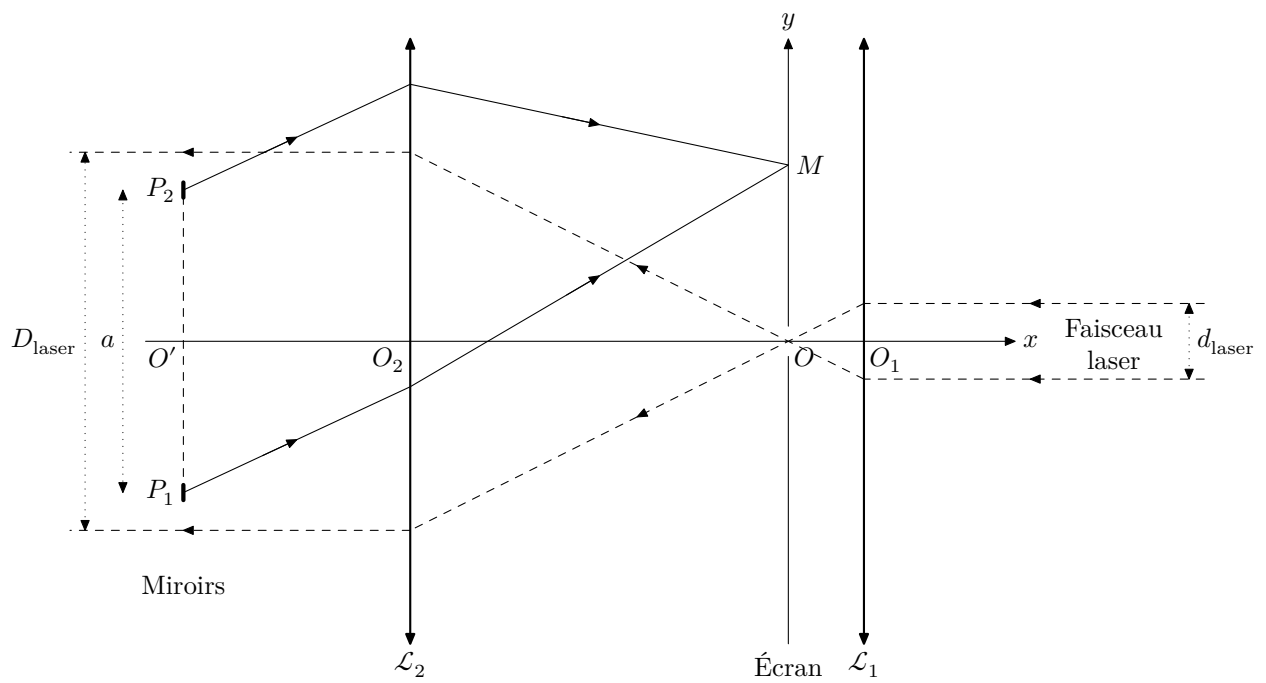


Figure 7 Deuxième montage : laser et miroirs

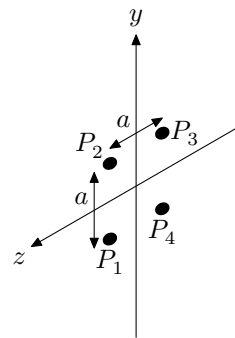


Figure 8 Disposition des 4 miroirs



Figure 9 Dernier montage : détermination de la taille d'un pixel

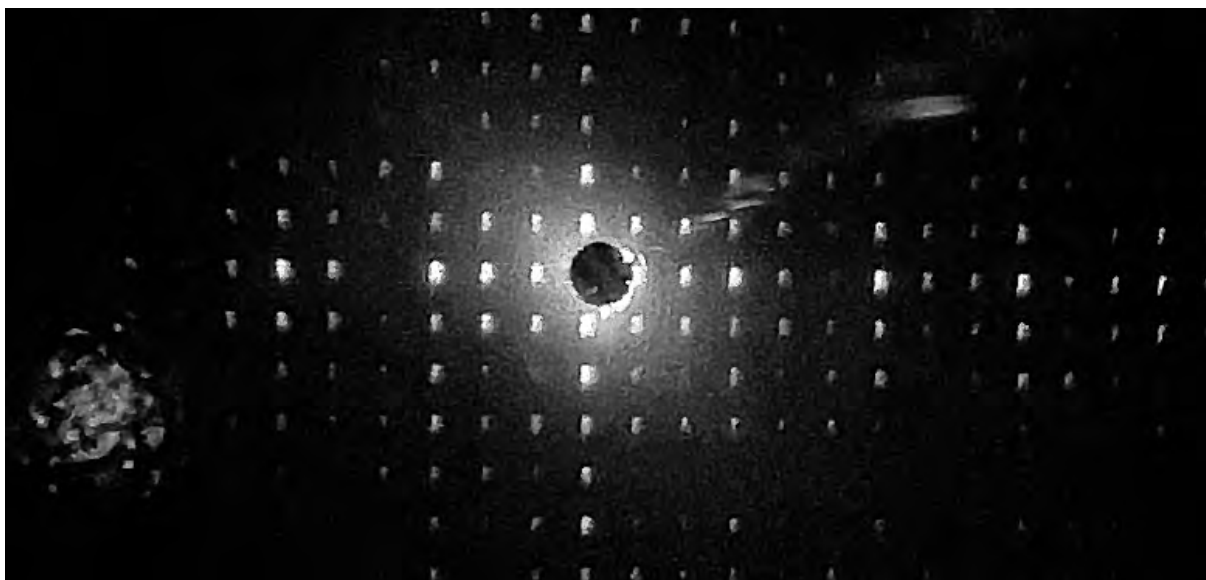


Figure 10 Image visible sur l'écran

III Étude de la batterie lithium-ion

Les batteries Li-ion ont contribué à la révolution des téléphones portables modernes. En effet, celles-ci sont très utilisées dans les téléphones et les ordinateurs portables. Ceci s'explique par leur capacité à délivrer une énergie par unité de masse élevée.

Dans cette partie, l'objectif est de présenter les principes de fonctionnement de base d'une batterie Li-ion, de s'intéresser à la capacité de la pile et aux risques associés à l'utilisation de celle-ci.

La batterie considérée est constituée d'une première électrode de graphite (une structure du carbone constituée de feuillets) contenant du lithium. Les atomes de lithium sont intercalés dans les feuillets de carbone du graphite. Les sites contenant du lithium ont pour formule chimique $\text{LiC}_{6(s)}$. Lors de la décharge de la batterie, des atomes de lithium sont libérés des sites d'intercalation et s'ionisent en ions Li^+ en libérant un électron. Les ions Li^+ sont alors transférés de la première électrode vers la seconde.

La seconde électrode est constituée d'oxyde de cobalt $\text{CoO}_{2(s)}$. Lors de la décharge de la batterie, on y observe la formation de sites d'oxyde de cobalt dopés au lithium, de formule chimique $\text{LiCoO}_{2(s)}$ par transfert d'ions Li^+ captant un électron.

L'électrolyte est constitué de polymères et contient des ions lithium.

Q 27. Écrire les demi-équations électroniques associées à chaque électrode lors de la décharge de la batterie. Identifier la cathode et l'anode de cette pile.

Q 28. Donner l'équation bilan lors du fonctionnement de la batterie en décharge puis en charge. Compléter la figure C du document réponse en indiquant le sens de déplacement des électrons, le sens du courant et le nom des électrodes dans le cas de la décharge.

Q 29. Déterminer la masse minimale de lithium graphite $\text{LiC}_{6(s)}$ contenue dans la batterie du téléphone dont les propriétés sont fournies dans le tableau 1.

Q 30. Retrouver la valeur de l'énergie massique annoncée pour ce même téléphone. Il s'agit de l'énergie que peut fournir la pile par unité de masse de cette même pile.

Q 31. Écrire l'équation de la réaction pouvant modéliser la transformation chimique qui a lieu si le lithium solide entre en contact avec de l'eau. Cette réaction forme notamment des ions hydroxyde HO^- et on observe un dégagement gazeux que l'on identifiera.

Cette transformation s'accompagne d'une forte libération d'énergie. Ceci justifie l'utilisation d'un électrolyte qui ne contient pas d'eau, mais plutôt un polymère organique.

En dessous de 0°C et au-dessus de 35°C , la capacité électrique de l'accumulateur peut fortement être modifiée. De nombreuses études ont été menées à très basse et très haute température afin de mesurer les performances du téléphone.

Q 32. À l'aide des tableaux 1, 2 et 3 et de la figure 11, indiquer les risques ou inconvénients d'utilisation d'un téléphone portable à très haute température et à très basse température.

Tension à vide E_0	3,8 V
Capacité électrique	1440 mA·h
Masse	25 g
Énergie massique	218 W·h·kg ⁻¹
Autonomie	8 h

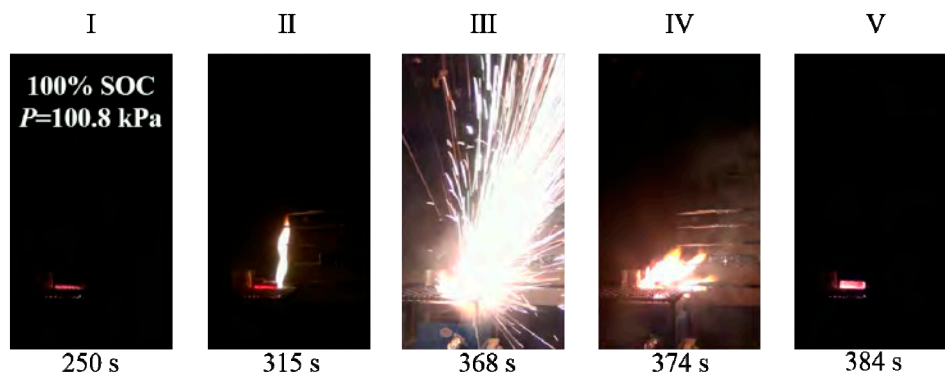
Tableau 1 Propriétés d’une batterie de téléphone portable à température ambiante (d’après Yongquan Sun, Li-ion Batterie Reliability - A Case Study of the Apple iPhone)

Température (°C)	Capacité électrique (mA·h)
−40	168
−20	650
−10	1060
0	1345
25	1440
40	1430

Tableau 2 Effet de la basse température sur la capacité électrique (d’après Shuaishuai Lv, The Influence of Temperature on the Capacity of Li)

Température (°C)	État de l’électrolyte
−30	liquide
−35	mélange liquide-solide
−40	mélange liquide-solide
−42,5	solide

Tableau 3 Effet de la basse température sur l’électrolyte (d’après Dongxu Ouyang, A Review on the Thermal Hazards of the Lithium-Ion)



La combustion de la batterie (et de ses couches de protection) s’accompagne d’un dégagement de diverses espèces toxiques gazeuses : le fluorure d’hydrogène HF, le chlorure d’hydrogène HCl, le monoxyde de carbone CO, le dioxyde de soufre SO₂, le dihydrogène H₂.

Les gaz HF et HCl, à forte dose inhalée, peuvent être mortels pour l’homme. Le monoxyde de carbone réagit avec l’hémoglobine et peut être lui aussi mortel. Le dihydrogène est hautement réactif et peut mener à une combustion très exothermique ou une explosion.

Figure 11 Effets de la haute température sur des batteries complètement chargées (d’après Dongxu Ouyang, A Review on the Thermal Hazards of the Lithium-Ion)

IV Étude d'un congélateur

Afin de reproduire les conditions d'un environnement à très basse température, des congélateurs sont utilisés par les constructeurs de téléphones portables. Ces congélateurs sont l'objet de cette partie.

La température au sein du congélateur utilisé pour mettre à l'épreuve le téléphone portable est de -18 °C et celle de la salle de laboratoire est de 19 °C . Dans toute cette partie, on suppose un fonctionnement réversible.

IV.A – Congélateur à compresseur

La source externe d'énergie est le réseau électrique, le compresseur fonctionne avec un moteur électrique de puissance $P = 250\text{ W}$. Les échanges d'énergie thermiques sont assurés par un fluide caloporteur, typiquement du réfrigérant R-134a (1,1,1,2-tétrafluoroéthane).

Q 33. Définir l'efficacité de Carnot et montrer qu'elle s'exprime par

$$e = \frac{T_f}{T_c - T_f},$$

où T_f est la température de la source froide et T_c la température de la source chaude pour un congélateur en utilisation normale.

Q 34. Calculer numériquement l'efficacité de Carnot.

En réalité le congélateur est moins performant et son efficacité vaut $e = 3,2$.

Q 35. Évaluer le temps nécessaire afin d'amener un téléphone portable de la température de 19 °C à -18 °C . Commenter quant à l'adéquation du dispositif de refroidissement.

Q 36. On observe souvent la formation de givre dans un congélateur. Estimer la masse maximale d'eau, initialement considérée liquide à 19 °C , que peut congeler à -18 °C ce congélateur en une heure. Commenter.

On étudie les pertes thermiques liées à ce congélateur. Par souci de simplicité, les parois du congélateur sont modélisées par une unique couche d'isolant thermique d'épaisseur D , de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ .

Q 37. Indiquer le mécanisme majeur de transfert thermique qui a lieu entre la zone froide du congélateur et le laboratoire.

Q 38. En considérant un modèle unidimensionnel d'axe (Ox), de propriétés uniformes, établir le profil de température au sein de la paroi qui sépare l'intérieur du congélateur du milieu extérieur. On se placera en régime stationnaire.

Q 39. En considérant que les pertes thermiques vers l'extérieur représentent $p = 20\%$ de la puissance du compresseur, déterminer l'épaisseur minimale D d'isolant à placer autour de l'enceinte froide pour que le congélateur puisse satisfaire la consigne de température de -18 °C à l'intérieur du congélateur.

IV.B – Résolution approchée de l'équation de la diffusion thermique dans le congélateur

On s'intéresse à un modèle en deux dimensions du congélateur : voir la géométrie représentée en haut de la figure 13a. On modélise la paroi du congélateur par l'espace compris entre deux carrés : la température sur le carré le plus grand est égale à la température du laboratoire et la température sur le carré le plus petit est égale à la température intérieure du congélateur.

Nous étudions une méthode numérique permettant de déterminer de façon approchée la température qui règne, en régime permanent, entre deux carrés. Celle-ci vérifie l'équation de Laplace,

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

où $T(x, y)$ est la température au sein de la paroi du congélateur au point de coordonnées (x, y) .

On utilise pour cela une méthode des différences finies associée à une méthode de relaxation. Cette dernière permet de calculer le champ de température par une méthode itérative qui s'appuie sur les valeurs de température aux frontières : à savoir à l'intérieur et à l'extérieur de la paroi d'isolant.

IV.B.1) Modèle à une dimension

On envisage tout d'abord la résolution approchée d'un problème simplifié à une dimension $\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$ sur l'intervalle $[0, D]$ où D est l'épaisseur du mur. On divise cet intervalle en N points, numérotés de 0 à $N - 1$, régulièrement espacés de Δx (figure 12). Cette division est appelée « discrétisation ». La distance Δx est appelée le « pas de discrétisation ». À l'intérieur du mur (frontières intérieure et extérieure exclues) se trouvent donc $N - 2$ points. On cherche à obtenir la température en ces points particuliers de manière itérative.

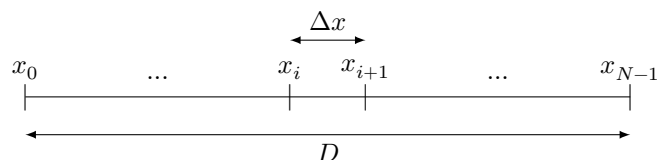


Figure 12 Discrétisation dans la direction x

Q 40. Exprimer Δx en fonction de N et de l'épaisseur du mur D . En déduire l'abscisse x_i du i -ème point en fonction de i et Δx , sachant que $x_0 = 0$ et $x_{N-1} = D$.

Q 41. À l'aide d'un développement limité de la fonction $x \mapsto T(x)$, donner une expression de $T(x + \Delta x)$ à l'ordre 3 ($o(\Delta x^3)$) en fonction de T et de ses dérivées partielles par rapport à x évaluées en (x) . De même, donner une expression de $T(x - \Delta x)$ à l'ordre 3.

Q 42. En déduire une expression approchée à l'ordre 1 ($o(\Delta x)$) de $\frac{d^2 T(x)}{dx^2}$ en fonction de $T(x + \Delta x)$, $T(x - \Delta x)$, $T(x)$ et Δx .

On note T_i la température $T(x_i)$, évaluée au point d'abscisse x_i . De même, on note $T_{i+1} = T(x_i + \Delta x)$ et $T_{i-1} = T(x_i - \Delta x)$.

Q 43. Montrer que les valeurs discrètes T_i de la température vérifient

$$T_i = \frac{1}{2} (T_{i-1} + T_{i+1}).$$

Cette équation nous permet de calculer la température en un point à partir du point précédent et du point suivant. Il faudra faire attention lors de la programmation au fait que cette équation n'est pas valable en 0 et $N - 1$ où son calcul fait appel aux indices $i = -1$ et $i = N$ qui ne sont pas définis.

IV.B.2) Modèle à deux dimensions x et y

Pour le problème bidimensionnel, on effectue une discrétisation selon les axes (Ox) et (Oy) avec le même pas de discrétisation dans les deux directions. Dans ce cas, on admettra que $T_{i,j}$, la température en un point d'abscisse x_i et d'ordonnée y_j vérifie

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}).$$

L'algorithme de relaxation permet d'obtenir des valeurs de la température vérifiant cette relation et respectant les conditions aux limites imposées. Les températures $T_{i,j}^{(k+1)}$ déterminées à l'étape $k + 1$ sont calculées à partir du champ de température déterminé à l'étape k par

$$T_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (T_{i-1,j}^{(k)} + T_{i+1,j}^{(k)} + T_{i,j+1}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k)}).$$

À partir d'un tableau initial $T_{i,j}^{(0)}$, choisi arbitrairement, mais vérifiant les conditions aux limites, cette procédure converge vers un tableau vérifiant la relation recherchée. La convergence est évaluée en calculant à chaque étape le résidu $r = \max (T_{i,j}^{(k)} - T_{i,j}^{(k-1)})$, pour $k \geq 1$. Tant que la valeur de r excède une valeur choisie $r_{\max}$, le calcul est répété.

La figure D du document réponse propose un extrait du programme utilisé. Avec quelques instructions de tracé, ce programme produit le graphique de la figure 13b.

Q 44. Quelle est la valeur choisie pour $r_{\max}$? La figure 13b est obtenue avec le programme tel qu'il est écrit. Ce programme permet-il vraiment de s'assurer de la qualité de la convergence de l'algorithme ?

Q 45. Proposer une modification du programme permettant de vérifier que le champ de température obtenu vérifie bien le critère de convergence (les figures 13a et 13c ont été obtenues après correction). On ne demande pas d'ajouter les lignes de code relatives au tracé des graphiques.

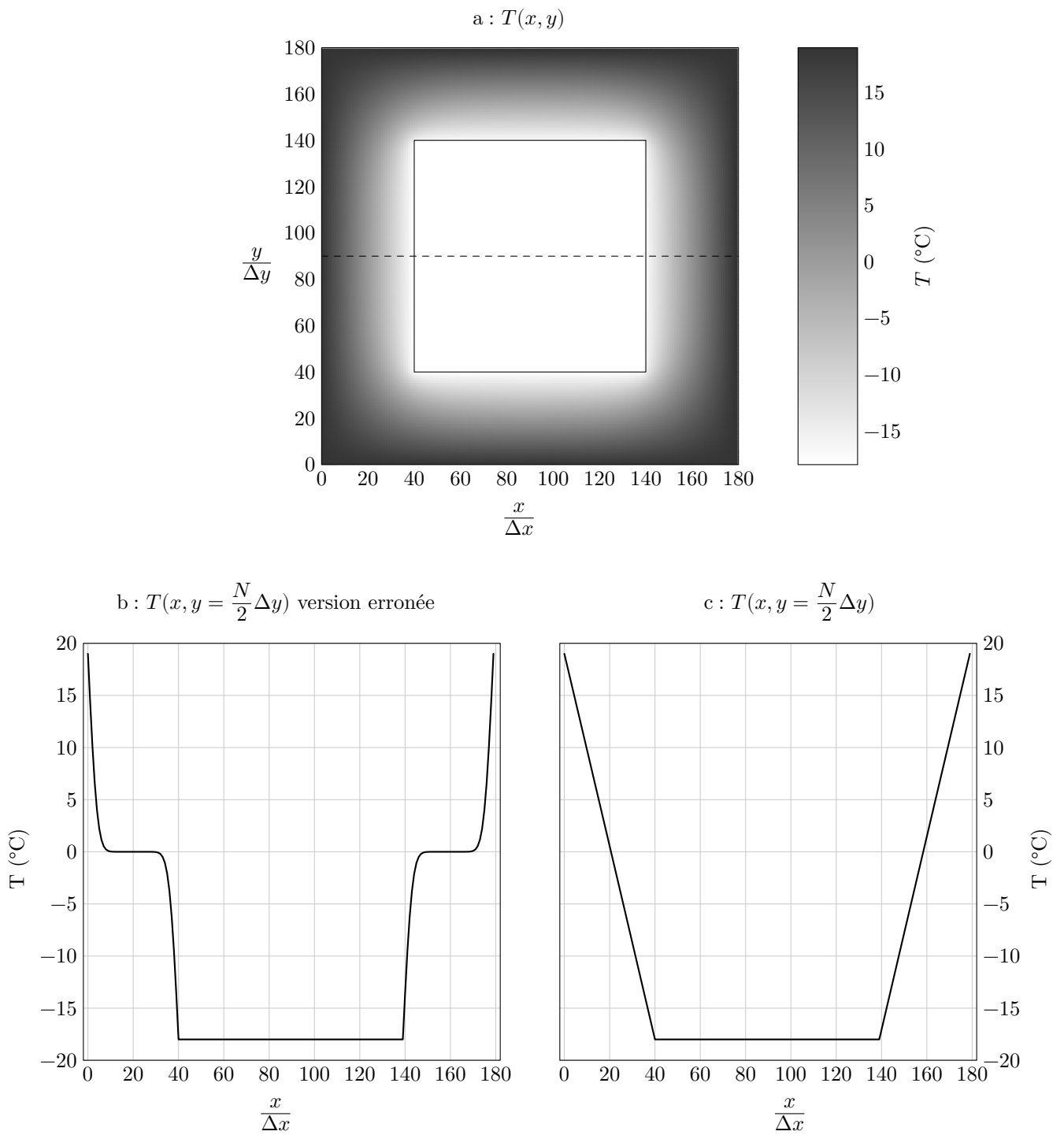


Figure 13

a : contours de $T(x, y)$ corrects dans les parois du congélateur
b : tracé erroné de $T(x, y)$ le long de la ligne horizontale en pointillés
c : tracé correct de $T(x, y)$ le long de la ligne horizontale en pointillés

• • • FIN • • •



Numéro de place

--	--	--	--	--	--

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--

Signature

Signature

Nom

[illegible]

Prénom

[illegible]

CONCOURS CENTRALE • SUPÉLEC

Épreuve : Physique-chimie 2 MPI

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feville

--	--

--	--

Question 4

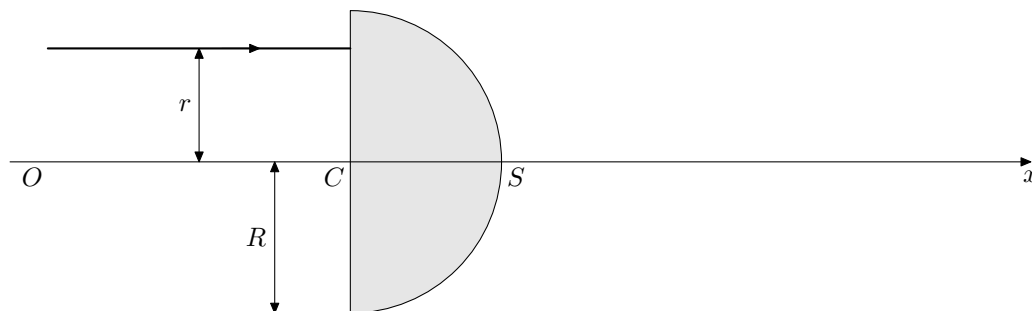


Figure A Modèle de la lentille demi-boule

Question 13

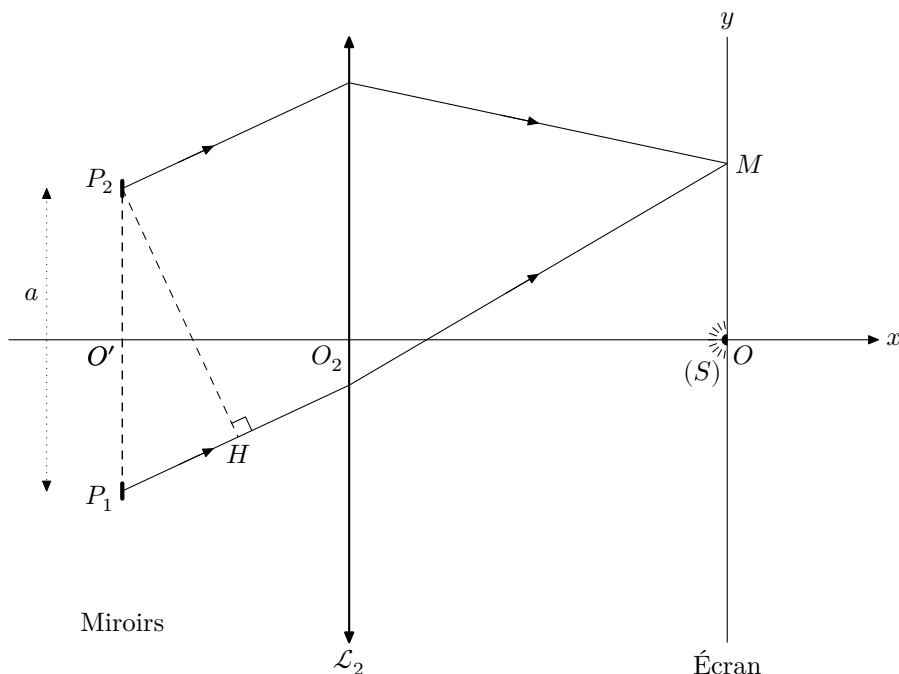


Figure B Premier montage : lampe spectrale et miroirs

Ne rien écrire

dans la partie barrée

P061-DR/2023-03-12 11:29:44

Question 28

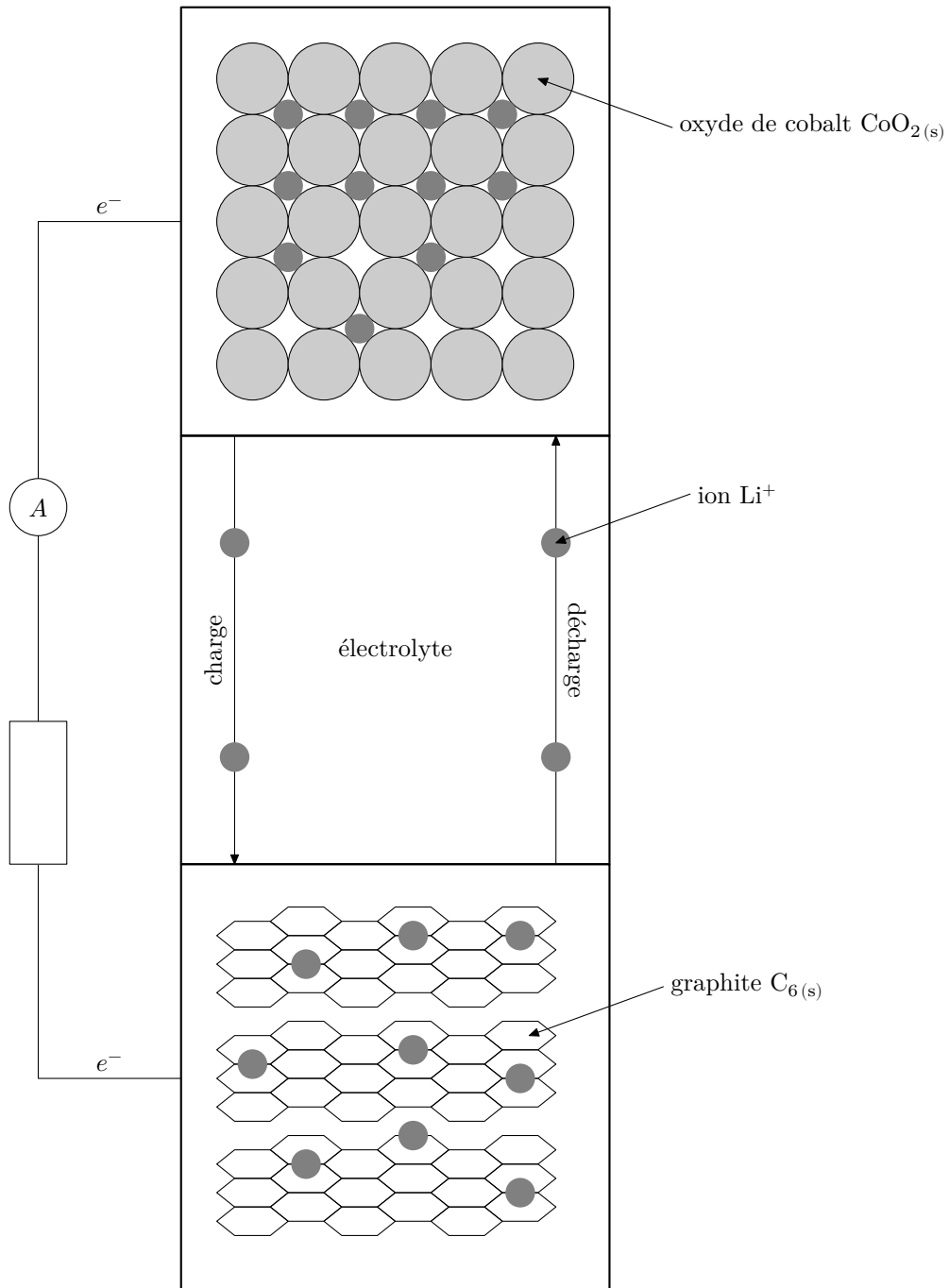


Figure C

Questions 44 et 45

```
1  import numpy as np

2  N_int = 100 # nombre de points par axe à l'intérieur du congélateur
3  N_paroι = 40 # nombre de points dans l'épaisseur de chaque paroi
4  T_out = 19.0 # température extérieure en °C
5  T_in = -18.0 # température intérieure en °C

6  res = 1 # erreur résiduelle initialisée à une valeur élevée
7  compteur = 0 # compteur d'itérations
8  N = N_int + 2 * N_paroι # nombre total de points sur chaque axe (x et y)

9  def cond_lim(T:np.ndarray) -> None:
10     # Fixer les conditions aux limites (modifie T)
11     T[N_paroι:N_int+N_paroι, N_paroι:N_int+N_paroι] = T_in # intérieur
12     T[:, 0] = T_out # extérieur de la paroi gauche
13     T[:, N-1] = T_out # extérieur de la paroi droite
14     T[0, :] = T_out # extérieur de la paroi supérieure
15     T[N-1, :] = T_out # extérieur de la paroi inférieure

16  def iterate(T:np.ndarray, old:np.ndarray) -> None:
17     # Calculer la température moyenne en chacun des points de la grille
18     T_s = old[0:N-2, 1:N-1] # les valeurs supérieures de l'ancienne grille [i-1, j]
19     T_i = old[2:N, 1:N-1] # les valeurs inférieures de l'ancienne grille [i+1, j]
20     T_g = old[1:N-1, 0:N-2] # les valeurs de gauche de l'ancienne grille [i, j-1]
21     T_d = old[1:N-1, 2:N] # les valeurs de droite de l'ancienne grille [i, j+1]
22     T[1:N-1, 1:N-1] = (T_s + T_i + T_g + T_d) / 4

23  T = np.zeros((N, N)) # grille de calcul
24  cond_lim(T) # la valeur de départ (arbitraire) doit vérifier les conditions aux limites
25  while (res > 1e-3 and compteur < 20):
26     old = np.copy(T) # mémoriser le résultat du tour précédent
27     iterate(T, old) # calculer la nouvelle grille de température
28     cond_lim(T) # s'assurer de respecter les conditions aux limites
29     res = np.max(np.abs(T - old)) # variation apportée par cette itération
30     compteur += 1 # comptabiliser une nouvelle itération
```

Figure D Calcul du profil de température dans la paroi du congélateur

Instructions Python : opérations sur les tableaux numpy

- `np.zeros(n)`, `np.zeros((n, m))` crée respectivement un vecteur à `n` éléments ou une matrice à `n` lignes et `m` colonnes dont les coefficients sont tous nuls.
- `np.ones(n)`, `np.ones((n, m))` fonctionne comme `np.zeros` en initialisant chaque coefficient à la valeur un.
- `np.min(a)`, `np.max(a)` renvoie la valeur du plus petit (respectivement plus grand) élément du tableau `a`.
- `np.abs(a)` crée un tableau similaire au tableau `a` dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de `a`.

Données

Appareil photographique d'un téléphone portable

Résolution du capteur	4000×3000 pixels
Nombre d'ouverture	$N = 2,2$
Diagonale du capteur	1/3 de pouce
Indice de réfraction de l'air	$n_{\text{air}} = 1,0$
Indice de réfraction de la lentille	$n = 1,52$
Rayon de courbure de la lentille	$R = 4,0$ mm
Diamètre réel la lentille	$\Phi = 5,0$ mm
Distance focale effective de l'objectif	$f' = 9,0$ mm

Propriétés de l'oeil humain

Distance normale d'observation d'un téléphone portable	30 cm
Pouvoir de résolution d'un l'œil « normal »	$\alpha = 3,0 \times 10^{-4}$ rad

Conversions d'unités

1 pouce = 25,4 mm
1 A·h = 3600 C
1 W·h = 3600 J

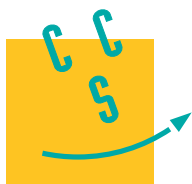
Données physico-chimiques

Numéro atomique du lithium	$Z = 3$
Masse molaire du lithium	$M_{\text{Li}} = 6,9$ g·mol ⁻¹
Masse molaire du carbone	$M_{\text{C}} = 12,0$ g·mol ⁻¹
Constante de Faraday	$F = 96\,485$ C·mol ⁻¹
Masse du téléphone portable considéré	$m = 150$ g
Potentiel standard du couple $\text{Li}_{(\text{aq})}^+/\text{Li}_{(\text{s})}$	$E_1^\circ = -3,04$ V
Potentiel standard du couple de l'eau $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_2_{(\text{g})}$	$E_2^\circ = -0,83$ V
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_m(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) = 4,18$ kJ·K ⁻¹ ·kg ⁻¹
Capacité thermique massique de l'eau solide	$c_m(\text{H}_2\text{O}_{(\text{s})}) = 2,06$ kJ·K ⁻¹ ·kg ⁻¹
Enthalpie massique de fusion de la glace	$l = 333$ kJ·kg ⁻¹
Capacité thermique massique d'un téléphone portable	$c_m(\text{tel}) = 2,4$ kJ·K ⁻¹ ·kg ⁻¹
Coefficient de conductivité thermique d'un matériau isolant	$\lambda_{\text{polyurethane}} = 0,03$ W·K ⁻¹ ·m ⁻¹

Estimation d'une incertitude-type composée

Si la grandeur y calculée est un produit ou un quotient du type $y = x_1 x_2$ ou $y = x_1/x_2$, alors l'incertitude-type sur y , notée $u(y)$ est reliée à l'incertitude-type sur chacun des facteurs par

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$$



Téléphonie Mobile

La téléphonie mobile a envahi notre quotidien. En janvier 2020, on comptait 5,19 milliards d'utilisateurs de mobile dans le monde, ce qui représente 67 % de la population totale. La croissance des utilisateurs de téléphone mobile a été plus rapide que celle de la population mondiale sur la même période.

Si le « mobile » a une utilité en tant que téléphone, ce n'est clairement pas sa seule fonction ! Ainsi, 92 % des utilisateurs de téléphones mobiles s'en servent pour accéder à internet. D'après le rapport digital 2020 de *We are social*, un utilisateur passe en moyenne 3 heures et 22 minutes par jour sur internet à partir de son téléphone portable. Cela représente une augmentation de 10 % par rapport à l'année 2019.

Ce sujet porte sur quelques aspects de la téléphonie mobile. La première partie s'intéresse à la protection du téléphone face au piratage par « contact ». La deuxième partie est consacrée à l'étude de la fonctionnalité dictée des smartphones dite « speech-to-text ». Une dernière partie explore le principe de la réception d'un signal par un téléphone mobile et notamment le problème de réception en milieu urbain. Les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Certaines données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé.

I Protection des données bancaires par un conducteur

La protection du téléphone portable contre le piratage est devenue essentielle. Cette partie s'intéresse à la mise en place d'une protection simple en insérant une feuille d'aluminium dans la pochette du téléphone. En effet, les puces à distance (NFC-RFID) possèdent une antenne et un convertisseur de signal. L'antenne perçoit le signal de fréquence d'environ 14 MHz, émis à distance par le terminal et le convertisseur transforme ce signal en signal « horloge » qui sert à synchroniser les échanges de la puce et du terminal. À quelques mètres, on peut donc solliciter une puce NFC-RFID et recueillir ses données relativement aisément. Pour se prémunir d'un piratage, il suffit de protéger son téléphone à l'aide d'un feuillet constitué par exemple d'aluminium.

On considère l'aluminium comme un conducteur ohmique, homogène, isotrope et non magnétique. En son sein, les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}(t)$ soumis à l'action d'un champ électrique variable $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. Les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, sont soumis en outre selon le modèle de Drude, à une force $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$ où τ est une constante physique traduisant les interactions avec l'ensemble du réseau cristallin, sa valeur est d'environ $1,0 \times 10^{-14}$ s. Le poids de ces charges est négligé. Le conducteur est immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

I.A – Loi d'ohm locale

- Q 1.** Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ des électrons.
- Q 2.** Déterminer, en régime forcé, une expression de la vitesse sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(i\omega t)$ où $\vec{v}_0$ est l'amplitude vectorielle complexe de la vitesse que l'on exprimera en fonction des données du problème.
- Q 3.** On note n^* la densité volumique, supposée constante, d'électrons libres. Déterminer l'expression, en notation complexe, du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$.
- Q 4.** Montrer alors que l'on peut établir une loi d'ohm locale complexe en considérant que la conductivité électrique du milieu $\underline{\gamma}$ peut s'écrire, en notation complexe, sous la forme $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i g(\omega)}$ où γ_0 correspond à la conductivité électrique « statique » et $g(\omega)$ à une fonction de la pulsation. On exprimera ces deux grandeurs en fonction des données de l'énoncé.
- Q 5.** Déterminer la valeur de la fréquence limite f_{lim} en dessous de laquelle on peut considérer que la loi d'ohm en notation réelle peut s'écrire sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.
- Q 6.** Peut-on écrire la loi d'Ohm sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ pour les communications NFC-RFID ?
- Q 7.** Pour les communications NFC-RFID, estimer numériquement le rapport entre la norme du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ et celle du vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ présent dans l'équation de Maxwell-Ampère que l'on rappellera.
- Q 8.** En déduire une simplification de la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment appelle-t-on cette approximation ?

I.B – Propagation d'une onde électromagnétique

On considère désormais une onde électromagnétique plane progressive et harmonique (OPPH) $\vec{E}_c(z, t)$ de pulsation ω se propageant dans le conducteur précédemment considéré qui occupe le demi-espace $z \geq 0$. En notation complexe, cette onde s'écrit

$$\vec{E}_c(z, t) = E_{0,c} \exp(i(\omega t - k_t z)) \vec{e}_x$$

L'amplitude $E_{0,c}$ est supposée constante et le vecteur d'onde $\vec{k}_t = k_t \vec{e}_z$ est complexe de telle sorte que $k_t = \alpha + i\beta$ avec α et β réels.

Q 9. On suppose que la loi d'Ohm s'écrit sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, montrer que dans le conducteur la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ peut être considérée comme nulle au bout d'un temps τ' que l'on exprimera en fonction des données du problème. On pourra notamment utiliser l'équation de conservation de la charge, que l'on ne cherchera pas à démontrer, et établir l'équation vérifiée par $\rho(M, t)$.

Q 10. Justifier que l'on peut supposer que le milieu est électriquement neutre. Écrire dans ces conditions l'équation de Maxwell-Gauss dans un conducteur ohmique.

Q 11. En supposant que les valeurs des fréquences utilisées permettent d'utiliser les versions simplifiées des équations de Maxwell identifiées dans les questions 8 et 10, établir l'équation suivante pour le champ électrique $\vec{E}_c$ au sein du conducteur

$$\Delta \vec{E}_c(z, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}_c(z, t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Exprimer D en fonction des grandeurs du problème et préciser son unité.

Q 12. Montrer alors que la relation de dispersion, pour le milieu considéré, s'écrit

$$k_t^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0.$$

Q 13. Déterminer l'expression des grandeurs α et β en choisissant $\alpha > 0$, c'est-à-dire en considérant une propagation vers les z croissants.

Q 14. Montrer alors que le champ électrique, en notation réelle, dans le conducteur peut se mettre sous la forme

$$\vec{E}_c(z, t) = E_{0,c} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x.$$

Exprimer δ en fonction des données de l'énoncé.

Q 15. Proposer une représentation soignée de la composante suivant x , $E_{c,x}$, de $\vec{E}_c(z, t)$ à t fixé, en fonction de z pour le demi-espace $z \geq 0$. On fera apparaître la grandeur δ sur le schéma.

Q 16. Comment appelle-t-on δ ? Quelle est sa signification physique ? Donner la valeur de δ pour les ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID.

I.C – Réflexion sur un conducteur ohmique

L'onde $\vec{E}_c(z, t)$ présente dans le conducteur précédent est due à la présence d'une OPPH incidente se propageant dans le vide, supposée occuper le demi-espace $z < 0$, vers les z croissants de même pulsation ω de la forme, en notation complexe, $\vec{E}_i(z, t) = \underline{E}_{0,i} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$, avec $k = \frac{\omega}{c} > 0$. L'onde incidente atteint le conducteur en $z = 0$.

Q 17. Proposer une expression du champ électrique réfléchi d'amplitude complexe $\underline{E}_{0,r}$.

Q 18. En exploitant les relations de continuité du champ électrique à la surface d'un dioptré, déterminer une relation reliant les coefficients complexes de transmission $\underline{t} = \frac{E_{0,c}}{E_{0,i}}$ et de réflexion $\underline{r} = \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}}$ en amplitude de l'onde électromagnétique.

Q 19. Déterminer l'expression des champs magnétiques incident $\vec{B}_i(z, t)$, réfléchi $\vec{B}_r(z, t)$ et transmis $\vec{B}_c(z, t)$.

Q 20. En exploitant les relations de continuité du champ magnétique à la surface d'un dioptré et en considérant les courants surfaciques nuls, déterminer une nouvelle relation entre $\underline{t}$ et $\underline{r}$.

Q 21. En combinant les deux expressions précédentes de $\underline{t}$ et $\underline{r}$, montrer que

$$\underline{r} = \frac{k\delta - 1 + i}{k\delta + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - i}.$$

Q 22. Que deviennent les expressions de $\underline{t}$ et $\underline{r}$ dans le cas où l'aluminium est considéré comme un conducteur parfait ? Que dire de l'efficacité de la protection de données avec un conducteur parfait ?

Q 23. En réalité, l'aluminium n'est pas un conducteur parfait. Déterminer la valeur du coefficient de transmission en énergie $T = 1 - |r|^2$ pour des ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID. Conclure sachant qu'une feuille d'aluminium standard de cuisine a une épaisseur $a = 0,020$ mm.

II Dictée d'un message : principe de l'échantillonnage

La communication via les téléphones portables a également fait évoluer les pratiques. Si autrefois, on « passait un coup de fil » désormais les messages SMS ont révolutionné la communication : 200 000 SMS sont envoyés chaque seconde dans le monde, soit le chiffre de 6100 milliards expédiés sur l'année ! Mais ce n'est pas pour autant que l'utilisateur pianote sur son clavier, le texte ne se tape plus, on le dicte à son téléphone qui le retranscrit en message textuel. Dans cette partie, on s'intéresse à ce système de reconnaissance vocale (*speech-to-text*) en mettant en évidence quelques critères pour assurer une traduction correcte de la dictée.

II.A – Échantillonnage par échantillonneur bloqueur

On considère dans un premier temps un signal $s(t)$ composé d'une composante sinusoïdale, d'amplitude crête à crête 3 V et de fréquence $f = 1/T = 100$ Hz, et d'une composante continue dont la valeur de tension est 1,5 V. On souhaite échantillonner ce signal avec une période T_e .

Q 24. Dessiner soigneusement l'allure du signal $s(t)$. Expliquer le principe de l'échantillonnage de ce signal analogique. On pourra faire apparaître la période T_e sur le dessin.

Pour réaliser cette opération, on utilise un interrupteur commandé CD4016 appelé *échantillonneur bloqueur à tension positive*. La figure 1 reproduit un extrait des caractéristiques de ce composant.

General Description

The CD4016BM/CD4016BC is a quad bilateral switch intended for the transmission or multiplexing of analog or digital signals. It is pin-for-pin compatible with CD4066BM/CD4066BC.

Features

- Wide supply voltage range 3V to 15V
- Wide range of digital and analog switching $\pm 7.5 V_{PEAK}$
- "ON" resistance for 15V operation 400 Ω (typ.)
- Matched "ON" resistance over 15V signal input $\Delta R_{ON} = 10 \Omega$ (typ.)
- High degree of linearity 0.4% distortion (typ.)
@ $f_{IS} = 1$ kHz, $V_{IS} = 5 V_{p-p}$,
 $V_{DD} - V_{SS} = 10V$, $R_L = 10$ k Ω
- Extremely low "OFF" switch leakage 0.1 nA (typ.)
@ $V_{DD} - V_{SS} = 10V$
 $T_A = 25^\circ C$

- Extremely high control input impedance 10¹² Ω (typ.)
- Low crosstalk between switches -50 dB (typ.)
@ $f_{IS} = 0.9$ MHz, $R_L = 1$ k Ω
- Frequency response, switch "ON" 40 MHz (typ.)

Applications

- Analog signal switching/multiplexing
 - Signal gating
 - Squelch control
 - Chopper
 - Modulator/Demodulator
 - Commutating switch
- Digital signal switching/multiplexing
- CMOS logic implementation
- Analog-to-digital/digital-to-analog conversion
- Digital control of frequency, impedance, phase, and analog-signal gain

Schematic and Connection Diagrams

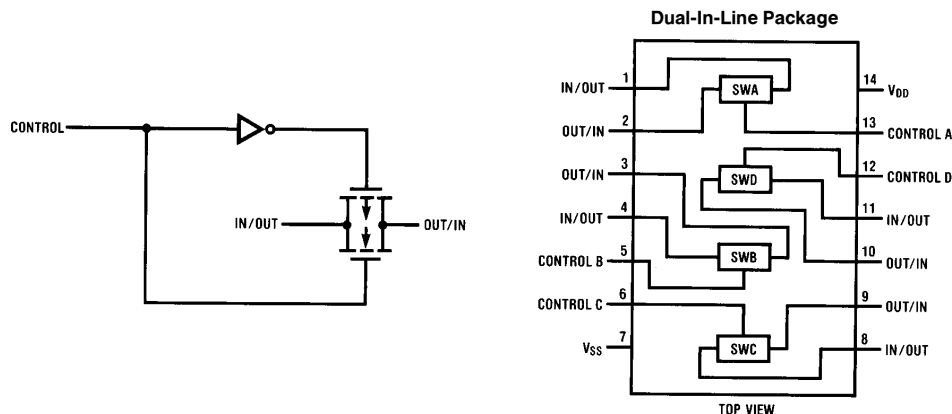


Figure 1 Extrait des caractéristiques du CD4016

Le montage proposé pour échantillonner le signal $s(t)$ utilise les voies 1 et 2 et la borne de contrôle 13 reçoit le signal d'horloge. À la sortie du CD4016, on récupère le signal $V_{ech}(t)$ aux bornes d'un condensateur (figure 2).

Q 25. Expliquer l'intérêt de récupérer le signal échantillonné $V_{ech}(t)$ aux bornes du condensateur de capacité C_e .

Le signal d'horloge $h(t)$ appliqué sur la borne 13 est généré par un signal logique de fréquence $f_e = 1/T_e = 1,0$ kHz d'amplitude crête à crête de 10 V et de composante continue 5 V (ainsi le signal horloge évolue entre 0 V et 10 V). Il est utilisé en mode pulse dont on peut régler le rapport cyclique α , qui est le rapport entre la durée pendant laquelle le signal délivre une tension de 10 V pendant une période et la période du signal.

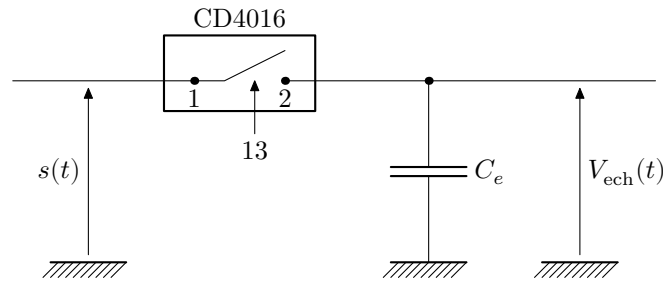


Figure 2 Montage échantillonneur bloqueur à tension positive

Q 26. La figure 3 présente l'oscillogramme du signal d'horloge, dont le rapport cyclique vaut $\alpha = 2\%$. Déterminer la valeur de la durée du pic.

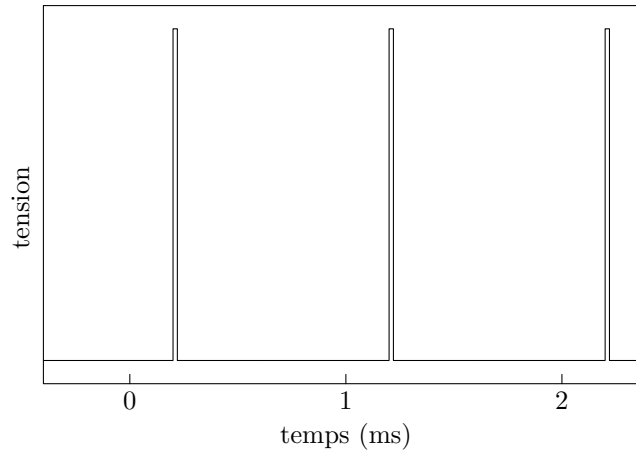


Figure 3 Signal d'horloge

Q 27. Les allures du signal échantillonné $V_{ech}(t)$ et du signal $s(t)$ sont représentées sur la figure 4. Commenter l'allure de l'oscillogramme ainsi obtenu.

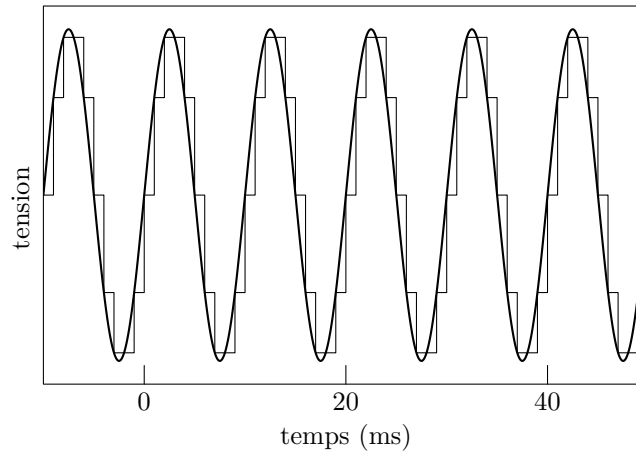


Figure 4 Superposition du signal $s(t)$ et du signal échantillonné $V_{ech}(t)$

On réalise l'analyse spectrale du signal échantillonné V_{ech} sur l'oscilloscope. On obtient alors les spectres (figure 5) dont on relève l'amplitude des différents pics dans le tableau 1.

pic	1	2	3	4	5	6	7
fréquence (Hz)	100	900	1100	1900	2100	2900	3100

Tableau 1 Relevé des harmoniques du spectre de $V_{ech}(t)$

Q 28. Expliquer l'existence des pics de fréquence supérieure à 100 Hz. Commenter les valeurs des fréquences obtenues dans le spectre de $V_{ech}(t)$.

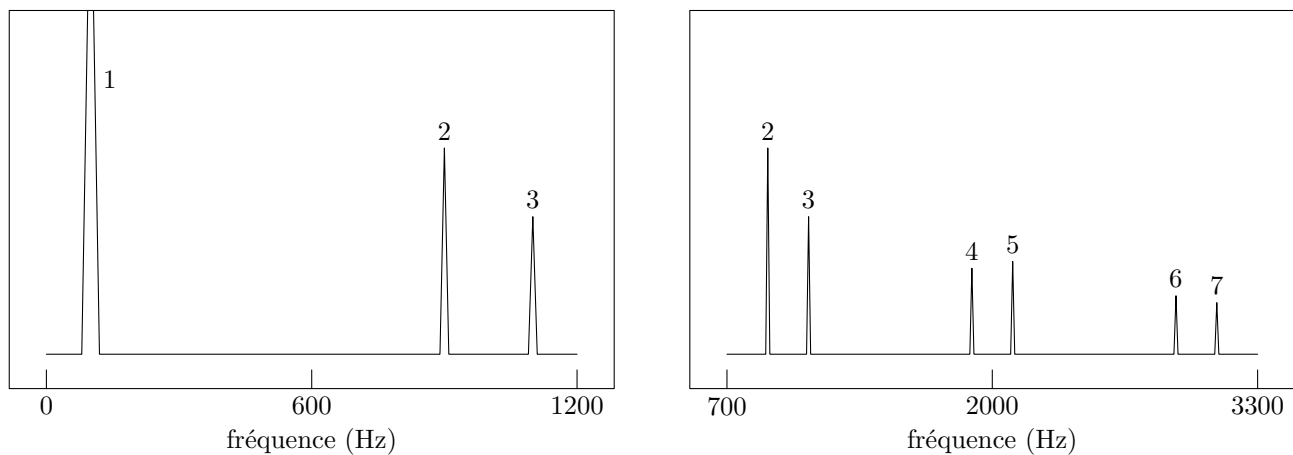


Figure 5 Analyse spectrale du signal échantillonné $V_{\text{éch}}(t)$

On reprend le même montage que précédemment et le même signal d'horloge $h(t)$, signal logique de fréquence $f_e = 1/T_e = 1,0$ kHz. Désormais le signal $s(t)$ est un signal de fréquence $f = 1/T = 110$ Hz de la forme

$$s(t) = \frac{S}{2} + \frac{2S}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)2\pi ft)}{2k+1}.$$

- Q 29.** Représenter l'allure temporelle et spectrale du signal $s(t)$. On se limitera à un nombre fini d'harmoniques (rang $k = 3$).
- Q 30.** Représenter le spectre du signal échantillonné $V_{\text{éch}}(t)$ de ce nouveau signal $s(t)$ par le même signal d'horloge $h(t)$.
- Q 31.** Quel phénomène voit-on apparaître ? Proposer un critère quantitatif pour y remédier afin d'assurer une retranscription correcte du signal $s(t)$. Comment s'appelle ce critère ?

II.B – Filtrage numérique du bruit ambiant

Une source récurrente d'erreurs de retranscription de la dictée est le bruit ambiant. Dans cette partie on se propose de mettre en place un algorithme permettant une filtration efficace des bruits parasites et notamment des bruits blancs de « hautes » fréquences.

- Q 32.** Rappeler comment on peut réaliser un filtre passe-bas du premier ordre avec un circuit RC.
- Q 33.** Donner la forme canonique de la fonction de transfert de ce circuit en faisant apparaître la pulsation de coupure ω_c .
- Q 34.** En déduire l'équation différentielle liant l'entrée $s_e(t)$ et la sortie $s_s(t)$ dans le cas d'un filtre passe-bas du premier ordre de temps caractéristique τ qu'on liera à ω_c .

Le filtrage numérique correspond à la chaîne de traitement du signal présentée en figure 6.

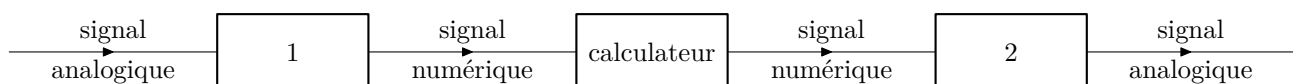


Figure 6 Chaîne de traitement du signal

- Q 35.** Identifier les fonctions des opérateurs numérotés 1 et 2 et du calculateur sur la figure 6.
- Q 36.** Citer deux avantages d'une telle technique de filtrage vis-à-vis d'un filtre analogique. Citer l'inconvénient majeur du filtrage numérique.
- On note T_e la période d'échantillonnage des signaux $S_e[n]$ et $S_s[n]$, les valeurs respectives de $s_e(t)$ et $s_s(t)$ à l'instant d'échantillonnage $t_n = nT_e$ où n est un entier positif ou nul. À l'entrée du calculateur, le signal numérisé se présente sous la forme d'un tableau de valeurs. Le calculateur génère un tableau de valeurs $S_s[n]$ pour la sortie à partir du tableau de valeurs $S_e[n]$ de l'entrée.
- Q 37.** Si l'on suppose la période d'échantillonnage T_e « petite » par rapport à τ , donner une approximation d'ordre 1 de la dérivée à l'instant t_n en faisant intervenir $S_s[n]$ et $S_s[n-1]$.
- Q 38.** En déduire la relation donnant $S_s[n]$ en fonction de $S_s[n-1]$ et $S_e[n-1]$ pour un filtre passe-bas d'ordre 1.
- Q 39.** Quelle information supplémentaire faut-il fournir au calculateur pour qu'il puisse calculer tous les $S_s[n]$?

Pour illustrer la fonction de filtrage numérique, l'expérimentateur dicte la phrase « je passe le concours Centrale-Supélec ». L'analyse spectrale du texte dicté est réalisée à partir de deux enregistrements du texte, l'un dicté au calme, l'autre en présence de cris d'enfants (figure 7).

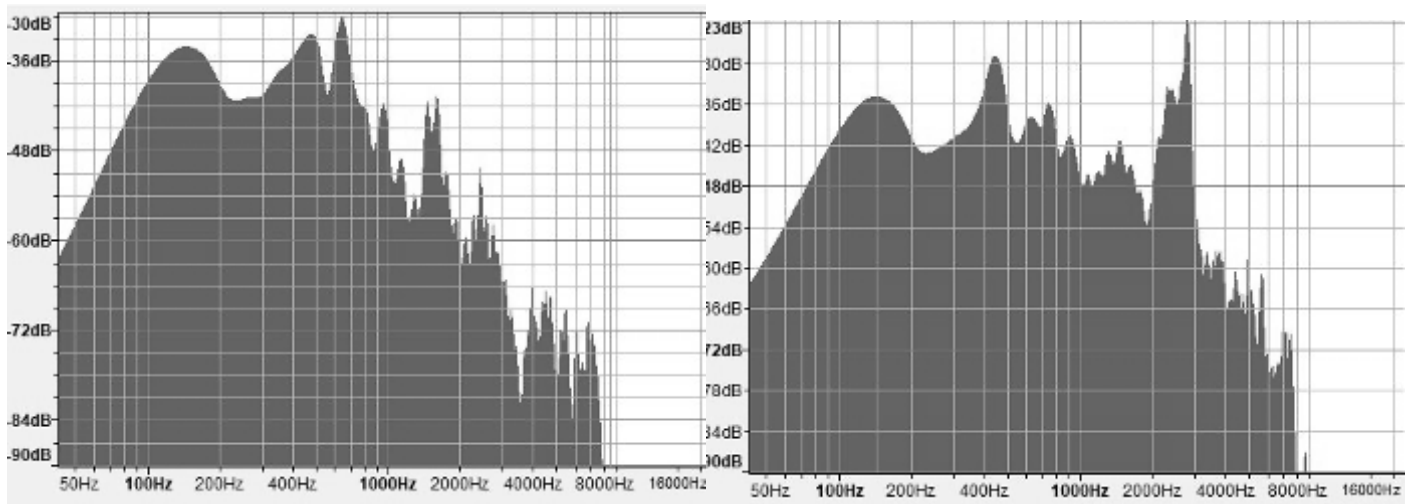


Figure 7 Spectre de la dictée « je passe le concours Centrale-Supélec »

Q 40. Identifier la zone de fréquences à filtrer et proposer une valeur de fréquence de coupure pour le filtre passe-bas d'ordre 1.

On dispose d'un fichier monophonique `dictee.wav` au format WAV/LPCM contenant l'enregistrement de la phrase. Ce fichier est chargé dans un vecteur Python à l'aide du programme de la figure 8.

```
import numpy as np
import scipy.io.wavfile

fe, Se = scipy.io.wavfile.read("dictee.wav")
```

Figure 8 Chargement du signal d'entrée

La fonction `scipy.io.wavfile.read` lit un fichier audio au format WAV/LPCM. Elle renvoie la fréquence d'échantillonnage (en Hz) utilisée dans le fichier et un vecteur contenant les échantillons du signal.

Q 41. Compléter le programme de la figure 8 de façon à produire un signal de sortie privé des cris d'enfants.

III Réception d'une communication téléphonique

Dans cette partie, on réalise une étude rapide d'une antenne émettrice en téléphonie mobile et des problèmes liés à la réception du signal. Pour cela, on étudie l'émission d'une onde électromagnétique par un dipôle électrique oscillant.

III.A – Rayonnement par une antenne

On considère un doublet constitué de deux charges ponctuelles de charges opposées $+q$ et $-q$. La charge $-q$ est fixe et placée en O ; la charge $+q$ est mobile sur l'axe des z suivant la loi $z(t) = a \sin(\omega t)$ où a représente l'amplitude et ω la pulsation des oscillations. L'ensemble constitue un dipôle variable qui crée une onde électromagnétique de pulsation ω en un point M repéré par les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (figure 9).

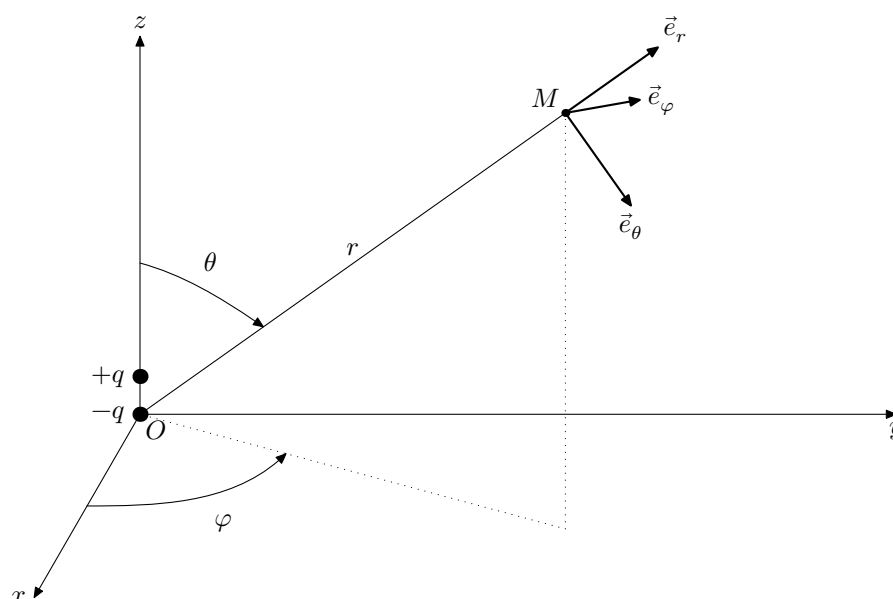


Figure 9 Repérage du dipôle et du point M d'étude

On se place dans les conditions où $r \gg a$ et $\lambda \gg a$ où λ est la longueur d'onde associée à l'onde électromagnétique émise.

Q 42. Citer les approximations associées aux deux inégalités $r \gg a$ et $\lambda \gg a$.

Q 43. Exprimer le moment dipolaire $\vec{p} = p(t)\vec{e}_z$ associé au doublet $(-q, +q)$.

On admet que le dipôle est équivalent, pour l'étude du champ dans la zone de rayonnement, à un élément de hauteur $2a$ parcouru par un courant d'intensité

$$I(t) = \frac{1}{2a} \frac{dp}{dt}.$$

Q 44. Déterminer I_0 , l'amplitude du courant $I(t)$.

La puissance instantanée rayonnée par un dipôle à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$ est proportionnelle au carré de l'accélération de ce dernier telle que

$$\Pi(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2.$$

Q 45. Déterminer P_r , la puissance moyenne totale rayonnée par ce dipôle à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$, appelée *zone de rayonnement*.

On définit R_r , la résistance du rayonnement par

$$P_r = R_r \frac{I_0^2}{2}.$$

Q 46. Déterminer l'expression de R_r en fonction de μ_0 , c , λ et a .

Q 47. Quel est l'intérêt de définir ce type de grandeur ?

Un opérateur de téléphonie mobile a converti plus de 5000 antennes en 800 MHz, auparavant utilisées pour la 4G, afin de créer son réseau 5G national. Ce réseau est accompagné d'antennes en 3500 MHz créées pour véhiculer de la 5G. On se propose de comparer la résistance de rayonnement pour les deux types de réseau 4G et 5G. Pour la 4G le mobile est muni d'une antenne de hauteur $h_{4G} = 2a = 4$ cm et pour la 5G le mobile à une antenne de longueur $h_{5G} = 2a = 1$ cm.

Q 48. Comparer les hauteurs d'antenne et les longueurs d'onde dans les deux cas. Conclure. Estimer la distance à partir de laquelle on se situe dans la zone de rayonnement.

Q 49. Déterminer la résistance de rayonnement R_r pour les deux types de réseau.

III.B – Problème de réception du signal

« Je n'ai plus de réseau ! » Voilà une phrase que tous les utilisateurs de mobiles ont prononcée un jour ! On cherche ici à illustrer quelques difficultés liées à la réception d'un signal en téléphonie mobile.

Pour simplifier l'étude, l'onde émise par la station de base sera considérée comme plane et polarisée rectilignement suivant l'axe des x . Son champ électrique s'écrit, en notation complexe, $\vec{E}_i(z, t) = E_{0,i} \exp(i(\omega t - kz))\vec{e}_x$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} > 0$ et $\omega = 2\pi f$ pulsation de l'onde du champ électrique. On suppose que l'amplitude $E_{0,i}$ est une grandeur réelle. La fréquence est égale à 3500 MHz.

On suppose qu'un obstacle (par exemple un immeuble) situé en $z = L$ réfléchit l'onde sans l'atténuer et sans modifier sa polarisation (Figure 10).

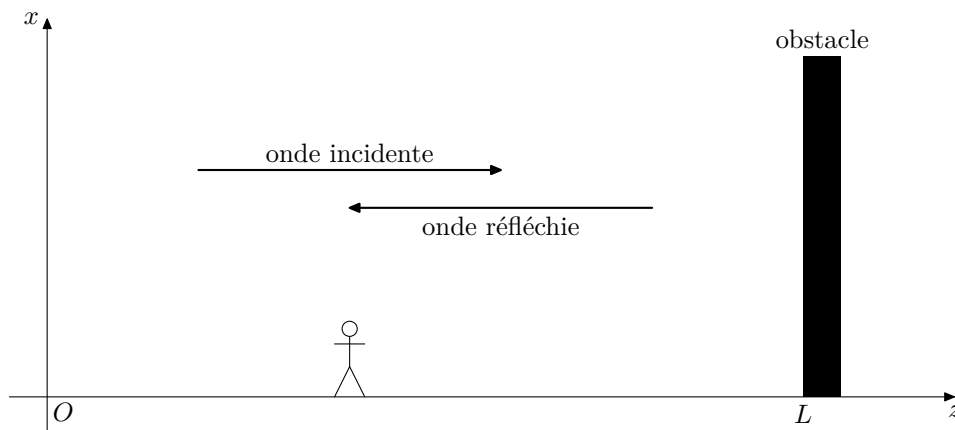


Figure 10 Obstacle sur le trajet d'une onde de téléphonie mobile

Q 50. En utilisant les relations de passage en $z = L$ pour le champ électrique et en modélisant l'obstacle par un métal conducteur parfait, déterminer l'expression complexe du champ électrique de l'onde réfléchie $\vec{E}_r$ supposée de même fréquence et de même direction que l'onde incidente.

Q 51. En déduire l'expression du champ électrique résultant $\vec{E}_{\text{tot}}$. Comment qualifie-t-on ce type d'onde ? On admet que la puissance P reçue par l'utilisateur (via son téléphone mobile en réseau 5G) est proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique. L'établissement de la communication est impossible (plus de réseau !) si la puissance reçue est inférieure à une puissance seuil notée P_{seuil} qui correspond au dixième de la valeur moyenne spatiale (c'est-à-dire suivant z) de la puissance reçue P .

Q 52. Déterminer la durée moyenne des coupures lorsque le téléphone mobile est porté par un piéton qui se déplace à la vitesse de $3 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ suivant l'axe des z croissants, puis lorsque le téléphone est porté par un passager d'une automobile se déplaçant à $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans le sens des z croissants. Commenter les résultats obtenus.

En milieu urbain, notamment à cause des divers obstacles, les retards des trajets réfléchis des ondes par rapport aux trajets directs sont de l'ordre de $\Delta t = 0,5 \mu\text{s}$.

Q 53. Quelle est la valeur typique de $L - z$ associée à ce retard ?

On suppose que pour cette valeur typique de $L - z$ et pour la fréquence f , le signal reçu par le mobile de la part de la station de base a une puissance nulle. On fait alors varier la fréquence f de $\pm \Delta f$.

Q 54. Déterminer numériquement la valeur minimale à donner à Δf pour obtenir une puissance supérieure à P_{seuil} .

Q 55. En vous appuyant sur les questions précédentes, proposer au moins une méthode permettant de lutter contre les coupures réseau.

Données

Données générales

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Données sur l'aluminium métallique

Conductivité en régime permanent	$\gamma_0 = 38 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_r = 1$
Perméabilité magnétique relative	$\mu_r = 1$

Formulaire

Les grandeurs complexes sont soulignées d'un trait et on note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Le symbole $\times$ désigne l'opération produit vectoriel. L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Analyse vectorielle

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z$$

Relation de continuité des champs électromagnétiques

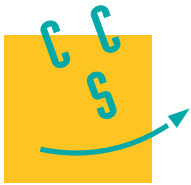
En présence de charges surfaciques σ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante tangentielle est toujours continue

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}$$

En présence de courants surfaciques $\vec{j}_s$, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante normale est toujours continue

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}$$

• • • FIN • • •



Ce sujet s'intéresse à la restitution, au transport et au traitement numérique du son produit par une guitare électrique.

Il comporte quatre parties indépendantes.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Microphone

Une guitare électrique se distingue d'une guitare classique par l'absence de caisse de résonance. Comme la vibration des cordes métalliques est très inefficacement transformée en onde acoustique, celle-ci est directement convertie en un signal électrique grâce à un transducteur électromagnétique : le micro. Apparus au début du XXe siècle, les micros de guitares électriques ont la particularité de restituer la vibration des cordes sans entendre le son que ces dernières produisent.

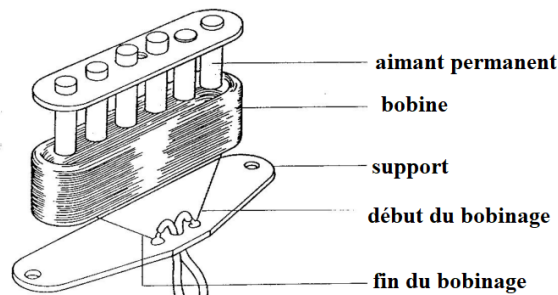


Figure 1

Un micro de guitare (figure 1) est constitué d'un ou de plusieurs aimants permanents entourés d'une bobine. Les aimants produisent un champ magnétique. Les cordes sont faites d'un matériau ferromagnétique. En vibrant, celles-ci modifient le champ magnétique créé par les aimants. Cette partie présente une modélisation du micro, qui, bien que rudimentaire, permet de capturer les principales caractéristiques d'un micro réel. On modélise le micro par l'association d'une bobine circulaire de rayon R , constituée de N spires et d'un aimant permanent. La bobine modélise le bobinage du micro tandis que l'aimant modélise la corde ferromagnétique en mouvement.

La spire est contenue dans le plan (O, Ox, Oy) d'un repère cartésien associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Son axe de symétrie de révolution est confondu avec l'axe Oz . L'aimant est supposé ponctuel et peut se déplacer selon l'axe (Oz) (on parlera de mouvement vertical) ou selon l'axe (Oy) (on parlera de mouvement horizontal). Le moment magnétique de l'aimant est noté $\vec{M} = M\vec{e}_z$ (figure 2).

Q 1. Justifier qualitativement l'apparition d'une force électromotrice dans la bobine lorsqu'une corde vibre.

Q 2. Énoncer la loi de Faraday.

I.A – Mouvement vertical

On s'intéresse au mouvement vertical de l'aimant. Celui-ci est repéré par un point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z(t))$. En coordonnées sphériques, le champ magnétique créé par un moment magnétique $\vec{M} = M\vec{e}_z$ placé à l'origine du repère vaut

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M \cos \theta}{2\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ est la perméabilité du vide.

Q 3. Donner la définition du flux de $\vec{B}$ à travers une spire de la bobine.

Q 4. On oriente la spire dans le sens direct (indiqué sur le schéma plus haut), et on rappelle que l'élément de surface infinitésimal $d\vec{S}$ à rayon constant en coordonnées sphériques s'écrit $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$. Montrer que le flux du champ $\vec{B}$ à travers une spire vaut :

$$\phi = \frac{\mu_0 M}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} R^2.$$

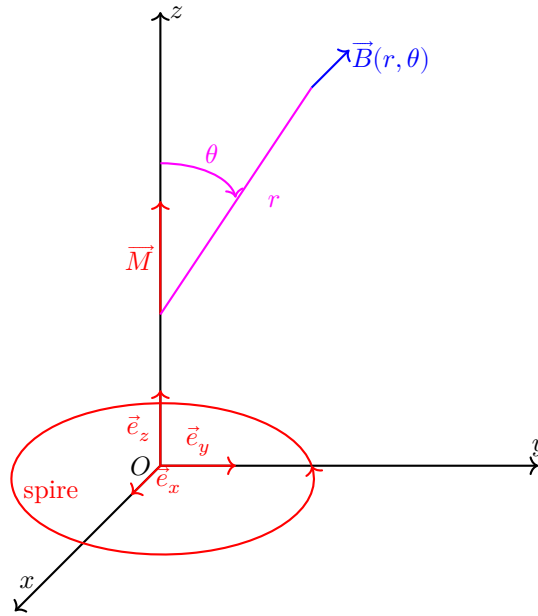


Figure 2

- Q 5.** En déduire l'expression de la force électromotrice, e , induite dans toute la bobine.
- Q 6.** On considère une vibration sinusoïdale de l'aimant autour de la position $\bar{z} = 5$ mm, d'amplitude $z_0 = 1$ mm et à la fréquence $f = 500$ Hz. Évaluer numériquement l'ordre de grandeur de e . On prendra $R = 1$ cm, $M = 1 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ et $N = 5000$.
- Q 7.** La réponse du micro est-elle linéaire ? Justifier à l'aide des valeurs numériques données à la question précédente.

I.B – Étude du mouvement horizontal

On s'intéresse dans cette partie au mouvement horizontal de l'aimant. On suppose qu'il se déplace uniquement selon l'axe (Oy) à l'altitude z constante et à l'abscisse $x = 0$ (figure 3).

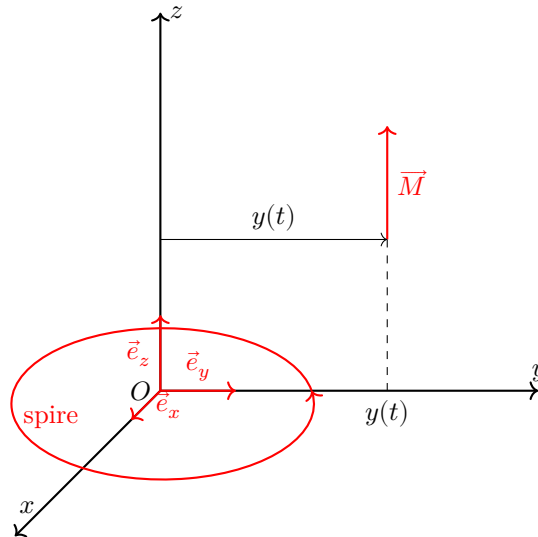


Figure 3

Soit P , un point du plan de la bobine (*i.e.* le plan $z = 0$). P est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . On peut obtenir l'expression du champ magnétique en P , ce calcul est non demandé ici. On note $B_z(r, \theta, y)$ la composante du champ $\vec{B}$ selon $\vec{e}_z$, au point $P(r, \theta)$ lorsque l'aimant est à l'ordonnée y .

- Q 8.** Rappeler l'expression de l'élément de surface infinitésimal dS en coordonnées polaires.
- Q 9.** Exprimer, ϕ , le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers une spire sous forme d'une intégrale double, on prendra soin d'expliciter les bornes d'intégration.
- Q 10.** Cette intégrale n'a pas d'expression explicite à l'aide des fonctions usuelles, on choisit de l'évaluer numériquement. Rappeler le principe de la méthode des rectangles.
- Q 11.** On dispose d'une fonction Python

```
B(r : float, theta : float, y : float) -> float
```

qui prend en argument les coordonnées r et θ d'un point M du plan de la spire, ainsi que l'ordonnée y de l'aimant, et qui renvoie la valeur de $B_z(r, \theta, y)$. Écrire une fonction

```
phi(y : float) -> float
```

qui prend en argument la position y de l'aimant et qui renvoie la valeur du flux de $\vec{B}$ à travers une spire.

Q 12. Écrire un script Python qui affiche à l'écran l'allure de ϕ en fonction de y , pour $-1 \text{ cm} \leq y \leq 1 \text{ cm}$.

Q 13. On obtient l'allure de la figure 4 pour ϕ en fonction de y . En déduire l'allure du spectre de $e(t)$ pour une vibration sinusoïdale de la corde à la fréquence $f = 200 \text{ Hz}$.

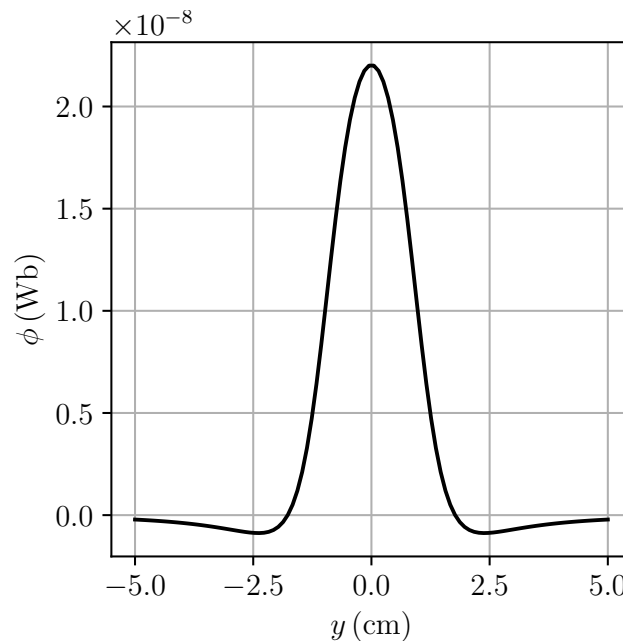


Figure 4

I.C – Positionnement du micro

Une guitare électrique est souvent munie de plusieurs micros. On peut les activer séparément grâce à un commutateur.

On pince une corde de longueur $L = 67 \text{ cm}$ d'une guitare de façon à produire une onde stationnaire, de vibration verticale, et de faible amplitude (environ $100 \mu\text{m}$). La figure 5 présente le spectre de la tension $e(t)$ fournie par un micro placé à 16 cm du point d'attache de la corde.

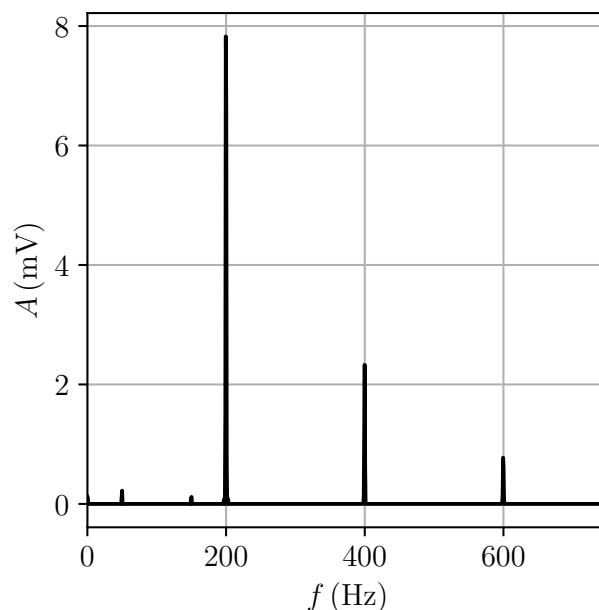


Figure 5

Q 14. Tracer, le plus précisément possible, l'allure du spectre de la tension $e(t)$ enregistrée par un micro placé à 4 cm de point d'attache, pour corde excitée de la même manière. Quel est l'influence de la position du micro sur le son restitué ?

II Aspect électrique

D'un point de vue électrique, le micro se modélise de la façon représentée à la figure 6.

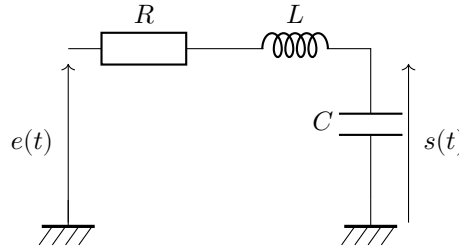


Figure 6

$e(t)$ est la force électromotrice induite par le mouvement de la corde. L désigne l'inductance propre du bobinage et R sa résistance. De plus, le grand nombre de spires présentes dans le bobinage provoque un effet capacitif représenté par le condensateur C .

Q 15. Étudier le comportement asymptotique de ce circuit. En déduire le type de filtrage réalisé par le micro.

Q 16. Donner l'expression de la fonction de transfert du micro en régime sinusoïdal forcé $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$.

Q 17. Écrire la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$ et exprimer les paramètres H_0 , ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

Q 18. Montrer que, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance à une pulsation ω_r à déterminer.

Q 19. Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude dans le cas $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q 20. Expliquer comment tracer expérimentalement un diagramme de Bode.

Q 21. Dans le cas précis du micro de guitare, expliquer pourquoi il n'est pas possible de tracer expérimentalement le diagramme de Bode.

Q 22. Un potentiomètre de résistance r est traditionnellement ajouté en parallèle de la capacité C . Donner l'expression littérale du nouveau gain statique du circuit en présence de ce potentiomètre. Ce dernier est accessible pour le guitariste. Quelle est son utilité ?

On souhaite mesurer les paramètres R , L et C de deux micros différents : le micro **Fender Lace Sensor** et le micro **De Armond Dynasonic**. En l'absence de vibration de la corde, le micro est modélisé par le dipôle, d'impédance $\underline{Z}$, représenté à la figure 7 gauche.

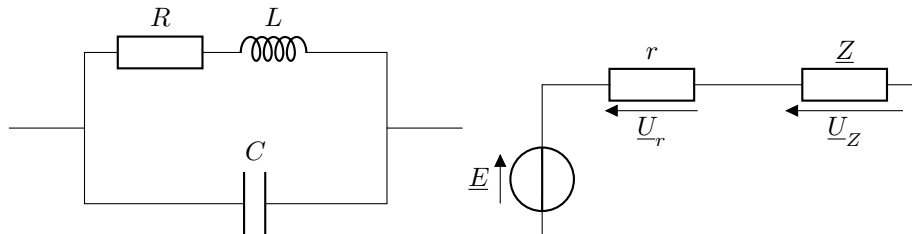


Figure 7

On réalise le montage de la figure 7 à droite, dans lequel e est une source de tension idéale, délivrant une tension sinusoïdale de la forme : $e(t) = E \cos(\omega t)$. r est un résistor de résistance $r = 10 \text{ k}\Omega$.

Q 23. Exprimer $\underline{Z}$, l'impédance du micro orienté en convention récepteur, en fonction de R , L , C et ω .

Q 24. Montrer que $\underline{Z} = r \frac{U_Z}{U_r}$.

Q 25. Le graphe de la figure 8 représente $\frac{|U_Z|}{|U_r|}$ en fonction de la pulsation ω pour les deux micros étudiés : trait plein pour le micro **Fender** et pointillés pour micro **Dynasonic**.

Montrer qu'en basses fréquences $\underline{Z} \simeq R$ et en déduire la valeur de R pour chaque micro.

Q 26. Les relevés expérimentaux mettent en évidence que pour des fréquences de l'ordre de 1 kHz, $\underline{Z}$ est dominée par R et L . Montrer que pour ces fréquences $L \simeq \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(r \frac{|U_Z|}{|U_r|}\right)^2 - R^2}$. En déduire la valeur de L pour chaque micro.

Q 27. $\underline{Z}$ peut s'écrire sous la forme $\underline{Z} = R \frac{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$. Simplifier l'expression de $\underline{Z}$ dans l'hypothèse $Q \gg 1$ et ω proche de ω_0 . Expliquer comment évaluer C à partir des relevés expérimentaux. En déduire la valeur de C pour chaque micro.

Q 28. Justifier, à partir des mesures expérimentales, l'affirmation suivante : « Le micro Fender sonne plus aigu que le micro Dynasonic ».

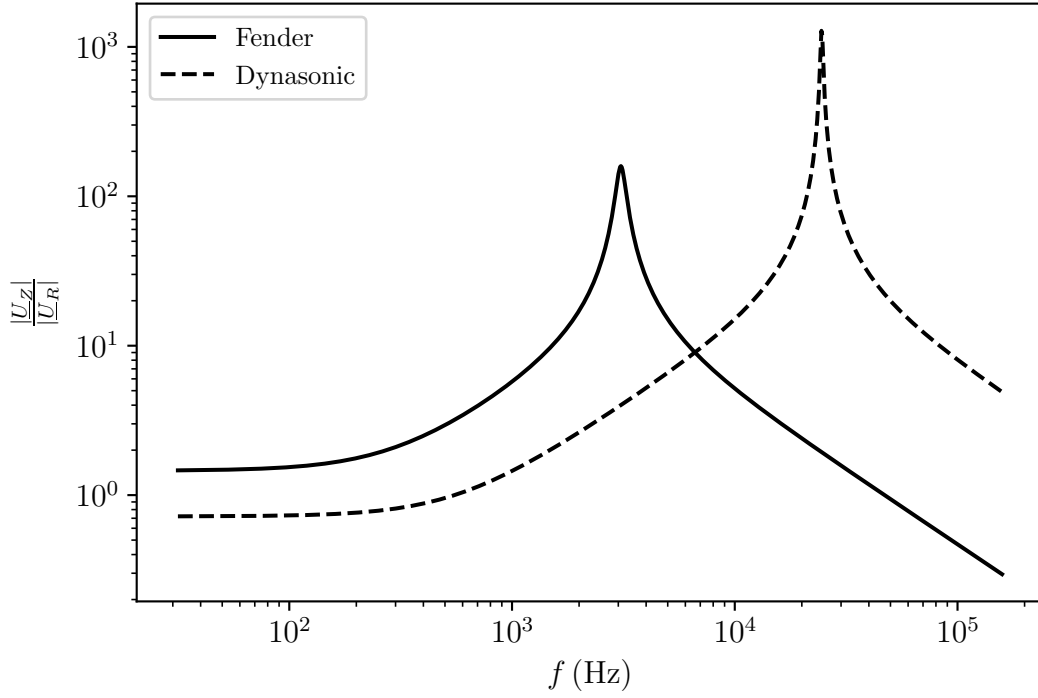


Figure 8

III Transmission dans un câble coaxial

Le signal électrique fourni par le micro est transmis via un câble coaxial. Celui-ci est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux infinis, de rayons respectifs a et b ($a < b$) (figure 9). L'espace entre les deux conducteurs est assimilé à du vide.

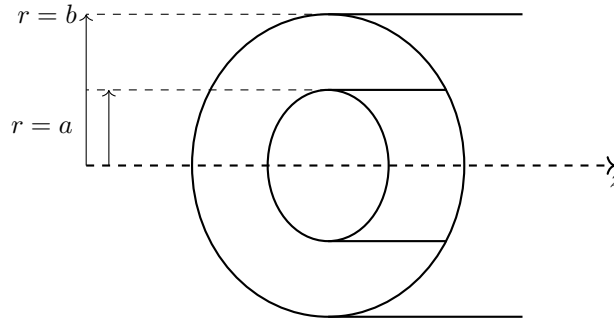


Figure 9

On étudie le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le câble en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) colinéaire à l'axe du câble. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant électrique $i(z, t) = i_0 \cos(\omega t - kz)$, tandis que le conducteur est parcouru par $-i(z, t)$.

Q 29. Rappeler les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans le vide ?

Q 30. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.

Q 31. Montrer que des ondes planes de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - jkz)$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(j\omega t - jkz)$ peuvent se propager dans le vide. En déduire l'expression du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Caractériser la structure des ondes planes.

Q 32. On cherche, maintenant, des solutions compatibles avec les conditions aux limites imposées par le câble. On suppose que les conducteurs sont parfaits. Justifier que le courant $i(z, t)$ est surfacique.

Q 33. On suppose qu'en un point M de coordonnées (r, θ, z) , le champ électromagnétique est de la forme :

$$G_X : \begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_0(r) \exp(j\omega t - jkz) \vec{e}_r \\ \vec{B}(M, t) = B_0(r) \exp(j\omega t - jkz) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Cette forme est appelée mode Transverse Électrique et Magnétique (mode TEM). En intégrant l'équation de Maxwell Ampère sur un contour $\mathcal{C}$ judicieusement choisi, montrer que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$$

où $i_{\text{enlacé}}$ sont les courants enlacés par le contour $\mathcal{C}$.

Q 34. En déduire l'expression de $B(r)$ pour $r < a$, $a < r < b$ puis $r > b$.

Q 35. Montrer que, pour $a < r < b$, $E_0(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{k}{\omega} i_0 \cos(\omega t - kz)$.

Q 36. Le mode TEM décrit-il une onde plane ? Montrer que la relation de structure s'écrit : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

Q 37. Calculer la vitesse de phase v_φ . Y a-t-il dispersion ?

Q 38. Calculer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie instantanée dans la partie $a < r < b$. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

Q 39. Calculer la puissance moyenne se propageant le long du câble.

Q 40. En pratique, la conductivité n'est pas infinie et le champ électromagnétique pénètre dans les conducteurs. La conductivité du cuivre vaut $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Discuter la pertinence de l'utilisation du modèle du conducteur parfait.

IV Numérisation et traitement du signal

Le signal fourni par la guitare électrique est finalement numérisé puis traité. On considère dans tout ce qui suit que ce signal est une tension positive comprise entre 0 V (potentiel de la masse) et V_{cc} (potentiel haut). On étudie, en premier lieu, un convertisseur analogique numérique de type flash. Le schéma de la figure 10 représente le circuit électronique d'un convertisseur flash sur deux bits.

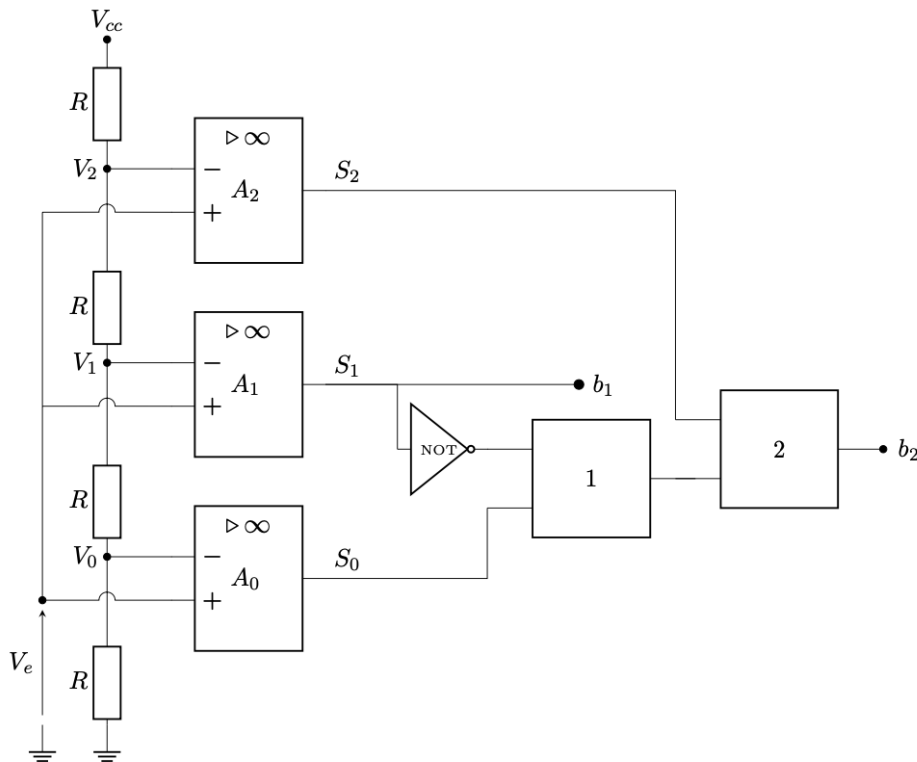


Figure 10

Q 41. Justifier que les tensions V_0 , V_1 et V_2 valent respectivement $\frac{1}{4}V_{cc}$, $\frac{1}{2}V_{cc}$ et $\frac{3}{4}V_{cc}$.

Dans la figure figure 10, la porte 1 réalise la fonction ET et la porte 2 la fonction OU.

Q 42. Reproduire et compléter la table de vérité ci-dessous relative au convertisseur flash.

	S_0	S_1	S_2	b_0	b_1
$0 < V_e < \frac{1}{4}V_{cc}$					
$\frac{1}{4}V_{cc} < V_e < \frac{1}{2}V_{cc}$					
$\frac{1}{2}V_{cc} < V_e < \frac{3}{4}V_{cc}$					
$\frac{3}{4}V_{cc} < V_e$					

Q 43. La norme **Hi-Res Audio** des fichiers audios (utilisé dans les fichiers .flac, par exemple) impose un encodage sur 24 bits à une fréquence égale ou supérieure à 96 kHz. Combien d'amplificateurs linéaires intégrés seraient nécessaires pour réaliser un convertisseur flash sur 24 bits ?

En pratique, il n'existe pas dans le commerce de convertisseur flash sur plus de 12 bits (au delà, ils seraient trop chers et trop encombrants). On peut, néanmoins, mettre à profit leur grande rapidité de conversion dans des convertisseurs pipeline semi-flash. Prenons l'exemple du convertisseur pipeline 24 bits à trois étages représenté à la figure 11. E/B désigne un circuit échantillonneur bloqueur, CAN un convertisseur analogique numérique flash 8 bits et CNA un convertisseur numérique analogique 8 bits.

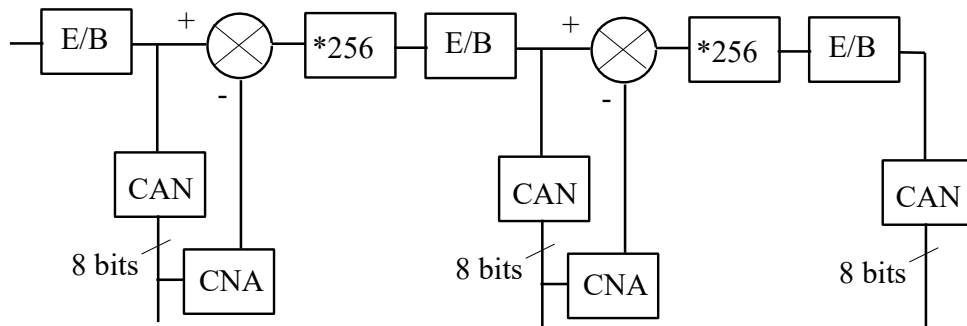


Figure 11

Le premier étage détermine les valeurs des 8 bits de poids fort, l'étage suivant les valeurs des 8 bits suivants, enfin le dernier étage détermine les valeurs des 8 bits de poids faible. Trois circuits échantillonneurs bloqueurs sont intercalés afin de synchroniser les trois conversions. Un échantillonneur bloqueur peut être réalisé selon le schéma de la figure 12, dans lequel l'interrupteur K est commandé par une tension crêteau, appelé signal d'horloge, à la fréquence d'échantillonnage f_e .

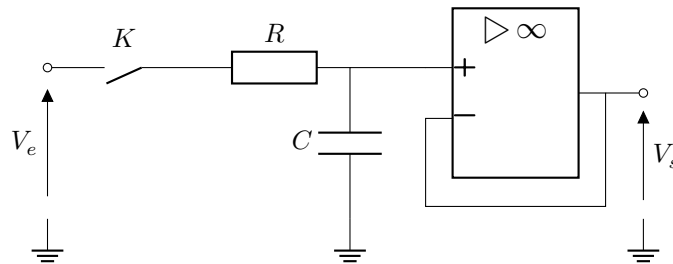


Figure 12

On suppose K fermé et le condensateur initialement déchargé. De plus, on suppose que les variations temporelles de $V_e(t)$ sont très lentes devant le produit RC .

Q 44. Au bout de combien de temps le condensateur atteint-il la tension V_e à 99% ? En déduire une contrainte sur le produit RC pour que u_C diffère de V_e de moins de 1% à chaque front descendant du signal d'horloge .

Q 45. Que vaut la tension de sortie lorsque l'interrupteur est ouvert ? Quel est l'intérêt de ce circuit ?

Q 46. La tension d'horloge pilotant l'interrupteur K est réalisée à l'aide du circuit de la figure 13. L'interrupteur I est fermé pour Q à l'état bas, et ouvert quand Q est à l'état haut et ainsi qu'à la mise sous tension. Tracer le chronogramme de la tension u_C , des entrées R , S et de la sortie Q , en partant de l'état initial $R = 0$, $S = 1$, I ouvert et $u_C = 0$. On tracera l'allure des chronogrammes sans chercher l'expression littérale de U_c au cours du temps.

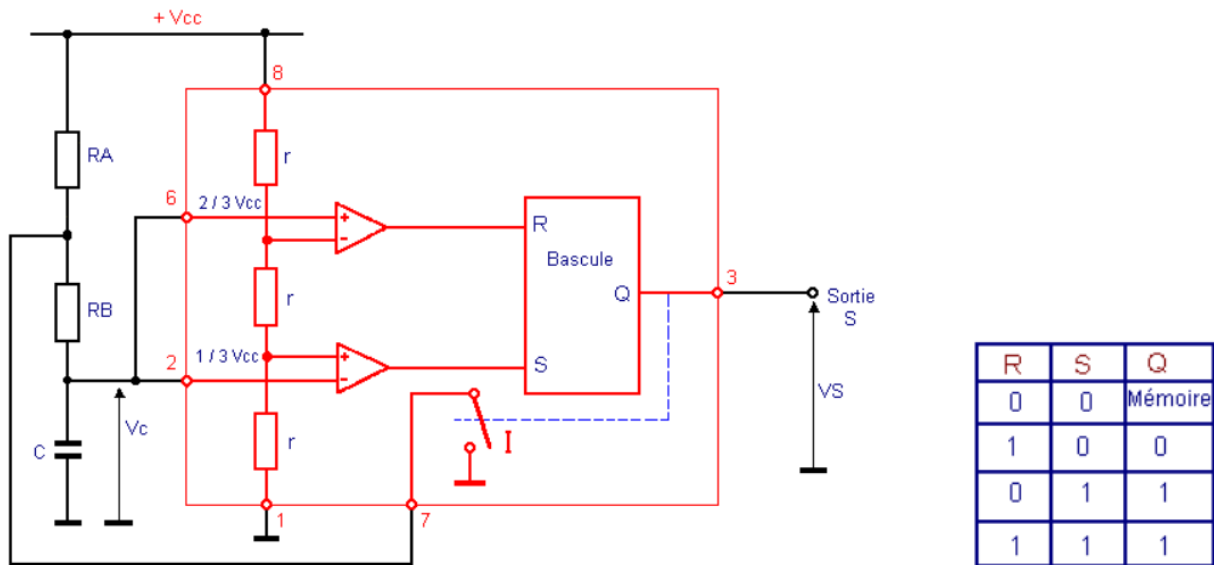


Figure 13

Q 47. Comment choisir R_A et R_B pour obtenir un signal d'horloge en forme de peigne (*i.e.* signal créneau pour lequel le temps à l'état haut est faible devant le temps à l'état bas) ?

Q 48. Le flanger est un effet sonore obtenu en additionnant au signal d'origine ce même signal mais légèrement retardé. De plus, ce retard est lentement modulé dans le temps. Ainsi, pour un signal d'entrée $e(t)$, le signal de sortie est $s(t) = e(t) + e(t + \tau)$ avec $\tau = \tau_0 + \delta\tau \sin \omega t$ et $\delta\tau < \tau$.

Proposer une fonction Python

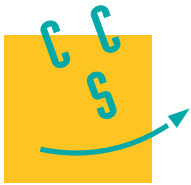
`phaser(e : list, omega : float, tau : float, dtau : float) -> list :`

qui prend, respectivement, en argument :

- le signal $e(t)$ numérisé à la période d'échantillonnage T_e et stocké sous forme de liste ;
- ω la pulsation de la modulation ;
- τ_0 la valeur moyenne du déphasage ;
- $d\tau$ l'amplitude du déphasage ;

et qui renvoie le signal filtré sous forme de liste. On supposera que e a été enregistré pendant une durée grande devant τ et que la fréquence d'échantillonnage a déjà été définie dans une variable globale `fe`.

• • • FIN • • •



À propos du télescope spatial James Webb

Toutes les réponses doivent être dûment justifiées. Les résultats doivent être encadrés. La qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et le soin apporté à la copie sont des éléments d'évaluation de la composition du candidat.

Un ensemble de données, nécessaires à la résolution du problème, sont regroupées en fin d'énoncé.

I Voir l'Univers en infrarouge

Le télescope James Webb (JWST), lancé le 25 décembre 2021 depuis le centre spatial de Kourou en Guyane, a permis d'obtenir des images du cosmos avec une précision et une netteté sans précédent y compris de galaxies extrêmement éloignées de la Terre comme sur la photo fournie du premier champ profond de Webb. Cela a notamment permis de se faire une idée de ce à quoi ressemblait l'Univers il y a plusieurs milliards d'années. Ci-dessous une comparaison de deux images de la nébuleuse d'Orion située à 1350 années-lumière de la Terre, l'une avec le télescope Hubble (à gauche) et l'autre avec JWST (à droite). Certains astres comme le Soleil émettent principalement dans le visible c'est pourquoi la génération précédente de télescopes spatiaux (placés au-delà de l'atmosphère terrestre) avaient été conçue de sorte à y présenter le maximum de sensibilité. C'est le cas par exemple du télescope Hubble. Pour JWST en revanche, ce maximum se trouve dans l'infrarouge.

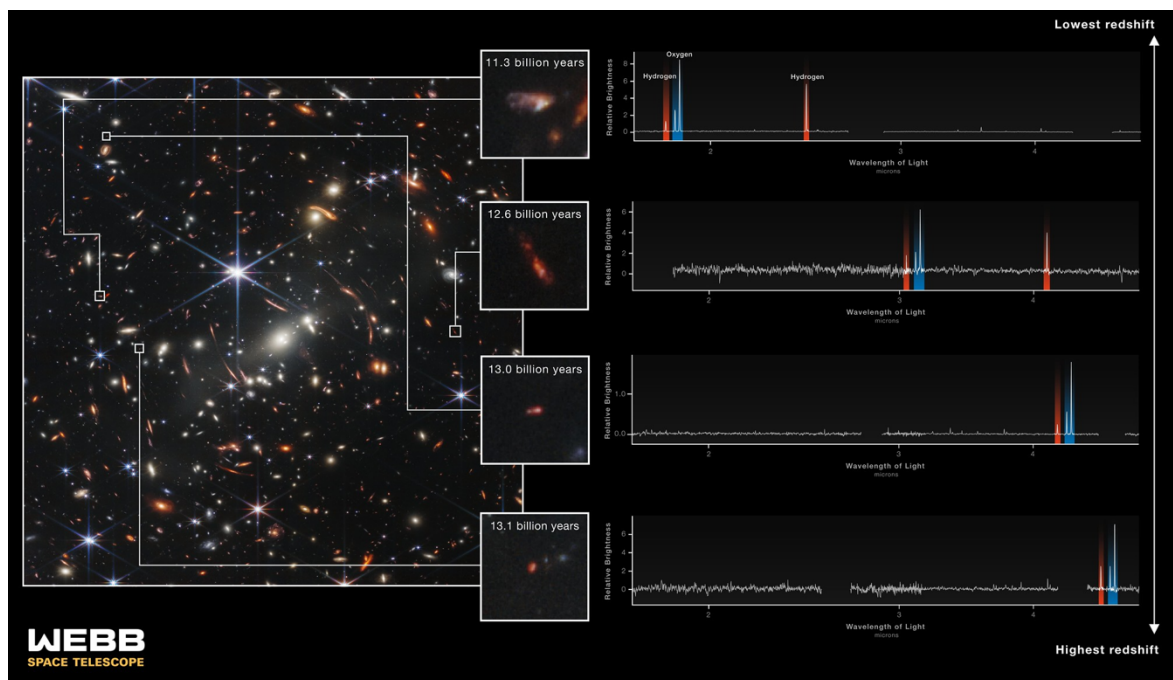


Figure 1 Premier champ profond du Webb. Source <https://webbtelescope.org/>.

I.A – Décalage vers le rouge

L'effet Doppler est un phénomène physique qui se produit lorsque l'émetteur d'une onde est en mouvement à la vitesse $\vec{v}_{\text{source}}$ par rapport à un observateur jouant le rôle de récepteur. La fréquence de l'onde mesurée par l'observateur f_{mes} diffère alors de celle de l'onde produite par l'émetteur notée f_0 . Ce décalage dépend de la vitesse $\vec{v}_{\text{source}}$. On considère un émetteur produisant une onde électromagnétique qui se propage dans le vide jusqu'à atteindre l'observateur. Initialement émetteur et observateur sont séparés de la distance d et l'émetteur est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à l'observateur, s'éloignant de lui à la vitesse $v = ||\vec{v}_{\text{source}}||$. A l'instant $t = 0$, l'onde émise présente un pic.

Q 1. Déterminer l'expression de l'instant t_1 auquel l'observateur reçoit ce pic.



Figure 2 Comparaison entre télescope Hubble (à gauche) et JWST (à droite).
Crédits : NASA/ESA/CSA/PDRs4All ERS Team/Salomé Fuenmayor/Olivier Berné.

Q 2. L'émetteur émet ensuite un nouveau pic au bout d'une période T_0 . Donner de même l'expression de l'instant t_2 de réception de ce nouveau pic.

Q 3. Montrer que $f_{\text{mes}} = \frac{f_0}{1+v/c}$.

Q 4. En déduire la relation entre la longueur d'onde λ_0 émise par l'émetteur et celle mesurée par l'observateur λ_{mes} .

En cosmologie, on définit la grandeur $z = \frac{\lambda_{\text{mes}} - \lambda_0}{\lambda_0}$, appelée décalage vers le rouge (redshift en anglais).

Q 5. Donner la dimension de z .

Q 6. Justifier le terme de « décalage vers le rouge ». Expliquer l'intérêt pour JWST d'avoir un maximum de sensibilité dans l'infrarouge et non pas dans le visible afin d'observer des astres très éloignés dont le spectre de la lumière émise présente pourtant un maximum d'amplitude dans le visible.

Q 7. Déterminer l'expression de z en fonction de v .

Cette relation peut être généralisée en prenant en compte les effets relativistes. On peut montrer que, dans ce cas, on obtient $z + 1 = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$.

Q 8. Montrer que cette expression permet de retrouver celle obtenue précédemment dans le cas où $v \ll c$. On indiquera les valeurs de z pour lesquelles l'expression simplifiée est valide.

I.B – Loi de Hubble

En 1929, Edwin Hubble publie un article¹ dans lequel il présente un ensemble de mesures qui tendent à prouver l'expansion continue de l'Univers depuis sa création. Dans cet article, Hubble introduit une relation linéaire entre la vitesse d'éloignement par rapport à la Terre, ou vitesse de récession, due à l'expansion de l'univers et la distance à la Terre d'un certain nombre de galaxies. Cette relation, connue sous le nom de loi de Hubble-Lemaître, s'exprime comme suit :

$$v = Hd, \quad (\text{I.1})$$

où H est la constante de Hubble. Les données publiées par Hubble en 1929 sont traitées dans un notebook Jupyter afin d'en extraire une valeur de la constante H . Les distances sont exprimées en mégaparsecs (Mpc) et les vitesses de récession en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

¹ Hubble, E.P. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 1929, 15, 168–173.

```
In [1] : import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
In [2] : data = "hubble1929.csv"
# import des données
df = pd.read_csv(data)
```

```
In [3] : data = df.head() # affichage des premières lignes du tableau de données
```

```
Out [3] :
```

	galaxie	distance	vitesse
0	S.mag	0.032	170.0
1	L.mag	0.034	290.0
2	NGC.682	0.214	-130.0
3	NGC.598	0.263	-70.0
4	NGC.221	0.274	-185.0

```
In [4] : df['H']=df['vitesse']/df['distance'] #calcul de la valeur de H
#pour chaque galaxie
```

```
In [5] : df.head() # affichage des premières lignes du tableau de données
```

```
Out [5] :
```

	galaxie	distance	vitesse	H
0	S.mag	0.032	170.0	5312.500000
1	L.mag	0.034	290.0	8529.411765
2	NGC.682	0.214	-130.0	-607.476636
3	NGC.598	0.263	-70.0	-266.159696
4	NGC.221	0.274	-185.0	-672.727273

```
In [6] : df.describe() #génération de statistiques descriptives (effectif [count],
# moyenne [mean], écart-type [std] et autres indicateurs
# de dispersion) pour chacune des valeurs en colonnes
```

```
Out [6] :
```

	distance	vitesse	H
count	24.000000	24.000000	24.000000
mean	0.911375	373.125000	812.043714
std	0.645496	371.254666	1988.805909
min	0.032000	-220.000000	-800.000000
25%	0.406250	165.000000	229.166667
50%	0.900000	295.000000	417.045455
75%	1.175000	537.500000	557.843137
max	2.000000	1090.000000	8529.411765

On construit ensuite un graphe où chaque galaxie est représentée par un point dont l'abscisse est la valeur de la distance d et l'ordonnée la valeur de $H = v/d$ (voir figure 3 ci-dessous).

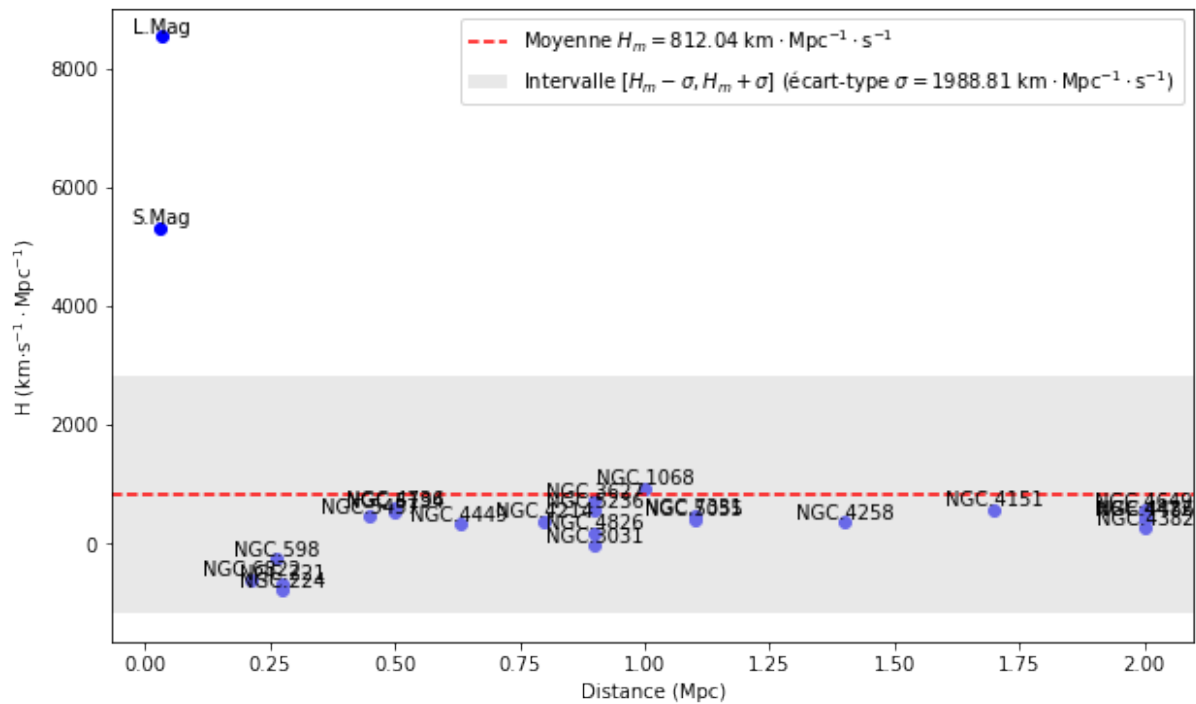


Figure 3 Représentation graphique des valeurs de la constante H obtenues pour chacune des galaxies en fonction de la distance d .

Q 9. En exploitant les résultats fournis dans le script ci-dessus, écrire sous forme normalisée la valeur de H extraite des données, accompagnée de son incertitude-type.

Q 10. Justifier que, dans le cadre d'un modèle d'univers en expansion continue depuis son origine localisée en un point de l'espace, l'inverse de la constante de Hubble peut être interprété comme étant l'âge de l'univers.

Q 11. Évaluer l'âge de l'univers sur la base des résultats précédents et commenter la valeur obtenue sachant que l'âge du système solaire est estimé à 4,5 milliards d'années.

Un autre traitement possible des données de Hubble consiste à effectuer une régression linéaire de la vitesse v par la distance d . L'implantation de cette méthode avec Python conduit au résultat suivant :

```
In [6] : pente, ordonnee = np.polyfit(df['distance'],df['vitesse'],1) # régression
                                                # linéaire de v par d
print ("Pente : %0.2f ; ordonnée à l'origine: %0.2f"%(pente,ordonnee))
```

```
Out [7] : Pente : 454.16 ; ordonnée à l'origine: -40.78
```

Le graphe de la figure 4 permet de visualiser les données utilisées par Hubble (sous forme de points) et la droite de régression linéaire.

Q 12. En argumentant la réponse, expliquer lequel des deux traitements proposés (calcul de la valeur moyenne de la distribution des valeurs de H ou régression linéaire de la vitesse par la distance) paraît le plus pertinent du point de vue de la démarche scientifique.

Selon les résultats de la mission Planck, publiés en 2018², la valeur de la constante de Hubble peut être estimée à $(67 \pm 3) \text{ km} \cdot \text{Mpc}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur qu'on retiendra pour les questions qui suivent.

Q 13. Exprimer la loi de Hubble (equation I.1) en faisant intervenir le décalage vers le rouge z .

Q 14. À partir du spectre fourni (voir figure 5), estimer la distance en années-lumière à laquelle se trouve la galaxie ayant émis ce rayonnement.

² A. Kozmalyan et al. Deriving the Hubble constant using Planck and XMM-Newton observations of galaxy clusters. *Astronomy & Astrophysics* 2019, 621 A34.

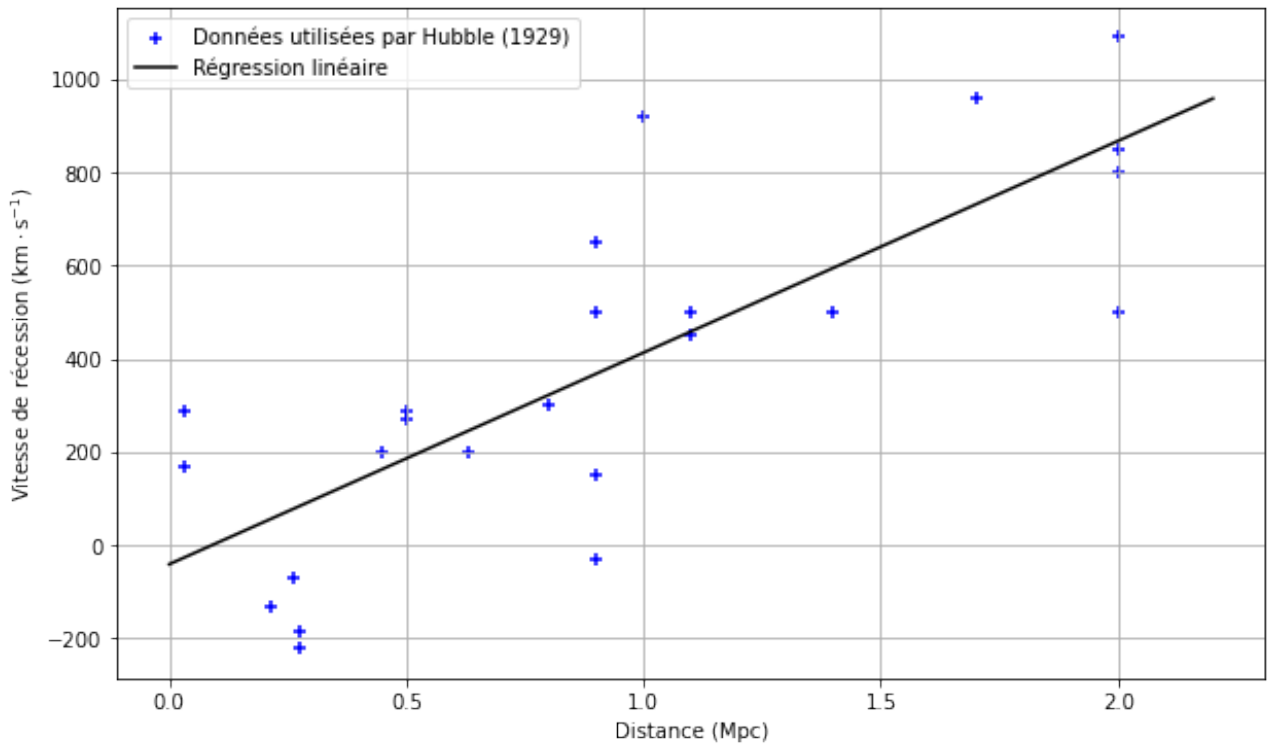
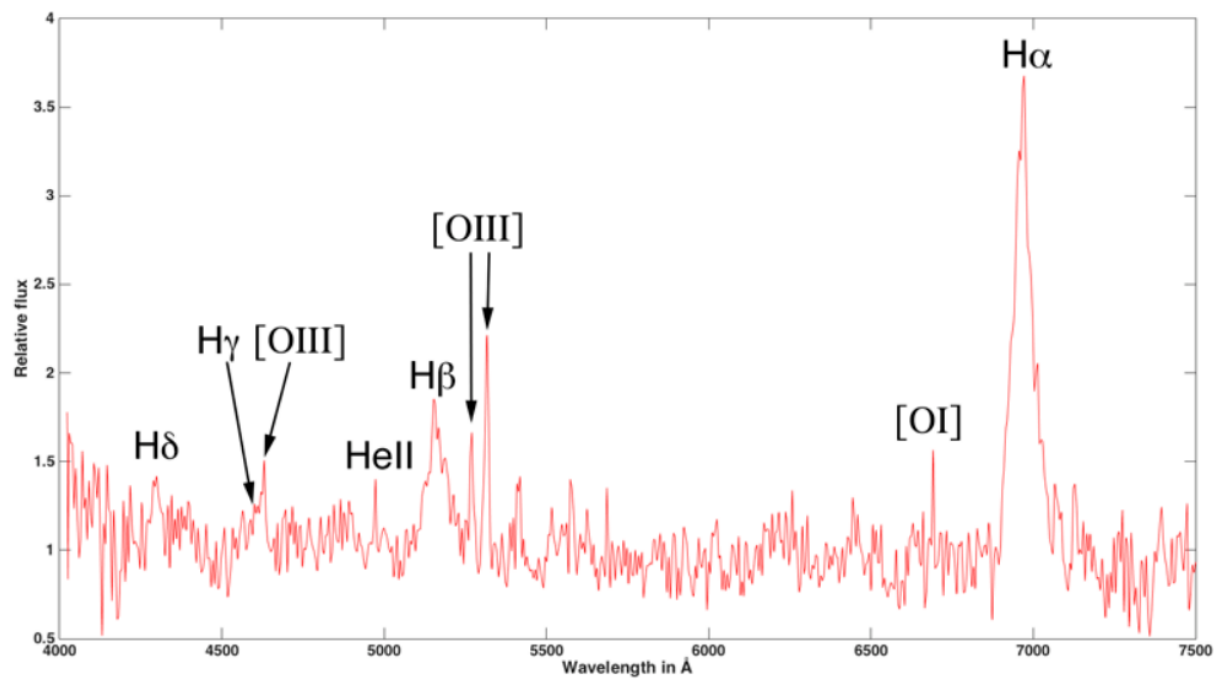


Figure 4 Régression linéaire de la vitesse de récession v par la distance d .



Elements	$\lambda_0(en10^{-10}m)$	$\lambda_{mes}(en10^{-10}m)$
H_{γ}	4340,47	4601,00
[OIII]	4363,21	4630,88
$HeII$	4685,68	4973,40
H_{β}	4861,33	5154,82
[OIII]	4958,92	5268,99
[OIII]	5006,85	5317,20
[OI]	6300,32	6691,10
H_{α}	6562,82	6970,19

Figure 5 Spectre d'émission d'une galaxie de Seyfert. Source : <https://www.shelyak.com/> .

II Les miroirs

II.A – Optique du télescope

Le télescope James Webb possède deux miroirs. Le premier, appelé miroir primaire, est formé d'un assemblage de 18 cellules hexagonales en nid d'abeille. Son diamètre mesure $D_1 = 6,5$ m. Il réfléchit la lumière collectée en direction d'un second miroir, de plus petites dimensions (diamètre $D_2 = 74$ cm, placé face à lui, appelé miroir secondaire. Ce dernier réfléchit la lumière en direction du centre du miroir primaire au niveau duquel a été placé un capteur dont le champ de vision est de 2,2 minutes d'arc. Cette architecture est illustrée sur la figure 6.

Dans un souci de simplification, tous les miroirs seront modélisés par des miroirs plans et on prendra pour le capteur un rayon $R_3 = 3$ cm. Le télescope est muni d'un bouclier qui a pour fonction de protéger les instruments astronomiques de l'éclairage direct du Soleil, de la Terre et de la Lune. Les instruments sont ainsi maintenus à une température de 39 K, essentielle à leur bon fonctionnement.

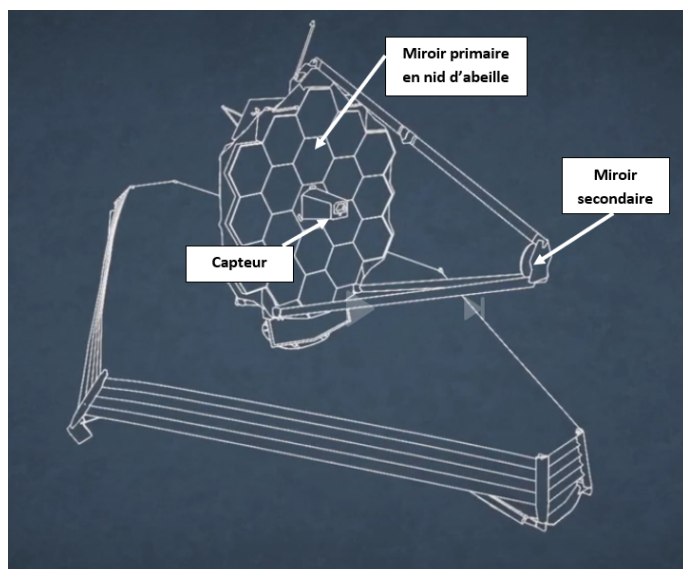


Figure 6 Miroirs du télescope JWST.

La figure 6 présente deux vues, de face et de haut, du télescope.

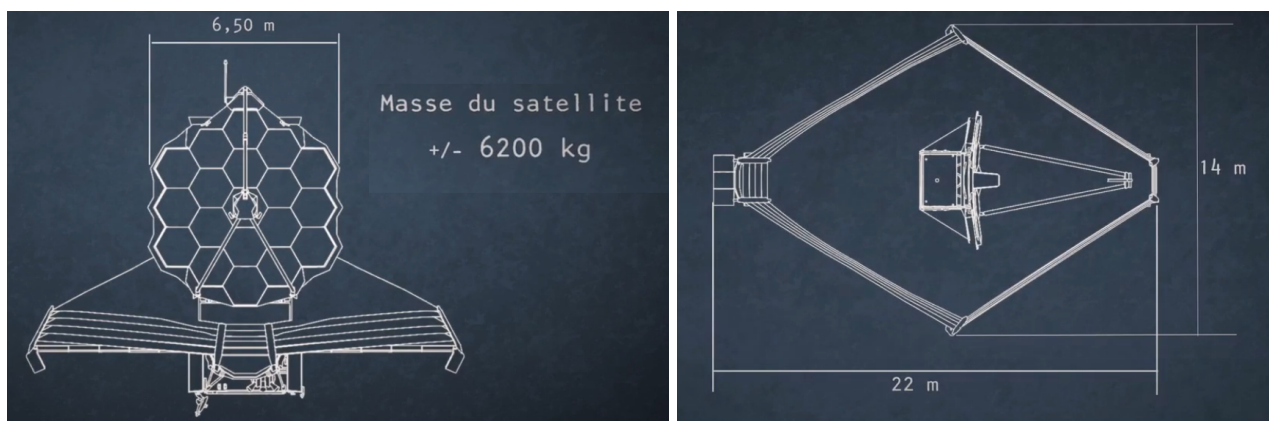


Figure 7 Gauche : vue de face de JWST. Droite : vue de haut de JWST.

Q 15. Rappeler les conditions de l'approximation de Gauss qui permettent de considérer un stigmatisme approché du système optique.

Q 16. Tracer le schéma optique du télescope sans souci d'échelle et y représenter le trajet d'un rayon lumineux venant de l'infini, intercepté par le miroir primaire avec une incidence qui lui permet d'atteindre le capteur après réflexion sur le miroir primaire et le miroir secondaire.

Q 17. En s'appuyant sur un schéma soigné, proposer une estimation du champ de vision du capteur. Comparer cette estimations à la valeur donnée dans l'énoncé.

II.B – Le rayonnement thermique des instruments

Le télescope JWST est conçu pour observer le rayonnement infrarouge d'objets célestes distants et peu lumineux. La bande de sensibilité spectrale des instruments du télescope est comprise entre $0,6\text{ }\mu\text{m}$ et $28\text{ }\mu\text{m}$. Afin que les signaux reçus par le télescope ne soient pas perturbés par le rayonnement infrarouge émis par le télescope lui-même, il est nécessaire de maintenir les instruments du télescope à une valeur proche de 39 K . Un des détecteurs doit même être maintenu à une température encore inférieure, voisine de 7 K .

Dans cette partie, on propose d'estimer de quel facteur est réduite la puissance rayonnée dans le domaine infrarouge par un corps maintenu à une température de 39 K par comparaison à un corps de température bien plus élevée. Le modèle retenu est celui du rayonnement du corps noir.

II.B.1) Le rayonnement d'équilibre thermique et la loi de Planck

On considère une cavité vide, de volume V , où est réalisé un équilibre thermodynamique entre les parois matérielles de la cavité et un rayonnement électromagnétique prisonnier de la cavité. L'ensemble est maintenu à la température T . Le rayonnement est décrit par un ensemble de N photons.

L'énergie électromagnétique $d\mathcal{E}$ du rayonnement correspondant à la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$ est donnée par la loi de Planck :

$$d\mathcal{E} = u(\nu)Vd\nu \quad \text{où} \quad u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (\text{II.1})$$

Les constantes c , h et k_B sont respectivement la célérité de la lumière dans le vide et les constantes de Planck et de Boltzmann.

Q 18. Préciser l'unité dans le système international de la densité spectrale d'énergie $u(\nu)$ qui intervient dans l'équation II.1.

Q 19. Rappeler l'expression (relation de Planck-Einstein) du quantum d'énergie ϵ porté par un photon de fréquence associée ν .

Dans les questions qui suivent, on s'intéresse au rayonnement électromagnétique, prisonnier de la cavité, en se limitant à l'intervalle de fréquence $[\nu_1, \nu_2]$ avec $\nu_2 \geq \nu_1$ qui correspond à la bande de sensibilité spectrale des instruments du télescope.

Q 20. Calculer les valeurs des fréquences ν_1 et ν_2 .

Q 21. Montrer que l'énergie $\mathcal{E}_{12}$ du rayonnement électromagnétique prisonnier de la cavité et de fréquences comprises entre ν_1 et ν_2 , s'exprime comme suit, moyennant un changement de variable :

$$\mathcal{E}_{12} = V \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} I_{[\xi_1, \xi_2]}, \quad (\text{II.2})$$

$$\text{où } I_{[\xi_1, \xi_2]} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{\exp(\xi) - 1}.$$

Q 22. Établir que le nombre N_{12} de photons contenus dans la cavité, et dont la fréquence associée est comprise entre ν_1 et ν_2 , s'exprime comme suit :

$$N_{12} = V \frac{8\pi k_B^3 T^3}{h^3 c^3} J_{[\xi_1, \xi_2]}, \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où } J_{[\xi_1, \xi_2]} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\exp(\xi) - 1}.$$

Q 23. Dédurre des équations II.2 et II.3 une expression de l'énergie moyenne individuelle des photons contenus dans la cavité et dont les fréquences associées sont comprises entre ν_1 et ν_2 . Préciser comment cette énergie moyenne dépend de la température.

II.B.2) Réduction du rayonnement par refroidissement

Une ouverture, de dimensions assez faibles pour ne pas perturber l'équilibre thermodynamique interne, est pratiquée dans les parois de la cavité et permet aux photons de s'échapper. Une telle ouverture constitue un

corps noir et le rayonnement émis est appelé *rayonnement du corps noir*. Par souci de simplicité, on assimile chacun des éléments du télescope à un corps noir de température T .

Q 24. Au regard des résultats établis aux questions 21 à 23, justifier qualitativement que la puissance émise par chacun des éléments du télescope, dans l'intervalle de fréquences considéré, est proportionnelle à sa température à la puissance 4.

Q 25. En déduire une estimation de la valeur du facteur de réduction de la puissance émise dans l'infrarouge par les différents éléments du télescope lorsque la température de celui-ci passe de la valeur 333 K à la valeur 39 K.

Q 26. Le refroidissement a pour effet de réduire à la fois le nombre de photons émis et leur énergie moyenne. Identifier, parmi ces deux effets, celui qui a l'influence la plus importante sur la réduction de la puissance émise.

III Point de Lagrange L_2

Le télescope JWST a été placé en un point de l'espace tel qu'un objet massif y demeure immobile par rapport à la Terre et au Soleil. Ce point particulier, désigné par L_2 , est un « point de Lagrange ». Il est situé au-delà de la Terre sur l'axe Soleil-Terre (voir figure 8).

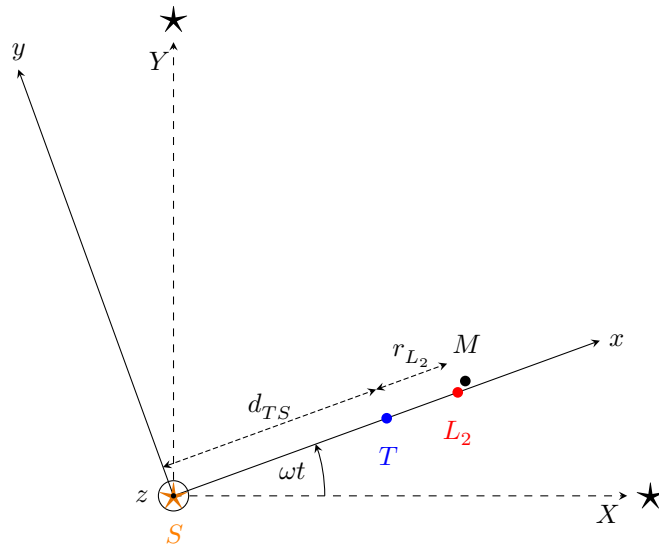


Figure 8 Position du point de Lagrange L_2 . Le point M est un point voisin de L_2 . La figure n'est pas à l'échelle.

Le référentiel $\mathcal{R}_h$ a pour origine le centre du Soleil S ; on lui associe un repère d'espace orthonormé $(S; XYZ)$. Les axes (SX) , (SY) et (Sz) pointent vers trois étoiles très éloignées. On définit le référentiel $\mathcal{R}$ comme étant le référentiel, admettant le centre du Soleil S comme origine, dans lequel le centre du Soleil S et le centre de la Terre T sont fixes, et de repère orthonormé associé $(S; xyz)$. Le point de Lagrange L_2 est à la distance r_{L_2} de la Terre. On note d_{TS} la distance entre les centres du Soleil et de la Terre (voir figure 8). Le référentiel $\mathcal{R}$ est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Sz) à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel $\mathcal{R}_h$.

Le référentiel $\mathcal{R}_h$ est une bonne réalisation de référentiel galiléen. La masse du Soleil est notée M_S , celle de la Terre, M_T et celle du télescope JWST, m .

On donne : $\omega = \sqrt{\frac{GM_S}{d_{TS}^3}}$.

Q 27. Rappeler le nom usuellement attribué au référentiel $\mathcal{R}_h$.

Q 28. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen et justifier que le référentiel $\mathcal{R}$ est non galiléen.

Q 29. On considère que le télescope JWST, positionné au point L_2 , n'est soumis qu'à l'action gravitationnelle du Soleil et de la Terre. En adoptant le point de vue du référentiel $\mathcal{R}$, écrire la relation vectorielle qui traduit l'immobilité en L_2 du télescope JWST dans ce référentiel.

Cette relation vectorielle conduit à une équation de la forme $F(R, \alpha) = 0$ où F est une fonction de la variable adimensionnée $R = \frac{r_{L_2}}{d_{TS}}$ et paramétrée par $\alpha = \frac{M_T}{M_S}$. Une fois la fonction F et la valeur de α définies, la fonction *brentq* de la bibliothèque *scipy.optimize* de Python permet de résoudre numériquement l'équation $F(R, \alpha) = 0$:

```
# Résolution numérique de l'équation F(R,alpha) = 0 dans l'intervalle [Rmin,Rmax]
solution = brentq(lambda R: F(R,alpha) , Rmin, Rmax)
```

Q 30. Proposer une procédure préalable à mettre en œuvre pour déterminer un jeu de valeurs adaptées des bornes $R_{\min}$ et $R_{\max}$ de l'intervalle dans lequel rechercher la solution. La réponse à cette question ne nécessite pas l'écriture d'un code Python, ni de connaître l'équation à résoudre.

Q 31. La résolution numérique conduit à la valeur $R = 0,009$. En déduire la valeur de la distance qui sépare la Terre du point L_2 .

Pour étudier la stabilité de l'équilibre en L_2 , on envisage un « petit » déplacement du télescope JWST qui, à un instant t , se situe alors en un point M , voisin de L_2 (voir figure 8). Les coordonnées du point M sont définies ainsi à tout instant t :

$$\overline{SM} = (d_{TS} + r_{L_2} + \varepsilon_x(t))\vec{e}_x + \varepsilon_y(t)\vec{e}_y + \varepsilon_z(t)\vec{e}_z, \quad (\text{III.1})$$

où $|\varepsilon_x(t)|$, $|\varepsilon_y(t)|$ et $|\varepsilon_z(t)|$ sont négligeables devant la distance r_{L_2} . On conduit l'étude du mouvement du télescope JWST au voisinage du point L_2 dans le référentiel $\mathcal{R}$. On admet que les coordonnées $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_z(t)$ vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_x(t) &= 2\omega\dot{\varepsilon}_y(t) + 9\omega^2\varepsilon_x(t) \\ \ddot{\varepsilon}_y(t) &= -2\omega\dot{\varepsilon}_x(t) - 3\omega^2\varepsilon_y(t) \\ \ddot{\varepsilon}_z(t) &= -4\omega^2\varepsilon_z(t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Q 32. Rappeler la loi fondamentale de la physique qui permet d'aboutir au système différentiel ci-dessus, ainsi que les précautions à prendre dans son écriture.

Q 33. Vérifier que les termes $2\omega\dot{\varepsilon}_y(t)$ et $-2\omega\dot{\varepsilon}_x(t)$ proviennent des projections respectives sur les axes (Sx) et (Sy) de la force d'inertie de Coriolis.

Q 34. Expliquer pourquoi on peut se limiter aux mouvements dans le plan (Sxy) si l'on souhaite étudier la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange L_2 .

Q 35. On cherche des solutions, en utilisant la notation complexe, sous la forme : $\underline{\varepsilon}_x(t) = \underline{A}_x e^{pt}$ et $\underline{\varepsilon}_y(t) = \underline{A}_y e^{pt}$, où $p \in \mathbb{C}$. Déterminer le système des deux équations vérifiées par les amplitudes complexes $\underline{A}_x$ et $\underline{A}_y$.

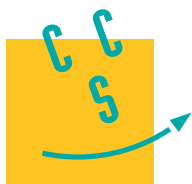
Q 36. En déduire les valeurs acceptables de p . Conclure quant à la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange L_2 dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Q 37. Estimer la valeur de la durée à partir de laquelle il convient de repositionner le télescope au voisinage du point L_2 .

Q 38. Donner au moins un argument qui justifie que le télescope JWST ait été placé au point L_2 .

Données

Constante de gravitation universelle	$\mathcal{G}$	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
Célérité la lumière dans le vide	c	$299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380649 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Année-lumière	1al	$9,46 \times 10^{15} \text{ m}$
Parsec	1pc	$3,26\text{al} = 3,08 \times 10^{16} \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	d_{TS}	$1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Masse du Soleil	M_S	$2,010 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masse de la Terre	M_T	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Minute d'arc	1'	$1/60^\circ$



Ce problème aborde quelques aspects historiques de la description de la structure de la matière telle qu'elle a été élaborée au XX^{ème} siècle.

Il comprend trois parties largement indépendantes entre elles. La première partie porte sur le modèle classique de l'atome et analyse quelques étapes de sa construction, ainsi qu'une de ses faiblesses principales. La deuxième partie porte sur une analyse quantique élémentaire de l'atome d'hydrogène et présente une expérience illustrant la dualité onde-corpuscule. La troisième partie, enfin, présente une preuve macroscopique de l'« hypothèse atomique » au travers de l'étude du mouvement Brownien.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Partie A – L'atome classique : réussites et difficultés

I Le modèle « plum pudding » de J. J. Thomson

Dans la foulée de sa « découverte » de l'électron, J.J Thomson proposa en 1904 un modèle d'atome appelé communément modèle du *plum-pudding*. Dans ce modèle, l'atome est assimilé à une sphère de rayon a_0 contenant les électrons, particules ponctuelles de charge $-q_e$ et de masse m . Ceux-ci se déplacent au sein d'une répartition volumique de charge positive ρ supposée uniforme dans le volume de l'atome et dont la présence assure l'électroneutralité de l'atome.

Dans la suite nous nous limiterons à un modèle d'atome d'hydrogène pour simplifier.

I.A – Champ électrique de la distribution de charge positive.

Commençons par déterminer le champ électrique engendré par la distribution volumique de charge positive.

Q 1. Justifier par des considérations de symétrie que ce champ électrique est radial (on se placera en coordonnées sphériques).

Q 2. Utiliser les invariances pour montrer que la distance radiale r est le seul paramètre pertinent pour caractériser le champ électrique.

Q 3. Rappeler tout d'abord le théorème de Gauss en vous appuyant sur un schéma permettant d'illustrer les notations. Appliquer ce théorème en exploitant les considérations de symétrie et d'invariance au cas de la distribution de charges considérée, dont la charge totale est notée $Q = +q_e$. En déduire que le champ électrique à l'intérieur de l'atome s'écrit $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{r}$ où $\vec{r} = r \vec{u}_r$ est le vecteur radial et $\vec{u}_r$ le vecteur radial unitaire.

I.B – Étude mécanique.

On cherche à présent à décrire le mouvement d'un électron par rapport à un référentiel relativement auquel la distribution de charge positive étudiée précédemment est au repos. On supposera ce référentiel galiléen.

À un instant pris comme origine, l'électron est placé dans l'atome à une distance initiale $r_0 < a_0$ avec une vitesse $\vec{v}_0$ telle qu'il reste toujours à l'intérieur de l'atome. On prend comme valeur numérique pour le rayon atomique $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m.

Q 4. Justifier que le poids de l'électron est négligeable par rapport à la force électrique qu'il subit.

Q 5. Montrer que le mouvement est plan.

Q 6. En prenant un repère cartésien Oxy de ce plan dont l'origine coïncide avec le centre de l'atome, montrer que les coordonnées de l'électron obéissent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$$

où ω_0 est une pulsation que l'on exprimera en fonction de la charge élémentaire q_e , de la masse de l'électron m , du rayon atomique a_0 et de la constante diélectrique du vide ϵ_0 .

Q 7. Si on suppose la vitesse initiale dirigée perpendiculairement au rayon vecteur, caractériser la trajectoire de l'électron dans l'atome.

Q 8. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron et montrer que si le module de la vitesse initiale v_0 est inférieure à la valeur $\omega_0 \sqrt{a_0^2 - r_0^2}$ alors l'électron reste bien dans l'atome tout au long de sa trajectoire.

Q 9. On montre en électromagnétisme classique (c'est-à-dire à partir des équations de Maxwell) qu'une charge animée d'un mouvement périodique de fréquence f rayonne une onde électromagnétique de même fréquence. Calculer la fréquence de l'onde électromagnétique associée, en déduire la longueur d'onde correspondante. À quel domaine spectral cela correspond-il ?

II Découverte du noyau (Rutherford)

Après avoir identifié que le rayonnement α issu des diverses sources radioactives était en fait constitué d'atomes d'hélium de charge $2q_e$ privés de leurs électrons, le physicien¹ E. Rutherford eut l'idée d'exploiter ce rayonnement pour sonder la matière et ainsi tester le modèle de J. J. Thomson étudié à la section précédente.

II.A – Déviation par une feuille de mica

Rutherford observa tout d'abord qu'un faisceau de particules α monocinétiques traversant une feuille de mica d'épaisseur $L = 0,003$ cm était dévié d'un angle maximal θ_d d'environ 2° . Il en déduisit qu'il devait exister au sein de la matière un champ électrique transverse $E_\perp$ d'environ 100 millions de volts par centimètre. L'énergie cinétique des particules α avait pour valeur $\mathcal{E}_c = 5$ MeV où $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Q 10. Justifier quantitativement l'ordre de grandeur du champ électrique transverse déduit par Rutherford à partir des résultats expérimentaux. On détaillera les notations utilisées en s'aidant d'un schéma.

II.B – Déviation des α dans le modèle de Thomson

On peut tester plus précisément le modèle de Thomson étudié plus haut (où la charge positive est supposée diluée dans l'atome) en envoyant un faisceau de particules α sur une feuille d'or. L'expérience, réalisée par H. Geiger, consiste tout d'abord à vérifier que le faisceau dans le vide et en l'absence de cible vient frapper en ligne droite un scintillateur, puis qu'en interposant la feuille d'or le faisceau s'élargit à cause des interactions des particules α avec la distribution de charges positives dans les atomes.

II.B.1) Déviation par une collision unique

Les atomes étant globalement neutres, on peut considérer qu'il n'y a interaction entre la particule α de charge $q = +2q_e$ et la charge positive $Q = +Zq_e$ (où $Z = 79$ pour l'or) que lorsque la particule rentre dans l'atome proprement dit. La déviation étant très faible, comme nous allons le vérifier plus loin, on peut calculer l'effet de l'interaction entre la particule α supposée ponctuelle et la distribution de charge positive en considérant que sa trajectoire est rectiligne (cf. figure 1). On note $\vec{v}_0$ la vitesse de la particule α .

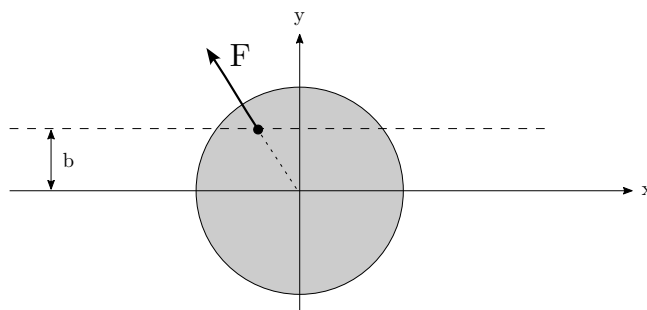


Figure 1 Trajectoire rectiligne de la particule α traversant l'atome rempli d'une densité volumique de charge uniforme

Q 11. En utilisant le champ électrique obtenu à la question Q 3 montrer que la force suivant la direction transverse (axe Oy) vaut $F_y = \frac{2Ze^2}{a_0^3}b$ où $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$, b est la distance de la trajectoire avec la droite parallèle passant par le centre diffuseur (paramètre d'impact).

Q 12. Montrer alors que la variation maximale de la quantité de mouvement de la particule α dans la direction transverse vaut $\Delta p_m = \frac{2Ze^2}{a_0 v_0}$.

Q 13. En déduire que la déviation angulaire $\delta\theta$ correspondante vaut $\delta\theta = \frac{Ze^2}{a_0 \mathcal{E}_c}$ où $\mathcal{E}_c$ est l'énergie cinétique de la particule α . Effectuer l'application numérique. On prendra $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\mathcal{E}_c = 5 \text{ MeV}$

II.B.2) Collisions multiples

Q 14. La cible constituée d'une feuille d'or d'épaisseur $L = 1 \mu\text{m}$ contient N atomes sur la trajectoire de la particule α . Celle-ci effectue donc N collisions dont en moyenne la moitié vont donner une déviation positive $+\delta\theta$ et l'autre moitié une déviation négative $-\delta\theta$. on peut alors montrer que la déviation totale est une variable

¹ et pourtant prix Nobel de chimie !

aléatoire dont l'écart type s'écrit $\Delta\theta = \delta\theta\sqrt{N}$. Calculer l'ordre de grandeur de cette déviation et conclure quant à la possibilité d'avoir des déviations angulaires importantes (plusieurs dizaines de degrés)

II.C – Rétrodiffusion des α dans le modèle de Rutherford

L'expérience de Geiger montre qu'on observe des angles de déviation importants, pouvant aller jusqu'à la rétrodiffusion (angles voisins de 180°), ce que Rutherford interprète comme l'existence d'une zone de très petite taille contenant la totalité de la charge positive et appelée depuis noyau de l'atome. On considère dans le modèle de Rutherford que la particule alpha ne pénètre jamais dans la distribution de charge positive.

Q 15. On considère le cas extrême d'une collision frontale et on suppose pour simplifier que l'atome est immobile compte tenu de sa masse importante par rapport aux particules α . Montrer en utilisant la conservation de l'énergie mécanique que le noyau possède un rayon maximal r_0 vérifiant $r_0 = \frac{2Ze^2}{\mathcal{E}_c}$ où $\mathcal{E}_c$ est l'énergie cinétique initiale des particules α .

Q 16. Application numérique : on obtient une rétrodiffusion élastique jusqu'à des énergies incidentes $\mathcal{E}_c = 40$ MeV des α . Déterminer alors les dimensions du noyau. Commenter.

III Instabilité d'un modèle d'atome « classique »

Le modèle d'atome de Rutherford avec une charge positive concentrée dans une région très petite de l'espace ayant été établi par les expériences de Geiger, on se propose dans cette partie d'étudier l'instabilité d'un atome dont les électrons seraient en orbite autour du noyau de façon analogue aux mouvements des planètes autour du Soleil. On se limitera ici au cas d'un atome d'hydrogène avec une charge positive $+q_e$ et un électron de charge $-q_e$ en orbite circulaire.

III.A – Puissance électromagnétique rayonnée par une charge accélérée

On peut montrer dans le cadre de l'électromagnétisme de Maxwell qu'une charge q animée d'un mouvement accéléré de vecteur d'accélération ($\vec{a}$) rayonne au point M situé à grande distance un champ électrique $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{a}_\perp}{r}$ où $\vec{a}_\perp$ est la projection du vecteur accélération sur un plan perpendiculaire à la droite reliant la charge à l'observateur.

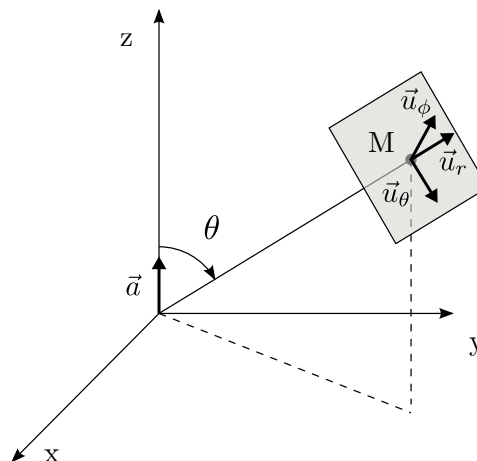


Figure 2 Système de coordonnées pour le calcul de la puissance électromagnétique rayonnée par une charge accélérée

On introduit la base locale des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$.

Q 17. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ associé en admettant que localement l'onde rayonnée a une structure d'onde plane se propageant dans la direction de $\vec{OM}$.

Q 18. Donner l'expression du vecteur de Poynting, en fonction des champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$, et rappeler son interprétation physique.

Q 19. En déduire alors que la puissance rayonnée à grande distance dans tout l'espace a pour expression $P = \frac{1}{6\pi} \frac{q^2}{\epsilon_0 c^3} a^2$ où a est le module du vecteur accélération. On donne l'intégrale $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

III.B – Etude énergétique de l'atome « planétaire »

Q 20. Dans un modèle d'atome d'hydrogène « planétaire » où l'électron a un mouvement circulaire uniforme autour du noyau, montrer que l'énergie mécanique s'écrit $E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{R}$ où R désigne la distance électron-noyau, et où on a posé comme précédemment $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

Q 21. On tient compte à présent de la puissance électromagnétique rayonnée par l'électron. Par conservation de l'énergie totale du système, l'émission d'une énergie de rayonnement doit s'accompagner d'une diminution

de l'énergie mécanique de l'électron. En supposant la trajectoire quasi-circulaire de rayon R , montrer que la puissance rayonnée par l'électron s'écrit $P = \frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3} \frac{1}{R^4}$.

Q 22. En déduire que le rayon moyen R obéit à l'équation différentielle $R^2 \frac{dR}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3}$.

Q 23. Estimer alors le temps de vie τ de cet atome.

Q 24. Effectuer l'application numérique en prenant pour rayon initial $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m. Commentaires ?

Partie B – L'atome quantique

IV Relations d'Heisenberg

On cherche à déterminer ici l'ordre de grandeur de l'énergie d'un système atomique dans son état de plus basse énergie (état fondamental) en tenant compte des contraintes quantiques.

On considère un modèle d'atome d'hydrogène où l'électron en interaction avec le proton comme noyau est décrit par la fonction d'onde suivante :

$$\begin{cases} \psi(\vec{r}) = A & \text{pour } r < r_0 \\ \psi(\vec{r}) = 0 & \text{pour } r > r_0 \end{cases}$$

où $r = \|\vec{r}\|$ est le module du vecteur position de l'électron et A est une constante. Le noyau, quant à lui, est supposé localisé en $r = 0$.

Q 25. Rappeler l'interprétation physique de la fonction d'onde $\psi(r)$ et en déduire que la valeur de la constante A (à une phase près) vaut $A = \sqrt{\frac{3}{4\pi r_0^3}}$.

Q 26. Calculer la valeur moyenne de la position $\langle \vec{r} \rangle$ et du carré de la distance $\langle \|\vec{r}\|^2 \rangle$. Montrer alors que la « dispersion en position » définie par la relation $\Delta r = \sqrt{\langle \|\vec{r}\|^2 \rangle - \|\langle \vec{r} \rangle\|^2}$ vaut $\Delta r = \sqrt{\frac{3}{5}} r_0$.

Q 27. Par analogie avec la fonction d'onde spatiale $\psi(\vec{r})$, on introduit la fonction d'onde en quantité de mouvement, $\chi(\vec{p})$ pour décrire la densité de probabilité dans l'espace des quantités de mouvement. On admet que la fonction d'onde en quantité de mouvement, $\chi(\vec{p})$ vérifie :

$$\begin{cases} \chi(\vec{p}) = B & \text{pour } p < p_0 \\ \chi(\vec{p}) = 0 & \text{pour } p > p_0 \end{cases}$$

où p désigne le module de $\vec{p}$, B est une constante et p_0 un paramètre ajustable que nous déterminerons un peu plus loin. Par analogie avec la notion de fonction d'onde spatiale, proposer une interprétation du carré du module de la fonction d'onde $\chi(\vec{p})$.

Q 28. Comme précédemment, calculer la constante B et la « dispersion en quantité de mouvement » Δp .

Q 29. En vous appuyant sur les inégalités spatiales d'Heisenberg, justifier que si l'électron est dans son état fondamental (c'est-à-dire de plus basse énergie) on doit avoir la relation $\frac{3}{5} p_0 r_0 \sim \hbar$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite et le signe $\sim$ signifie « de l'ordre de grandeur de ».

Remarque : on a gardé le facteur $3/5$ par cohérence avec les calculs précédents mais celui-ci ne signifie rien d'un point de vue quantitatif sur le résultat final.

Q 30. On cherche l'expression de l'énergie de l'électron en fonction de r_0 . Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'un électron dans le champ électrique créé par le noyau. On notera $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ où q_e est la charge élémentaire.

On cherche l'expression de la valeur a_0 du paramètre r_0 qui minimise l'énergie moyenne de l'électron (état fondamental).

Q 31. Montrer que l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p \rangle$ de l'électron décrit par la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ s'écrit $\langle E_p \rangle = -\frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0}$ où $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ avec q_e est la charge élémentaire.

Q 32. Montrer de même que l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ de l'électron décrit par la fonction d'onde $\chi(\vec{p})$ s'écrit $\langle E_c \rangle = \frac{3}{10} \frac{p_0^2}{m}$.

Q 33. En éliminant p_0 grâce à la relation obtenue à la question Q 29 (on remplacera le signe $\sim$ par une égalité pour effectuer ce calcul), établir l'expression de $\langle E_m \rangle$ en fonction uniquement de r_0 .

Q 34. En déduire que la « taille » de l'atome d'hydrogène a pour expression $a_0 \sim \frac{\hbar^2}{m e^2}$.

Q 35. Effectuer l'application numérique. Commenter.

V L'atome quantique : onde ou particule ?

L'observation d'interférences liées aux ondes de « particules » associées aux molécules reste un moyen spectaculaire de mettre en évidence le comportement quantique de la matière. En 2012 une collaboration d'équipe de physiciens et chimistes a réalisé une expérience² de type « fentes d'Young » avec des molécules de phtalocyanine ($C_{32}H_{18}N_8$ noté par la suite PcH_2 .)

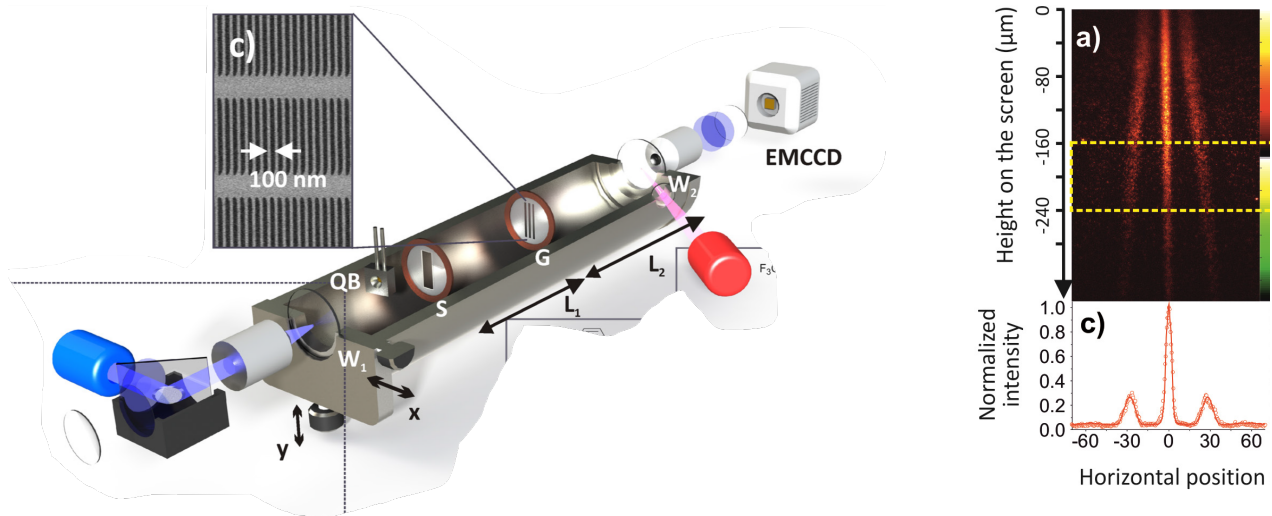


Figure 3 Expérience d'interférence de molécules de phtalocyanine. À gauche : le dispositif. À droite : résultats expérimentaux, les positions horizontales sont mesurées en micromètres.

Le dispositif (cf. figure 3 gauche) est constitué d'un laser bleu qui vient évaporer des molécules de phtalocyanine déposées sur la fenêtre d'entrée W_1 . Le faisceau moléculaire ainsi produit est ensuite collimaté à l'aide de la fente S puis diffracté par le réseau G placé à une distance L_1 de S et constitué de fentes séparées de 100 nm les unes des autres. Les molécules sont enfin déposées sur un « écran » placé à la distance $L_2 = 564$ mm de G (fenêtre de sortie W_2) et détectées par fluorescence à l'aide d'un laser rouge et d'une caméra CCD haute résolution. La répartition spatiale des molécules sur l'écran (cf. figure 3 droite) montre clairement des franges qu'on se propose d'interpréter par un phénomène d'interférence. L'histogramme dans la fenêtre inférieure correspond à l'intégration des événements reçus dans l'intervalle de déflexion compris entre les lignes pointillées.

Q 36. À partir de la formule de la molécule de phtalocyanine, calculer la masse d'une molécule de PcH_2 .

Q 37. On note un élargissement des franges « vers le bas » que l'on attribue à l'action de la pesanteur sur la trajectoire initialement horizontale des molécules. Montrer par un calcul simple de mécanique classique que la trajectoire d'une particule de masse m soumise à l'action de la pesanteur g et de vitesse initiale horizontale v_0 , présente à une distance D de son point de lancement une déviation verticale h donnée par la relation $h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{D}{v_0}\right)^2$.

On suppose un axe vertical orienté en sens opposé à la direction de $\vec{g}$ conformément à la convention adoptée dans l'article de façon à avoir des déflexions négatives comme indiquées sur la figure 3 droite.

Q 38. Comme indiqué sur la figure 3 droite, on sélectionne des molécules dont la déflexion se situe dans l'intervalle $[-240, -160]$ μm . En déduire la vitesse moyenne v_0 et la dispersion (indétermination) Δv correspondante. On prendra $D = 0,96$ m.

Q 39. Définir puis calculer la longueur d'onde de de Broglie λ_B des molécules de phtalocyanine.

Q 40. En interprétant le phénomène observé comme résultant d'interférences entre des ondes de longueur d'onde λ_B , établir simplement que l'on observe des interférences constructives (et donc des densités de probabilités de présence maximales des molécules) dans les directions θ_k données par la relation $a \sin \theta_k = k \lambda_B$ où a est la distance entre deux fentes consécutives et k est un nombre entier.

Q 41. Montrer alors que l'interfrange i que l'on définira vaut $i = \frac{\lambda_B L_2}{a}$ où L_2 est la distance entre le réseau et l'écran. Effectuer l'application numérique, puis estimer la dispersion Δi compte tenu de la dispersion en vitesse obtenue plus haut. On négligera les incertitudes sur les mesures de L_2 et de a .

Q 42. Comparer avec la valeur obtenue expérimentalement. Conclure.

² «Real-time single-molecule imaging of quantum interference» Th. Juffmann et al, Nature nanotechnology **7** (2012) p.297

Partie C – Préhistoire du concept d'atome : le mouvement brownien

On appelle *mouvement brownien* l'agitation spontanée de particules de tailles micrométriques plongées dans un fluide sous l'action des fluctuations thermiques. Ce phénomène n'a été correctement décrit qu'à partir des travaux d'Einstein en 1905. Ce dernier montra tout d'abord qu'il existe une relation entre la diffusion des particules browniennes, la température et la viscosité du fluide dans lequel ces particules sont plongées. Quelques années plus tard, en 1908, Jean Perrin réalisera avec Léon Brillouin une célèbre série d'expériences qui confirmera la validité de l'interprétation einsteinienne du mouvement brownien et confortera définitivement la réalité de l'hypothèse atomique.

VI Présentation de l'expérience de Brillouin et Perrin

Cette expérience³ consiste tout d'abord à préparer une solution de grains colloïdaux (appelés par la suite simplement grains) de rayon $r = 0,52 \mu\text{m}$ dans un mélange eau-glycérol de viscosité $\eta = 0,165 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. On place alors cette solution colloïdale, pour laquelle le nombre de grains par unité de volume est initialement uniforme et vaut $n_0 = 7,9 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$, entre deux lames de microscope séparées d'un millimètre (cf. figure 4 gauche). Cette distance entre les deux lames est suffisante pour considérer que l'évolution de la densité de grains au voisinage des parois se fait dans un milieu semi-infini (cf. figure 4 droite). Le tout est placé dans un thermostat de température $\theta = 38,7^\circ\text{C}$.

Perrin remarqua que les particules qui viennent en contact avec les parois du récipient y restent collées, ce qui entraîne une déplétion en particules des régions proches des parois. Il comprit alors qu'on pouvait déterminer le coefficient de diffusion de ces particules en enregistrant au cours du temps, le nombre de particules par unité de surface qui se déposent sur le couvre-objet.

On admet que, dans le système de coordonnées de la figure 4 (à droite), le nombre $n(x, t)$ de grains colloïdaux par unité de volume obéit à l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (\text{VI.1})$$

où D représente le *coefficient de diffusion* des grains au sein du milieu.

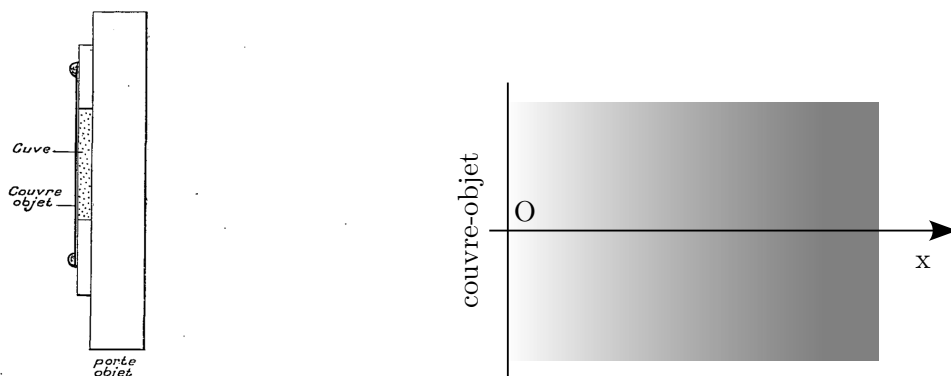


Figure 4 Dispositif expérimental. À gauche : schéma de la cuve contenant les grains colloïdaux plongés dans une solution d'eau glycinée, extrait de la publication de L. Brillouin. À droite : représentation du système de coordonnées Ox permettant de repérer les grains par rapport à leur position en référence à la paroi couvre-objet située à l'origine.

Q 43. Citer deux autres phénomènes de la physique dont l'évolution est modélisée par une équation de ce type.

VI.A – Résolution numérique

La résolution analytique de l'équation VI.1 avec les conditions spécifiques de l'expérience (adhésion des grains sur la paroi couvre-objet) n'étant pas élémentaire, nous nous proposons de modéliser la situation par une analyse numérique basée sur un modèle probabiliste.

Pour cela, on étudie la densité de grains dans une boîte de longueur L telle que la paroi absorbante soit localisée en $x = 0$ et l'autre extrémité en $x = L$ suffisamment loin pour que la densité reste à sa valeur initiale n_0 au cours de l'évolution temporelle considérée.

— On discrétise alors l'espace dans la direction Ox en N_e intervalles de longueur a suffisamment petits pour que la densité de grains ne varie pas de façon significative sur cette distance ; et de même, pour étudier

³ en réalité conduite par Léon Brillouin alors jeune normalien sous la supervision de Jean Perrin.

l'évolution temporelle de cette densité sur une durée T , on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en N_t intervalles de durée τ telle que $T = N_t \tau$.

- Soit $M(x, t) = n(x, t) \times a$ la densité surfacique de particules dans une tranche d'épaisseur a . Introduisons la densité surfacique normalisée $u(x, t) = \frac{M(x, t)}{n_0 a}$, on notera alors $u_{k, m} \equiv u(x = ka, t = m\tau)$ la densité surfacique entre les abscisses $x_k = ka$ et $x_{k+1} = (k+1)a$ prise à l'instant $t_m = m\tau$.
- Enfin, on notera p la probabilité qu'une particule dans la tranche numéro k passe dans une tranche voisine $(k+1)$ pendant l'intervalle de temps τ et de même la probabilité p identique pour qu'elle passe dans la tranche voisine $(k-1)$ pendant ce même intervalle de temps. *Remarque* : la couche en $k=0$ correspondra donc ici à la paroi « adhésive » du couvre objet.

Q 44. Montrer que pour tout m et pour $k \geq 2$, on a la relation $u_{k, m+1} = u_{k, m} + p(u_{k+1, m} + u_{k-1, m} - 2u_{k, m})$

Q 45. Montrer que par passage à la limite continue ($\tau \rightarrow 0$ et $a \rightarrow 0$) on retrouve bien l'équation VI.1 à condition de poser $D = \frac{pa^2}{\tau}$.

Q 46. Justifier que compte tenu des conditions aux limites dues au comportement des particules sur la paroi, on a pour tout $m \geq 0$ en $k=0$ et $k=1$ les relations :

$$u_{0, m+1} = u_{0, m} + pu_{1, m},$$

$$u_{1, m+1} = pu_{2, m} + (1 - 2p)u_{1, m}.$$

L'ensemble des valeurs numériques $u_{k, m}$ est déterminé à l'aide d'un programme Python non demandé.

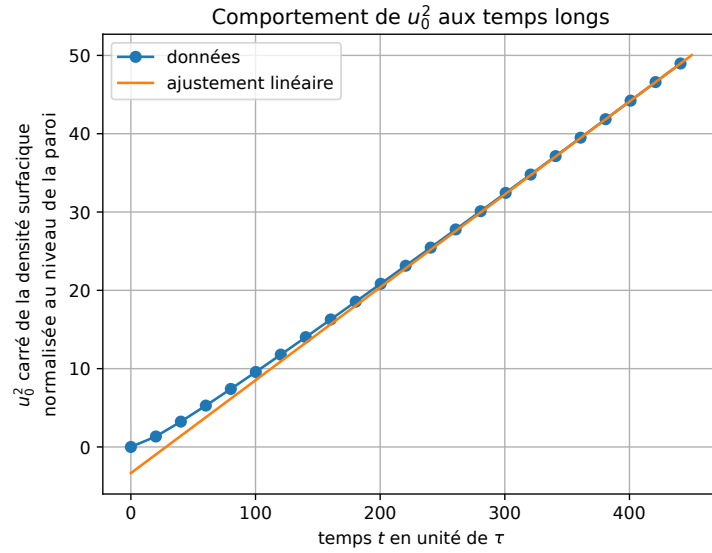


Figure 5 Résultats de la simulation numérique de l'équation de diffusion en prenant : $a = 1$, $\tau = 1$ et $p = 0,1$. Tracé du carré de la densité surfacique normalisée de particules sur la paroi en fonction du temps (en unité de τ), dans le cas $p = 0,1$.

Q 47. L'évolution du carré de la densité surfacique normalisée en surface en fonction du temps (valeurs de $u_{0, m}^2$) est représenté sur la figure 5, pour la valeur $p = 0,1$, du paramètre de probabilité de saut. On note $M_0(t)$ la densité surfacique sur la paroi (pour rappel, on a $M_0(t) = n_0 \times a \times u(0, t)$). Vérifier à l'aide de ce graphe que, passés les premiers instants, la densité surfacique $M_0(t)$ suit la relation $M_0^2(t) \simeq \alpha D n_0^2 t$ où α est un coefficient numérique voisin de 1 à déterminer à partir du graphe.

VI.B – Comparaison avec les résultats de Brillouin/Perrin

Les résultats expérimentaux obtenus par Léon Brillouin sont représentés sur la figure 6) dans laquelle le carré du nombre de grains N_p^2 comptés sur une surface d'aire $S = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$ est représenté en fonction de la durée de ses expériences exprimées en heures.

Q 48. En utilisant les données numériques précisées plus haut dans la description de l'expérience et en vous appuyant sur le résultat de la question précédente, extraire de la figure 6 la valeur du coefficient de diffusion D des grains colloïdaux dans cette solution. On indiquera la procédure mise en œuvre et on prendra soin d'exprimer ce résultat en unité du système international (SI).

Une relation, due à Einstein, établit un lien très général entre le coefficient de diffusion des grains colloïdaux de rayon r , D , et la viscosité du fluide η , à la température T :

$$6\pi\eta r D = k_B T. \quad (\text{VI.2})$$

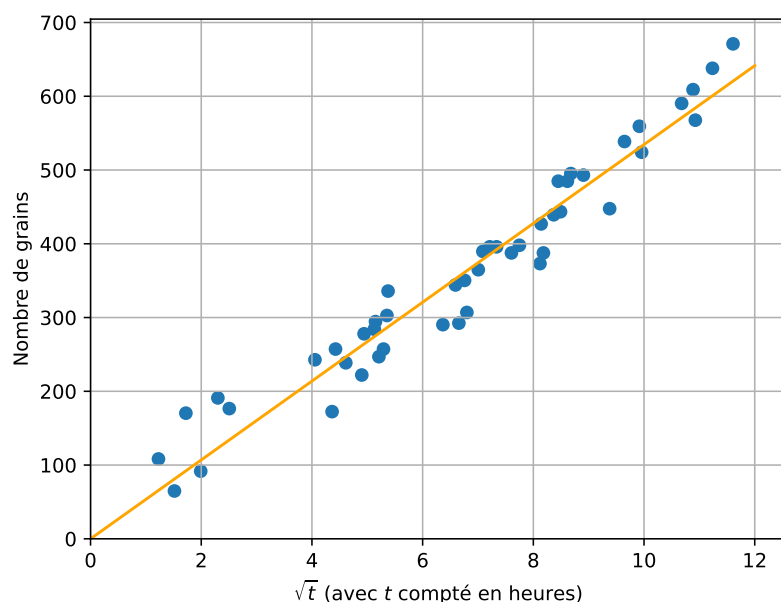


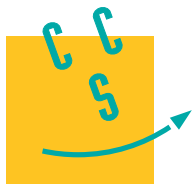
Figure 6 Courbe représentant le carré du nombre de grains déposés sur une aire $S = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$ de la paroi couvre-objet en fonction du temps exprimé en heures.

Q 49. En exploitant le résultat précédent et la relation d'Einstein (eq equation VI.2) déduire une estimation de la constante de Boltzmann k_B , puis de la constante d'Avogadro. On indiquera précisément les différentes valeurs numériques et leurs unités utilisées dans ce calcul. On donne la constante des gaz parfait $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Commenter le résultat.

Données et formulaire

- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- champ de gravitation à la surface de la Terre : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- charge élémentaire : $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- masses molaires : du carbone $M(C) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, de l'azote $M(N) = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de l'hydrogène $M(H) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- électron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- on notera $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ dont la valeur numérique vaut $e^2 = 2,3 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$ en unité du système international ou en unité atomiques $e^2 = 1,4 \text{ eV} \cdot \text{nm}$

• • • FIN • • •



Enregistrement et reproduction du son

Le sujet comporte 3 problèmes indépendants. Les données sont regroupées en fin d'énoncé.

On se propose d'étudier quelques notions physico-chimiques mises en jeu lors de l'enregistrement et de la reproduction du son, par exemple à usage musical. Le problème A présente les récepteurs d'ondes sonores que sont les microphones électrostatiques et l'oreille humaine. Le problème B s'intéresse à la production d'ondes sonores au moyen d'un ensemble de haut-parleurs électrodynamiques. Enfin, le problème C décrit quelques propriétés associées à un dispositif de stockage de ces enregistrements, ancien mais revenu d'actualité, le disque vinyle.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un numéro de question souligné. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Notations

Les grandeurs complexes seront soulignées sauf le nombre imaginaire pur j tel que $j^2 = -1$. Les grandeurs sinusoïdales comme $a(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi)$ pourront être représentées par la grandeur complexe $\underline{a}(t) = a_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A}_0 e^{j\omega t}$, où l'amplitude complexe est $\underline{A}_0 = a_0 e^{j\varphi}$ de sorte que $a(t) = \text{Re}(\underline{a})(t)$. La base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ sera notée $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Dans le plan (Oxy) , on pourra aussi utiliser les coordonnées polaires (r, θ) telles que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

A – Capter le son : microphone et oreille interne

Une onde sonore se propageant dans l'air consiste essentiellement en une variation de la pression P autour de sa valeur moyenne P_0 , par exemple de la forme $P(x, t) = P_0 + P_1 \cos(\omega t - kx)$ pour une onde d'amplitude P_1 , harmonique de pulsation ω se propageant dans la direction de $\vec{u}_x$ à la célérité $c_a = \omega/k$. Un gaz de pression P exerçant sur toute surface d'aire S une force normale d'intensité PS , les capteurs sonores sont de nature mécanique ; c'est à la fois le cas des microphones électrostatiques (partie I) mais aussi de l'oreille interne humaine (partie II). Ces deux parties sont indépendantes.

I – Microphones électrostatiques et directivité

I.1 – Le microphone électrostatique

Un microphone électrostatique est formé de deux électrodes planes, de même surface S , placées à courte distance d l'une de l'autre dans le vide, de même normale $\vec{u}_x$. L'électrode située en $x = d$ est fixe et maintenue au potentiel nul ; l'électrode placée en $x = 0$ (en l'absence d'onde sonore) est une membrane mobile sous l'action de l'onde sonore ; elle se déplace alors jusqu'en $x = X(t)$; elle est maintenue au potentiel constant V_0 (figure 1).

En l'absence d'onde sonore le courant électrique i dans le générateur est nul ; en revanche c'est la mesure de ce courant $i(t)$ qui permet la mise en évidence du déplacement $X(t)$ de la membrane mobile. On admet que le champ électrique qui règne entre les deux armatures de ce condensateur peut être relié aux charges $\pm Q(t)$ des deux armatures par les lois de l'électrostatique. On note ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et on suppose que les charges $\pm Q(t)$ sont réparties uniformément sur les surfaces des deux armatures en regard, ce qui revient à négliger tout effet de bord.

- Q1.** Déterminer le champ électrique $\vec{E}_1$ créé par la seule armature mobile de charge $+Q$ de part et d'autre de celle-ci. On pourra exprimer le résultat de façon distincte selon le domaine d'espace.
- Q2.** Calculer de même le champ $\vec{E}_2$ créé par l'armature fixe. En déduire le potentiel électrostatique créé en tout point de l'espace situé entre les deux armatures, puis exprimer la capacité $C(t)$ du condensateur ainsi formé en fonction de ϵ_0 , S , d et $X(t)$.

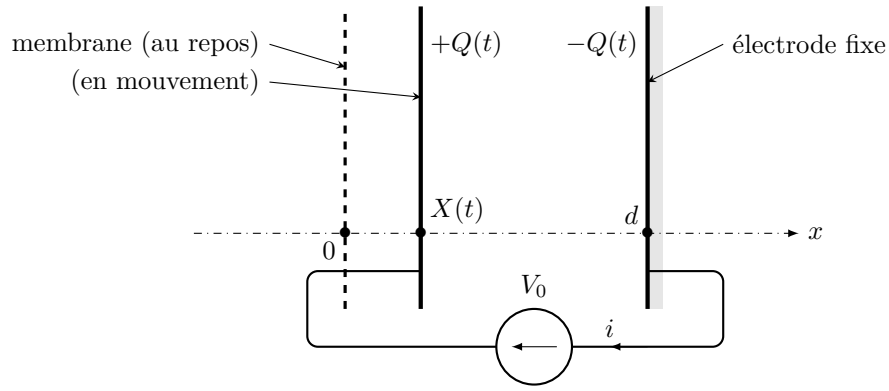


Figure 1 – Principe d'un microphone électrostatique.

Q3. Montrer que, lorsque la membrane est en mouvement à la vitesse $\vec{v} = \frac{dX}{dt} \vec{u}_x$, le courant qui parcourt le circuit s'écrit $i(t) = K(X) \frac{dX}{dt}$ et exprimer $K(X)$.

La détermination de ce courant permet donc une mesure non linéaire du déplacement de la membrane, sous l'action des forces de pression, des liaisons élastiques de la membrane et des forces électrostatiques exercées sur celle-ci par l'autre électrode du condensateur.

On note $\vec{F}_e = F_e(X) \vec{u}_x$ la résultante des forces électriques exercées sur la membrane mobile.

Q4. Exprimer $F_e(X)$ en fonction de ε_0 , S , V_0 , X et d . Montrer que cette force est conservative et relier l'énergie potentielle associée $E_p(X)$ à l'énergie électrostatique $W_e(X)$ du condensateur.

I.2 – Directivité d'un microphone « canon »

Un microphone électrostatique ordinaire enregistre le son associé à la résultante de toutes les ondes sonores qui parviennent à sa membrane. Pour enregistrer le son provenant d'une direction unique à grande distance, on peut utiliser un microphone à tube à interférences, aussi désigné microphone « canon » à cause de sa forme (cf. photographie de la figure 2).

Devant la membrane sensible M, on dispose un tube percé régulièrement d'orifices distants de d , de sorte que le signal enregistré en provenance d'une direction θ résulte des interférences entre N ondes acoustiques (sur la figure 3, $N = 4$). On considère dans la suite que ces ondes sont harmoniques de fréquence f comprise dans l'intervalle $[100 \text{ Hz}, 5 \text{ kHz}]$; elles se propagent à la célérité c_a .



Figure 2 – Microphone canon.
Source : DPA microphones.

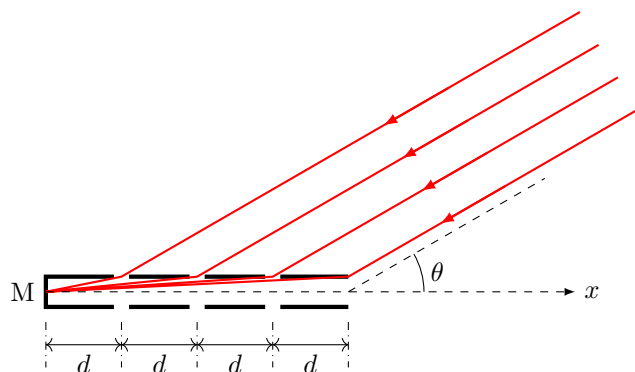


Figure 3 – Microphone à tube à interférences.

Après diffraction par leur orifice d'entrée dans le tube, chacune de ces N ondes se propage en direction de la membrane de détection selon une direction que l'on assimile dans la suite exactement à l'axe (Ox) du tube (ce qui revient à négliger la largeur du tube sur la figure 3).

Le signal reçu au niveau de la membrane est la somme des amplitudes complexes des N ondes, $\underline{p}_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^N \underline{p}_k$ et

l'intensité acoustique est la moyenne temporelle $I_{\text{tot}} = |\underline{p}_{\text{tot}}|^2$. On admet que ces N ondes parviennent en M avec la même amplitude p_0 et on pose $I_0 = p_0^2$.

Toutes les propriétés liées à la diffraction et aux interférences des ondes acoustiques sont considérées comme identiques aux mêmes propriétés pour les ondes lumineuses, et bien sûr en particulier le théorème de Malus.

On s'intéresse d'abord au cas où $N = 2$.

- Q5.** Montrer que, lors de la réception en M, $\underline{p}_2 = \underline{p}_1 e^{-j\varphi}$ et exprimer φ en fonction de c_a , f , d et θ .
- Q6.** Établir l'expression de l'intensité du signal acoustique reçu en M sous la forme $I_{\text{tot}} = I_0 f_2(\varphi)$. Expliciter et commenter l'expression de la fonction f_2 .

On se place désormais dans le cas où $N = 4$.

- Q7.** Montrer que l'intensité totale se met sous la forme $I_{\text{tot}} = I_0 f_2(\varphi) f_2(2\varphi)$. Déterminer la période ψ de cette fonction de φ , ainsi que sa valeur maximale I_{max} ; commenter physiquement les valeurs de ψ et I_{max} .

Le tracé de la fonction $I_{\text{tot}}(\varphi)$ est proposé figure 4. On considère qu'un signal acoustique n'est significatif que si son intensité représente au moins 20 % de la valeur maximale I_{max} .

- Q8.** Montrer qu'un microphone à tube à interférences construit selon le principe ci-dessus sélectionne les ondes acoustiques provenant d'un cône étroit d'axe (Ox) de demi-angle au sommet θ_{max} , à exprimer en fonction notamment de c_a , f et d . Préciser comment il convient de choisir d pour assurer la condition $\theta_{\text{max}} < 5^\circ$. Commenter.

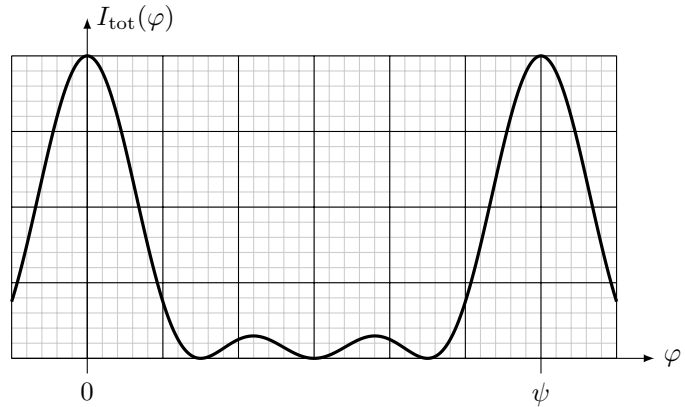


Figure 4 – Tracé de $I_4(\varphi)$.

II – L'oreille interne

Au sein de l'oreille interne, la cochlée est un tube assez long, modélisé comme un tube d'axe (Ox) , de diamètre variable, qui contient les terminaisons du nerf auditif. En fonction de leur position x dans le tube, ces terminaisons sont sensibles à différentes fréquences. Dans ce tube se propage le long de (Ox) une onde acoustique caractérisée par l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2(x) = \frac{k_0^2 \omega^2}{\omega_r^2(x) - \omega^2}$$

où $k_0 > 0$ est une constante et $\omega_r(x) > 0$ est une fonction monotone.

Une onde de pulsation ω entre dans la cochlée en $x = 0$, puis se propage le long de l'axe (Ox) jusqu'au lieu d'absorption, en $x = x_r$, où l'onde est absorbée et détectée par le nerf auditif.

- Q9.** Exprimer la condition de propagation de l'onde pour une position x quelconque comprise entre 0 et x_r . En déduire que $\omega_r(x)$ est nécessairement monotone décroissante. Relier la pulsation ω de l'onde et la valeur de $\omega_r(x_r)$ au point d'absorption.

On s'intéresse à l'onde acoustique qui se propage dans la cochlée en amont du lieu de détection, donc pour $x < x_r$; cette onde est recherchée sous la forme $\underline{p}(x, t) = A(x) e^{j(\omega t - \varphi(x))}$ où $A(x) > 0$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions réelles; cette onde $\underline{p}(x, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2}(x, t) = -\underline{k}^2(x) \underline{p}(x, t).$$

- Q10.** Établir deux équations différentielles vérifiées par $\varphi(x)$ et $A(x)$. En déduire la relation $A(x) = \frac{H}{\sqrt{\varphi'(x)}}$ où

$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ et H est une constante d'intégration (à ne pas chercher à déterminer). Justifier le signe de φ' dans le raisonnement suivi.

- Q11.** Préciser les sens de variation de $A(x)$ et $k(x)$, puis proposer un tracé de l'allure de l'onde (réelle) de pression qui se propage dans la cochlée le long de (Ox) .

B – Produire le son : haut-parleurs électrodynamiques

Ce problème B est consacré à l'étude des haut-parleurs électrodynamiques (avec mise en mouvement d'une membrane par des forces électromagnétiques). L'étude proposée ici comporte deux parties I et II qui sont totalement indépendantes.

I – Principe du haut-parleur électrodynamique

Inventé en 1925, le haut-parleur électrodynamique comporte un aimant permanent dont les pièces polaires sont formées de deux cylindres coaxiaux. Le cylindre central en forme le pôle nord magnétique et le cylindre externe le pôle sud magnétique, de sorte que le champ magnétique $\vec{B}_0$ y est radial, dirigé du centre vers l'extérieur. Un circuit formé de N spires quasiment circulaires, de même rayon r , entoure le cylindre central (le schéma de la figure 5 montre une seule de ces spires). On note i le courant électrique qui parcourt ces spires. Un point de l'espace situé entre les deux pièces polaires sera repéré en coordonnées polaires avec la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, l'axe commun des cylindres et des spires étant noté (Oz) .

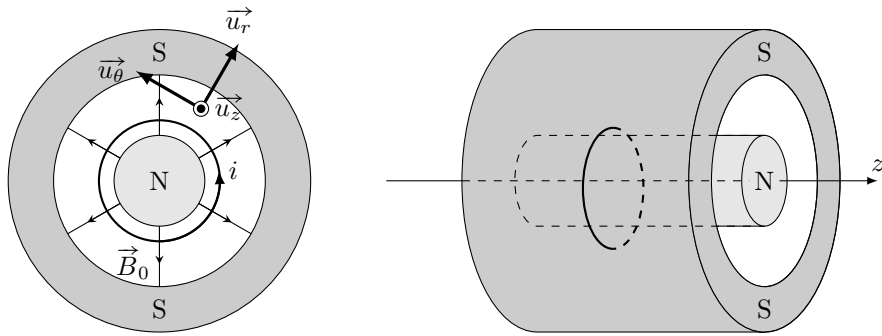


Figure 5 – Une spire du haut-parleur électrodynamique.

On note R_1 la résistance d'une seule des spires et L_1 son inductance propre. Ces N spires sont parcourues par le même courant et pratiquement jointives.

Q12. Exprimer la résistance totale R_b et l'inductance totale L_b de la bobine formée des N spires en fonction de R_1 , L_1 et N .

L'ensemble des spires est mis en mouvement le long de l'axe (Oz) avec la vitesse $\vec{v} = \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$. Elles restent dans le domaine de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_r$ où B_0 est une constante.

Q13. Montrer que la force électromotrice e induite par ce mouvement dans l'ensemble des spires s'écrit $e = 2\pi r N B_0 \frac{dz}{dt}$. On pourra s'intéresser au flux Φ du champ magnétique à travers un cylindre $(\mathcal{C})$, appuyé sur le contour fermé d'une spire d'une part et refermé en dehors de l'aimant, dans une zone où le champ magnétique est nul ou négligeable (voir figure 6).

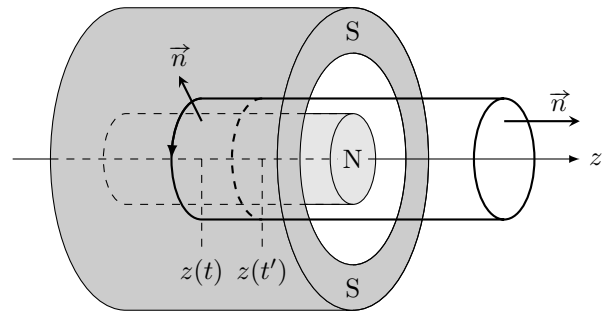


Figure 6 – Une surface appuyée sur l'une des spires mobiles.

Q14. Déterminer l'expression de la résultante $\vec{F}$ des forces électromagnétiques qui s'exercent sur les N spires. Exprimer $\vec{F} \cdot \vec{v}$ en fonction de e notamment et proposer une interprétation de cette relation.

La figure 7 présente un modèle électromécanique du haut-parleur. Les N spires de la bobine sont rigidement liées à une membrane mobile retenue à sa position d'équilibre $z = 0$ (en l'absence de signal électrique) par un ensemble de ressorts disposés sur la périphérie de la membrane, équivalents à un ressort unique de raideur K . L'alimentation de la bobine par l'étage de sortie de l'amplificateur est modélisée par un générateur de tension $E(t)$. On note M la masse de l'ensemble mobile formé de la membrane et de la bobine et on néglige l'influence du poids. On tient cependant compte des forces dissipatives exercées par l'air sur la membrane du fait de la création de l'onde acoustique lors des mouvements de la membrane : elles sont modélisées par la résultante $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ (modèle de type fluide).

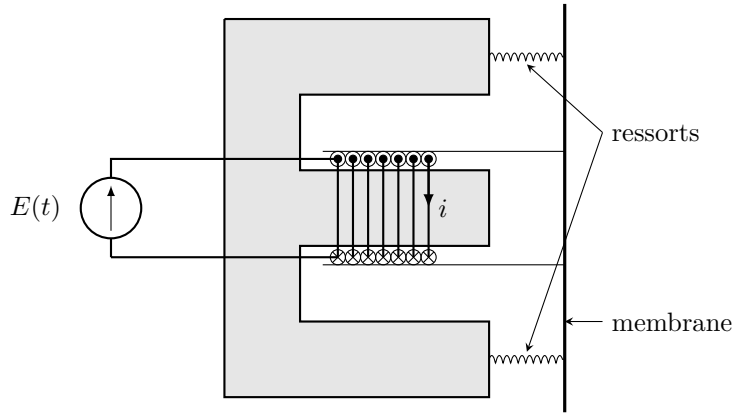


Figure 7 – Un modèle de haut-parleur électrodynamique.

Q15. Montrer que les grandeurs $i(t)$ et $z(t)$ vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_m} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = -\beta i(t)$$

où ω_0 , Q_m et β sont à exprimer en fonction de K , M , λ , r , N et B_0 .

Q16. Représenter le circuit électrique équivalent et en déduire la seconde équation différentielle couplant $i(t)$ et $z(t)$:

$$E(t) = R_b i(t) + L_b \frac{di}{dt} - \gamma \frac{dz}{dt}$$

où γ est à exprimer en fonction de r , N et B_0 .

On note $\mathcal{P}_G = E(t) i(t)$, $E_c = \frac{1}{2} M \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$, $E_e = \frac{1}{2} K z^2$ et $E_m = \frac{1}{2} L_b i^2$.

Q17. Établir un bilan énergétique du fonctionnement du haut-parleur ; exprimer notamment la puissance $\mathcal{P}_a$ transmise par la membrane à l'air environnant (et en particulier à l'onde acoustique créée par le haut-parleur).

En régime harmonique formé de pulsation ω , on note $E(t) = E_0 e^{j\omega t}$, $i(t) = \underline{I}_0 e^{j\omega t}$ et on définit l'impédance électromécanique complexe $\underline{Z}_m = E_0 / \underline{I}_0$ du haut-parleur.

Q18. Exprimer $\underline{Z}_m(\omega)$ en fonction de ω , R_b , L_b , ω_0 , Q_m , β et γ . Préciser le comportement limite de $\underline{Z}_m(\omega)$ à très basse fréquence.

II – Haut-parleurs et sélectivité fréquentielle

II.1 – Ordres de grandeur

Un dispositif de reproduction du son comporte en général plusieurs haut-parleurs, adaptés spécifiquement à des gammes distinctes de fréquence. On s'intéresse dans ce qui suit à un dispositif comportant un haut-parleur spécifiquement adapté aux basses fréquences (les sons graves), le *woofer*, et un autre adapté aux hautes fréquences (les sons aigus), le *tweeter*. Ils se distinguent notamment par le diamètre de la membrane, qui est grossièrement de l'ordre de grandeur d'une demi-longueur d'onde de l'onde sonore préférentiellement produite. Électriquement, on assimile chaque haut-parleur à une résistance R_b .

Q19. Proposer une estimation des diamètres respectifs des woofer et tweeter si la limite entre sons aigus et graves est de l'ordre de $f_c = 1$ kHz.

Pour chacun des deux haut-parleurs, la puissance maximale délivrée est de l'ordre de 80 W. Ils sont alimentés par l'étage de sortie de l'amplificateur audio (fréquences de 20 Hz à 20 kHz, tension efficace maximale 20 V). Si le filtrage passe-haut ou passe-bas vers les deux haut-parleurs est réalisé au moyen de filtres simples (L, C), on souhaite que les impédances des bobines, condensateurs et haut-parleurs à la fréquence f_c soient comparables.

Q20. Proposer une estimation des valeurs de R_b , L et C .

II.2 – Le filtrage haute/basse fréquence de Butterworth

Pour assurer une bonne séparation des graves et des aigus, on utilise des *filtres de Butterworth* (décrits en 1930 par le physicien éponyme), définis respectivement par les fonctions de transfert complexes $\underline{H}_1(\omega)$ et $\underline{H}_2(\omega)$ telles que :

$$|\underline{H}_1(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \quad |\underline{H}_2(\omega)|^2 = \frac{(\omega/\omega_0)^{2n}}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \quad (1)$$

où $\omega_0/2\pi = f_0 = 1,0\text{ kHz}$ est la fréquence de séparation graves-aigus et n est l'ordre du filtre. Pour toute la suite, on pose la pulsation (ou fréquence) réduite $x = \omega/\omega_0$ et on utilise les filtres représentés figure 8.

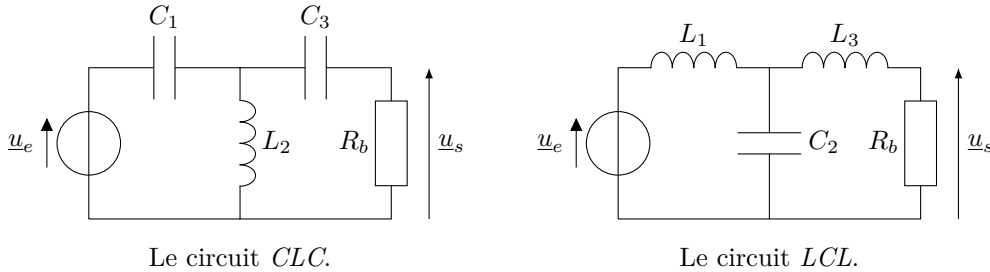


Figure 8 – Les filtres utilisés.

Q21. Sans calcul, mais au moyen de raisonnements justifiés, indiquer lequel des deux circuits proposés correspond aux filtres $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ respectivement, et lequel sera utilisé pour alimenter le tweeter et le woofer respectivement. Préciser la valeur maximale envisageable de l'ordre n pour ces circuits.

On s'intéresse ici à des filtres passe-bas d'ordre 2 ou 3 et de pulsation caractéristique ω_0 dont les fonctions de transfert sont respectivement :

$$\underline{B}_2(jx) = \frac{1}{1 + \alpha(jx) - x^2} \quad \underline{B}_3(jx) = \frac{1}{1 + \alpha'_1(jx) + \alpha'_2(jx)^2 - jx^3} \quad (2)$$

où les coefficients α , α'_1 et α'_2 sont réels et positifs.

Q22. Exprimer $|\underline{B}_2|^2$ et en déduire la condition pour laquelle un tel filtre vérifie la condition (1) qui en fait un filtre de Butterworth d'ordre 2.

Q23. Déterminer de même les coefficients qui font du filtre $\underline{B}_3$ un filtre de Butterworth d'ordre 3.

II.3 – Décalage entre les deux haut-parleurs

On considère dorénavant que les deux haut-parleurs grave et aigu sont alimentés à partir du même signal composite $E(t)$ au moyen de deux filtres du troisième ordre et de même pulsation de coupure ω_0 , de fonctions de transfert respectives explicitées en fonction de $x = \omega/\omega_0$:

$$\underline{H}_g(\omega) = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3} \quad \underline{H}_a(\omega) = \frac{(jx)^3}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3} \quad (3)$$

On les note $\underline{H}_k = G_k e^{j\varphi_k}$ avec $G_k > 0$ et $\varphi_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \{g, a\}$.

Dans cette partie II.3, on s'intéresse au décalage entre les sons grave et aigu émis par les deux haut-parleurs combinés, dans le cas où ces sons sont des signaux de pulsation ω voisine de ω_0 , de sorte que les intensités produites par les deux haut-parleurs sont comparables. Il est alors important que le décalage temporel Δt entre les signaux grave et aigu reste le plus faible possible, typiquement inférieur à 0,1 ms.

Trois causes possibles sont envisagées pour ce décalage temporel Δt :

0. entre l'amplificateur et les haut-parleurs, le signal se propage le long de câbles de liaison à une célérité proche de celle de la lumière et une différence de longueur des câbles peut introduire un décalage temporel Δt_0 ;
1. à la sortie de l'amplificateur, les filtres de fonctions de transfert $\underline{H}_g$ et $\underline{H}_a$ imposent des retards de phase que l'oreille interprète comme un décalage temporel Δt_1 ;
2. entre les haut-parleurs (décalés de 50 cm environ entre eux ; figure 9) et l'auditeur (situé à $D = 5\text{ m}$ environ de ceux-ci), un décalage temporel Δt_2 peut exister du fait de la propagation du son dans l'air et d'un décalage latéral de l'auditeur (pouvant par exemple atteindre 1 m).



Figure 9 – Paire de haut-parleurs, avec et sans le cache en mousse.
Source : Bowers & Wilkins.

Q24. Justifier quantitativement que Δt_0 est toujours négligeable.

Q25. Établir une expression simple permettant d'estimer Δt_1 en fonction des grandeurs utiles parmi $\Upsilon_a = \left. \frac{d\varphi_a}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$,

$$\Upsilon_g = \left. \frac{d\varphi_g}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \text{ et } \omega_0.$$

L'expression exacte de Δt_1 doit tenir compte des valeurs réelles des composants L_1, L_2, L_3 et C_1, C_2, C_3 qui peuvent différer (jusqu'à 5 %) des valeurs théoriques associées aux filtres de Butterworth.

On utilise pour cela un script Python dont deux fonctions seulement sont proposées figure 10.

Tous les paramètres ($Z1, Z2, Z3, R, x, y$) de ces deux fonctions sont des tableaux (`numpy.ndarray`) de valeurs réelles (`float`) de mêmes dimensions.

Q26. Expliquer le rôle de la fonction `CalcH`. Justifier au moyen d'un raisonnement électronique.

Q27. Expliquer le rôle de la fonction `Oper` dans le calcul de Δt_1 .

Avec des valeurs raisonnables des composants des montages, le tracé de Δt_1 (en microsecondes) en fonction de la fréquence f du signal d'entrée est proposé figure 11.

Q28. Proposer un commentaire de la figure tracée et conclure.

```

1 def CalcH(Z1, Z2, Z3, R):
2     DT1 = 1 / (1 + Z3 / R)
3     Y = 1 / Z2 + 1 / (R + Z3)
4     DT2 = 1 / (1 + Z1 * Y)
5     return DT1 * DT2
6
7 def Oper(x, y):
8     n = len(x)
9     r = 0 * y
10    for k in range(n):
11        if k > 0 and k < n - 1:
12            N = y[k + 1] - y[k - 1]
13            D = x[k + 1] - x[k - 1]
14        elif k == 0:
15            N = y[1] - y[0]
16            D = x[1] - x[0]
17        else:
18            N = y[-1] - y[-2]
19            D = x[-1] - x[-2]
20        r[k] = N / D
21    return r

```

Figure 10 – Extrait de script Python.

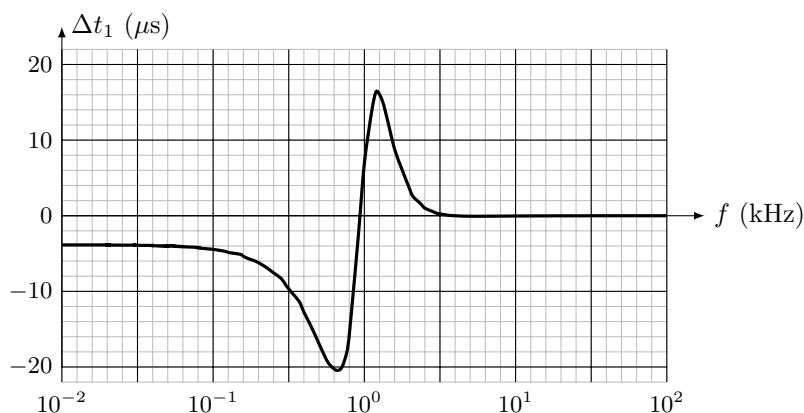


Figure 11 – Tracé de Δt_1 en fonction de la fréquence.

Q29. Estimer une valeur maximale pour Δt_2 et conclure.

C – Enregistrer le son : les disques vinyle

I – Chimie et matériaux employés pour les disques vinyle

Les « disques vinyle » sont des dispositifs analogiques permettant la reproduction d'un enregistrement analogique, monophonique ou stéréophonique, par gravure sur un disque plastique. Ils doivent leur nom aux matériaux dont ils sont constitués, comme le polyacétate de vinyle (PVAc) et le polychlorure de vinyle (PVC). Celui-ci, de formule chimique $(\text{CH}_2\text{CHCl})_n$ où le degré de polymérisation n peut être très élevé, est obtenu à partir du chlorure de vinyle par la transformation modélisée par l'équation de réaction (1) : $n \text{CH}_2\text{CHCl} = (\text{CH}_2\text{CHCl})_n$.

Q30. Calculer la proportion en masse du chlore dans le PVC.

Dans un des procédés de synthèse du PVC, un réacteur maintenu à une température de 75°C et sous une pression de l'ordre de 8 bar contient le chlorure de vinyle CH_2CHCl (c'est un liquide dans ces conditions) ; le PVC produit est un solide insoluble dans le chlorure de vinyle. Chacune de ces deux espèces est supposée pure dans sa phase (respectivement liquide et solide). À 75°C , la constante thermodynamique d'équilibre de la réaction (1) pour les états physiques précédents vérifie $K_1^\circ > 1$.

Q31. Exprimer les activités des espèces présentes dans le réacteur. Conclure sur l'évolution du système siège de la réaction (1).

La synthèse du PVC passe par de nombreuses étapes intermédiaires ; certaines d'entre elles sont catalysées par des espèces dérivées du métal Palladium Pd ($Z = 46$). Celui-ci est extrait de ses minerais sous forme d'une solution aqueuse de chlorure de palladium ($\text{Pd}^{2+}, 2 \text{Cl}^-$). On le fait alors réagir avec l'acide méthanoïque HCO_2H en solution aqueuse.

Q32. Préciser le nombre d'oxydation de chaque atome dans les espèces Pd^{2+} , Pd et CO_2 .

Q33. Écrire les demi-équations rédox relatives aux couples du palladium $\text{Pd}^{2+}(\text{aq})/\text{Pd}(\text{s})$ et de l'acide méthanoïque $\text{CO}_2(\text{gaz})/\text{HCO}_2\text{H}(\text{aq})$. En déduire l'équation-bilan (2) de la réaction de production du palladium. Calculer la constante thermodynamique d'équilibre K_2° associée à 25°C . Conclure.

Q34. Déterminer si le palladium métallique $\text{Pd}(\text{s})$ peut être oxydé par une solution concentrée d'acide chlorhydrique (acide fort). Déterminer également s'il peut être oxydé en milieu neutre ($\text{pH} = 7$) par le dioxygène de l'air.

L'acide méthanoïque utilisé dans ce procédé est caractérisé par la transformation en solution aqueuse d'équation (3) : $\text{HCO}_2\text{H}(\text{aq}) = \text{H}^+(\text{aq}) + \text{HCO}_2^-(\text{aq})$; sa constante thermodynamique d'équilibre est notée $K_3^\circ = K_a$. Le diagramme de prédominance des espèces $\text{HCO}_2\text{H}(\text{aq})$ et $\text{HCO}_2^-(\text{aq})$ est tracé sur la figure 12 en fonction du pH de la solution.

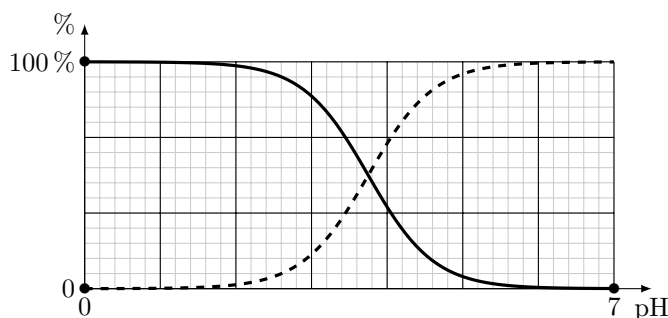


Figure 12 – Diagramme de prépondérance pour l'acide méthanoïque.

Q35. Parmi les deux courbes (en traits plein et en pointillés), identifier celle qui correspond à chacune des deux formes $\text{HCO}_2\text{H}(\text{aq})$ et $\text{HCO}_2^-(\text{aq})$; justifier. En déduire la valeur de K_a .

On prépare 100 mL d'une solution aqueuse en diluant de l'acide méthanoïque dans l'eau de sorte à atteindre la concentration $C = 0,13 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en acide méthanoïque. On dispose à cet effet d'eau purifiée, d'une solution d'acide méthanoïque pur, de masse volumique $\rho = 1,22 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$, et de toute verrerie utile.

Q36. Proposer les phases opératoires et les quantités à utiliser pour préparer cette solution.

Q37. Écrire l'équation-bilan de la réaction qui se produit lors de cette préparation, puis calculer les concentrations des espèces $\text{HCO}_2\text{H}(\text{aq})$, $\text{HCO}_2^-(\text{aq})$, $\text{H}^+(\text{aq})$ dans la solution et son pH.

L'acide méthanoïque pur peut aussi donner lieu à une réaction libérant le gaz HCO_2H . Avec un odorat moyen, un individu distingue l'odeur de HCO_2H dans l'atmosphère si sa pression partielle atteint $p_{\min} = 10^{-4}$ bar. L'équation de la réaction étudiée est (4) : $\text{HCO}_2\text{H}(\text{liq}) = \text{HCO}_2\text{H}(\text{gaz})$; sa constante thermodynamique d'équilibre $K_4^\circ(T)$ est donnée par $\log_{10}(K_4^\circ) = \alpha - \Theta/T$ où $\alpha = 14,1$ et $\Theta = 5,60 \times 10^3$ K.

Q38. Déterminer pour quelles températures l'odeur caractéristique de l'acide méthanoïque est sensible au-dessus d'un récipient contenant l'acide liquide pur avec un odorat moyen.

II – Enregistrement du son sur un disque vinyle

Les disques microsillon « LP » (*long play*) produits à partir de 1948 tournent à raison de 33 tours par minute. Ils comportent un unique sillon de forme spiralée entre les rayons $r_1 = 5$ cm et $r_2 = 15$ cm du disque (figure 13; sur celle-ci le sillon ne fait que 5 tours, ce qui est bien inférieur à la réalité). La durée de l'enregistrement est limitée à $\Delta t = 23$ min.

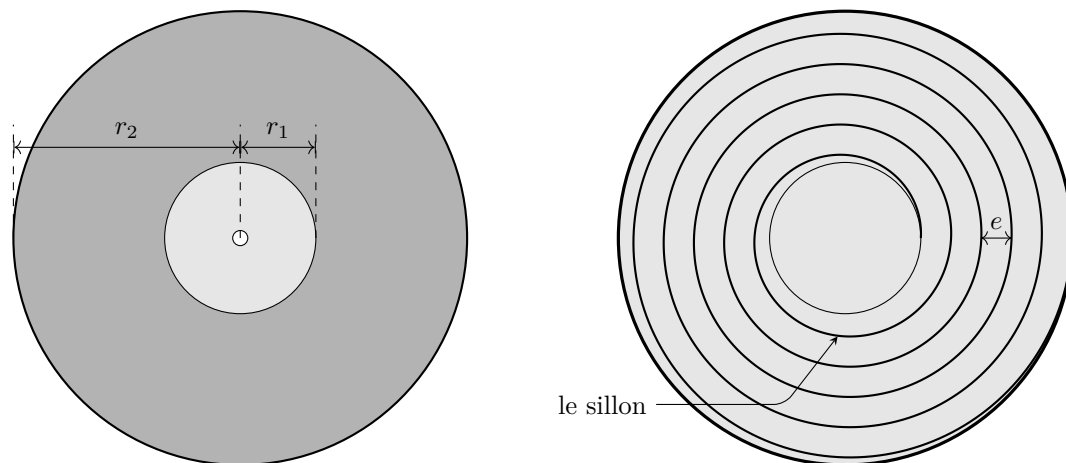


Figure 13 – Géométrie d'un disque vinyle microsillon LP.

Q39. Obtenir, en fonction de r_1 , r_2 , Δt et de la vitesse angulaire ω de rotation du disque, une estimation de la longueur totale L du sillon et de la distance e qui sépare deux passages adjacents du sillon (figure 13). Calculer numériquement L et e .

Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de graver des signaux dont la longueur sur le sillon est inférieure à $\ell_{\min} = 20$ μm .

Q40. Déterminer la fréquence maximale enregistrable dans la première partie du disque (près du centre), puis celle pour le bord du disque. Calculer la durée maximale d'un morceau de musique enregistré aux normes Hi-Fi (de 20 Hz à 20 kHz).

Données

Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Célérité du son dans l'air à 25 °C	$c_a \simeq 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Nernst	$\frac{RT}{e\mathcal{N}_A} \ln(10) = 0,06 \text{ V}$ à 25 °C
Produit ionique de l'eau à 25 °C	$K_e = 10^{-14}$ (soit $\text{p}K_e = 14$)

Potentels standard à 25 °C :

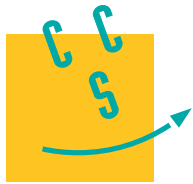
$\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{gaz})$	$E^\circ = 0$ par convention
$\text{O}_2(\text{gaz})/\text{H}_2\text{O}$	$E^\circ_O = 1,23 \text{ V}$
$\text{Pd}^{2+}(\text{aq})/\text{Pd}(\text{s})$	$E^\circ_P = 0,99 \text{ V}$
$\text{CO}_2(\text{gaz})/\text{HCO}_2\text{H}(\text{aq})$	$E^\circ_M = -0,20 \text{ V}$

Conversions usuelles	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$; $0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$
----------------------	--

Masses molaires :

Hydrogène	$\mathcal{M}_\text{H} = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Carbone	$\mathcal{M}_\text{C} = 12,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Oxygène	$\mathcal{M}_\text{O} = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Chlore	$\mathcal{M}_\text{Cl} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

◇ Fin ◇



Faire l'image d'une exoplanète

La détection des exoplanètes, planètes situées en dehors de notre système solaire, constitue l'un des domaines les plus fascinants et dynamiques de l'astronomie moderne. Depuis la découverte de la première exoplanète en 1995, les scientifiques en ont identifié des milliers d'autres, révélant une diversité de mondes au-delà de notre imagination. Grâce à des techniques avancées – telles que la méthode des transits, la méthode des vitesses radiales ou encore l'imagerie directe –, les astronomes peuvent détecter et étudier ces lointaines planètes pour chercher à comprendre leur composition, leur atmosphère et leur potentiel d'habitabilité.

Dans ce sujet, on étudie la possibilité d'obtenir une image détaillée d'une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière du Soleil. Développer tout le formalisme nécessaire à la reconstruction d'une image complexe sort du cadre de ce sujet et on se ramène à une situation simplifiée : on considère deux points à la surface de l'exoplanète et on cherche à les distinguer ou à mesurer la distance qui les sépare.

Le problème comporte 3 parties indépendantes. Un formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

Partie A – Utilisation du phénomènes d'interférences

En 2022, la collaboration Event Horizon Telescope a réussi à construire une image dans le domaine des ondes radios du trou noir situé au centre de notre galaxie à l'aide du phénomène d'interférences. Dans cette partie, on détermine s'il est possible d'appliquer cette méthode pour obtenir l'image d'une exoplanète à partir d'une situation modèle simplifiée (la construction véritable d'une image à partir d'un ensemble de figures d'interférences n'est pas traitée).

I – Principe de la mesure sur un système équivalent

On illustre ici le principe de la mesure en analysant une expérience mettant en jeu les fentes d'Young. Le montage expérimental est représenté sur la figure 1. Il est constitué des éléments suivants :

- deux sources ponctuelles S_A et S_B , incohérentes, séparées d'une distance d , qui émettent des ondes lumineuses monochromatiques de même amplitude à la longueur d'onde λ_0 ;
- une lentille convergente L_1 , de centre O_1 , de distance focale f'_1 ;
- des fentes T_1 et T_2 de largeur notée ℓ , perpendiculaires au plan de la figure, dont les centres sont éloignés d'une distance a .
- une lentille convergente notée L_2 , de distance focale f'_2 .
- un écran, situé dans le plan focal image de la lentille L_2 .

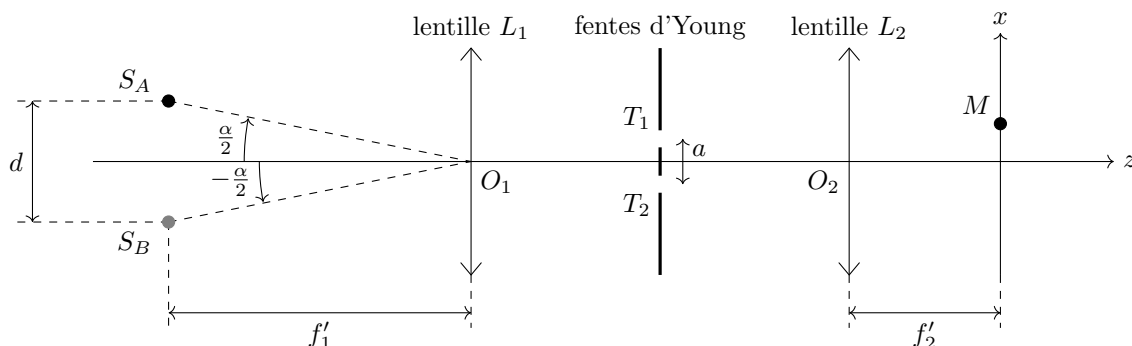


Figure 1

Les sources S_A et S_B sont situées dans le plan focal objet de la lentille L_1 . On note α l'angle positif $(S_B O_1 S_A)$. Soit M un point d'abscisse x situé sur l'écran (voir figure 1). On admet que l'ordonnée y ne joue ici aucun rôle et on suppose que tous les angles d'incidence sont petits.

Pour commencer, on considère que seule la source S_A émet de la lumière (on ne prend pas en compte la source S_B). On note δ_{tot} la différence de marche au point M entre les rayons passant par chaque fente d'Young :

$$\delta_{\text{tot}} = (S_A T_2 M) - (S_A T_1 M).$$

On la décompose en deux parties :

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_{\text{source}} + \delta$$

où δ_{source} est la différence de marche introduite en amont des trous d'Young et δ celle introduite en aval :

$$\delta_{\text{source}} = (S_A T_2) - (S_A T_1) \quad \text{et} \quad \delta = (T_2 M) - (T_1 M).$$

Q1. Établir l'expression de δ_{source} en fonction de a et $\alpha \ll 1$.

On suppose que S_A émet un signal de la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$, où s_0 est une constante réelle positive et ω la pulsation de l'onde lumineuse.

Q2. Exprimer le signal $s_1(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_1 , ainsi que le signal $s_2(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_2 , en fonction de s_0 , ω , t , $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $(S_A T_1 M)$ et $(S_A T_2 M)$. On négligera la décroissance d'amplitude de l'onde liée à la propagation.

On appelle $I(M)$ l'intensité du signal mesuré au point M (notée également $I(\delta)$).

Q3. Donner l'expression de I à l'aide de s_1 et s_2 et éventuellement d'autres grandeurs. Dédurre de celle-ci la relation

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos \left[k \left(a \frac{\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right).$$

On tient désormais compte de la présence de la source S_B , en plus de celle de la source S_A .

Q4. Indiquer, avec justification, si les signaux issus de S_A interfèrent avec ceux issus de S_B . Montrer que l'intensité détectée au point M se met sous la forme

$$I_d(\delta) = I_{d,0} \left(1 + \Gamma(a, \alpha) \cos(k\delta) \right)$$

où la fonction Γ , appelée facteur de cohérence, est donnée par :

$$\Gamma(a, \alpha) = \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right).$$

Q5. Tracer l'allure de $I_d(\delta)$ en fonction de δ dans le cas où le facteur de cohérence vaut 1, puis dans le cas où le facteur de cohérence est nul.

L'expérience étudiée a été conduite en utilisant l'écran d'un smartphone pour réaliser les deux sources. Le montage expérimental est représenté sur la figure 2. La lentille L_2 et l'écran sont respectivement l'objectif et le capteur CCD d'un appareil photographique numérique réglé à l'infini.

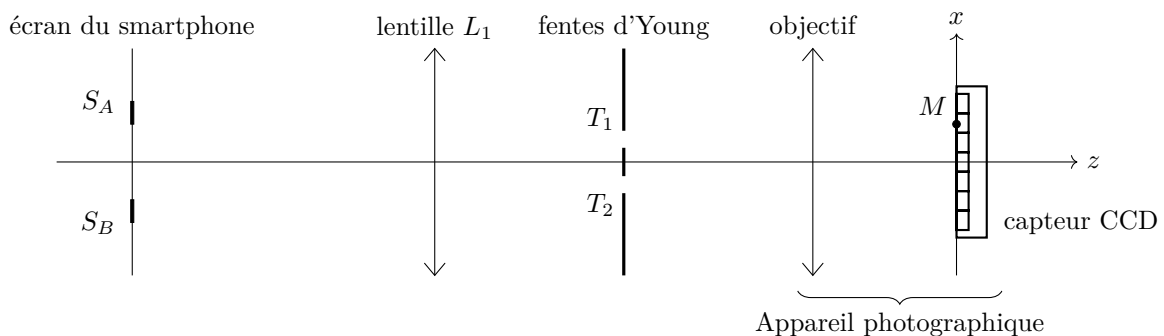


Figure 2

La figure 3 précise la nature de l'image utilisée sur l'écran du smartphone : ce qui apparaît en blanc sur la figure correspond à du noir sur l'image réelle, tandis que les traits épais noirs correspondent à deux traits lumineux qui jouent le rôle de sources de lumière de longueur d'onde λ_0 .

En analysant les résultats de l'expérience, il est possible de déterminer l'angle α . La figure 4 montre une partie de l'image donnée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de $\frac{\delta}{\lambda_0}$, où δ est la différence de marche introduite précédemment. Les paramètres sont les suivants : $a = 200 \mu\text{m}$, $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$, $f'_1 = 80 \text{ cm}$, $f'_2 = 5,6 \text{ cm}$.

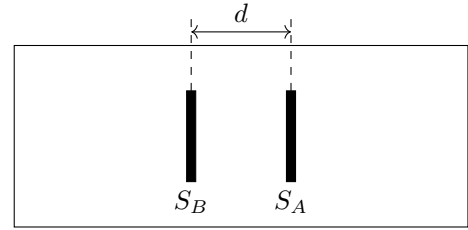


Figure 3 – Schéma de l'image utilisée sur l'écran du smartphone (pas à l'échelle).

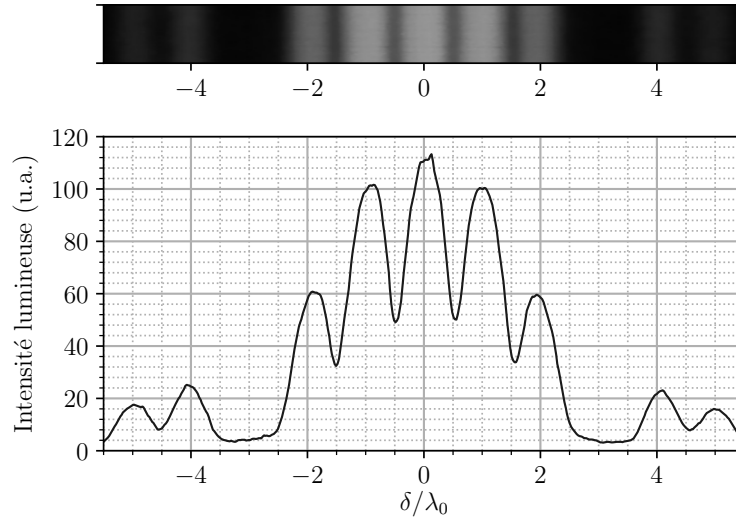


Figure 4 – Image du dessus : photographie de la figure d'interférences obtenue avec les fentes d'Young.
Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse pour la figure d'interférences.
L'axe des abscisses est le même pour les deux figures.

Q6. Calculer numériquement $\frac{ka}{2}$ pour cette expérience.

La lumière émise par la source n'est pas monochromatique : on peut considérer que l'incertitude-type sur λ_0 est $u(\lambda_0) = 30 \text{ nm}$.

Q7. En déduire l'incertitude-type sur $\frac{ka}{2}$.

On définit le contraste par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

où $I_{\max}$ est l'intensité lumineuse maximale au centre de la figure d'interférences et $I_{\min}$ l'intensité lumineuse sur les deux minimums qui encadrent la zone centrale d'intensité maximale.

Q8. Déterminer la valeur numérique du contraste pour cette figure d'interférences.

En changeant a et λ_0 , il est possible de mesurer le contraste pour d'autres valeurs de $\frac{ka}{2}$. La figure sur le document réponse montre ses variations en fonction de $\frac{ka}{2}$.

Q9. Ajouter votre point de mesure avec son incertitude-type sur le document réponse. L'incertitude-type sur le contraste sera prise égale à 10 % de sa valeur.

Le contraste C est relié au facteur de cohérence Γ (introduit à la question **Q4**) par $C = |\Gamma|$. Selon le modèle développé précédemment, on s'attend à observer pour C un comportement régi par la relation :

$$C = \left| \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right) \right|.$$

On considère donc la fonction

$$\frac{ka}{2} \mapsto C_0 \left| \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right) \right|$$

et on cherche les valeurs des paramètres C_0 et α qui minimisent l'écart entre les points expérimentaux et les valeurs prises par cette fonction aux mêmes abscisses, un peu comme on le ferait pour une régression linéaire. Par ce procédé d'ajustement, on obtient les valeurs avec incertitudes-types suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,421 & ; & & u(C_0) &= 0,010 \\ \alpha &= 6,36 \times 10^{-4} \text{ rad} & ; & & u(\alpha) &= 1,1 \times 10^{-5} \text{ rad} . \end{aligned}$$

Q10. Expliquer en quelques lignes comment on peut obtenir les incertitudes-types sur les paramètres C_0 et α en exploitant les incertitudes-types sur les données expérimentales.

Q11. En déduire la valeur numérique de d avec son incertitude-type $u(d)$.

On peut procéder à une mesure plus directe de la distance entre les deux sources. Pour cela, on part du montage étudié ci-dessus, puis on enlève les fentes d'Young. La figure 5 montre une partie de l'image qui est alors enregistrée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de x .

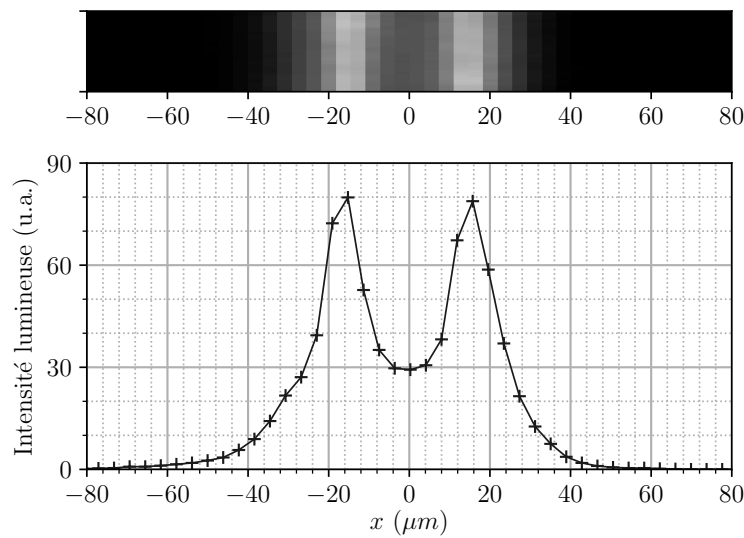


Figure 5 – Image du dessus : photographie obtenue lorsqu'on enlève les fentes d'Young.

Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse de la photographie.

Les axes des abscisses sont les mêmes pour les deux parties.

Q12. Déterminer une autre valeur numérique de d à partir de cette expérience, en proposant une estimation d'incertitude associée. Comparer à la valeur obtenue à la question **Q11**. Discuter à l'aide d'un critère quantitatif l'accord des deux résultats.

On a montré qu'il est possible de déterminer une caractéristique des sources lumineuses (leur distance) en étudiant une figure d'interférences. La reconstruction d'une image plus complexe se fait également en mesurant et en exploitant la fonction de contraste.

II – Interférences à deux télescopes

On transpose la situation modèle abordée dans la section précédente à l'expérience telle qu'elle peut être réalisée en astronomie. On considère deux télescopes séparés d'une distance a et pointés vers la même direction. Une source ponctuelle A_0 se trouve à l'infini, dans une direction faisant un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des télescopes (figure 6, représentée avec un angle positif). On suppose $|\alpha| \ll 1$. On note λ_0 la longueur d'onde considérée dans l'onde émise par la source ponctuelle.

Des rayons lumineux issus de la source sont captés par chaque télescope. Ils sont ensuite guidés par des fibres optiques jusqu'à un unique détecteur sur lequel ils sont combinés et interfèrent. Sur la fibre optique issue du télescope 2, un dispositif permettant d'ajouter une différence de marche variable, appelée *ligne à retard*, est installé.

Le chemin optique entre l'entrée du télescope 1 (notée T_1 sur la figure 6) et le détecteur est égal à L .

Le chemin optique entre l'entrée du télescope 2 (notée T_2 sur la figure 6) et le détecteur est égal à $L + \delta_r$, où δ_r est variable.

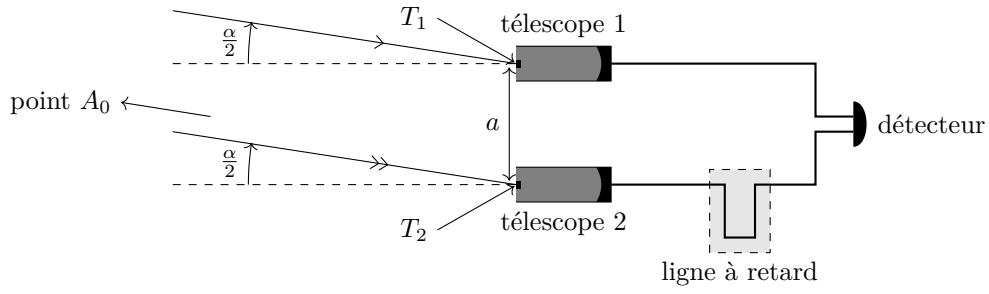


Figure 6

Q13. Établir l'expression de la différence de marche totale entre un rayon passant dans le télescope 2 et un rayon passant dans le télescope 1 en fonction de α , a et δ_r . Comparer au résultat de la question **Q1** et commenter.

En suivant une démarche similaire à celle conduite précédemment, on peut montrer que la résolution angulaire α_{res} de ces deux télescopes, c'est-à-dire ici l'angle minimal qui doit séparer deux points proches pour qu'ils soient correctement discernés, est telle que :

$$\alpha_{\text{res}} k a = \pi$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Dans le cadre du projet LIFE (Large Interferometer For Exoplanets), des scientifiques espèrent envoyer dans l'espace des télescopes dans le but d'observer des exoplanètes en utilisant la technique d'interférométrie dans le domaine de l'infrarouge (on choisit ici $\lambda_0 = 5 \mu\text{m}$). La distance entre les télescopes pourra atteindre 1 km.

Q14. Déterminer la résolution angulaire que l'on peut ainsi obtenir avec ces télescopes. En déduire la résolution spatiale (en kilomètres) que l'on peut espérer atteindre pour une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière. Commenter.

Partie B – Utilisation d'une lentille gravitationnelle

Dans cette partie, on étudie la possibilité d'utiliser le Soleil comme lentille gravitationnelle pour former l'image d'une exoplanète. Il s'agit d'un projet exploratoire, proposé par Slava Turyshev (NASA Jet Propulsion Laboratory) et ses collaborateurs, qui a été sélectionné par la NASA pour son aspect prometteur [1].

Un astre massif tel qu'une étoile ou un trou noir crée un champ gravitationnel et courbe l'espace-temps selon les lois de la relativité générale. La présence de l'astre conduit à une déviation de la lumière – qui suit un chemin optimal (géodésique) dans l'espace-temps – et par suite au phénomène de lentille gravitationnelle.

Considérons un point A_0 d'une exoplanète situé à l'infini, derrière le Soleil de centre S . Il émet des rayons lumineux parallèles à l'axe optique défini comme la droite passant par A_0 et S . On admet que ces rayons sont déviés par le Soleil d'un angle :

$$\chi = \frac{2r_{\text{sch}}}{b}$$

où $r_{\text{sch}} = \frac{2GM_s}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild du Soleil et b le paramètre d'impact du rayon lumineux, c'est-à-dire sa distance à l'axe optique. Suite à sa déviation, ce rayon intersecte l'axe optique en un point F_b . La courbure des rayons due au Soleil est très faible : ainsi, il est possible de modéliser le rayon lumineux par deux demi-droites, comme sur le schéma de la figure 7 (qui n'est évidemment pas à l'échelle). Le Soleil y est représenté par un cercle et son centre par le point S .

Pour un rayon lumineux rasant le Soleil (tracé en gris épais), on peut considérer que $b = R_s$, avec R_s le rayon du Soleil. On note F_0 le point d'intersection de ce rayon avec l'axe optique et on l'appelle *foyer image gravitationnel du Soleil*.

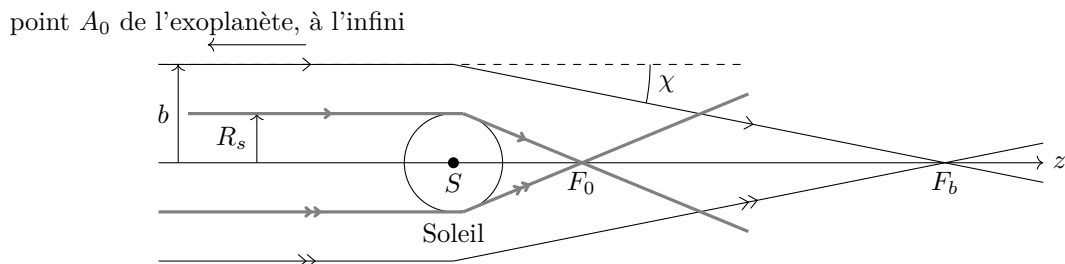


Figure 7

Q15. Exprimer la distance SF_b en fonction de r_{sch} et b . Calculer numériquement $z_0 = SF_0$. On exprimera cette distance en unités astronomiques et on la comparera au rayon de l'orbite de Neptune, qui est de 30 unités astronomiques.

Q16. Analyser la possibilité, pour un observateur situé entre S et F_b , d'exploiter l'effet de lentille gravitationnelle pour voir le point A_0 .

On décrit ce phénomène de déviation de la lumière comme une *lentille gravitationnelle*.

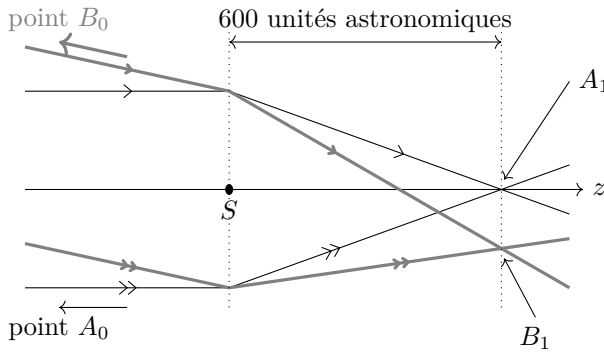
Q17. Comparer le devenir de rayons venant de l'infini, parallèles à l'axe optique, lorsqu'ils sont déviés par :

- une lentille mince en verre, utilisée en optique géométrique ;
- une lentille gravitationnelle.

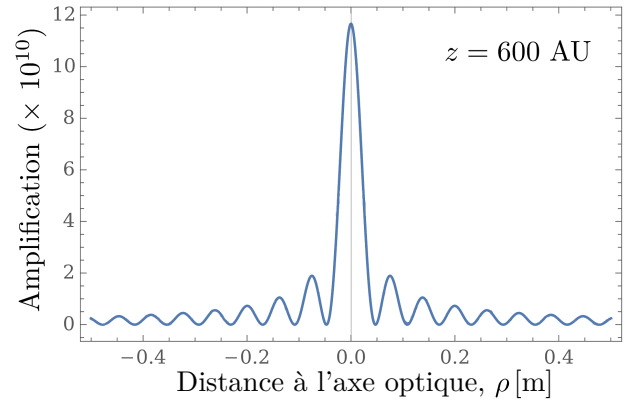
Il est conseillé d'illustrer votre réponse à l'aide de schémas.

Un des intérêts principaux de cette lentille gravitationnelle est le grand pouvoir de résolution qu'elle permet d'obtenir, c'est-à-dire une grande capacité à distinguer des détails. Les questions qui suivent ont pour but de déterminer la distance minimale entre deux points de la surface d'une exoplanète que l'on peut discerner grâce à une lentille gravitationnelle.

On suppose que l'exoplanète se trouve à une distance de 100 années-lumières. On se place au point F_1 tel que $SF_1 = 600 \text{ au}$. Une image A_1 de A_0 se forme en ce point. On considère un deuxième point B_0 , situé à la surface de l'exoplanète, hors de l'axe optique. La lentille gravitationnelle solaire forme une image B_1 de B_0 dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par A_0 (voir figure 8a). On admet que les points B_0 , S et B_1 sont alignés.



(a)



(b) Adaptée de [2].

Figure 8

Q18. Exprimer la distance A_1B_1 en fonction de A_0B_0 , SA_0 et SA_1 .

En pratique, la lumière issue de A_0 ne converge pas exactement vers A_1 : on observe un étalement de la lumière au voisinage de ce point. La figure 8b montre l'intensité lumineuse en fonction de la distance à l'axe optique (l'ordonnée indique « Amplification » qu'on assimile à l'intensité lumineuse dans l'étude menée ici). On admet que la lumière issue de B_0 s'étale avec le même profil d'intensité lumineuse autour du point B_1 .

Q19. Proposer, à l'aide de la courbe figure 8b, une valeur numérique pour ρ_{min} , valeur minimale de la distance A_1B_1 telle que les taches centrales des intensités lumineuses autour de A_1 et B_1 ne se superposent pas.

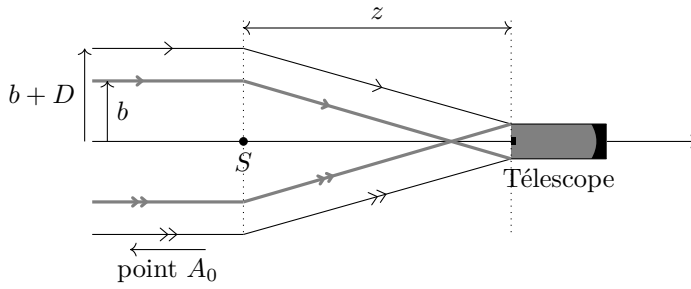
Q20. Déterminer la valeur numérique de A_0B_0 correspondant à $A_1B_1 = \rho_{\text{min}}$. Commenter.

Les images formées par cette lentille gravitationnelle solaire sont trop grandes pour être acquises d'un coup. Une sonde mesurerait donc point par point l'image.

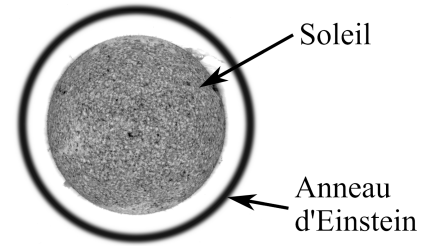
On considère une sonde qui collecte de la lumière issue du point A_0 avec un télescope. Sur la figure 9, le schéma 9a représente la situation. La figure 9b est une illustration de l'image constituée par le télescope : la lumière qui a été déviée par la lentille gravitationnelle forme autour du Soleil un cercle qu'on appelle anneau d'Einstein.

On note D le diamètre du télescope et z la distance entre le centre du Soleil et l'entrée du télescope. En première approximation, le télescope capte tous les rayons qui ont un paramètre d'impact compris entre b et $b + D$.

Q21. Discuter la modification de l'anneau d'Einstein lorsque la sonde s'éloigne du Soleil.



(a)



(b) Adaptée de [3].

Figure 9

Un autre intérêt principal de la lentille gravitationnelle est qu'elle amplifie la lumière reçue. On peut le mettre en évidence à l'aide d'un calcul simple. On définit le facteur d'amplification de cette lentille par :

$$\mu = \frac{\text{puissance lumineuse issue de } A_0 \text{ collectée par le télescope avec la lentille gravitationnelle}}{\text{puissance lumineuse issue de } A_0 \text{ collectée par le télescope sans la lentille gravitationnelle}}$$

Q22. Justifier que $\mu = \frac{8b}{D}$. Calculer numériquement μ pour un télescope situé en F_0 (donc pour $b = R_s$) et $D = 1,0$ m. Commenter.

Partie C – Propulsion de la sonde

Il est nécessaire, pour exploiter le phénomène de lentille gravitationnelle produit par le Soleil, d'envoyer une sonde à grande distance de la Terre. La propulsion de ce véhicule sur une trajectoire adaptée constitue un véritable défi technique ! Les auteurs qui portent le projet suggèrent l'utilisation d'une voile solaire. Dans cette partie, on étudie la dynamique particulière d'une sonde munie de ce moyen de propulsion.

I – Pression de radiation

On étudie une voile solaire plane, de surface S , parfaitement réfléchissante et se trouvant dans le vide. On introduit un axe (Ox) perpendiculaire au plan de la voile. Une onde lumineuse, de longueur d'onde λ et de puissance par unité de surface I_s (mesurée dans un plan perpendiculaire au faisceau) arrive sur la voile avec un angle β par rapport à la normale (figure 10). On souhaite calculer la pression de radiation subie par la voile en adoptant un point de vue corpusculaire.

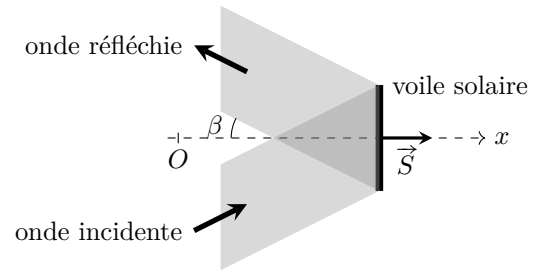


Figure 10

Q23. Rappeler l'expression de l'énergie et l'expression de la norme de la quantité de mouvement d'un photon associé à cette onde lumineuse en fonction de λ et de constantes fondamentales.

Q24. Exprimer le nombre δN de photons qui se réfléchissent sur la voile pendant une durée δt en fonction de I_s , λ , c , h , β , S et δt .

Q25. Montrer que la force exercée par les photons sur la voile s'identifie à une force de pression, associée à une pression de radiation p_r d'expression :

$$p_r = \frac{2 I_s \cos^2 \beta}{c}.$$

En 2010, les scientifiques de l'agence spatiale japonaise (JAXA) ont envoyé dans l'espace un démonstrateur de voile solaire, nommé IKAROS. L'étude de la trajectoire du vaisseau a montré que la voile de surface 173 m^2 a subi une force de $1,12 \text{ mN}$ en raison de la pression de radiation exercée par le Soleil ($I_s = 1,36 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ et $\beta = 0$ dans les conditions de l'expérience) [4].

Q26. Comparer le résultat obtenu à la question précédente avec le résultat de cette expérience. Commenter.

II – Voile solaire orthogonale au rayonnement solaire

Dans cette partie, on veut estimer la surface de la voile solaire nécessaire pour envoyer une sonde à l'infini par rapport au Soleil. On considère une sonde de masse $m = 50$ kg que l'on assimile à un point matériel M en orbite circulaire de rayon R_T autour du Soleil. L'étude est conduite dans le référentiel héliocentrique, considéré comme galiléen. On note à présent O le centre du Soleil dont la masse est M_s . La sonde s'est suffisamment éloignée de la Terre pour ne pas tenir compte de son interaction gravitationnelle et elle n'a pas encore déployé sa voile solaire : elle est donc soumise uniquement à l'interaction gravitationnelle du Soleil. On admet que le mouvement est plan et on note (Oz) l'axe perpendiculaire au plan de la trajectoire. On repère la position de la sonde par les coordonnées polaires (r, θ) de centre O . On note ω_T la pulsation du mouvement de la sonde.

Q27. Montrer que :

$$R_T^3 \omega_T^2 = G M_s .$$

Rappeler le nom de cette loi. Déduire l'expression de la vitesse v_T de la sonde sur son orbite, en fonction de G , M_s et R_T .

À l'instant $t = 0$, la sonde déploie une voile solaire de surface S . On suppose tout d'abord que la voile est orientée perpendiculairement au rayonnement solaire. Conformément à l'étude menée à la partie précédente, elle est alors soumise à une force supplémentaire d'expression

$$\vec{F}_r = p_T \frac{R_T^2}{r^2} S \vec{e}_r$$

avec $p_T = 8,0 \times 10^{-6}$ Pa la pression de radiation au niveau de l'orbite terrestre. On admet que le mouvement reste plan.

Q28. Montrer que le moment cinétique L_z de la sonde par rapport à l'axe (Oz) se conserve. Montrer que la grandeur $C = \frac{|L_z|}{m}$ vérifie la relation $C = r^2 |\dot{\theta}|$.

Q29. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée à la somme de la force gravitationnelle et de la force due à la pression de radiation subies par la sonde, en fonction de G , M_s , m , p_T , R_T , S et r . On prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.

Q30. Montrer que l'énergie mécanique de la sonde se met sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

et exprimer l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}$ en fonction de G , M_s , m , p_T , R_T , S , C et r .

Q31. Montrer que l'énergie potentielle effective admet un extremum si S est inférieure à une valeur limite S_{lim} . Tracer alors, sans justification, l'allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r dans le cas où $S < S_{\text{lim}}$. Donner enfin, sans justification, la nature de la trajectoire de la sonde selon la valeur de son énergie mécanique.

Pour simplifier l'étude, on suppose que la sonde doit avoir suffisamment d'énergie pour atteindre l'infini.

Q32. Exprimer l'énergie mécanique de la sonde juste après l'ouverture de la voile solaire. Expliciter la condition sur cette énergie mécanique pour que la sonde puisse atteindre l'infini. En déduire la surface minimale de la voile de la sonde.

En réalité, le mouvement de la sonde avec sa voile est plus complexe que ce qui a été étudié ici. La taille de la surface de la voile trouvée à la question précédente est cependant une bonne estimation de sa taille réelle.

III – Influence de l'orientation de la voile sur le mouvement

On reprend l'étude précédente dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen, mais on s'intéresse maintenant à la situation où la voile a une orientation quelconque. On repère toujours la position de la sonde (notée M sur le schéma figure 11 où la voile est représentée) par les coordonnées polaires centrées sur le Soleil noté O . On note $\vec{u}$ le vecteur normal à la voile solaire et β l'angle $(\vec{e}_r; \vec{u})$ (β est compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$).

Les conditions initiales sont $r(t = 0) = R_T$, $\theta(t = 0) = 0$, $\dot{r}(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \omega_T$, où ω_T a été introduit dans la section II.

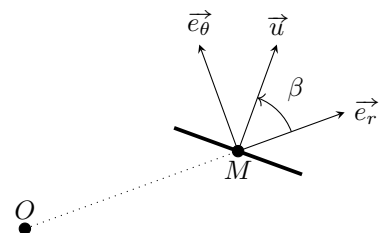


Figure 11

La force de pression de radiation subie par la sonde sur la voile de surface S s'écrit maintenant

$$\vec{F}_r = p_T \frac{R_T^2}{r^2} \cos^2(\beta) S \vec{u}$$

avec $p_T = 8,0 \times 10^{-6}$ Pa la pression de radiation au niveau de l'orbite terrestre.

On veut étudier la dynamique de la sonde sur une durée de 5 mois par une démarche de résolution numérique.

On introduit le vecteur position adimensionné $\vec{\rho}$ (de norme ρ) et le temps adimensionné τ définis par :

$$\overrightarrow{OM} = R_T \vec{\rho} \quad \text{et} \quad \tau = \omega_T t.$$

Q33. Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme

$$\frac{d^2 \vec{\rho}}{d\tau^2} = -\frac{1}{\rho^2} \vec{e}_r + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \vec{u}.$$

On exprimera la constante réelle positive η en fonction des paramètres du problème. Proposer une signification physique pour η .

Q34. Montrer que l'équation différentielle trouvée à la question précédente peut se réécrire sous la forme d'un système de quatre équations différentielles du premier ordre portant sur les grandeurs ρ , θ , $\frac{d\rho}{d\tau}$ et $\frac{d\theta}{d\tau}$.

Des lignes de code Python sont présentées figure 12. L'objectif est d'avoir un script permettant de calculer, pour différentes valeurs de β , la valeur finale de ρ après avoir simulé le mouvement de la sonde entre $\tau = 0$ et $\tau = 2\pi \times \frac{5}{12}$, ce qui correspond à la durée de 5 mois visée.

La fonction `odeint` du module `scipy.integrate`, pour laquelle des informations sont fournies en annexe, est utilisée pour résoudre le système d'équations différentielles trouvé à la question **Q34**. Cette fonction `odeint` appelle une fonction `voile_solaire_beta` non définie dans le script de la figure 12.

Q35. Déterminer les valeurs à $\tau = 0$ des grandeurs ρ , θ , $\frac{d\rho}{d\tau}$ et $\frac{d\theta}{d\tau}$. En déduire la liste à fournir à la ligne 7 du code de la figure 12.

Q36. Proposer un code pour la fonction `voile_solaire_beta` en respectant la syntaxe attendue par la fonction `odeint`.

```

1 import numpy as np
2 import scipy.integrate
3
4 # Valeur numérique du coefficient eta
5 eta = 0.41
6 # Conditions initiales pour [rho, theta, d rho/d tau, d theta/d tau]
7 cond_init = [...] # Incomplet (voir question Q35)
8 # Tableau (array) contenant les instants pour lesquels on veut résoudre l'équation
9 array_temps = np.linspace(0, 2 * np.pi * 5 / 12, num=5001)
10 # Nombre de valeurs pour beta
11 n_valeurs_beta = 361
12 # Tableau (array) contenant les valeurs de beta (en degrés)
13 # pour lesquelles on veut résoudre l'équation du mouvement
14 array_beta = np.linspace(-90, 90, num=n_valeurs_beta, endpoint=True)
15 # Tableau initialement rempli de zéros dans lequel on va stocker
16 # la valeur finale de rho pour chaque valeur de beta
17 array_rhofinal = np.zeros(n_valeurs_beta)
18
19 # On boucle sur les valeurs de beta
20 for i in range(n_valeurs_beta):
21     beta = np.pi * array_beta[i] / 180
22     # On résout le système d'équations différentielles
23     sol = scipy.integrate.odeint(
24         voile_solaire_beta, cond_init, array_temps, args=(eta, beta)
25     )
26     # On enregistre la dernière valeur de rho dans le tableau array_rhofinal
27     array_rhofinal[i] = sol[-1, 0]
```

Figure 12 – Script Python (incomplet) de simulation.

La résolution numérique, réalisée avec un script complété, permet d'obtenir la figure 13 qui donne la représentation de l'évolution de la valeur finale ρ_f de ρ , après 5 mois de voyage de la sonde, en fonction de l'angle β .

Q37. Expliquer pourquoi $\rho_f = 1$ lorsque $\beta = -90^\circ$ et $\beta = 90^\circ$.

Q38. En utilisant le résultat de cette simulation, déterminer la valeur optimale de β , notée β_e , pour que la sonde s'éloigne le plus loin possible du Soleil, ainsi que la valeur optimale de β , notée β_a , pour que la sonde s'approche le plus possible du Soleil au bout de 5 mois.

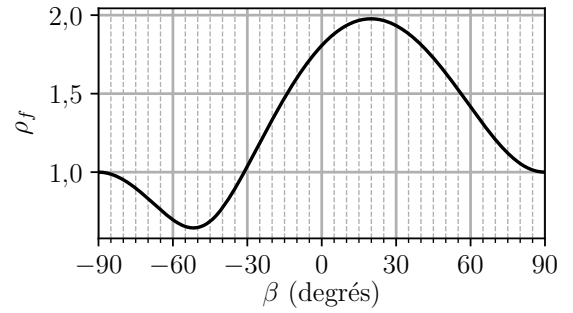


Figure 13

IV – Trajectoire proposée

Il se trouve que, pour atteindre le foyer image gravitationnel du Soleil le plus vite possible avec une voile solaire, il est nécessaire de commencer par se rapprocher du Soleil. Ainsi, on réalise la simulation suivante : partant d'une orbite circulaire de rayon R_T , on déploie la voile solaire avec un angle β_a (défini à la question **Q38**). La sonde se rapproche alors du Soleil. Lorsqu'elle arrive à une distance $r_{\text{changement}}$ donnée de l'astre, on change l'orientation de la voile et on prend $\beta = \beta_e$ (voir question **Q38**). La sonde tend alors à s'éloigner du Soleil. On arrête la simulation lorsque la sonde atteint une distance de 500 unités astronomiques de l'astre et on regarde le temps qu'elle a mis pour y arriver. On recommence la simulation plusieurs fois en changeant la valeur de la distance $r_{\text{changement}}$ et, pour chaque simulation, on relève la distance minimale entre la sonde et le Soleil, ainsi que le temps mis pour atteindre 500 unités astronomiques.

La partie gauche de la figure 14 montre un exemple de telle trajectoire au voisinage du Soleil. La partie droite montre le temps mis pour atteindre une distance de 500 unités astronomiques en fonction de la distance minimale d'approche du Soleil.

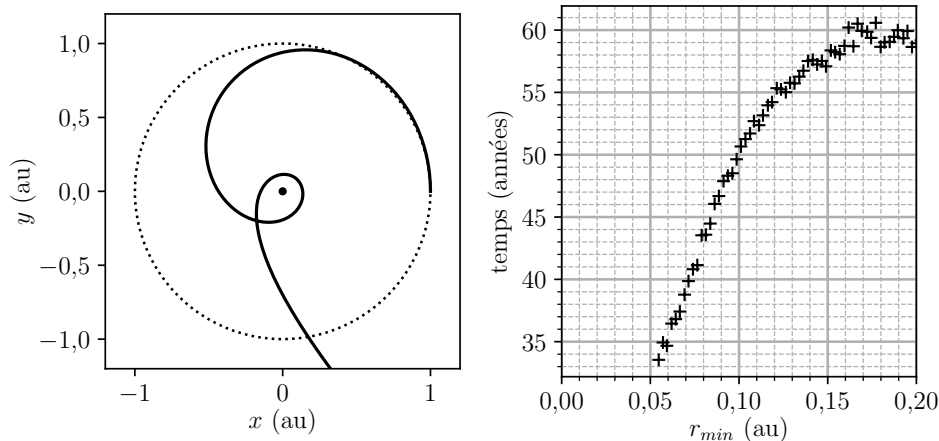


Figure 14 – À gauche : trajectoire de la sonde munie de la voile solaire autour du Soleil à l'origine du repère (point noir) ; le cercle en pointillés montre la trajectoire de la Terre.

À droite : temps en années mis par la sonde pour atteindre une distance de 500 unités astronomiques en fonction de la distance minimale d'approche du Soleil (notée $r_{\min}$). Les données sont issues de simulations.

Q39. Expliquer qualitativement pourquoi commencer à se rapprocher du Soleil conduit à une diminution du temps mis pour s'en éloigner. Aucun calcul n'est attendu pour répondre à cette question.

Des contraintes thermiques limitent l'utilisation de la voile : elle n'est pas parfaitement réfléchissante et absorbe une petite partie du rayonnement, ce qui conduit à son échauffement. Sa température ne doit pas trop augmenter, sous peine de dégradation de son matériau : la température maximale acceptable est $T_{\max} = 700$ K.

La puissance radiative absorbée par la voile solaire, toujours de surface S et d'inclinaison décrite par l'angle β introduit précédemment, est supposée égale à

$$\mathcal{P}_{\text{abs}} = \xi I_s \frac{R_T^2}{r^2} S \cos \beta$$

où $\xi = 0,1$, $I_s = 1,4 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$, $R_T = 1,0 \text{ au}$ et r est la distance de la sonde au Soleil.

Par ailleurs, la voile émet un rayonnement thermique avec un flux thermique surfacique qui dépend de sa température T selon la loi

$$\varphi_{\text{ray}} = \varepsilon \sigma T^4$$

où $\varepsilon = 0,8$ et σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Q40. Proposer une estimation du temps minimal envisageable pour qu'une sonde atteigne une distance de 500 unités astronomiques du Soleil, compte tenu des contraintes thermiques et dans les conditions des simulations présentées à la figure 14. On explicitera soigneusement la démarche suivie avec les éventuels choix effectués.

Données et formulaire

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Année-lumière (al)	$1,00 \text{ al} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$
Unité astronomique (au)	$1,00 \text{ au} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_s = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Remarque : l'unité astronomique (symbole au) est une unité couramment utilisée en astronomie qui correspond approximativement à la distance entre la Terre et le Soleil.

Formulaire

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Informations sur la fonction `odeint`

La fonction `odeint` de SciPy (disponible dans le module `scipy.integrate`) est couramment utilisée pour la résolution numérique d'un système d'équations différentielles ordinaires qui s'écrit sous la forme $\frac{dy}{dt} = f(y, t, \dots)$ où l'inconnue y peut être un vecteur (cas du sujet). La syntaxe de base pour la résolution numérique de l'équation $\frac{dy}{dt} = f(y, t, a, b)$ où a et b sont deux paramètres supplémentaires de la fonction f est la suivante :

```
1 sol = scipy.integrate.odeint(func, y0, t, args=(a,b))
```

Les principaux paramètres sont :

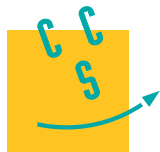
- **func** : fonction Python qui effectue le calcul numérique de la fonction f du système différentiel. Elle prend comme arguments, dans cet ordre :
 - **y** : liste ou tableau NumPy de flottants correspondant à y ,
 - **tc** : flottant correspondant à une valeur t_c de t ,
 - **a** : flottant qui représente le premier paramètre supplémentaire a de la fonction f ,
 - **b** : flottant qui représente le second paramètre supplémentaire b de la fonction f ;
- **y0** : liste ou tableau NumPy contenant la condition initiale pour y relative à l'inconnue y du système différentiel;
- **t** : tableau NumPy définissant les valeurs de la variable t pour lesquelles on souhaite obtenir les valeurs numériques pour l'inconnue y du système différentiel;
- **args** (optionnel) : tuple contenant des paramètres supplémentaires à transmettre à la fonction **func**. Par exemple, ici, les deux paramètres **a** et **b** sont passés à la fonction **func**.

La fonction `odeint` renvoie un tableau de flottants de taille $N_t \times N_y$, où N_t est le nombre d'éléments du tableau **t** et N_y est le nombre d'éléments du tableau **y0**. Il contient les valeurs des solutions pour les valeurs de t contenues dans le tableau **t**.

Références

- [1] Henry HELVAJIAN et al. « Mission Architecture to Reach and Operate at the Focal Region of the Solar Gravitational Lens ». In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 60.3 (2023), p. 829-847.
- [2] Slava G TURYSHEV et Viktor T TOTH. « Diffraction of electromagnetic waves in the gravitational field of the Sun ». In : *Physical Review D* 96.2 (2017), p. 024008.
- [3] Slava G TURYSHEV et al. « Direct multipixel imaging and spectroscopy of an exoplanet with a solar gravity lens mission ». In : *arXiv preprint arXiv :2002.11871* (2020).
- [4] Yuichi TSUDA et al. « Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission ». In : *Acta Astronautica* 82.2 (2013), p. 183-188.

◇ Fin ◇



Numéro d inscription

--	--	--	--	--

Signature

Nom

[illegible]

Prénom

[illegible]

CONCOURS CENTRALE • SUPÉLEC

Épreuve : Physique-chimie 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d avoir complètement rempli l entête

Feville

	/	
--	---	--

Document réponse

Les candidats doivent rendre ce document réponse avec leur copie, même s'ils ne l'ont pas utilisé

Ne rien écrire

dans la partie barrée

Question Q8

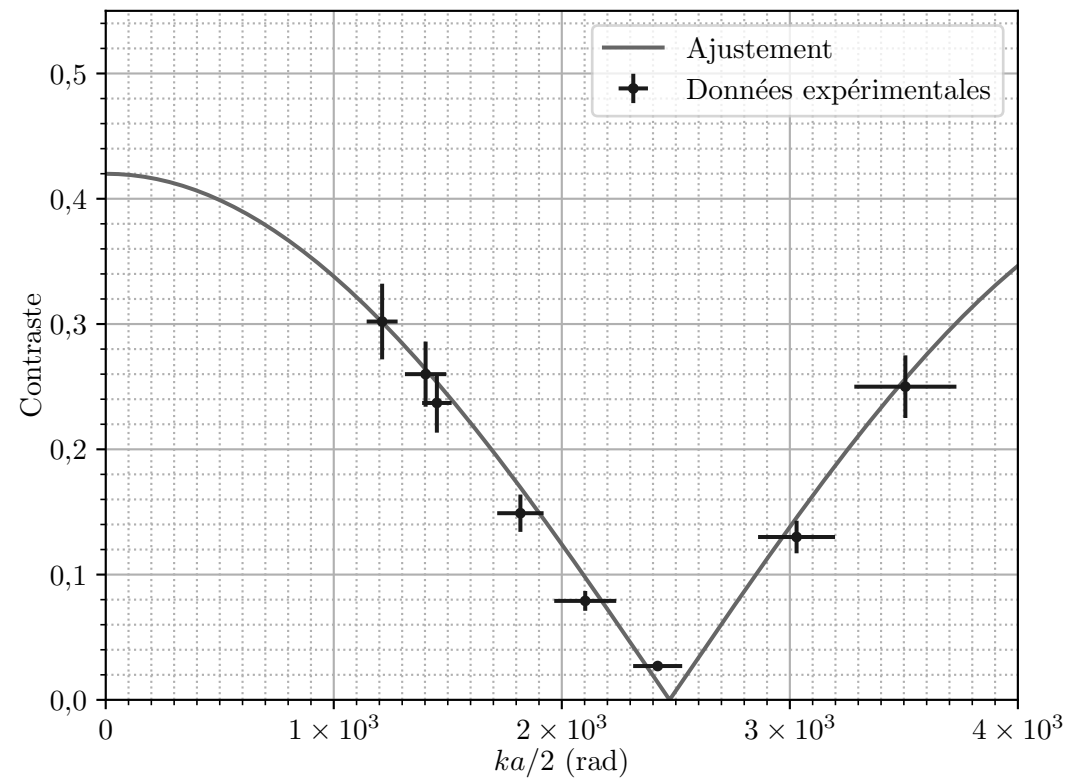
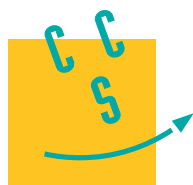


FIGURE 1 – Évolution du contraste en fonction de $ka/2$ pour l'expérience des fentes d'Young, où k est le vecteur d'onde et a la distance entre les deux fentes.



Modélisation et mesure de l'effet Casimir

Selon le philosophe grec Aristote, le vide ne pouvait pas exister. On serait tenté d'affirmer que le vide est ce qui reste lorsqu'on a tout retiré, c'est-à-dire rien. Mais selon la mécanique quantique, même lorsque l'on a vidé un volume d'espace de tout son contenu matériel, il reste tout même quelque chose. . . qui, loin d'être rien, a même des effets tangibles. En 1948, le physicien néerlandais Hendrik Casimir prédit l'existence d'une force entre deux plaques conductrices, non chargées, parallèles entre elles et placées dans le vide. L'effet Casimir a pour origine les fluctuations quantiques du vide dont l'existence est une conséquence de la quantification du champ électromagnétique. Il a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois en 1997.

Le sujet s'intéresse à l'effet Casimir au travers de modèles et d'expérimentations. Il se décompose en trois parties qu'il est recommandé d'aborder dans l'ordre, même si elles sont relativement indépendantes. Tout résultat intermédiaire fourni par l'énoncé peut être admis pour poursuivre la composition.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix, ainsi que les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé.

Dans tout le sujet, h désigne la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Partie A – Étude d'une cavité en électromagnétisme classique

I – Pression de radiation sur un conducteur parfait

La pression de radiation résulte de l'interaction entre un rayonnement électromagnétique et les charges d'un milieu matériel. On se propose d'en établir l'expression dans le cas d'un rayonnement électromagnétique monochromatique, de pulsation ω , se propageant dans le vide et atteignant sous incidence normale un conducteur métallique parfaitement réfléchissant occupant le demi-espace $z > 0$. Le rayonnement incident est décrit par une onde plane, progressive, monochromatique et transverse dont le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_x.$$

On pourra noter $\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z = k_z \vec{e}_z$ le vecteur d'onde de cette onde incidente (figure 1). On rappelle qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait, les champs électriques et magnétiques sont nuls. L'origine de l'axe (Oz) est prise à la surface du conducteur.

On admet qu'à la surface du conducteur, la densité surfacique de charge est nulle.

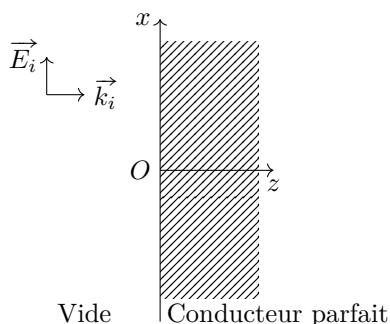


Figure 1 – Structure de l'onde incidente.

- Q1.** En utilisant la relation de passage sur le champ électrique, rappelée dans le formulaire en fin d'énoncé, justifier qu'il existe nécessairement une onde réfléchie de même pulsation et de même état de polarisation que l'onde incidente. Exprimer son champ électrique $\vec{E}_r(M, t)$ dans le domaine $z < 0$.
- Q2.** En déduire que le champ électrique total en tout point du demi-espace $z < 0$ est de la forme
- $$\vec{E}(M, t) = E_{0t} \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \sin(\omega t) \vec{e}_x$$
- où E_{0t} est un facteur à expliciter en fonction de E_0 .
- Q3.** Déterminer le champ magnétique total en tout point du demi-espace $z < 0$ en fonction de E_0 , c , ω , z et t .
- Q4.** En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} en fonction de ε_0 , E_0 , c , ω , z et t , puis sa moyenne temporelle que l'on notera $\langle u_{em} \rangle$.
- Q5.** En utilisant la relation de passage sur le champ magnétique, rappelée dans le formulaire en fin d'énoncé, déterminer l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j}_s(t)$ sur la surface ($z = 0$) du conducteur parfait en fonction de ε_0 , E_0 , c , ω et t .

On cherche à déterminer la force électromagnétique exercée sur un élément de surface dS du plan conducteur situé autour d'un point P . On note $\vec{B}_{dS}(z, t)$ le champ magnétique créé par cet élément de surface dans son voisinage immédiat. On admet que

$$\vec{B}_{dS}(z \rightarrow 0^-, t) = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_{dS}(z \rightarrow 0^+, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{e}_z.$$

- Q6.** Déterminer le champ magnétique $\vec{B}^*(z \rightarrow 0^\pm, t)$ résultant de la superposition de l'onde incidente et du champ créé par la nappe de courants surfaciques du plan $z = 0$ privée de l'élément de surface dS autour du point P .
- Q7.** En déduire la force magnétique élémentaire $d\vec{F}$ exercée sur cet élément de surface dS , puis sa moyenne temporelle $\langle d\vec{F} \rangle$.
- Q8.** Montrer que le résultat précédent peut s'interpréter par l'existence d'une pression, appelée « pression de radiation », donnée par la relation

$$P_{\text{rad}} = \langle u_{em} \rangle.$$

Un rayonnement électromagnétique peut aussi être décrit d'un point de vue corpusculaire. Dans cette deuxième description, un rayonnement monochromatique incident est assimilé à un flux de photons, de vitesse c , chacun d'énergie $\hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\frac{\hbar\omega}{c} \vec{e}_z$. La densité volumique de photons du rayonnement incident est notée n_γ . On modélise l'interaction d'un photon incident avec la surface parfaitement réfléchissante par un choc élastique lors duquel l'énergie du photon ainsi que la quantité de mouvement du système {photon, plan réflecteur} sont conservées.

- Q9.** En détaillant la démarche suivie, exprimer la quantité de mouvement cédée au plan réflecteur par le flux de photons incidents, par unité de temps et par unité de surface. En déduire l'expression de la pression de radiation en fonction de la densité volumique d'énergie, associée aux photons incidents et réfléchis. Commenter.

II – Champ électromagnétique dans une cavité plane délimitée par deux plans conducteurs

On cherche à présent à caractériser les modes propres d'une cavité formée du plan précédent et d'un second plan conducteur parfait identique au premier et placé en $z = -a$. On suppose ces deux plans de dimensions transversales illimitées selon (Ox) et (Oy) .

- Q10.** Montrer que les conditions aux limites à la surface des deux conducteurs imposent que la pulsation ne peut prendre que des valeurs discrètes indexées par un entier $n > 0$, à chaque valeur de n correspondant un mode de la cavité.

On suppose que les deux plans sont séparés d'une distance $a = 100$ nm longitudinalement selon (Oz) , distance très inférieure à leurs dimensions transversales.

- Q11.** Donner l'expression de la plus grande longueur d'onde λ_{max} pouvant exister dans la cavité satisfaisant aux conditions aux limites, ainsi que le domaine du spectre électromagnétique du mode correspondant.

Partie B – Une approche quantique simplifiée du champ dans la cavité

I – Énergie minimale d'un oscillateur harmonique quantique

On considère une particule matérielle de masse m , non relativiste et évoluant selon un axe (Ox) dans un puits de potentiel harmonique correspondant à l'énergie potentielle $\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$. On note p_x la quantité de mouvement de la particule selon l'axe (Ox) . L'énergie totale de la particule a donc pour expression $\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{p_x^2}{2m}$.

On suppose que la particule est dans un état stationnaire lié (état stationnaire normalisé) d'énergie E et de fonction d'onde $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-i \frac{Et}{\hbar})$ où $\varphi(x)$ est choisie à valeurs réelles.

Q12. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$, puis rappeler l'écriture de la condition de normalisation sur cette fonction.

On ne cherche pas dans la suite à déterminer les états stationnaires liés du puits de potentiel harmonique qui vérifient ces relations. Seule une propriété de l'énergie minimale est établie à partir de l'inégalité spatiale d'Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$. Pour rappel, cette inégalité concerne les indéterminations

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \quad \text{et} \quad \Delta p_x = \sqrt{\langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle}$$

qui portent respectivement sur x et p_x . On précise en outre les relations suivantes où ψ^* désigne le complexe conjugué de ψ et $\langle A \rangle$ la moyenne d'une grandeur A dans l'état de fonction d'onde $\psi(x, t)$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx \quad \text{et} \quad \langle p_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) dx.$$

Q13. En analysant la parité de la fonction $\varphi(x)$, justifier que $\langle x \rangle = 0$ dans un état stationnaire lié du puits de potentiel harmonique.

Q14. Justifier également que $\langle p_x \rangle = 0$.

Q15. En déduire une expression de l'énergie E en fonction de Δx , Δp_x , m et ω_0 .

Q16. Montrer ainsi que l'énergie de la particule vérifie l'inégalité

$$E \geq f_H(\Delta x)$$

où f_H est une fonction de Δx et des paramètres m , ω_0 et $\hbar$. Montrer que le minimum de cette fonction de Δx a pour expression $\frac{\hbar \omega_0}{2}$.

On admet que le minimum précédent correspond effectivement à l'énergie de l'état fondamental d'une particule matérielle évoluant dans un puits de potentiel harmonique unidimensionnel. Ainsi, dans son état fondamental :

- (i) la particule a une énergie strictement positive ;
- (ii) une mesure de position de la particule donne en moyenne une valeur nulle ;
- (iii) la position n'est pas exactement déterminée.

II – Une première approche quantique de l'effet Casimir

En suivant un raisonnement qui ne sera pas détaillé ici, on peut montrer qu'un rayonnement électromagnétique se décompose en modes propres dont le champ électrique et le champ magnétique (multiplié par c) jouent des rôles similaires à ceux des deux variables conjuguées x et p_x précédentes. Il en résulte que l'énergie d'un mode de rayonnement électromagnétique est quantifiée, un quantum d'énergie correspondant à un photon. L'état fondamental d'un mode de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω correspond à l'absence de photon dans ce mode, mais a cependant une énergie $\frac{\hbar \omega}{2}$, dite énergie de point zéro, qui peut être reliée à la moyenne $\langle \varepsilon_0 E^2 \rangle$ dans ce mode. En notant l'analogie avec la conclusion de la sous-partie précédente :

- (i) ce mode a une énergie strictement positive ;
- (ii) le champ électrique associé est de valeur moyenne nulle ;
- (iii) mais le champ électrique n'est pas exactement déterminé, si bien que sa moyenne quadratique est strictement positive.

L'énergie du vide est ainsi associée aux fluctuations du champ électromagnétique dans un état où il n'y a aucun photon. Pour analyser les conséquences de cette propriété, on revient à la cavité constituée de deux surfaces parfaitement conductrices séparées de la distance a selon (Oz) . À température nulle ($T = 0$ K), la seule contribution à l'énergie d'un mode propre de la cavité est l'énergie de point zéro de ce mode, soit $\frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar k_z c}{2}$ en notant k_z la pulsation spatiale du mode; celle-ci est quantifiée : $k_{z,n} = \frac{n\pi}{a}$ pour tout entier n non nul.

Q17. Donner l'expression de l'énergie électromagnétique dans la cavité à température nulle sous la forme d'une somme portant sur tous les modes. Expliquer pourquoi un tel résultat n'est pas acceptable.

Le problème précédent est évité si l'on suppose que la somme est tronquée à un rang $n_0 \gg 1$ traité comme une constante (ce qui revient à ne pas considérer les modes à de trop hautes pulsations pour lesquelles le confinement entre les surfaces conductrices est impossible). L'énergie correspondante, en se limitant aux n_0 premiers termes, est alors donnée par :

$$E(a) = \frac{\hbar \pi c}{4a} n_0 (n_0 + 1) .$$

Pour caractériser l'effet Casimir, on cherche à comparer deux cavités dont les dimensions longitudinales, notées respectivement a et $\tilde{a}$, sont respectivement très petite et très grande devant les dimensions transversales.

Dans le cas de la cavité de dimension longitudinale $\tilde{a}$, on admet que les modes de pulsations spatiales $k_{z,n} = \frac{n\pi}{\tilde{a}}$ forment un continuum sur l'espace des pulsations spatiales k_z , avec un nombre de modes $\rho_{k_z} dk_z$ (nombre de modes compris entre k_z et $k_z + dk_z$). L'énergie totale E_∞ obtenue en sommant sur tous les modes, avec la même troncature que précédemment en termes de pulsation spatiale, est donnée par :

$$E_\infty = \int_0^{\frac{n_0\pi}{\tilde{a}}} \frac{\hbar k_z c}{2} \rho_{k_z} dk_z .$$

On note que, sous cette hypothèse, la troncature se traduit par la borne supérieure de l'intégrale prise égale à $\frac{n_0\pi}{\tilde{a}}$.

Q18. En déduire l'expression de E_∞ en fonction de $\tilde{a}, n_0, a, c$ et $\hbar$.

Q19. Exprimer l'énergie de Casimir $E_{\text{Cas}} = E(a) - E_\infty$ dans la limite où $n_0 \gg 1$ et $a \ll \tilde{a}$.

Q20. Établir le caractère attractif ou répulsif de l'effet Casimir sachant que la géométrie de la cavité tend à évoluer de façon à minimiser E_{Cas} .

III – Étude de la dépendance de l'énergie de Casimir avec la dimension longitudinale de la cavité

On s'est restreint dans le raisonnement précédent à des modes particuliers de la cavité, ce qui en limite la validité. En effet, pour une cavité de dimension longitudinale a selon (Oz) et de dimension transversale L selon (Ox) et (Oy) , on peut montrer que les modes propres correspondent aux vecteurs d'onde $\vec{k} = (\frac{n_x\pi}{L}, \frac{n_y\pi}{L}, \frac{n_z\pi}{a})$ avec n_x, n_y, n_z trois entiers positifs, dont au moins l'un d'eux est non nul.

On note :

- $E(a)$ l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité de dimension longitudinale a dont les modes sont discrets et E_∞ l'énergie qui serait obtenue dans le cas où les modes forment un continuum ;
- $E_{\text{Cas}}(a) = E(a) - E_\infty$ l'énergie de Casimir, grandeur finie dont on se propose d'étudier numériquement la dépendance avec a .

On admet que :

$$E_{\text{Cas}}(a) = -\frac{\hbar c L^2}{2\pi} f(a)$$

où

$$f(a) = \int_0^\infty g(u, a) u \, du$$

et

$$g(u, a) = a \int_0^\infty \sqrt{u^2 + k_z^2} \, dk_z - \frac{u}{2} - \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{u^2 + \left(\frac{n_z\pi}{a}\right)^2} .$$

Pour évaluer numériquement $g(u, a)$, on procède par des troncatures de façon analogue à la sous-partie précédente : on ne retient que les n_0 premiers termes de la série et on remplace la borne supérieure de l'intégrale par $\frac{n_0\pi}{a}$. L'intégrale qui figure dans l'expression de $g(u, a)$ peut être évaluée par la méthode des rectangles à droite en divisant l'intervalle $[0, \frac{n_0\pi}{a}]$ en $n_0 N$ intervalles avant de lui retrancher la somme de la série tronquée.

Q21. Proposer un contenu acceptable pour les lignes incomplètes 12, 17 et 19 du script suivant en langage Python qui vise à implémenter cette méthode simplifiée.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 n0 = 100 # Rang maximum des modes longitudinaux retenus
4 N = 20
5
6 def g(u, a):
7     # Évaluation de l'intégrale par la méthode des rectangles à droite
8     s1 = 0
9     dk = np.pi / (a * N) # Pas de discrétisation
10    for i in range(n0 * N):
11        k_droite = (i + 1) * dk
12        s1 = s1 + # À compléter
13    s1 = a * s1 * dk
14    s2 = 0
15    # Évaluation de la série en la tronquant
16    for j in range(1, n0 + 1):
17        s2 = s2 + # À compléter
18    # Évaluation de g(u, a)
19    return # À compléter
20
21 def f(a):
22     sum = 0
23     for n in range(N * n0):
24         u = (n + 1 / 2) * np.pi / N / a
25         sum = sum + g(u, a) * u * (np.pi / N / a)
26     return sum

```

La méthode numérique simplifiée adoptée précédemment n'est assez robuste que pour l'évaluation de la pente en diagramme log-log (de base 10) ; la valeur de l'ordonnée à l'origine n'est accessible que par une méthode plus évoluée, dite de renormalisation de Richardson et non détaillée dans ce sujet, qui permet d'assurer la convergence numérique en annulant les divergences communes à la somme discrète et à l'intégrale continue [1]. Celle-ci permet d'obtenir la représentation graphique de la figure 2.

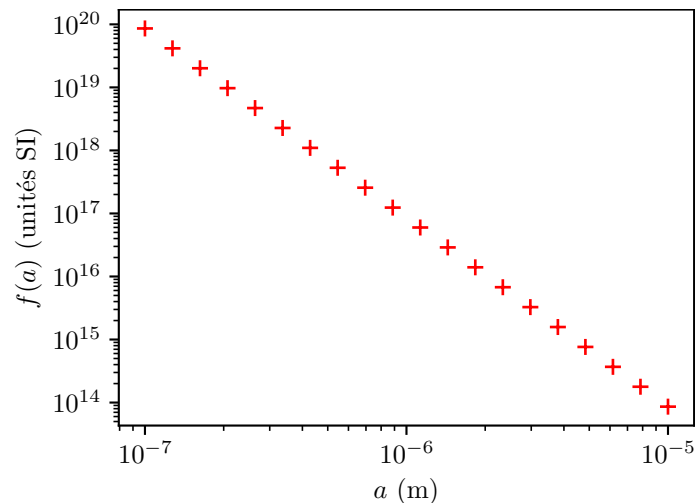


Figure 2 – Représentation de $f(a)$ en échelle log-log (de base 10).

Q22. En déduire que $E_{\text{Cas}}(a) = -\frac{B}{a^\xi}$ où ξ est un exposant, supposé entier, de valeur à préciser et B une constante strictement positive qui n'est pas à déterminer.

Q23. Sachant que la force « ressentie » par la paroi en $z = -a$ dérive de l'énergie de Casimir selon une expression analogue à celle d'une force conservative, établir l'expression de cette force en fonction de B et a . Commenter.

Cette force, dite force de Casimir, est de nature surfacique. En s'appuyant sur une analyse dimensionnelle, on peut lui associer une force par unité de surface de la forme suivante :

$$\kappa a^\alpha c^\beta \hbar^\delta$$

où κ est un facteur numérique sans dimension et c la célérité de la lumière dans le vide.

Q24. Déterminer les exposants α , β et δ . En déduire l'expression de la constante B introduite à la question **Q22**.

On admet que, pour la cavité étudiée, $\kappa = \frac{\pi^2}{240}$.

Q25. Calculer numériquement la différence de pression ΔP_{Cas} entre l'extérieur et l'intérieur de la cavité due à la force de Casimir. En déduire la norme de cette force pour une cavité formée de deux miroirs plans, de surface $L^2 = 1 \text{ cm}^2$ chacun, distants de $a = 100 \text{ nm}$, puis distants de $a = 1 \text{ mm}$. Commenter.

Partie C – Mesures expérimentales et corrections des écarts à la force théorique de Casimir

I – Une mesure dans une configuration sphère-plan

En 2000, B.W. Harris *et al.* [2] publient les résultats d'une expérience qui permet la mesure de la force de Casimir et dont le principe est le suivant.

Il s'agit de rapprocher une sphère d'une surface plane à l'aide du micro-levier (très fine lamelle flexible d'environ $100 \mu\text{m}$ de longueur) d'un microscope à force atomique dont la mesure de flexion renseigne sur la force d'interaction à quelques piconewtons près (figure 3). La sphère de rayon $100 \mu\text{m}$, ainsi que la plaque en regard, sont recouvertes d'or et sont placées à très basse température dans un vide poussé. Les surfaces sont supposées parfaitement conductrices et sont de plus portées au même potentiel. La distance minimum d'approche d de la sphère au plan couvre un intervalle de 60 à 900 nm ; elle est mesurée par interférométrie à l'aide d'un LASER. Les résultats de mesure de la force de Casimir, avec une précision expérimentale estimée à 2% , sont présentés sur la figure 4.

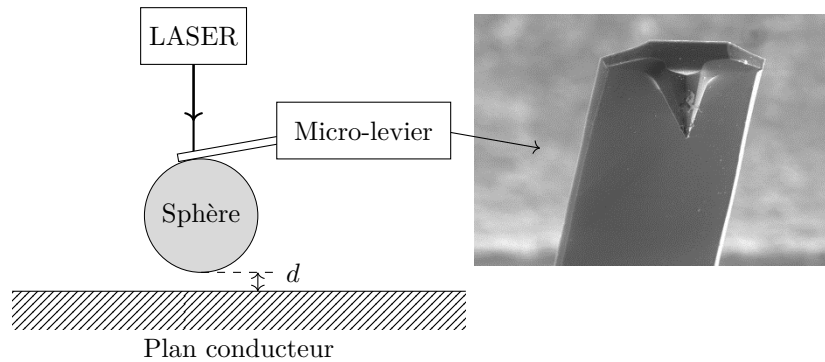


Figure 3 – Principe de l'expérience (le dessin à gauche n'est pas à l'échelle) [2].

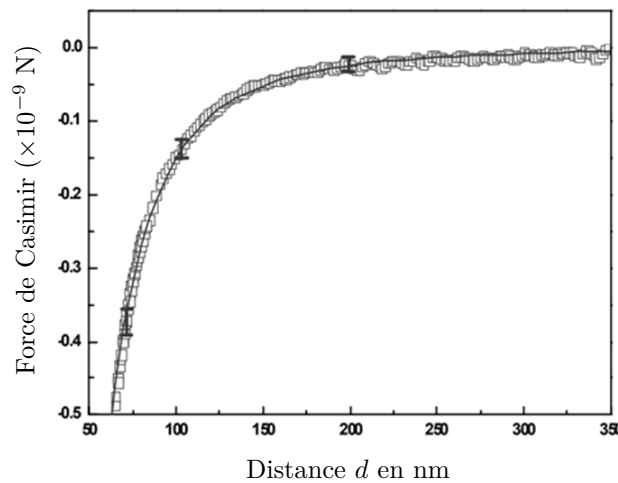


Figure 4 – Force de Casimir en fonction de la distance de la sphère au plan [3].

Q26. Expliquer en quoi l'étude expérimentale de la configuration sphère-plan est plus avantageuse d'un point de vue pratique que celle de la configuration plan-plan vue auparavant.

Avec cette configuration sphère-plan, on perd les symétries de la configuration plan-plan, ce qui ne permet plus une détermination simple des modes propres de la cavité. Cependant, lorsque la distance de séparation d est petite devant le rayon de la sphère R , on peut considérer que chaque élément de surface n'interagit qu'avec l'élément de surface situé en face de lui (approximation de proximité), ce qui permet ainsi de décomposer la force totale en l'ensemble des contributions indépendantes de chaque couronne sphérique de rayon x comme représenté sur la figure 5.

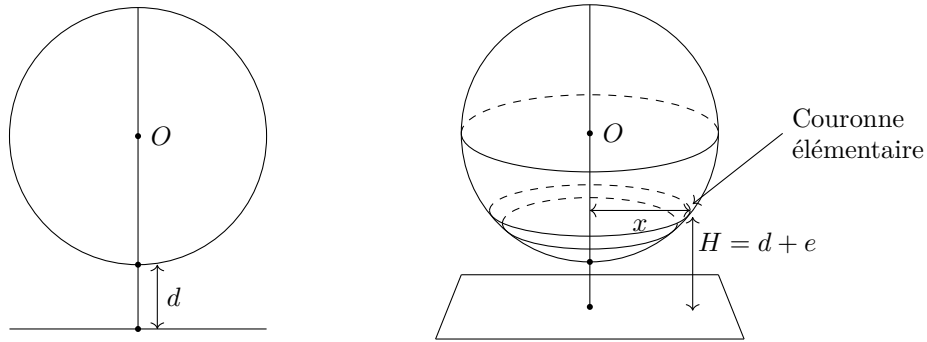


Figure 5 – Configuration sphère-plan [4].

On suppose que la dépendance à la dimension longitudinale de la cavité dans la force de Casimir analysée aux questions **Q23** et **Q24** est encore valide entre une couronne élémentaire et le plan en remplaçant a par la distance $H = d + e$.

Q27. En reliant les grandeurs e , x et R et en considérant le cas où d est de l'ordre de 100 nm, proposer une estimation qui montre que la force de Casimir se réduit en pratique aux contributions des couronnes élémentaires au voisinage immédiat de la zone de plus courte approche entre la sphère et le plan.

Une analyse plus poussée de la configuration sphère-plan conduit, pour une sphère de rayon R et une distance au plan de d , à l'expression de la valeur de la force de Casimir sphère-plan (notée F_{sp}) suivante :

$$F_{sp} = \frac{\pi^3 \hbar c R}{360 d^3} \eta_E$$

où η_E est un facteur de correction en énergie dont la variation avec d est présentée sur la figure 6.

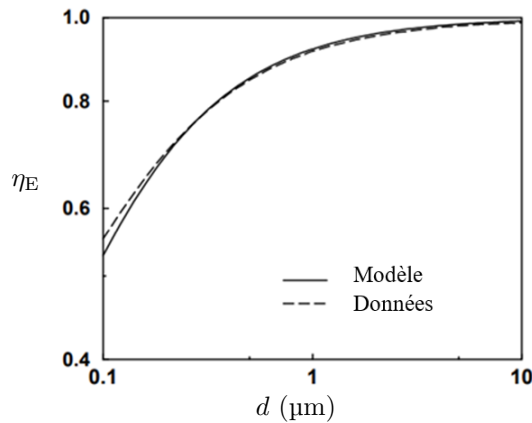


Figure 6 – Variation du facteur de correction en énergie η_E avec d [5].

Q28. Évaluer la force de Casimir sphère-plan pour une distance au plan de 100 nm. Commenter au vu de la figure 4.

II – Prise en compte de la température non nulle

On revient à une configuration plan-plan comme celle étudiée dans les parties A et B. L'expression établie dans les questions **Q23** et **Q24** de la force de Casimir n'est correcte qu'à température nulle. À température non nulle, il faut tenir compte de la pression de radiation exercée par les photons d'origine thermique. On considère une cavité de dimension longitudinale $a = 100$ nm.

Q29. Évaluer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_T du rayonnement thermique à température ambiante. Préciser ce que l'on peut dire de la contribution des photons du rayonnement thermique dans la cavité compte tenu du résultat établi à la question **Q11**.

On admet que la densité volumique d'énergie associée au rayonnement thermique peut, en ordre de grandeur, être assimilée à la densité volumique d'énergie $u(T)$ obtenue en intégrant la densité spectrale d'énergie volumique $u_\omega(\omega, T)$ sur toutes les pulsations comprises entre 0 et $+\infty$ (cf. loi de Planck fournie dans le formulaire en fin d'énoncé).

Q30. En exploitant le résultat de la question **Q8**, donner l'ordre de grandeur de la pression de radiation sur la face externe des plans réflecteurs et liée aux photons thermiques à température ambiante. En le comparant à la différence de pression ΔP_{Cas} évaluée à la question **Q25**, conclure sur l'effet de la température dans les mesures de l'effet Casimir.

III – Prise en compte du caractère imparfait des plans réflecteurs

En réalité, les conducteurs sont imparfaits et l'onde électromagnétique incidente sur leur surface n'est pas parfaitement réfléchi. En négligeant l'effet de la relaxation des électrons sur la force de Casimir – approximation acceptable aux fréquences considérées – on modélise l'interaction de l'onde électromagnétique avec la surface du conducteur par celle avec un plasma d'électrons de conduction, affectés d'une masse effective m^* qui diffère de leur masse réelle. Le plasma est localement neutre ; la densité numérique en électrons (en m^{-3}) est notée n_e et celle en ions est $n_i = n_e$. L'équation du mouvement d'un électron de conduction soumis aux champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ d'une onde plane progressive harmonique (opph) dans le métal s'écrit alors :

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -e [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}].$$

Q31. Commenter les différents termes de cette équation. Préciser les conditions permettant de négliger le terme en $\vec{v} \wedge \vec{B}$ devant celui en $\vec{E}$.

On se place dans le cadre de cette hypothèse qui sera validée à la question **Q36**. De plus, on introduit la notation complexe en $e^{+i\omega t}$ pour l'étude menée en régime sinusoïdal à la pulsation ω de l'opph.

Q32. Justifier que les ions ne contribuent pratiquement pas à la densité de courant et en déduire l'expression de la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ du milieu, à exprimer en fonction de la densité numérique n_e , de la charge élémentaire e , de la pulsation ω et de la masse effective m^* .

Q33. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ en notation complexe.

Q34. En déduire la relation de dispersion relative à une opph se propageant dans ce milieu et dont la phase est de la forme $\omega t - kz$.

Q35. Montrer l'existence d'une pulsation de coupure ω_P , dite pulsation plasma, à exprimer en fonction de ε_0 , n_e , e et m^* .

Q36. Exprimer la vitesse de phase et valider l'hypothèse faite à la question **Q31**.

On définit la longueur d'onde plasma $\lambda_P = \frac{2\pi c}{\omega_P}$. On donne pour l'aluminium $\lambda_P = 78,6 \text{ nm}$ et une densité numérique en électrons de conduction $n_e = 1,96 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

Q37. Calculer numériquement la masse effective des électrons de conduction dans cette modélisation.

La dimension longitudinale a des cavités étudiées expérimentalement est en pratique comprise entre 0,1 et 10 μm . Suivant les expériences, les surfaces réfléchissantes sont choisies en or (Au), en aluminium (Al) ou en cuivre (Cu). Ces deux derniers métaux ayant des comportements similaires, on ne s'intéresse par la suite qu'à l'or et à l'aluminium. Les effets induits par la conductivité finie des miroirs relativement à la prédiction de Casimir, établie entre deux miroirs parfaitement réfléchissants, sont pris en compte par un facteur correctif sans dimension η_F défini par le rapport de la force de Casimir mesurée entre miroirs réels, notée F_{mes} , et la force de Casimir théorique calculée dans la situation idéale entre des plans parfaitement conducteurs, notée F_{th} :

$$\eta_F = \frac{F_{\text{mes}}}{F_{\text{th}}}.$$

La figure 7 rend compte des valeurs du facteur correctif η_F pour la force de Casimir entre des miroirs réels en fonction de la distance a entre les miroirs.

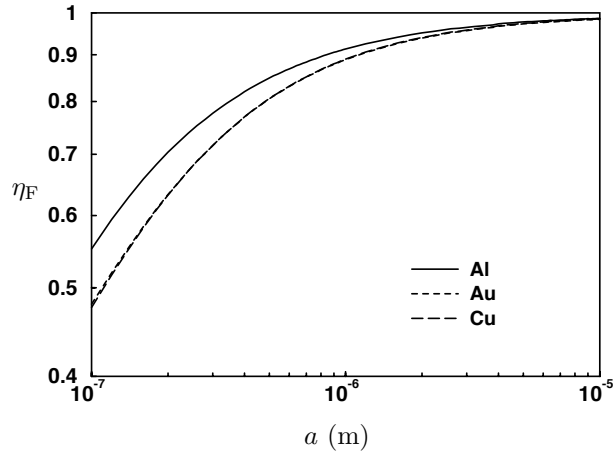


Figure 7 – Facteur correctif η_F en fonction de la distance a entre les miroirs [5].
Les trois courbes correspondent au cas de miroirs en aluminium (Al, courbe pleine),
en or (Au, courbe pointillée) et en cuivre (Cu, courbe en tirets).

En modélisant le conducteur comme un plasma d'électrons dont la longueur d'onde plasma est notée λ_P , le facteur η_F ne dépend que du rapport $\frac{a}{\lambda_P}$ avec une évolution telle que représentée sur la figure 8.

On donne pour l'or $\lambda_P = 137$ nm.

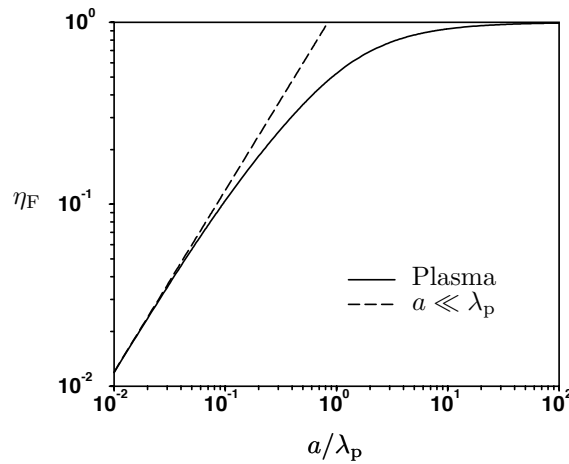


Figure 8 – Facteur correctif η_F en fonction de la longueur de la cavité rapportée à la longueur d'onde plasma [5].
La droite en tirets correspond au comportement asymptotique aux courtes distances.

Q38. Montrer que le caractère imparfait des conducteurs se traduit par une variation de la norme de la force de Casimir mesurée en $a^{\alpha'}$ où α' est un entier négatif dont la valeur sera estimée.

Q39. Dans les deux cas limites (cas 1 et cas 2) de dimensions de cavité a égales respectivement à 0,1 et 10 μm , discuter du choix de conducteurs respectivement en aluminium ou en or. Compte tenu des résultats présentés sur les figures 7 et 8, discuter du choix entre l'or et l'aluminium pour une expérience dans une cavité de dimension a de l'ordre de 100 nm. Proposer une justification du fait que l'or est souvent choisi en pratique.

IV – Mesure de déflexion par interférométrie en quadrature de phase

On s'intéresse dans cette sous-partie à un dispositif de mesure de déflexion d'un micro-levier, utile notamment pour l'étude de l'effet Casimir [6, 7]. L'étude est menée volontairement dans un cadre idéalisé, sans considérer divers défauts qu'il est possible de prendre en compte en pratique par un protocole de calibration non abordé.

Le dispositif fait intervenir divers éléments précisés sur la figure 9 et qui impose un système d'axes utile pour la suite :

- un faisceau LASER entrant : ce faisceau est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda_0 = 633$ nm, et polarisé rectilignement selon la direction du vecteur $\vec{e}_y + \vec{e}_z$;

- des cubes séparateurs non polarisants inférieur (CS_i) et supérieur (CS_s) : ces cubes permettent de diviser les ondes lumineuses de manière équilibrée en intensité, sans modifier leur état de polarisation. Notamment, le faisceau LASER entrant est, pour moitié en intensité, réfléchi par CS_i et donne un faisceau qui se propage vers BD_0 d'état de polarisation rectiligne selon la direction du vecteur $\vec{e}_x + \vec{e}_y$;
- des lentilles L_0 , L_1 et L_2 d'ajustement optique supposées parfaites : elles ne modifient ni l'état de polarisation des ondes qui les traversent ni leur amplitude ;
- une lame quart d'onde $\lambda/4$: cette lame introduit sur le champ électrique de l'onde qui la traverse une avance de phase de $\pi/2$ pour la composante selon l'axe des y par rapport à celle selon l'axe des z (on néglige tout effet d'absorption) ;
- des déplaceurs polarisants BD_0 , BD_1 et BD_2 (initiales BD pour « *beam displacer* ») : il s'agit de cristaux biréfringents qui réalisent des opérations particulières expliquées dans la suite ;
- des photodiodes à deux cadrans PD_1 et PD_2 : elles permettent de déterminer le contraste complexe $\underline{C}$ défini par

$$\underline{C} = C_1 + i C_2 \quad \text{avec, pour } n = 1 \text{ ou } 2, \quad C_n = \frac{I_{A_n} - I_{B_n}}{I_{A_n} + I_{B_n}}$$

où I_{A_n} et I_{B_n} sont les intensités relevées respectivement par les cadrans A_n et B_n du détecteur PD_n (les termes C_1 et C_2 peuvent être positifs ou négatifs).

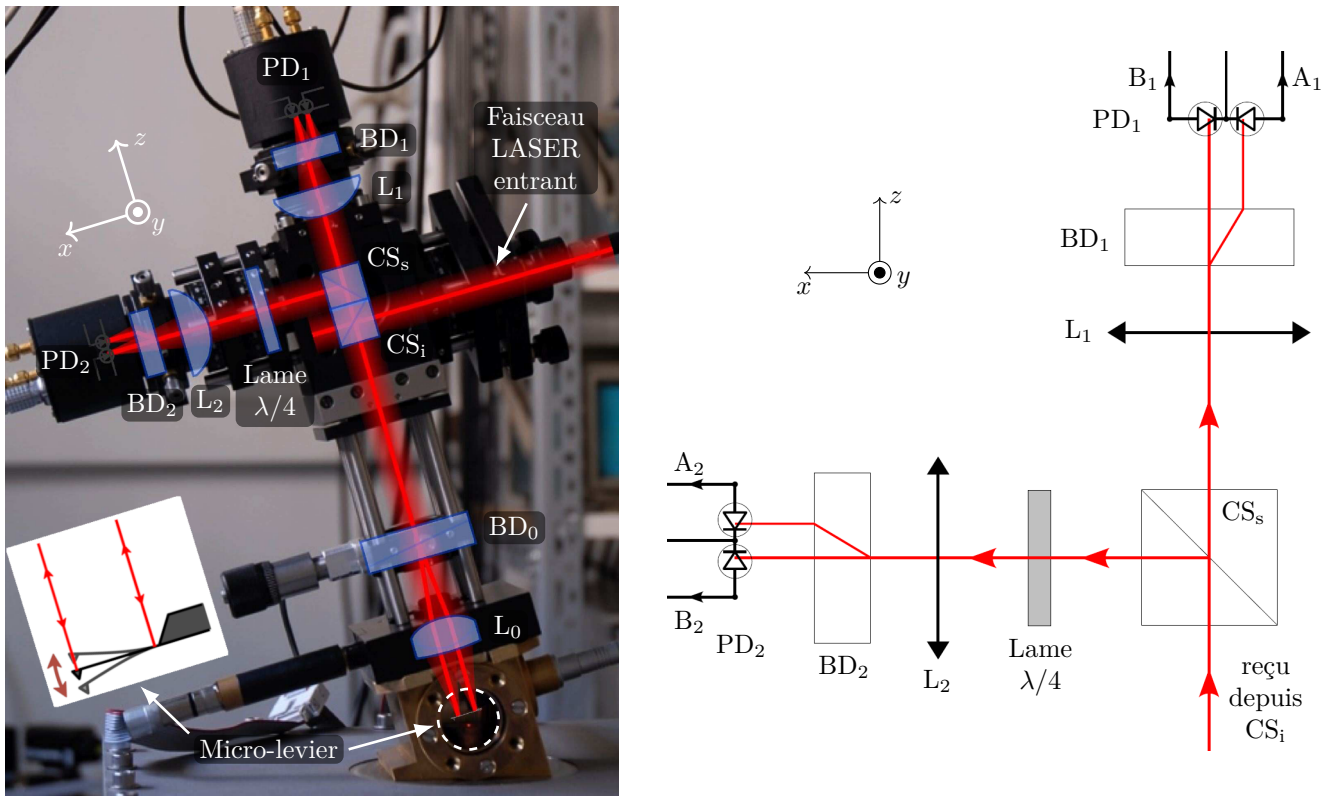


Figure 9 – Dispositif de mesure de déflexion d'un micro-levier [6]. Un système d'axes (x, y, z) est précisé, de vecteurs unitaires associés $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. À gauche : montage avec divers éléments schématisés en surimpression et un encart spécifique pour le micro-levier. À droite : schéma optique relatif à la partie analyse du dispositif.

Les opérations réalisées par un déplaceur polarisant (BD) sont les suivantes (en se référant à la figure 10) :

- opération en sens direct de séparation (*lecture de la figure 10 avec propagation de gauche à droite*) : BD décompose un rayon d'état de polarisation quelconque en deux rayons parallèles entre eux, l'un non dévié polarisé rectilignement selon $\vec{e}_u$ et l'autre décalé polarisé rectilignement selon $\vec{e}_v$. BD permet de séparer les deux composantes de polarisation de l'onde incidente ;
- opération en sens inverse de superposition (*lecture de la figure 10 avec propagation de droite à gauche*) : BD permet aussi de réaliser l'opération inverse de la précédente, c'est-à-dire combiner les deux rayons polarisés représentés à droite pour constituer le rayon à gauche avec les états de polarisation superposés.

Ces opérations n'introduisent pas de déphasage entre les composantes séparées (sens direct) ou superposées (sens inverse).

Dans toute la suite, on appelle amplitude complexe associée à un champ électrique $\vec{E}$ de pulsation ω le vecteur complexe constant $\vec{E}_0$ tel que $\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i\omega t}]$ où la notation Re désigne la partie réelle.

On suppose que, si $\vec{E}_n$ est l'amplitude complexe du champ reçu par le cadran A_n , l'intensité relevée est donnée par $\vec{E}_n \cdot \vec{E}_n^*$, où $\vec{E}_n^*$ est l'amplitude complexe conjuguée associée à $\vec{E}_n$.

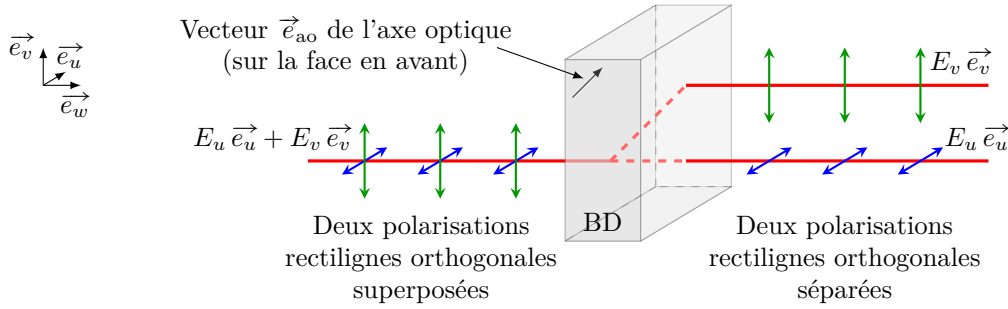


Figure 10 – Schéma de principe d'un déplaceur polarisant (BD). Le trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ est direct et droit : $\vec{e}_w$ est orthogonal à la face d'entrée de BD et $\vec{e}_u$ est orthogonal à $\vec{e}_{ao}$ caractéristique de BD ($\vec{e}_{ao}$ est dans le plan vectoriel $(\vec{e}_v, \vec{e}_w)$). Tous les champs électriques représentés sont associés à des ondes transverses.

On considère pour le moment uniquement deux rayons de même intensité qui parviennent sur le micro-levier comme indiqué sur la figure 11. Ces deux rayons ont été obtenus à partir d'un unique rayon, séparé spatialement par le déplaceur polarisant BD_0 , et ajustés avec la lentille L_0 . Le rayon qui arrive sur la base immobile du micro-levier est polarisé selon l'axe x (il sert de référence et il s'agit du rayon non dévié transmis par BD_0 sur L_0) ; celui qui arrive sur l'extrémité du micro-levier est polarisé selon l'axe y . Au moment de leur réflexion, ces rayons ne changent pas d'intensité, ne subissent pas de déphasage et conservent leur état de polarisation.

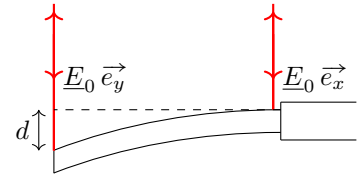


Figure 11 – Réflexion de deux rayons sur le micro-levier. Les amplitudes complexes des rayons incidents sont indiquées.

Q40. En supposant l'angle de déflexion suffisamment faible pour considérer un retour inverse de deux rayons parallèles comme l'illustre la figure 11, donner une expression approchée du retard de phase φ introduit par une déflexion d du micro-levier pour le rayon réfléchi à l'extrémité du micro-levier par rapport à l'autre.

Les deux faisceaux obtenus après réflexion sur le micro-levier sont recombinaés en un seul faisceau grâce au déplaceur polarisant BD_0 : l'amplitude complexe associée au champ électrique de ce faisceau est notée $\vec{E}'_0 (\vec{e}_x + e^{-i\varphi} \vec{e}_y)$.

On choisit une orientation du déplaceur polarisant BD_1 qui donne au niveau des cadrans A_1 et B_1 les amplitudes complexes suivantes associées aux champs électriques des faisceaux qui les atteignent respectivement :

$$\vec{E}_{A_1} = \vec{E}_0'' (1 + e^{-i\varphi}) \vec{e}_{A_1} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{B_1} = \vec{E}_0'' (1 - e^{-i\varphi}) \vec{e}_{B_1}.$$

Les vecteurs $\vec{e}_{A_1}$ et $\vec{e}_{B_1}$ sont unitaires et orthogonaux entre eux.

Q41. Proposer une orientation pour le déplaceur polarisant BD_1 qui correspond à ce choix. On précisera soigneusement à cet effet les orientations des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_{A_1}$ et $\vec{e}_{B_1}$ sur un ou plusieurs schémas adaptés.

L'orientation du déplaceur polarisant BD_2 permet d'obtenir au niveau des cadrans A_2 et B_2 , en l'absence de la lame quart d'onde $\lambda/4$, les amplitudes complexes suivantes associées aux champs électriques des faisceaux qui les atteignent respectivement :

$$\vec{E}_{A_2} = \vec{E}_0'' (1 + e^{-i\varphi}) \vec{e}_{A_2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{B_2} = \vec{E}_0'' (1 - e^{-i\varphi}) \vec{e}_{B_2}.$$

Les vecteurs $\vec{e}_{A_2}$ et $\vec{e}_{B_2}$ sont unitaires et orthogonaux entre eux. C'est seulement après ce réglage que la lame quart d'onde $\lambda/4$ est ajoutée et que l'on procède aux mesures.

Q42. Montrer que dans le plan complexe (C_1, C_2) associé au contraste complexe $\underline{C}$, le déphasage φ est obtenu par la mesure d'un angle θ à préciser.

Q43. Sachant qu'il est possible de détecter une variation de l'angle θ de 10^{-5} rad au mieux, déterminer la valeur numérique de la plus petite variation δd de déflexion mesurable pour le micro-levier. Conclure dans le contexte de l'étude de forces de Casimir avec un tel dispositif.

Données et formulaire

Notations et données numériques

Dans tout le sujet, i désigne l'unité imaginaire complexe de carré -1 .

Le tableau suivant donne quelques valeurs numériques, à trois chiffres significatifs, potentiellement utiles dans le cadre du sujet :

Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 2,99 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,10 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Le résultat de l'intégrale suivante est également fourni :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

Relations de passage

Les relations de passage pour le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ au niveau d'une interface qui comporte des charges et courants surfaciques $(\sigma, \vec{j}_s)$ et qui sépare deux milieux, notés 1 et 2, sont :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{12}$$

où $\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 (voir figure 12), et $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ (comme $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$) sont les champs dans les milieux 1 et 2 aux points M_1 et M_2 au voisinage immédiat du point M de l'interface sur une même normale.

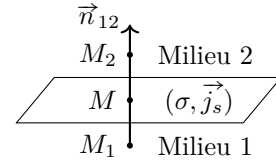


Figure 12 – Schématisation associée aux relations de passage.

Équation de Schrödinger

L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ associée à une particule de masse m dans un « potentiel » $V(x, t)$ est régie par l'équation de Schrödinger à une dimension suivant l'axe (Ox) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t).$$

Loi de Planck

Le rayonnement d'un corps noir à l'équilibre thermique à la température T a une densité spectrale d'énergie volumique (en $\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}.$$

$u_\omega(\omega, T) d\omega$ est la contribution de l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ à la densité volumique d'énergie du rayonnement.

Loi de Wien

L'exitance énergétique monochromatique (c'est-à-dire la densité spectrale de flux surfacique rayonné) d'un corps noir à l'équilibre thermique à la température T admet un maximum à une longueur d'onde λ_m qui correspond à un maximum de la densité spectrale d'énergie en longueur d'onde. La loi de Wien précise la relation entre cette longueur d'onde et la température associée :

$$\lambda_m T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K} \approx 3 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}.$$

Analyse vectorielle

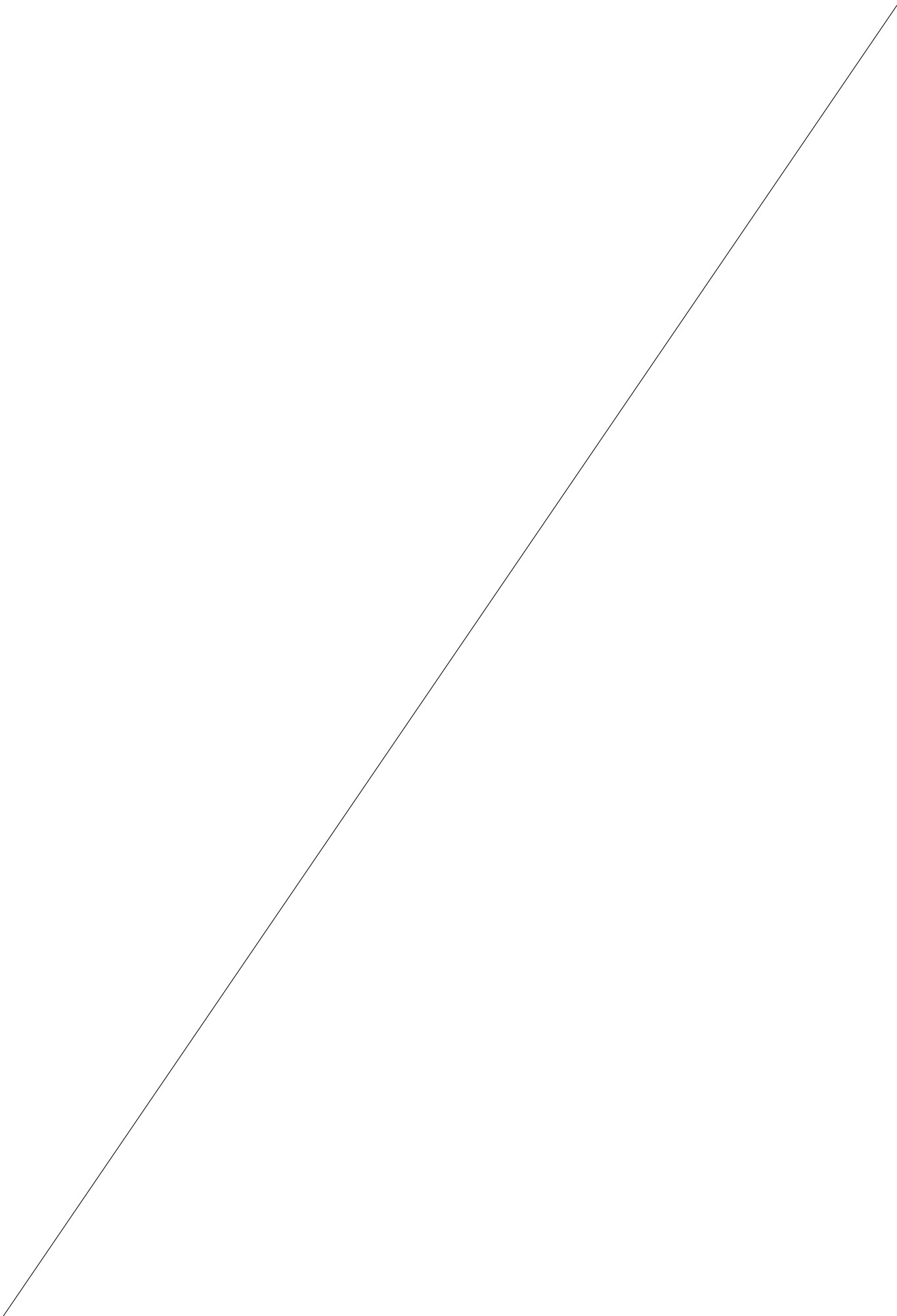
Pour un champ vectoriel $\vec{X}$:

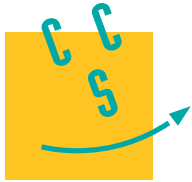
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{X})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{X})) - \Delta \vec{X}.$$

Références

- [1] X. SUN. « The numerical computation of Casimir energies and related spectral problems ». Thèse. University College London, déc. 2022. URL : <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10185254>.
- [2] B. W. HARRIS, F. CHEN et U. MOHIDEEN. « Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces ». In : *Phys. Rev. A* 62 (5 oct. 2000), p. 052109. DOI : 10.1103/PhysRevA.62.052109. URL : <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.052109>.
- [3] A. ROY, C.-Y. LIN et U. MOHIDEEN. « Improved precision measurement of the Casimir force ». In : *Phys. Rev. D* 60 (11 nov. 1999), p. 111101. DOI : 10.1103/PhysRevD.60.111101. URL : <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.111101>.
- [4] T. EMIG et al. « Probing the strong boundary shape dependence of the Casimir force ». In : *Phys. Rev. Lett.* 87 (26 déc. 2001), p. 260402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.87.260402. URL : <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.260402>.
- [5] C. GENET. « La force de Casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle ». Thèse. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, juill. 2002. URL : <https://theses.hal.science/tel-00001749>.
- [6] L. BELLON. « Exploring nano-mechanics through thermal fluctuations ». Habilitation à diriger des recherches. École normale supérieure de Lyon – ENS LYON, nov. 2010. URL : <https://theses.hal.science/tel-00541336>.
- [7] A. LE CUNUDER. « Étude expérimentale des forces de Casimir ». Thèse. Université de Lyon, mars 2017. URL : <https://theses.hal.science/tel-01490037>.

◇ Fin ◇





Observation et protection côtières

Lorsqu'ils circulent au voisinage des côtes, les courants marins de surface exercent une influence sur les activités humaines se déroulant en mer, près du rivage. Ils jouent également un rôle déterminant dans l'érosion du littoral et dans la dégradation d'infrastructures côtières, phénomènes en cours d'aggravation sous l'effet de l'évolution du climat. Les deux premières parties de ce problème analysent une technique de télédétection permettant l'observation de ces courants jusqu'à des distances de l'ordre de 100 km. La troisième, qui peut être abordée indépendamment des deux précédentes, décrit une solution novatrice de protection et de construction d'ouvrages maritimes.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Des données numériques sont fournies en fin d'énoncé. On note j l'unité imaginaire telle que $j^2 = -1$.

Partie A – Principes physiques d'un radar océanographique

En 1955, D.D. Crombie découvre que la réflexion d'une onde radio sur la mer produit un écho caractéristique, qu'il interprète par l'interaction du champ électromagnétique avec les vagues agitant la surface de l'eau. À partir de là, divers instituts ont développé des techniques d'observation à distance de l'état de la mer. Elles utilisent un radar côtier émettant une onde de la bande HF (haute fréquence, entre 3 et 30 MHz) et recevant l'onde rétrodiffusée (ou réfléchie) par l'interface entre l'air et l'eau (figure 1). Le développement de ces instruments se poursuit aujourd'hui et cette partie aborde les principes physiques sur lesquels leur fonctionnement repose.

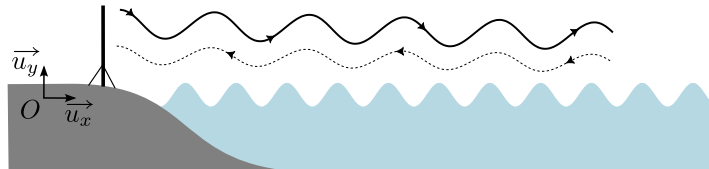


Figure 1 – Radar côtier émettant une onde HF vers la surface de la mer et recevant l'onde rétrodiffusée

I – Modèle optique et loi de Bragg

La rétrodiffusion d'une onde électromagnétique par la mer obéit à la loi de Bragg. Pour l'expliquer, on peut en première analyse ignorer la forme précise des vagues pour ne tenir compte que de leur aspect périodique. On assimile la surface de l'eau à un réseau de diffraction inclus dans le plan $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$, formé d'éléments réflecteurs identiques, invariants par translation selon $\vec{u}_z$ et se répétant selon $\vec{u}_x$ avec une période L égale à la longueur d'onde des vagues (figure 2). L'onde radar incidente, plane, monochromatique de longueur d'onde λ , rencontre cette surface avec un angle d'incidence i . On considère l'onde réfléchie vers l'infini dans la direction repérée par l'angle θ .

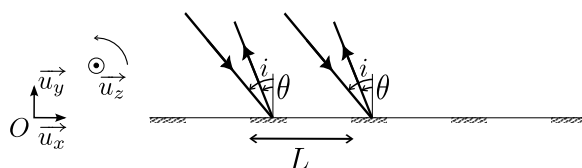


Figure 2 – Modélisation de la surface de la mer par un réseau.
Les éléments réfléchissants sont hachurés.

Q1. Établir l'expression de la différence de marche δ entre les ondes réfléchies par deux motifs successifs du réseau.

Q2. Justifier sans calcul que l'onde rétrodiffusée sera particulièrement intense dans les directions telles que

$$\exists p \in \mathbb{Z}, L(\sin \theta + \sin i) = p\lambda . \quad (1)$$

Par analogie avec la cristallographie, et selon l'usage adopté en océanographie, cette relation sera dans la suite appelée *loi de Bragg*.

II – Modèle du conducteur parfait

Pour établir un lien entre l'amplitude du signal rétrodiffusé et la hauteur des vagues, il convient de décrire plus précisément la surface de la mer et le champ électromagnétique. On repère un point de l'interface air-eau par sa hauteur $h(x)$ par rapport au plan de référence d'équation $y = 0$. Dans l'air, au point M et à l'instant t , l'onde incidente émise par le radar, de fréquence f et de pulsation ω , possède en notation complexe le champ électrique

$$\vec{E}_i(M, t) = A e^{j(\vec{K}_i \cdot \vec{OM} - \omega t)} \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \vec{K}_i = k_i \vec{u}_x - q_i \vec{u}_y \quad (2)$$

où A , $k_i > 0$ et $q_i > 0$ sont des constantes.

Q3. L'air étant assimilé au vide, démontrer l'équation de propagation à laquelle $\vec{E}_i$ obéit et en déduire la relation entre k_i , q_i et ω .

En pénétrant dans l'eau de mer de conductivité électrique $\sigma = 4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, l'onde électromagnétique HF s'atténue sur une épaisseur caractéristique $\ell_a = \sqrt{1/(\pi\mu_0\sigma f)}$, un peu comme elle le ferait dans un métal de perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Pour simplifier, on convient de traiter cette eau comme un conducteur parfait.

Q4. En comparant les ordres de grandeur de plusieurs grandeurs pertinentes, analyser l'acceptabilité de cette simplification pour les ondes de la bande HF.

Dans le modèle du conducteur parfait, et compte tenu de la polarisation choisie ici, le champ électrique est nul au voisinage immédiat de l'interface. Dans un premier temps, on considère la situation définie par $h(x) = 0$ (mer parfaitement plate) et on cherche l'onde réfléchie sous la forme $\vec{E}_r = E_r \vec{u}_z$ avec

$$\vec{E}_r(M, t) = r_0 A e^{j(\vec{K}_0 \cdot \vec{OM} - \omega t)} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{K}_0 = k_0 \vec{u}_x + q_0 \vec{u}_y, \quad q_0 > 0.$$

Q5. Trouver le coefficient de réflexion r_0 et exprimer k_0 en fonction de k_i . Justifier enfin l'égalité $q_0 = q_i$.

On tient dorénavant compte de l'agitation de la mer et, pour déterminer le champ électrique réfléchi, on s'appuie sur une méthode perturbative fondée sur l'hypothèse que la hauteur h , quoique non nulle, reste assez faible. Plus précisément, en désignant par q la composante verticale d'un vecteur d'onde électromagnétique, on pose $\epsilon = qh$ et on suppose $|\epsilon| \ll 1$. On limite tous les calculs à l'ordre 1 en ϵ et on cherche le champ électrique réfléchi sous la forme $\vec{E}_r = E_r \vec{u}_z$ avec

$$E_r(M, t) = -A e^{j(k_i x + q_i y - \omega t)} + r_1 A e^{j(k_r x + q_r y - \omega t)} + \dots \quad (3)$$

Dans cette écriture, le facteur inconnu r_1 est d'ordre ϵ^1 et les points de suspension désignent des termes négligeables d'ordre plus élevé.

Q6. Détailler l'expression du vecteur $\vec{OM}$ pour un point de l'interface air-eau. Montrer que la présence de cette frontière se traduit par la relation

$$-2jq_i h(x) e^{jk_i x} + r_1 e^{jk_r x} = 0. \quad (4)$$

Pour des vagues sinusoïdales de longueur d'onde L , on pose

$$h(x) = h_0 \cos(k_v x) = \frac{h_0}{2} e^{jk_v x} + \frac{h_0}{2} e^{-jk_v x} \quad \text{avec} \quad k_v = \frac{2\pi}{L}.$$

On poursuit les calculs en ne prenant en compte que le terme $e^{-jk_v x}$ (l'autre conduit à une onde diffusée selon $+\vec{u}_x$, inutilisable par le radar).

Q7. Exprimer r_1 en fonction de q_i et h_0 , et k_r en fonction de k_i et k_v . Indiquer quel intérêt la mesure de r_1 présente en ce qui concerne l'étude de l'état de la mer.

Q8. À partir du résultat de la question précédente, retrouver la loi de Bragg (1) rencontrée dans la question **Q2**, pour un ordre p à préciser.

Un radar océanographique est installé sur la côte, à quelques mètres au dessus du niveau de la mer, et l'irradie à des distances de l'ordre de plusieurs dizaines de kilomètres. L'onde rétrodiffusée est détectée au même point où l'onde incidente est émise. Dans ce contexte, on utilise la loi de Bragg sous la forme simplifiée

$$L = \frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

Q9. Expliquer sous quelles hypothèses et/ou approximations cette égalité se déduit de la relation (1).

Sous l'effet du vent, des vagues de toutes les longueurs d'onde se développent à la surface de la mer dont l'état instantané peut être décrit par une superposition de déformations harmoniques, chacune relevant de l'étude conduite dans les questions précédentes. La fréquence d'émission du radar étant donnée, seuls les termes de cette décomposition qui vérifient la loi de Bragg produisent un écho significatif.

Q10. Pour un radar émettant à 12,3 MHz, trouver numériquement la longueur d'onde des vagues sélectionnées.

III – Effet Doppler

Dans les questions précédentes, on a implicitement supposé l'interface air-eau immobile, comme si la mer s'était brusquement figée. En réalité, les vagues ne sont pas statiques et la hauteur h dépend non seulement de x , mais aussi de l'instant t . Une onde de vague harmonique, de période L et de pulsation spatiale k_v , possède aussi une pulsation temporelle ω_v et voyage à la vitesse U dans la direction de $\vec{u}_x$, sous forme d'onde progressive dans le sens de $\vec{u}_x$ ou bien en sens inverse. L'amplitude est comme plus haut notée h_0 .

Q11. Proposer en notation réelle deux expressions de $h(x,t)$ correspondant aux deux sens de propagation des vagues et donner la relation entre U , ω_v et k_v .

L'onde radar incidente se réfléchit sur l'interface air-eau mobile à la vitesse $\pm U \vec{u}_x$, ce qui entraîne un décalage de la fréquence f_r de l'onde réfléchie par rapport à celle f de l'onde incidente. Ce phénomène nommé *effet Doppler* est régi par la relation ci-dessous, valable dans la limite où U est très inférieure à la célérité c de la lumière dans le vide :

$$f_r - f \approx \pm \frac{2U}{\lambda}. \quad (6)$$

La relation (6) est à la base de la vélocimétrie radar, par exemple pour le contrôle routier. Cependant, dans le contexte d'étude, ce n'est pas l'eau qui se déplace, mais uniquement la forme de son interface avec l'air. Les questions qui suivent permettent de justifier que la relation (6) s'applique encore dans ce cas. Le symbole $\pm$ (plus ou moins) regroupe des situations où les vagues s'éloignent ou s'approchent de la côte et on va aussi voir quel signe il convient de choisir dans chaque cas.

En lieu et place de la relation (4), la présence de l'interface se traduit désormais par la relation suivante (qu'on ne demande pas d'établir) faisant intervenir la pulsation ω_r de l'onde réfléchie :

$$-2jq_i h(x,t) e^{j(k_i x - \omega t)} + r_1 e^{j(k_r x - \omega_r t)} = 0.$$

Dans le cas d'une onde s'éloignant du rivage, la méthode de décomposition complexe présentée dans le cas statique (section II) conduit à considérer que

$$h(x,t) = \frac{h_0}{2} e^{-j(k_v x - \omega_v t)}.$$

Q12. Trouver, d'une part, l'expression de ω_r en fonction de ω et ω_v et, d'autre part, celle de k_r en fonction de k_i et k_v .

La rétrodiffusion vers le radar correspond à la valeur négative $k_r = -\omega_r/c$.

Q13. En utilisant les deux relations établies dans la question précédente, montrer que f_r est donnée par l'un des deux cas de la relation (6). Fournir ensuite l'expression de f_r pour une onde s'approchant du rivage.

IV – Mesure de courants de surface

La vitesse U de progression des vagues dépend de leur longueur d'onde L selon la relation

$$U = \sqrt{gL/(2\pi)} \quad (7)$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Q14. En utilisant la loi de Bragg, montrer que $f_r - f = \pm f_B$ et exprimer la fréquence de Bragg f_B en fonction de g et λ .

En plus des vagues, la surface de la mer est soumise à un courant de surface : sur une épaisseur variant de quelques mètres à plusieurs centaines de mètres, l'eau s'écoule à la vitesse constante et uniforme $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$. Dans ce cas, la relation (7) ne s'applique plus dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ (où le radar est fixe), mais dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à la vitesse $v_x \vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Q15. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, exprimer d'une part la vitesse des vagues s'approchant du rivage et d'autre part celle des vagues qui s'en éloignent (on distinguera sans ambiguïté les deux cas). Montrer qu'en présence de courants de surface,

$$f_r - f = \pm f_B + f_D \quad (8)$$

et donner l'expression du décalage Doppler f_D en fonction de v_x et de c .

La figure 3 montre les spectres des signaux reçus par deux radars situés au sud-ouest de la Grande-Bretagne (à Pendenn et à Perranporth) et qui utilisent la fréquence de 12,3 MHz. L'abscisse est $f_r - f$ (en hertz) et l'ordonnée est la densité spectrale de puissance (en décibels) qui représente la puissance du signal reçu à chaque fréquence. En plus du bruit et de maximums secondaires, on voit nettement apparaître deux pics correspondant aux fréquences identifiées dans la question précédente. Les segments tracés en pointillés indiquent les abscisses $\pm f_B$.

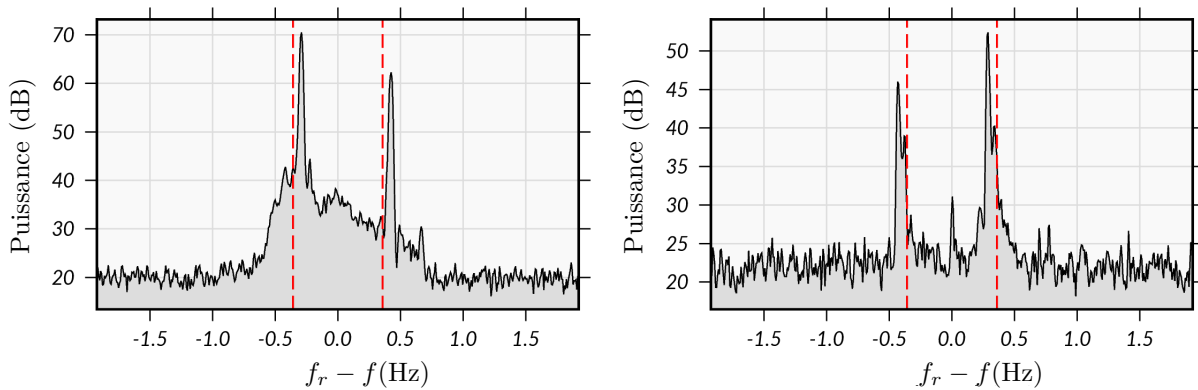


Figure 3 – Spectres Doppler enregistrés par les radars de Pendenn (à gauche) et de Perranporth (à droite).

Q16. À l'aide de ces deux graphiques, proposer une valeur expérimentale pour f_B . Discuter, à l'aide d'un critère quantitatif, la compatibilité de la valeur obtenue avec l'expression établie en **Q14**. Dans chacun des deux cas, trouver la vitesse v_x du courant. Préciser si les courants circulent en s'approchant ou en s'éloignant de la côte.

Dans le cas général, le vecteur vitesse du courant de surface s'écrit sous la forme $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_z \vec{u}_z$; il n'est pas colinéaire à la direction $\vec{u}_x$ du faisceau radar comme supposé précédemment. L'expression de f_D établie dans la question **Q15** s'applique toujours, mais elle donne seulement accès à v_x .

Pour connaître le vecteur vitesse, on utilise deux radars émettant dans des directions $\vec{u}_{x1}$ et $\vec{u}_{x2}$ définies par leurs azimuts θ_1 et θ_2 . Le premier fournit $v_{x1} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{x1}$ et le second $v_{x2} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{x2}$. On en déduit les projections de $\vec{v}$ sur les vecteurs unitaires $\vec{u}_E$ (pointant vers l'est) est $\vec{u}_N$ (pointant vers le nord) par les relations

$$v_E = \frac{v_{x1} \sin \theta_2 - v_{x2} \sin \theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \quad \text{et} \quad v_N = \frac{v_{x2} \cos \theta_1 - v_{x1} \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}.$$

La carte de la figure 4 renseigne sur les courants de surface mesurés par les radars de Pendenn et de Perranporth situés aux points R_1 et R_2 . Les spectres représentés sur la figure 3 concernent à un même instant le point M signalé sur cette carte, pour lequel $\theta_1 = (\vec{u}_E, \vec{u}_{x1}) = 64^\circ$, $\theta_2 = (\vec{u}_E, \vec{u}_{x2}) = 189^\circ$.

Q17. Calculer numériquement v_E et v_N . Analyser la cohérence des valeurs obtenues avec les informations fournies par la carte de la figure 4 sur la norme et l'orientation du vecteur vitesse.

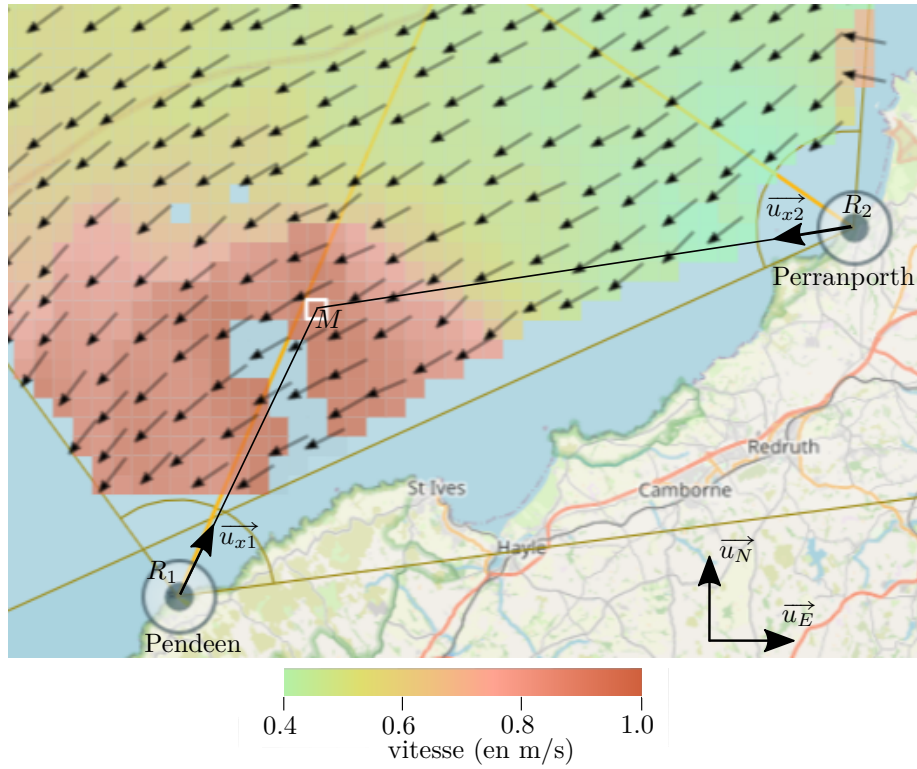


Figure 4 – Carte des courants en Mer Celtique fournie par les radars de Pendeen et Perranporth repérés par les points R_1 et R_2 [1]. Les spectres de la figure 3 concernent le point M signalé par un carré au bord blanc.

Partie B – Traitement des signaux radar

Le décalage Doppler f_D proportionnel à la vitesse à mesurer est souvent inférieur à 1 Hz et il concerne une onde dont la fréquence initiale est de l'ordre de 10 MHz. La mesure précise de cette minuscule variation est réalisée par détection synchrone, technique dont la section I introduit le principe. Parallèlement, l'antenne réceptrice capte une multitude d'échos provenant de chaque petit élément de la mer sur une surface de plusieurs centaines de kilomètres carrés. Pour établir une carte de courant du type de celle visible sur la figure 4, il faut analyser simultanément tous ces échos et déterminer d'où chacun provient, en calculant notamment la distance à l'antenne de chaque petit élément réflecteur. Cette *résolution en distance* fait elle aussi appel à la détection synchrone (section II) et, dans les installations modernes, on la conduit conjointement à la détermination des décalages Doppler. Par souci de simplicité, on dissocie l'étude de ces deux aspects.

I – Mesure d'une différence de fréquence par détection synchrone

On considère deux signaux sinusoïdaux $v_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ et $v_2 = B \cos(2\pi f_2 t + \varphi_0)$, où A , B et φ_0 sont des constantes, dont on souhaite mesurer l'écart de fréquence $f_2 - f_1$, supposé très inférieur aux fréquences f_1 et f_2 . Le montage de détection synchrone qui permet d'y parvenir est représenté schématiquement sur la figure 5 : il est formé d'un multiplieur analogue $\mathcal{M}$ (qui donne une tension de sortie proportionnelle au produit de ses deux tensions d'entrée) et d'un filtre $\mathcal{F}$ dont la nature sera étudiée plus loin.

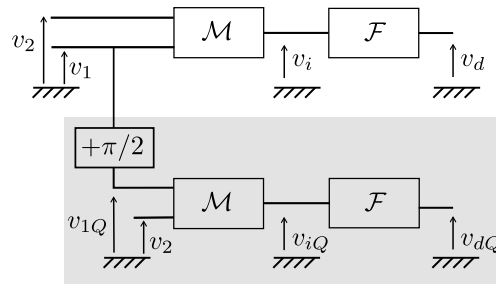


Figure 5 – Principe d'un montage de détection synchrone.
Jusqu'à la question **Q20** incluse, la partie inférieure sur fond gris n'a pas à être considérée.

Q18. Exprimer à un facteur près le signal intermédiaire v_i , puis justifier que son spectre fait apparaître les fréquences $f_2 + f_1$ et $|f_2 - f_1|$. Indiquer le type de filtrage qui permet d'obtenir, à la sortie du filtre, un signal v_d de fréquence $|f_2 - f_1|$.

Le traitement des signaux radars fait intervenir des composants spécifiques aux hautes fréquences. Pour des ultrasons au contraire, avec des fréquences de l'ordre de 10^4 Hz, des composants usuels disponibles dans un lycée (résistances, condensateurs et bobines d'auto-induction) fonctionneraient.

Q19. Proposer pour $\mathcal{F}$ un schéma électrique de filtre passif convenable, sans préciser pour l'instant les valeurs des composants. Un filtre d'ordre 1 est acceptable mais le jury valorisera davantage un filtre d'ordre 2, plus efficace.

Q20. Exprimer la fonction de transfert du montage de la question précédente. Pour $f_1 \approx f_2 \approx 40$ kHz, proposer des valeurs réalistes pour les composants du filtre $\mathcal{F}$.

À l'issue du filtrage, v_d est pratiquement sinusoïdal et mesurer sa fréquence revient à mesurer $|f_2 - f_1|$, ce qui était le but à atteindre. Cependant, dans le cas de l'effet Doppler (où $f_1 = f$ et $f_2 = f_r$), il est important de connaître le *signe* de $f_2 - f_1$ (Partie A section III). Pour cela, on complète le montage de la figure 5 par une seconde voie (représentée sur fond gris) dans laquelle on applique des opérations analogues après avoir déphasé v_1 de $+\pi/2$ (démodulation en quadrature).

Q21. Dans l'hypothèse d'un filtrage idéal, exprimer le signal v_{dQ} et expliquer comment son observation conjointe à celle de v_d permet d'obtenir le signe de $f_2 - f_1$.

II – Mesure de distance par modulation de fréquence

La mesure de la distance des éléments réflecteurs fonctionne elle aussi par détection synchrone grâce à une modulation de la fréquence de l'onde émise. Alors qu'un signal de fréquence f_0 constante varie selon $\cos(2\pi f_0 t)$, le champ électrique émis par l'antenne est proportionnel à la tension $v_e(t)$, T_m -périodique et définie sur une période par

$$\forall t \in [0, T_m[, v_e(t) = A \cos \Phi(t) \quad \text{avec} \quad \Phi(t) = 2\pi \left(f_0 + \frac{Bt}{2T_m} \right) t. \quad (9)$$

La grandeur positive B , homogène à une fréquence et très inférieure à f_0 , est appelée largeur de bande. La période de répétition T_m est de l'ordre de quelques dixièmes de secondes et f_0 de l'ordre de 10 MHz.

On définit la *fréquence instantanée* $f(t)$ de v_e par $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}(t)$.

Q22. Exprimer $f(t)$ et tracer schématiquement le graphe de ses variations sur deux périodes.

La cible qui réfléchit l'onde, supposée ici immobile, se trouve à la distance d de l'antenne émettrice. À l'instant t , la station radar dispose du signal d'émission $v_e(t)$ et du signal d'écho $v_r(t)$. Ce dernier provient de la réflexion par la cible du signal émis un peu plus tôt, de sorte que sa fréquence $f_r(t)$ à l'instant t est celle que possédait v_e à l'instant $t - \tau$.

Q23. Donner l'expression de τ . Pour $d = 10$ km, vérifier qu'il est très inférieur à T_m , puis représenter sur un même graphique les variations de $f(t)$ et $f_r(t)$. Les deux courbes seront légendées et tracées en deux couleurs distinctes. Pour ce graphique seulement, on prendra $\tau = T_m/10$.

Les signaux $v_e(t)$ et $v_r(t)$ sont appliqués à l'entrée du montage de détection synchrone (représenté figure 5 et étudié dans la section I).

Q24. Exprimer la fréquence f_d du signal démodulé v_d . Montrer que sa mesure permet d'accéder à la distance d de la cible, qu'on exprimera en fonction de c , B et T_m .

III – Questions liées à l'échantillonnage

En pratique, l'écho reçu par un radar océanographique n'est pas parfaitement harmonique et la tension v_d issue de la détection synchrone présente de petites variations aléatoires. Elles se superposent au signal sinusoïdal idéal attendu et en compliquent l'exploitation. Pour mesurer la fréquence f_d , le signal bruité est échantillonné et numérisé, puis on procède à son analyse spectrale par transformée de Fourier discrète (TFD).

III.1 – Analyse spectrale par TFD

L'analyse spectrale par TFD est une technique couramment mise en œuvre dans les oscilloscopes numériques et les logiciels accompagnant les cartes d'acquisition. Son calcul est généralement conduit par l'algorithme de transformée de Fourier rapide (de sigle fréquemment rencontré FFT).

On considère un signal analogique $v(t)$ dont on a prélevé N_e échantillons $v_n = v(t_n)$ aux instants $t_n = nT_e$ avec $n \in \{0, 1, 2, \dots, N_e - 1\}$. La TFD permet d'afficher N_e valeurs $|S(f_k)|$ associées aux fréquences $f_k = k/(N_e T_e)$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_e - 1\}$. Selon les paramètres N_e et T_e choisis pour l'échantillonnage, ces nombres $|S(f_k)|$ constituent une représentation plus ou moins fidèle du spectre de v .

Q25. Expliquer en quoi consiste le phénomène de « repliement du spectre » et comment s'en prémunir.

L'échantillonnage sur une durée finie limite la capacité à distinguer, dans le spectre de v , des composantes harmoniques possédant des fréquences f_1 et f_2 très proches. On appelle *résolution spectrale* la valeur de $|f_2 - f_1|$ en dessous de laquelle cette distinction est impossible ; elle s'identifie ici à la *précision* δf sur l'échelle des fréquences. À titre d'exemple, on a représenté sur la figure 6 la TFD de la fonction $v(t)$ suivante, qui comporte un léger bruit aléatoire $\epsilon(t)$ superposé :

$$v(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t) + \epsilon(t) \quad \text{avec} \quad A = 2 \text{ V}, \quad f_1 = 150 \text{ Hz}, \quad f_2 = 160 \text{ Hz}, \quad |\epsilon(t)| < 0,1 \text{ V}. \quad (10)$$

Sur le spectre de gauche, $N_e = 100$, $T_e = 2$ ms ; sur celui de droite $N_e = 100$, $T_e = 0,5$ ms. Ces valeurs numériques ont été choisies dans un but illustratif et n'ont aucun lien avec celles mises en jeu dans le traitement des signaux radars. Pour plus de lisibilité, le graphique a été restreint aux fréquences inférieures à 250 Hz.

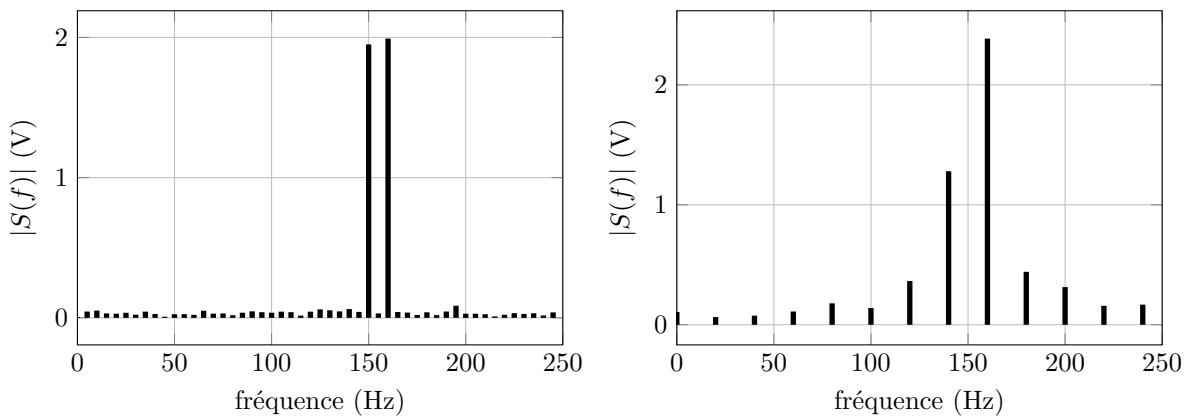


Figure 6 – Exemples de spectres obtenus par TFD du signal donné par l'expression (10) pour deux choix des paramètres d'échantillonnage.

Q26. Commenter ces deux spectres et analyser leur capacité à révéler les composantes spectrales de $v(t)$. Exprimer en fonction de N_e et T_e la précision en fréquence δf (identique à la résolution spectrale), et donner sa valeur numérique dans chacun des deux cas.

Dans les radars océanographiques, une double TFD permet d'obtenir simultanément les informations relatives à la vitesse v_x de la cible ($f_r - f = \pm f_B + f_D$, question **Q15**) et celles relatives à sa distance ($f_r - f$ est lié à d , question **Q24**). Comme annoncé au début de la partie, on traite *séparément* ces deux phénomènes dans les sous-sections III.2 et III.3 respectivement, comme si chacun existait indépendamment de l'autre.

III.2 – Limite et résolution en vitesse

Sur chaque rampe de modulation, de durée T_m , un échantillon de v_d est acquis et on répète cette opération N fois pour une durée d'acquisition $T_a = NT_m$. Les données sont ici $f = 29,85$ MHz, $f_B = 0,56$ Hz, $T_m = 0,262$ s et $B = 125$ kHz (radar WERA de la société Helzel Messtechnik).

Q27. Indiquer jusqu'à quelle fréquence maximale on peut obtenir le spectre pour en déduire $f_r - f$. En déduire la valeur maximale de f_D atteignable et la vitesse v_x maximale associée. On rappelle que ces grandeurs ont été reliées l'une à l'autre dans la question **Q15**.

Q28. Pour $N = 4096$, fournir la résolution spectrale de la mesure de $f - f_r$. En déduire la résolution Δv_x sur la vitesse v_x .

III.3 – Limite et résolution en distance

Au sein d'une unique rampe de modulation de durée $T_m = 0,262$ s, M échantillons équidistants de v_d sont acquis en vue du calcul de la TFD.

Q29. Exprimer la valeur maximale $f_{d_{max}}$ de f_d que l'on peut déduire de l'analyse de ce spectre. Pour une portée de radar d_{max} égale à 50 km, proposer une valeur de M compatible. On rappelle que d et f_d ont été reliées l'une à l'autre dans la question **Q24**.

Q30. Indiquer quelle est la résolution spectrale sur la mesure de f_d . En déduire la résolution en distance Δd . Pour information, la société Helzel Messtechnik indique que l'utilisateur peut paramétrer le radar et choisir des résolutions de 0,3 km, 0,6 km et 1,2 km.

Partie C – Protection du littoral par dépôt électrolytique

La formation de dépôts de carbonate de calcium et d'hydroxyde de magnésium sur une cathode métallique plongée dans l'eau de mer est un phénomène bien connu que Sir Humphry Davy a décrit dès les années 1840. Depuis quelques décennies, de nombreuses équipes ont cherché à le provoquer de manière contrôlée en réalisant des électrolyses sur des armatures immergées en milieu marin. En effet, le solide ainsi formé peut jouer le rôle de ciment et conduire, en agglomérant des sédiments présents au voisinage du métal, à la constitution de structures minérales capables de protéger des infrastructures portuaires de l'érosion, de favoriser l'installation d'organismes marins et de piéger des polluants présents dans l'eau de mer.

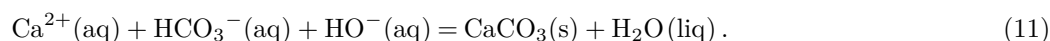
I – Composition de l'eau de mer

La composition de l'eau de mer présente des variations géographiques et en fonction de la profondeur. Le tableau 1 donne un exemple de composition d'une eau de mer artificielle commercialisée pour réaliser des expériences scientifiques.

Sel introduit	Formule	M (g · mol ⁻¹)	Concentration (g · L ⁻¹)
Chlorure de sodium	NaCl	58,4	26,5
Chlorure de magnésium	MgCl ₂	95,2	2,4
Sulfate de magnésium heptahydraté	MgSO ₄ · 7H ₂ O	246,5	6,75
Chlorure de calcium dihydraté	CaCl ₂ · 2H ₂ O	147,0	1,46
Chlorure de potassium	KCl	74,6	0,73
Hydrogénocarbonate de sodium	NaHCO ₃	84,0	0,20
Bromure de sodium	NaBr	102,9	0,30
pH = 8,1			

Tableau 1 – Composition d'une eau de mer artificielle (BS2011).

La formation de carbonate de calcium dans l'eau de mer est modélisée par la réaction d'équation :



Q31. Établir le diagramme de prédominance des différentes formes acidobasiques du dioxyde de carbone dissout en fonction du pH. En déduire l'espèce prédominante au pH de l'eau de mer (pH = 8,1).

Q32. Calculer la constante thermodynamique d'équilibre de la réaction (11).

L'eau de mer est souvent sursaturée en carbonate de calcium, c'est-à-dire que la formation du sel $\text{CaCO}_3(\text{s})$ est thermodynamiquement spontanée, mais cinétiquement bloquée.

Q33. Déterminer si c'est le cas de l'eau de mer dont la composition est décrite dans le tableau 1.

Q34. Calculer le pH d'apparition du précipité $\text{Mg}(\text{OH})_2(\text{s})$ lorsqu'on ajoute des ions hydroxyde HO^{-} à l'eau de mer étudiée.

II – Électrolyse de l'eau de mer et réactions cathodiques

En vue de réaliser l'électrolyse de l'eau de mer, on commence par étudier les réactions possibles à la cathode en traçant des courbes courant/potentiel dans l'eau de mer pour une cathode en acier. L'eau de mer est à l'équilibre avec l'air (pression partielle de dioxygène $P(\text{O}_2) = 0,20 \text{ bar}$) et contient donc du dioxygène dissout. Un exemple de courbe courant/potentiel obtenue est donné dans la figure 7. L'électrode de référence est une électrode au calomel saturée (ECS) de potentiel $E_{\text{ref}} = 0,22 \text{ V}$.

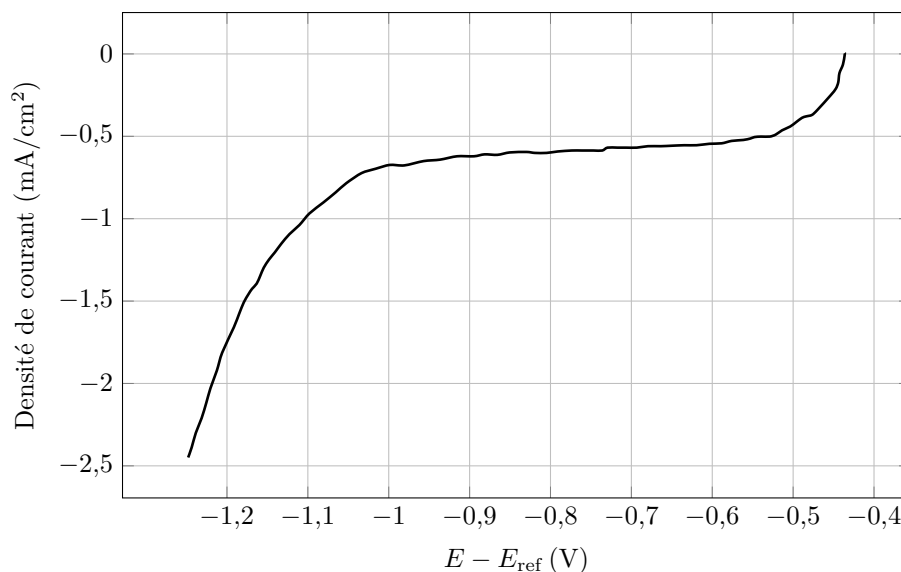


Figure 7 – Courbe courant/potentiel cathodique pour une électrode d'acier.

Q35. Calculer le potentiel d'oxydoréduction à $T = 298 \text{ K}$ du couple $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$ au pH de l'eau de mer ($\text{pH} = 8,1$) à l'équilibre avec l'air.

Q36. Calculer de même le potentiel d'oxydoréduction du couple $\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})$ au pH de l'eau de mer à l'équilibre pour une pression partielle de dihydrogène de 1 bar.

Dans les deux questions suivantes, on ne prend en compte que les réactions électrochimiques impliquant les couples de l'eau sans intervention des autres ions présents dans l'eau de mer.

Q37. Pour chacun des domaines de potentiel ci-dessous, écrire la (les) réaction(s) électrochimique(s) observée(s) et expliquer l'allure de la courbe dans le domaine correspondant :

- (a) $-1,00 \text{ V} < U < -0,45 \text{ V}$;
- (b) $U < -1,00 \text{ V}$.

Q38. Indiquer sur un graphique comment serait modifiée la courbe si elle était tracée avec une eau de mer contenant une plus faible concentration de dioxygène dissout.

On constate que, lorsqu'on applique à une cathode en acier plongée dans de l'eau de mer un potentiel de $-0,80 \text{ V}$ par rapport à l'électrode au calomel saturée, il se forme à sa surface un dépôt dense de carbonate de calcium CaCO_3 , tandis que, pour un potentiel appliqué inférieur à $-1,10 \text{ V}$ par rapport à l'ECS, le dépôt contient à la fois du carbonate de calcium CaCO_3 et de l'hydroxyde de magnésium $\text{Mg}(\text{OH})_2$.

Q39. Expliquer ces observations.

On étudie à présent l'ensemble de la cellule d'électrolyse. Le métal de l'anode est supposé inoxydable, et la cathode est une plaque d'acier utilisée dans le domaine de potentiel $-1,00 \text{ V} < U < -0,45 \text{ V}$ par rapport à l'électrode au calomel saturée. L'électrolyte est de l'eau de mer.

Q40. Montrer que deux réactions sont envisageables à l'anode.

Q41. Faire un schéma de la cellule d'électrolyse en fonctionnement en indiquant le sens de circulation du courant et la ou les réaction(s) aux électrodes.

III – Structure cristalline du dépôt de carbonate de calcium

La structure cristalline du carbonate de calcium dans le dépôt observé est l'aragonite. La maille correspondante est de type rhomboédrique, c'est-à-dire que tous les angles entre les arêtes de la maille sont égaux à 90° . Les arêtes de la maille sont $a = 496 \text{ pm}$, $b = 797 \text{ pm}$ et $c = 574 \text{ pm}$. L'aragonite est une variété allotropique stable à pression élevée, mais métastable à pression atmosphérique; la forme la plus stable à pression atmosphérique est la calcite, de masse volumique $\rho = 2,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. On admettra qu'une élévation de pression favorise thermodynamiquement la structure la plus dense.

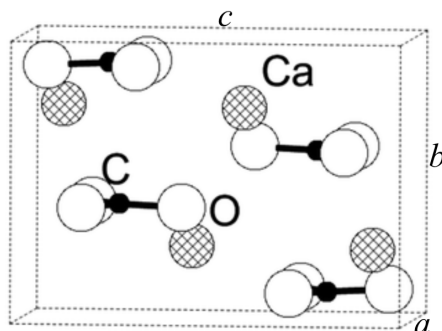


Figure 8 – Représentation de la maille de l'aragonite.

- Q42.** Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate CO_3^{2-} . On rappelle que le carbone et l'oxygène sont situés respectivement dans la quatrième et la sixième colonne de la deuxième période du tableau périodique des éléments.
- Q43.** Justifier qualitativement la géométrie plane de l'ion carbonate.
- Q44.** Préciser la nature des interactions à l'origine de la cohésion de l'aragonite.
- Q45.** Vérifier, en déterminant la masse volumique de l'aragonite, qu'elle est moins stable que la calcite à basse pression.

Données numériques

- Constante de Faraday : $F = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante de Nernst à 25°C : $\frac{RT}{F} \ln(10) \approx 0,06 \text{ V}$
- Constantes de solubilité à 25°C :

CaCO_3	$\text{Mg}(\text{OH})_2$
$\text{p}K_{\text{S1}} = 8,4$	$\text{p}K_{\text{S2}} = 10,9$

- Constantes d'acidité à 25°C :

$\text{CO}_2(\text{aq})/\text{HCO}_3^-(\text{aq})$	$\text{HCO}_3^-(\text{aq})/\text{CO}_3^{2-}(\text{aq})$
$\text{p}K_{\text{A1}} = 6,1$	$\text{p}K_{\text{A2}} = 10,2$

- Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau à 25°C : $K_E = 10^{-14}$
- Potentiels standard à 25°C :

$\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$	$\text{Cl}_2(\text{g})/\text{Cl}^-(\text{aq})$	$\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})$
$E_1^\circ = 1,23 \text{ V}$	$E_2^\circ = 1,36 \text{ V}$	$E_3^\circ = 0 \text{ V}$

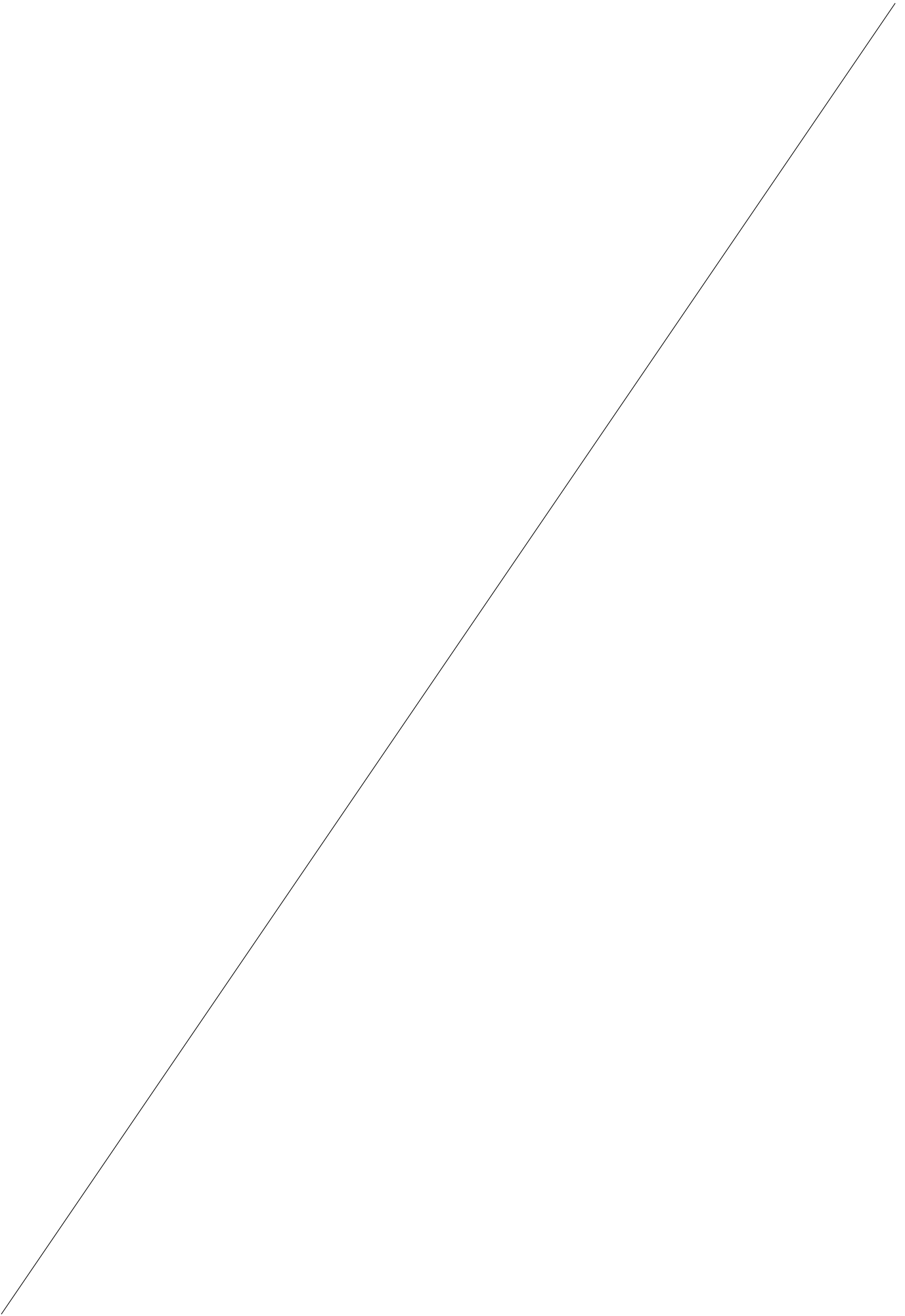
- Masses molaires :

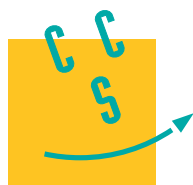
CaCO_3	O_2
$100,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	$32,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Références

- [1] Seaview Sensing Ltd et UNIVERSITÉ DE PLYMOUTH. *Seaview Data Viewer*. <https://phillips.shef.ac.uk/pub/svdv/whc/spatial> (page consultée le 11 mars 25).
- [2] D.D. CROMBIE. « Doppler Spectrum of Sea Echo at 13.56 Mc./s. » In : *Nature* 175.4459 (avr. 1955), p. 681-682.
- [3] Jeffrey D. PADUAN et Libe WASHBURN. « High-Frequency Radar Observations of Ocean Surface Currents ». In : *Annual review of marine science* 15 (2013), p. 115-136.
- [4] Donald E. BARRICK. *FM/CW Radar Signals and Digital Processing*. NOAA Technical Report ERL 283- WPL. Boulder, Colorado : National Oceanic et Atmospheric Administration.
- [5] Charlotte CARRÉ et al. « Electrochemical calcareous deposition in seawater. A review ». In : *Environmental Chemistry Letters* 18 (avr. 2020), p. 193-1208.

◇ Fin ◇





Spectroscopie rovibrationnelle et laser

Ce sujet se décompose en trois parties relativement indépendantes :

- la première partie s'intéresse à la dynamique vibrationnelle, puis rovibrationnelle, de la molécule HCl, sondée à l'aide d'un rayonnement infrarouge. Cette partie comprend des aspects théoriques et expérimentaux en relation avec la spectroscopie rovibrationnelle ;
- les deuxième et troisième parties sont dédiées à l'étude de deux éléments clés dans la compréhension du fonctionnement du laser (dispositif d'amplification de la lumière par émission stimulée de radiation) : sa cavité et son milieu amplificateur (figure 1).

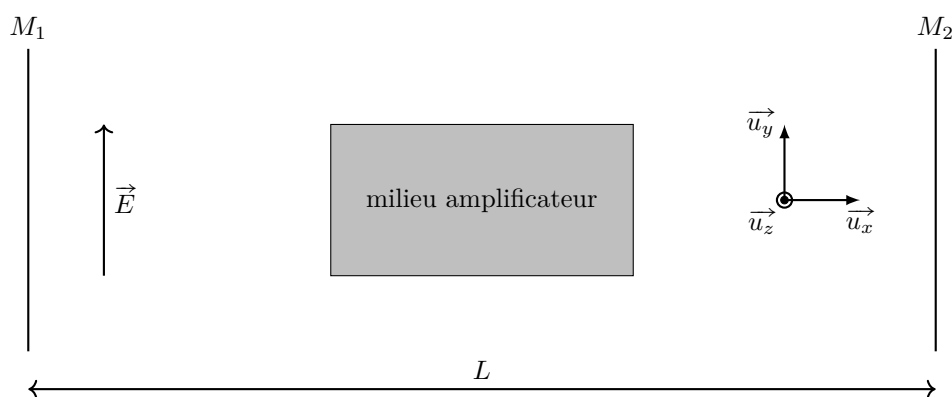


Figure 1 – Schéma simplifié d'un milieu amplificateur à l'intérieur d'une cavité linéaire délimitée par deux miroirs M_1 et M_2 .

Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Partie A – Spectroscopie rovibrationnelle

Le rayonnement infrarouge, produit par un laser ou une autre source comme une lampe, peut être utilisé pour sonder la matière à l'échelle atomique ou moléculaire et ceci à très haute résolution.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'analyse de la structure microscopique de la molécule HCl par spectroscopie infrarouge rovibrationnelle : elle fait intervenir un mouvement combiné de vibration interne et de rotation globale de la molécule (rotation-vibration).

I – Vibration de HCl

Cette sous-partie concerne uniquement l'étude théorique de la vibration interne de la molécule HCl.

HCl est une molécule diatomique constituée d'un atome d'hydrogène et d'un atome de chlore associés par une liaison covalente. La longueur de cette liaison est de l'ordre de 10^{-10} m, mais elle peut osciller au cours du temps : on parle de vibration moléculaire.

- Q1.** Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$, position par rapport à l'équilibre, pour un oscillateur harmonique classique de pulsation propre ω_0 , puis rappeler l'expression générale de ses solutions.

On choisit la référence pour l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique classique à la position $x = 0$.

- Q2.** Préciser, avec justification, les valeurs minimales possibles des énergies cinétique, potentielle et mécanique moyennes dans le cas d'un oscillateur harmonique classique.

On adopte un modèle quantique unidimensionnel pour étudier la vibration d'élongation de la molécule HCl : un oscillateur harmonique quantique constitué d'une particule quantique non relativiste de masse μ astreinte à se déplacer le long de l'axe (Ox) avec une énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 x^2$ où ω_0 est une constante strictement positive. L'origine O de l'axe est confondue avec la position d'équilibre de l'oscillateur.

On note respectivement Δx et Δp_x les écarts-types sur la position x et la quantité de mouvement p_x de la particule selon l'axe (Ox) .

- Q3.** Montrer que les énergies potentielle et cinétique moyennes, notées $\langle E_p \rangle$ et $\langle E_c \rangle$, peuvent s'écrire :

$$\langle E_p \rangle = K_1 \Delta x^2 \quad \text{et} \quad \langle E_c \rangle = K_2 \Delta p_x^2$$

avec K_1 et K_2 deux constantes à expliciter en fonction des données du problème.

- Q4.** Montrer que l'inégalité spatiale d'Heisenberg impose à l'énergie mécanique moyenne de l'oscillateur harmonique quantique de ne pas être inférieure à une énergie particulière, notée $\langle E_m \rangle_{\min}$, à expliciter en fonction de $\hbar$ et ω_0 . Commenter le résultat relativement au cas de l'oscillateur harmonique classique précédent.

On suppose que l'amplitude a_0 des oscillations s'écrit comme d'une loi de puissance de la forme suivante : $a_0 = \hbar^\alpha \omega_0^\beta \mu^\delta$ avec α , β et δ des constantes réelles.

- Q5.** Déterminer les exposants α , β et δ , puis évaluer un ordre de grandeur de a_0 . On supposera que la masse μ est quasiment égale à celle de l'atome d'hydrogène et on prendra $\omega_0 \approx 10^{15}$ rad/s.

La détermination des énergies de vibration s'effectue en résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps et en faisant le double changement de variables $u = x/a_0$ et $\varepsilon = E/(\hbar\omega_0)$ où E est l'énergie de vibration de la molécule. On note $\Psi(x, t) = \varphi(u) \chi(t)$ la fonction d'onde de la particule de masse μ .

- Q6.** Rappeler la forme de $\chi(t)$. Obtenir la relation vérifiée par $\varphi(u)$, sa dérivée seconde $\varphi''(u)$, u et ε .

On cherche $\varphi(u)$ sous la forme $\varphi(u) = \mathcal{H}(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$, avec $\mathcal{H}(u)$ un polynôme de degré n :

$$\mathcal{H}(u) = c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \dots + c_0.$$

- Q7.** Montrer que $\mathcal{H}$ vérifie l'équation différentielle :

$$\mathcal{H}''(u) - 2u \mathcal{H}'(u) + (2\varepsilon - 1) \mathcal{H}(u) = 0.$$

- Q8.** En raisonnant sur le monôme de degré n de cette équation, montrer qu'il existe une relation simple entre ε et n . En déduire l'expression des énergies de vibration de la molécule.

II – Rovibration de HCl

La molécule HCl possède non seulement un degré de liberté en élongation, mais également deux degrés de liberté en rotation. Afin d'étudier cette rotation, on suppose que HCl est dans un état de vibration donné et que la vibration n'affecte pas la rotation de la molécule. Dans ce sens, on met de côté la vibration interne de la molécule que l'on assimile à un rotateur rigide dans lequel les deux atomes sont distants d'une longueur d_0 fixe. La résolution quantique d'un tel modèle indique que les énergies associées aux états de rotation sont données par la formule

$$E_J = B J(J+1)$$

avec $B = \frac{\hbar^2}{2\mu d_0^2}$ la constante rotationnelle et J le nombre quantique de rotation (J est un entier naturel).

- Q9.** Déterminer la différence d'énergie $\Delta E_J = E_{J+1} - E_J$ entre deux niveaux rotationnels voisins en fonction de B et J .

La spectroscopie FTIR (transformée de Fourier dans l'infrarouge) utilise une source lumineuse infrarouge, typiquement une lampe à filament, qui émet dans le domaine infrarouge pour irradier des molécules. Une partie du rayonnement est absorbée par la molécule qui passe alors d'un niveau fondamental à un niveau plus excité (figure 2). Suite à cette absorption, la lumière est appauvrie en composantes spectrales. Cette lumière est analysée par transformée de Fourier pour produire un spectre de transmittance comme celui représenté à la figure 3.

Sur le spectre de la figure 3, les rayonnements absorbés correspondent à des transitions entre des niveaux rotationnels de l'état vibrationnel fondamental de HCl et des niveaux rotationnels de son premier état vibrationnel excité (figure 2).

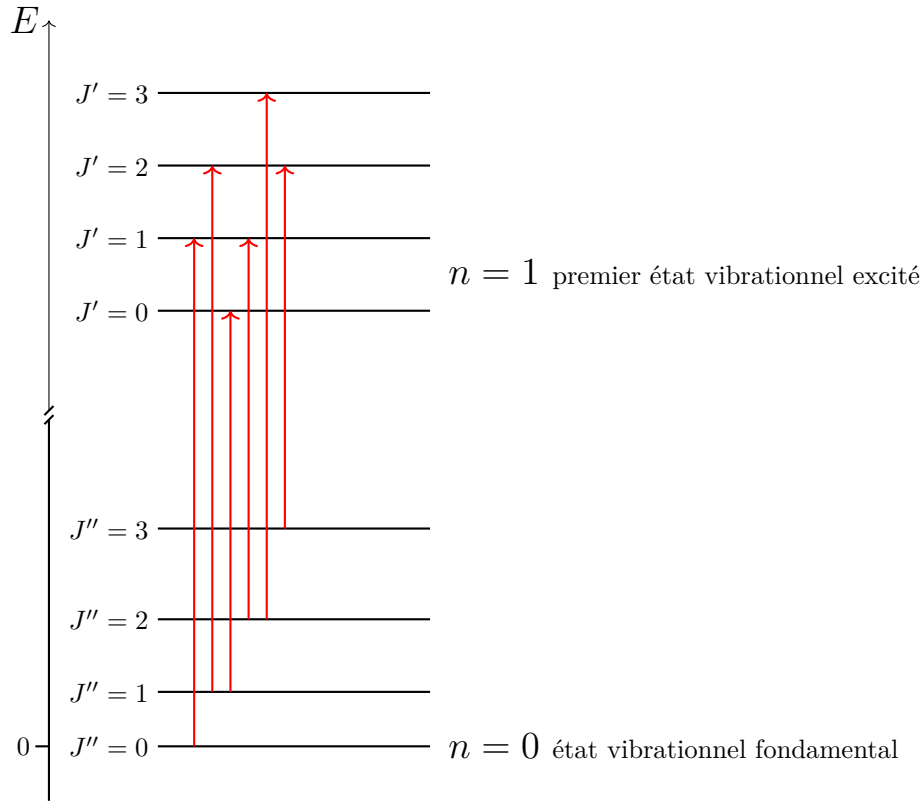


Figure 2 – Schéma énergétique de quelques niveaux rotationnels des deux premiers niveaux vibrationnels de HCl et quelques transitions rovibrationnelles entre eux (flèches rouges). L'axe vertical est coupé puisque la différence en énergie entre les niveaux vibrationnels est très supérieure à l'écart entre deux niveaux rotationnels consécutifs ($B \ll \hbar\omega_0$).

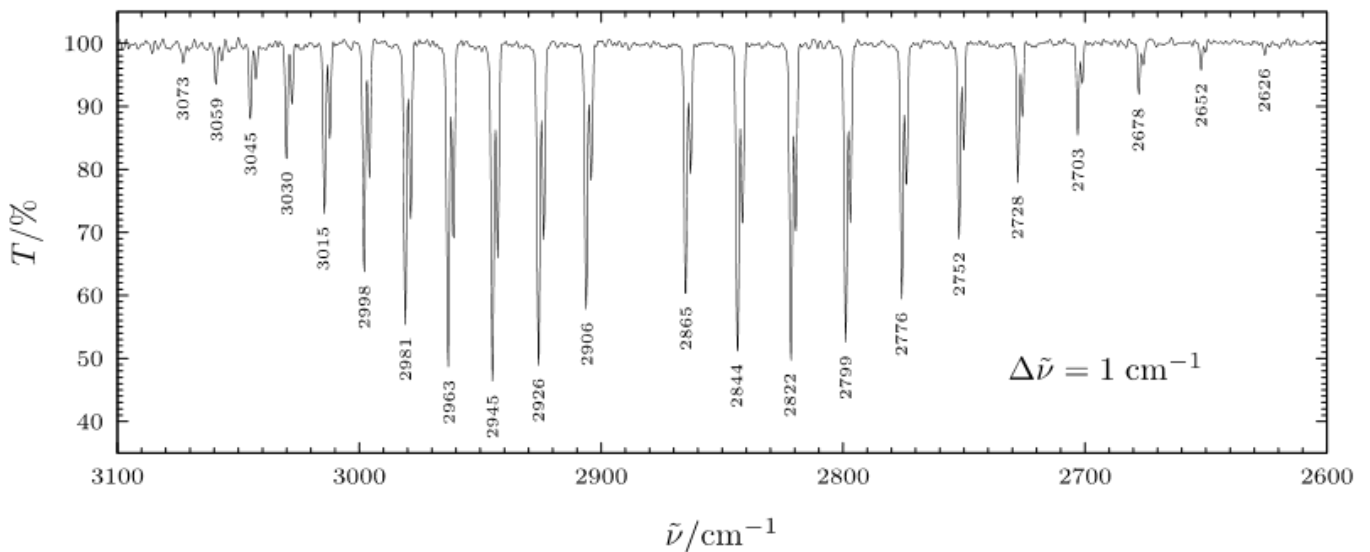


Figure 3 – Spectre de transmittance de HCl produit par FTIR [1]. Les nombres d'onde de certaines transitions sont indiqués (le nombre d'onde, noté ici $\tilde{\nu}$, est l'inverse de la longueur d'onde). Leurs incertitudes-types associées sont de 1 cm^{-1} . Aucune raie d'absorption n'est observée en dehors de l'intervalle de mesure présenté.

Les états rotationnels du niveau fondamental et du premier niveau excité sont respectivement identifiés par leurs nombres quantiques J'' et J' . On suppose qu'ils ont la même constante rotationnelle.

Des règles de sélection, issues d'un calcul quantique, indiquent que les seules transitions possibles sont pour

$$\Delta J = J' - J'' = +1 \quad (\text{branche R}) \quad \text{ou} \quad \Delta J = J' - J'' = -1 \quad (\text{branche P}).$$

Q10. En s'appuyant sur la figure 3, identifier les intervalles en nombre d'onde qui correspondent aux branches R et P.

Q11. Identifier les valeurs des nombres quantiques J'' et J' pour les transitions associées aux raies d'absorption à 2926 cm^{-1} , 2906 cm^{-1} , 2865 cm^{-1} et 2844 cm^{-1} sur la figure 3.

Q12. Expliquer pourquoi on n'observe pas de raie d'absorption en dehors de l'intervalle $[2600 ; 3100] \text{ cm}^{-1}$.

Q13. Déduire, à partir de la figure 3, des valeurs expérimentales avec incertitudes-types pour la distance d_0 et de la pulsation propre ω_0 de vibration de la molécule HCl.

On observe que les raies sur la figure 3 sont en fait dédoublées.

Q14. Proposer une explication de cette observation de raies doubles et non simples.

Partie B – Cavité d'un laser

Cette partie s'intéresse au rôle d'une cavité laser linéaire de longueur L , délimitée par deux miroirs plans M_1 et M_2 supposés infinis et placés respectivement en $x = 0$ et $x = L$. On suppose dans cette partie que la cavité est totalement vide (figure 1, sans milieu amplificateur) et que les ondes électromagnétiques qui s'y propagent sont planes, progressives, harmoniques de pulsation ω et de vecteurs d'onde de norme k .

I – Cavité sans pertes

On suppose pour commencer que les miroirs M_1 et M_2 sont des conducteurs parfaits d'épaisseur nulle.

Q15. Donner les équations de Maxwell dans le vide.

Q16. Montrer que, dans le vide, le champ électrique $\vec{E}$ obéit à une équation d'onde de d'Alembert dont on précisera la célérité.

Les champs électriques associés aux ondes progressives qui se propagent respectivement vers la droite et vers la gauche dans la cavité s'écrivent respectivement

$$\vec{E}_+(x, t) = \underline{E}_{0+} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{E}_-(x, t) = \underline{E}_{0-} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$$

en notation complexe; les facteurs $\underline{E}_{0+}$ et $\underline{E}_{0-}$ sont appelés *amplitudes complexes* de ces deux ondes (*sous-entendu en champ électrique, comme dans toute la suite*).

On suppose par ailleurs que le champ électromagnétique est nul en dehors de la cavité.

Q17. Établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le vide.

Q18. En exploitant les conditions aux limites imposées au champ électrique au niveau des miroirs M_1 ($x = 0$) et M_2 ($x = L$), déterminer deux relations entre $\underline{E}_{0+}$, $\underline{E}_{0-}$, k et L . Les relations de passage du champ électrique sont rappelées dans le formulaire en fin d'énoncé.

Les rayonnements vérifiant les équations de Maxwell et les conditions aux limites précédentes constituent les modes de la cavité.

Q19. Montrer que les fréquences des modes de la cavité s'écrivent sous la forme $\nu_m = m \times \text{FSR}_\nu$ où m est un entier naturel non nul et $\text{FSR}_\nu = \frac{c}{2L}$.

L'acronyme FSR, pour « *Free Spectral Range* » en anglais, est appelé « Intervalle Spectral Libre » en français; la grandeur FSR_ν est l'Intervalle Spectral Libre en fréquence de la cavité. L'entier m est le « numéro de mode ».

II – Cavité avec pertes

Le modèle de la sous-partie précédente ne permet pas d'obtenir un rayonnement sortant de la cavité. On le modifie en remplaçant le miroir M_1 par un miroir très partiellement transparent pour permettre à une partie du rayonnement de sortir effectivement de la cavité ; le miroir M_2 est inchangé (figure 4).

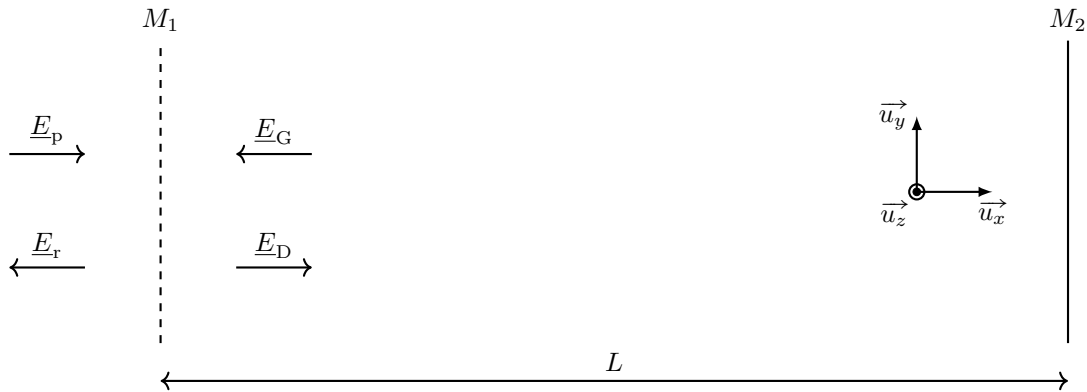


Figure 4 – Schéma d'une cavité laser avec pertes. Les flèches sous les amplitudes complexes des champs électriques indiquent la direction et le sens de propagation des ondes associées.

Le miroir M_1 est maintenant caractérisé par des coefficients de réflexion et de transmission en intensité R et T tels que $R = \frac{I_r}{I_i}$ et $T = \frac{I_t}{I_i}$, où I_i , I_r et I_t sont respectivement les intensités des ondes incidente, réfléchie et transmise. On admet sans démonstration que $R + T = 1$.

Pour caractériser la réflexion et la transmission du miroir M_1 , on peut aussi introduire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude relatifs à des ondes planes progressives harmoniques : $\underline{r} = \frac{\underline{E}_r}{\underline{E}_i}$ et $\underline{\tau} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_i}$, avec $\underline{E}_i$, $\underline{E}_r$ et $\underline{E}_t$ les amplitudes complexes des ondes incidente, réfléchie et transmise au niveau du miroir M_1 .

Le rayonnement d'amplitude complexe $\underline{E}_i$ est issu d'un autre laser, appelé laser de pompe (le processus de pompage est explicité dans la dernière partie du sujet). Pour cette partie, il suffit de savoir que ce rayonnement est à l'origine de l'effet laser qui a lieu dans le milieu amplificateur.

On admet que $\underline{r}$ et $\underline{\tau}$ sont ici réels et tels que $\underline{r} = -\sqrt{R}$ et $\underline{\tau} = \sqrt{T}$. Ces coefficients ne dépendent pas du sens de traversée du miroir.

Les ondes électromagnétiques considérées sont supposées planes progressives harmoniques à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité :

- dans la cavité, on note $\underline{E}_D$ et $\underline{E}_G$ les amplitudes complexes des ondes qui se propagent respectivement vers la droite et vers la gauche ;
-   l'extérieur de la cavité, on note $\underline{E}_p$ et $\underline{E}_r$ les amplitudes complexes respectives des ondes incidente et réfléchie sur le miroir M_1 .

On a vu dans la sous-partie précédente sur la cavité sans pertes que seulement certains rayonnements (modes de la cavité) peuvent s'y propager. Il s'agit à présent de déterminer s'il en est de même pour une cavité avec pertes.

Afin d'y parvenir, on va comparer l'intensité lumineuse I_D se propageant vers la droite dans la cavité à l'intensité lumineuse I_p du laser de pompe. L'idée est que plus le rapport $\frac{I_D}{I_p}$ est grand, meilleure est la pénétration du laser pompe dans la cavité, ce qui permet d'optimiser l'effet laser une fois que l'on introduit le milieu amplificateur à l'intérieur de la cavité (voir partie C).

Q20. Proposer une interprétation physique pour la relation $R + T = 1$.

On peut montrer que le champ électrique $\underline{E}_D$ s'écrit :

$$\underline{E}_D = \underline{\tau} \underline{E}_p + \underline{r} \underline{E}_G.$$

Q21. Expliquer l'origine physique de cette relation.

Q22. Exprimer $\underline{E}_G$ en fonction de $\underline{E}_D$, k et L .

Q23. En déduire une expression du rapport $\frac{\underline{E}_D}{\underline{E}_p}$ en fonction de R , k et L .

Q24. Montrer que le rapport des intensités pour les ondes correspondantes en indigage s'écrit alors :

$$\frac{I_D}{I_p} = \frac{g}{1 + \frac{4\sqrt{R}}{(1-\sqrt{R})^2} \sin^2 kL}$$

avec g une constante à exprimer en fonction de R .

On considère pour la suite que $R = 96,0 \%$ (cas à fort coefficient de réflexion en intensité avec $R \gg T$).

Q25. Montrer que le rapport $\frac{I_D}{I_p}$ est toujours quasiment nul, sauf pour certaines valeurs de k à expliciter.

Q26. Représenter graphiquement $\frac{I_D}{I_p}$ en fonction du produit kL .

Q27. Identifier alors les modes de la cavité et les fréquences correspondantes, c'est-à-dire celles qui maximisent le rapport $\frac{I_D}{I_p}$. En déduire l'Intervalle Spectral Libre en fréquence FSR'_ν de cette cavité avec pertes en identifiant les modes de la cavité. Comparer au cas sans pertes (question **Q19**).

Les modes de la cavité avec pertes apparaissent comme des pics de résonance. On note $\Delta\nu_c$ la largeur totale à mi-hauteur d'un pic de résonance de la cavité que l'on suppose négligeable devant l'Intervalle Spectral Libre. On définit la finesse $\mathcal{F}$ de la cavité par la relation $\mathcal{F} = \frac{\text{FSR}'_\nu}{\Delta\nu_c}$.

Q28. Déterminer $\mathcal{F}$ en fonction de R . Faire l'application numérique.

Q29. Préciser un avantage à avoir un laser possédant une très grande finesse vis-à-vis des applications en interférométrie.

Partie C – Milieu amplificateur d'un laser

I – Évolution de populations

On peut modéliser l'ensemble des processus d'interaction lumière-matière qui se déroulent dans le milieu amplificateur de la cavité laser (figure 1) par un réseau de réactions photochimiques d'ordre 1 (figure 5).

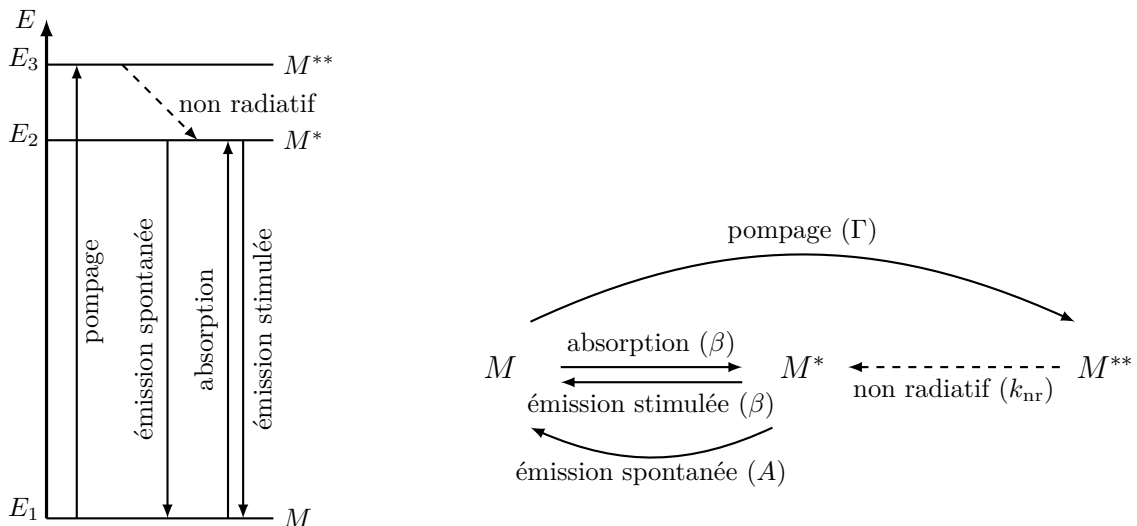


Figure 5 – Gauche : Diagramme des états d'énergie de l'espèce M présente dans le milieu amplificateur et transitions possibles.

Droite : réseau de « réactions chimiques d'ordre 1 » modélisant les processus d'interaction dans le milieu amplificateur avec mention des « constantes de vitesse » A , β , Γ et k_{nr} associées.

On suppose le milieu amplificateur constitué d'une espèce chimique notée M dans son niveau fondamental d'énergie E_1 . Cette espèce peut également se trouver dans un état excité, noté M^* d'énergie E_2 , ou même doublement excité, noté M^{**} d'énergie E_3 .

On note n_1 , n_2 et n_3 les concentrations de l'espèce M respectivement dans les états fondamental, simplement excité et doublement excité; ces concentrations sont appelées « populations » des différents états.

Les différents processus d'interaction ayant lieu dans le milieu amplificateur sont les suivants (figure 5) :

1. *Pompage* : des espèces sont amenées de l'état fondamental dans l'état doublement excité ($M \rightarrow M^{**}$) par une source d'énergie extérieure (lumineuse, électrique, chimique, etc.). On modélise ce processus par une réaction chimique d'ordre 1 de vitesse v_{pomp} et de constante de vitesse Γ .
2. *Désexcitation non radiative* : les espèces doublement excitées accèdent à l'état simplement excité ($M^{**} \rightarrow M^*$) par un processus non radiatif (sans émission de photon), typiquement grâce à des collisions. Ce processus, très rapide, est modélisé par une réaction chimique d'ordre 1 de vitesse v_{nr} de constante de vitesse k_{nr} .
3. *Absorption* : les espèces dans l'état fondamental gagnent le premier état excité ($M \rightarrow M^*$) en absorbant un photon d'énergie $\hbar\omega = E_2 - E_1$. L'absorption est modélisée par une réaction chimique d'ordre 1 de vitesse v_{abs} et de constante de vitesse β .
4. *Émission stimulée* : les espèces simplement excitées regagnent l'état fondamental ($M^* \rightarrow M$) par une émission stimulée de photon. Lorsqu'un photon incident d'énergie $\hbar\omega = E_2 - E_1$ passe dans le milieu amplificateur (ce qui arrive souvent puisque la lumière fait un grand nombre d'allers-retours dans la cavité), la désexcitation ($M^* \rightarrow M$) émet un photon cohérent, c'est-à-dire ayant les mêmes caractéristiques (direction, énergie, phase...) que le photon incident. Ce processus explique comment le faisceau laser est amplifié tout en restant cohérent après avoir subi de nombreux passages. On le modélise par une réaction chimique d'ordre 1 de vitesse v_{stim} et de constante de vitesse β , identique à celle d'absorption.
5. *Émission spontanée* : les espèces simplement excitées regagnent l'état fondamental ($M^* \rightarrow M$) par une émission spontanée de photon d'énergie $\hbar\omega = E_2 - E_1$. Cette émission est aléatoire et isotrope et entre en compétition avec l'émission stimulée car les photons émis sont non cohérents avec ceux du faisceau laser. On modélise ce processus par une réaction chimique d'ordre 1 de vitesse v_{spont} et de constante de vitesse A .

Q30. Exprimer les lois de vitesse relatives aux diverses « réactions chimiques » (*i.e.* les processus d'interaction modélisés ci-dessus) ayant lieu dans le milieu amplificateur.

Q31. Proposer une justification de la relation suivante :

$$\frac{dn_1}{dt} = -\Gamma n_1 + A n_2 + \beta n_2 - \beta n_1.$$

Q32. Obtenir des relations similaires pour $\frac{dn_2}{dt}$ et $\frac{dn_3}{dt}$ en fonction des populations n_1 , n_2 et n_3 et faisant intervenir les constantes de vitesse A , β , Γ et k_{nr} .

Q33. Vérifier que $n_1 + n_2 + n_3$ est une constante. Interpréter ce résultat.

On note $\Delta n = n_2 - n_1$. On suppose désormais, et jusqu'à la fin de cette sous-partie, que le laser fonctionne en régime stationnaire.

Q34. Exprimer Δn en fonction de n_3 et des constantes de vitesse.

On parle d'inversion de population lorsque $\Delta n > 0$.

Q35. Écrire la condition requise sur les constantes de vitesse pour avoir une inversion de population. En donner une interprétation physique.

II – Bilan de puissance électromagnétique dans le milieu amplificateur

On s'intéresse à une approche énergétique simplifiée dans le milieu amplificateur.

Il s'avère que la constante de vitesse β introduite dans le modèle précédent peut être décrite par une loi de proportionnalité avec la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{\text{ém}}(x, t)$ de l'onde : on note $\beta = b u_{\text{ém}}(x, t)$ où b est une constante.

On suppose que le milieu amplificateur est traversé par une onde électromagnétique plane harmonique, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$ et se propageant à la célérité c selon $+\vec{u}_x$. De plus, la seule composante du vecteur de Poynting instantané, notée $\Pi(x, t)$ et selon $\vec{u}_x$, vérifie $\Pi(x, t) = c u_{\text{ém}}(x, t)$.

On se propose de faire un bilan d'énergie électromagnétique sur un système de section S compris entre les abscisses x et $x + dx$ dans le milieu amplificateur. On rappelle que l'énergie d'un photon de pulsation ω s'écrit $\hbar\omega$.

Q36. Préciser si tous les processus décrits dans la sous-partie précédente contribuent au bilan. Identifier ceux qui résultent respectivement en un gain ou une perte d'énergie pour l'onde laser.

Q37. Montrer alors que le bilan d'énergie conduit à la relation

$$\frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial t} = \gamma(\omega) \Pi(x, t) - p(\omega)$$

où $\gamma(\omega)$ et $p(\omega)$ sont à expliciter en fonction de A , b , n_1 , n_2 , c et $\hbar\omega$.

On considère la condition $p(\omega) \ll \gamma(\omega) \Pi(x, t)$ réalisée.

Q38. Commenter cette condition au regard de la nature de la lumière que l'on souhaite obtenir avec un laser.

On se place à présent en régime stationnaire.

Q39. Déterminer la solution $\Pi(x)$ de l'équation différentielle vérifiée par la composante du vecteur de Poynting en posant $\Pi_0 = \Pi(x = 0)$.

Q40. Interpréter physiquement le terme $\gamma(\omega)$ et discuter son signe en fonction de celui de Δn . Faire le lien avec la condition donnée à la question **Q35**.

III – Considérations expérimentales pour un laser à colorant compact

Cette sous-partie concerne un type de laser appelé laser à colorant. Dans un tel laser, le milieu amplificateur est un colorant qui présente des bandes d'absorption dans son spectre d'absorption : elles s'interprètent en s'appuyant sur un schéma analogue à celui de la figure 5 dans lequel chaque niveau est plutôt un grand nombre de niveaux très proches ; cette complexification provient de la structure vibrationnelle des niveaux d'énergie des grosses molécules de colorant.

Lahoz *et al.* [2] ont enregistré un spectre d'émission laser (figure 6) issu d'un laser à colorant très particulier car très compact : sa cavité optique est linéaire de longueur L infra-millimétrique et est totalement remplie d'un colorant qui est une solution d'éthanol contenant du « Bleu de Nil A ». Cette solution a une bande d'absorption entre 550 et 620 nm environ et un indice optique pratiquement égal à celui du solvant éthanol pur à 20 °C : $n = 1,3587$.

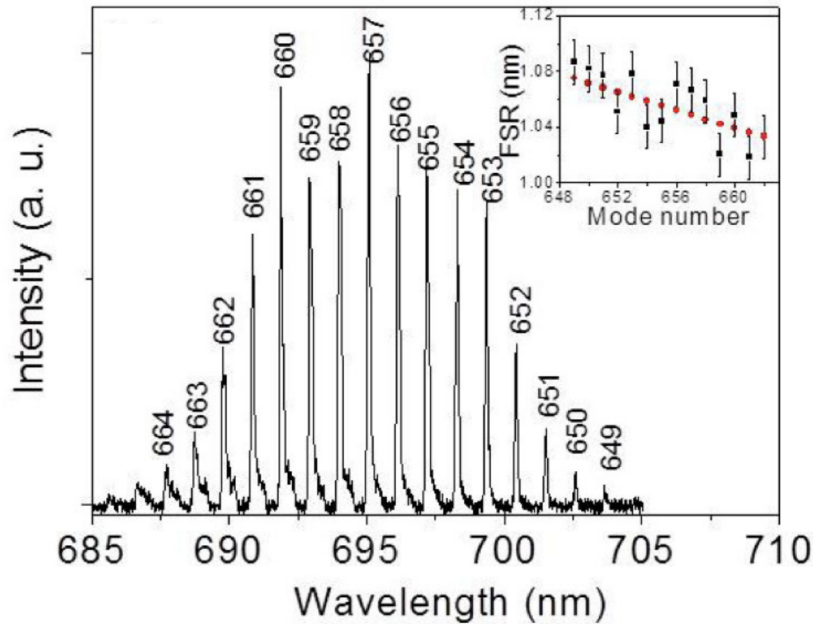


Figure 6 – Spectre d'émission laser expérimental de Lahoz *et al.* [2] en longueur d'onde.

L'intensité est en unité arbitraire. Les différents modes du rayonnement sont précisés par les numéros de mode portés au-dessus des pics correspondants. L'insert représente l'Intervalle Spectral Libre en longueur d'onde (FSR_λ) en fonction du numéro de mode.

Q41. Justifier le terme « Bleu » présent dans le nom du colorant. Préciser la couleur de l'émission laser.

L'article de Lahoz *et al.* définit un Intervalle Spectral Libre *exprimé en longueur d'onde*, noté FSR_λ , et donne la relation

$$\text{FSR}_\lambda = \frac{\lambda^2}{2nL}.$$

Q42. En raisonnant par analogie avec l'Intervalle Spectral Libre en fréquence FSR_ν introduit à la question **Q19**, justifier la formule proposée par l'article.

Q43. Estimer la longueur de cavité L .

La largeur des pics de la figure 6 est d'environ $\Delta\lambda_c = 0,1$ nm. La finesse est toujours définie par rapport à la fréquence, de façon analogue au texte du paragraphe qui précède la question **Q28** : $\mathcal{F} = \frac{\text{FSR}_\nu}{\Delta\nu_c}$.

Q44. Montrer que la finesse peut également s'écrire :

$$\mathcal{F} = \frac{\text{FSR}_\lambda}{\Delta\lambda_c}.$$

En déduire, un ordre de grandeur de la finesse de la cavité utilisée dans l'article de Lahoz *et al.*

Le titre de l'article fait référence à une sonde chimique et de température (« *temperature and chemical sensor* »).

Q45. Préciser le paramètre de l'expérience qui est sensible à la température et à la composition chimique.

Un laser à colorant plus traditionnel en laboratoire que celui de Lahoz *et al.* comporte une cavité dont la longueur est de l'ordre du mètre.

Q46. Représenter, justifications à l'appui, l'allure d'un spectre d'émission laser pour un tel laser à colorant traditionnel en supposant les autres paramètres du système (miroirs, colorant, etc.) inchangés. Commenter.

Données et formulaire

Notations

j représente l'unité imaginaire telle que $j^2 = -1$.

On note $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires pour une base cartésienne (système de coordonnées x , y et z).

Données numériques

Constante de Planck $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Célérité de la lumière dans le vide $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

« Conversion » de cm^{-1} à J

Il est d'usage en spectroscopie d'utiliser le cm^{-1} comme unité d'énergie. En réalité, l'unité fait référence au nombre d'onde σ associé au rayonnement, mais qui est lié à l'énergie E des photons du rayonnement en question par la formule $E = h c \sigma$ (combinaison de la formule $\nu = c \sigma$ de la fréquence du rayonnement et de la formule de Planck $E = h \nu$). On en déduit que 1 cm^{-1} correspond à $100 h c \approx 1,9863 \times 10^{-23} \text{ J}$.

Quelques propriétés atomiques

Élément	Masse	Abondance naturelle
^1H	$m_{\text{H}} \approx 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$	99,985 %
^{35}Cl	$m_{^{35}\text{Cl}} \approx 35 m_{\text{H}}$	76 %
^{37}Cl	$m_{^{37}\text{Cl}} \approx 37 m_{\text{H}}$	24 %

Formulaire

- Pour un champ vectoriel $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}.$$

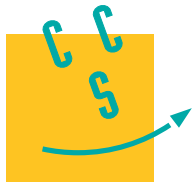
- Relation de passage pour le champ électrique entre un milieu 1 et un milieu 2 :

$$\vec{E}(M_2, t) - \vec{E}(M_1, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}.$$

Le point M_1 (respectivement M_2) est dans le milieu 1 (respectivement 2) et est infiniment proche du point M sur l'interface de séparation des milieux ; $\sigma(M, t)$ est la densité surfacique de charge en ce point et le vecteur $\vec{n}_{12}$ est unitaire et normal à l'interface au même point (orienté du milieu 1 vers le milieu 2).

Références

- [1] Duke, *chem.libretexts.org*. URL : https://chem.libretexts.org/Courses/Duke_University/CHEM_310L%3A_Physical_Chemistry_I_Laboratory/CHEM310L_-_Physical_Chemistry_I_Lab_Manual/09%3A_Under_Construction/9.11%3ARotation-Vibration_Spectrum_of_HCl_AND_DCl_Vibrational_Spectrum_of_SO2/9.11.04%3A_Part_I_-_FTIR_spectrum_of_a_mixture_of_HCl_and_DCl_gas.
- [2] F. LAHOZ et al. « Portable IR dye laser optofluidic microresonator as a temperature and chemical sensor ». In : *Opt. Express* 24.13 (juin 2016), p. 14383-14392. DOI : 10.1364/OE.24.014383. URL : <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-24-13-14383>.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique Chimie 2

MPI

4 heures

Calculatrice autorisée

2025

Une histoire de tubes

Le sujet comporte 3 parties relativement indépendantes, mais il est conseillé de les traiter dans l'ordre proposé.

Un formulaire et des données sont regroupés en fin d'énoncé.

Ce sujet a trait aux tubes à vide (figure 1a), longtemps utilisés pour construire des équipements électriques avant l'apparition des composants à base de matériaux semi-conducteurs. Les ordinateurs de la première génération des ordinateurs modernes étaient construits avec des tubes (environ 19 000 pour l'ENIAC!). De nos jours, les tubes à vide sont encore utilisés dans certains équipements audio (figure 1b) et pour certaines applications de forte puissance. Les principaux inconvénients des tubes à vide sont leur encombrement, leur fragilité et la nécessité d'une tension d'alimentation élevée (quelques centaines de volts).

Aucune connaissance préalable sur les tubes à vide n'est requise pour traiter le questionnement.



(a) Le tube ECC83.
Source : Wikipédia.



(b) Amplificateur audio à tubes.
Source : catalogue Auna.

Figure 1 – Tubes à vide.

Les tubes à vide sont classés selon le nombre d'électrodes qu'ils possèdent : diode (2 électrodes), triode (3 électrodes), tétrode (4 électrodes) et penthode (5 électrodes). La triode ECC83 (voir figure 1a) est le composant étudié dans ce sujet.

La figure 2 montre la constitution simplifiée d'une triode et le symbole électrique associé. Les électrodes de la triode s'appellent la cathode, l'anode et la grille. De plus, un filament dans lequel circule un courant continu chauffe la cathode. La présence de ce filament fait que ce tube est souvent nommé improprement *lampe*.

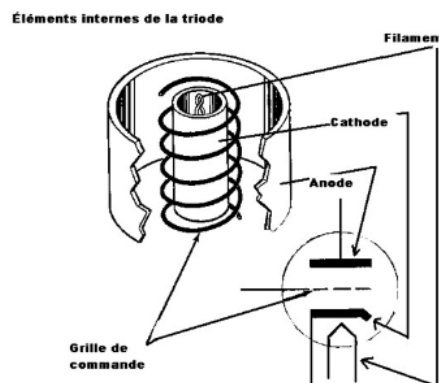


Figure 2 – Lien entre constitution et symbole électrique.
Source : Wikipédia.

Dans le tube de référence ECC83, la cathode est cylindrique de rayon $r_1 = 2,0$ mm et l'anode cylindrique de rayon $r_2 = 5,0$ mm. Elles sont coaxiales, d'axe (Oz) , et toutes deux de hauteur $H = 45$ mm. L'ensemble est enfermé dans une enveloppe de verre et sous vide hors fonctionnement.

Partie A – La diode à vide

Dans cette première partie, la grille est ignorée. La triode ne fonctionne qu'avec sa cathode et son anode : il s'agit donc d'une diode. La cathode, chauffée par le filament (étudié partie B), est le siège d'une émission d'électrons appelée émission thermoïonique. **Par hypothèse, ces électrons ne possèdent pas de vitesse initiale et leur nombre dépend de la température T de la cathode.** L'anode est portée au potentiel $V_a > 0$ par rapport à la cathode de potentiel nul par choix ($V_c = 0$). Sous l'influence du champ électrique régnant entre cathode et anode, les électrons peuvent rejoindre l'anode et ainsi créer un courant électrique I_a circulant depuis l'anode vers la cathode.

I – Caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode

Dans cette section, on cherche, **en régime stationnaire**, la caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode à vide, dont le symbole électrique est rappelé à la figure 3. I_a représente le courant anodique, fléché (positif) entrant par l'anode (et donc sortant par la cathode) et U_{ac} est la tension anode - cathode.

On note ρ la densité volumique de charge électrique, *a priori* non uniforme, régnant dans l'espace entre anode et cathode et V le potentiel électrostatique. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe (Oz) étant confondu avec l'axe des cylindres anodique et cathodique.

Q1. Rappeler les équations de Maxwell en régime stationnaire. Justifier l'existence du potentiel électrostatique V et établir la relation qui lie V à ρ . Donner le nom de cette relation.

Les effets de bord sont négligés et on considère que le potentiel V admet pour dépendance spatiale uniquement la coordonnée radiale r .

Q2. Proposer des éléments de justification de ces choix.

Q3. Évaluer, en ordre de grandeur, le poids d'un électron et la force électrostatique subie par un électron circulant depuis la cathode vers l'anode. Conclure.

Q4. Traduire la conservation de l'énergie mécanique d'un électron circulant depuis la cathode vers l'anode pour en déduire la vitesse $v(r)$ d'un électron à la distance r de l'axe en fonction, notamment, du potentiel électrique $V(r)$.

Q5. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge en régime quelconque. En déduire, pour le régime stationnaire d'étude, une propriété vérifiée par le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$. Établir la relation qui existe en conséquence entre r , H , $\rho(r)$, $v(r)$ et le courant électrique anodique I_a .

Q6. À l'aide des relations précédentes, montrer que le potentiel V est solution de la relation suivante en précisant l'expression du facteur k :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = k V^{-\frac{1}{2}}$$

Q7. Vérifier la cohérence de l'unité du facteur k .

L'équation différentielle obtenue à la question **Q6** ne possède pas de solution analytique simple vérifiant les conditions aux limites imposées ici. Seule une solution approchée est recherchée dans le cadre de ce sujet.

Q8. Déterminer par quels facteurs sont multipliés ρ , v et I_a si le potentiel de l'anode V_a est multiplié par un facteur N .

Le résultat précédent et la forme du second membre de l'équation différentielle suggèrent une solution pour cette dernière sous la forme d'une loi puissance de type $V(r) = \alpha r^n$.

Q9. Déterminer le système d'équations dont α et n sont solutions. En déduire la valeur de n et l'expression de α en fonction de k .

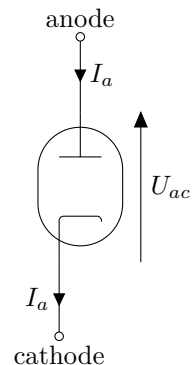


Figure 3 – Diode à vide : symbole et fléchage des grandeurs électriques associées.

La forme de la solution utilisée ne permet pas de vérifier la condition imposée à la cathode : $V(r = r_1) = 0$. On choisit d'adopter pour la suite la solution approchée $V(r) = \alpha (r - r_1)^n$ qui vérifie cette condition, tout en conservant les expressions précédentes des constantes α et n .

Q10. Exprimer $U_{ac} = V(r_2) - V(r_1)$ en fonction de I_a et des autres paramètres utiles. En déduire que la relation caractéristique de la diode $I_a(U_{ac})$ s'écrit $I_a(U_{ac}) = \beta U_{ac}^{\frac{3}{2}}$ et préciser l'expression de β en fonction de ε_0 , H , r_1 , r_2 , e et m . Déterminer la valeur numérique de β .

Q11. Expliquer pourquoi le résultat précédent n'est pas valable dans le cas $U_{ac} < 0$. Préciser ce qu'il se passe dans ce cas et indiquer la valeur de I_a correspondante.

Q12. Tracer la caractéristique $I_a(U_{ac})$.

On appelle « polariser une diode » l'action de choisir un point de fonctionnement pour celle-ci, c'est-à-dire choisir un couple de valeurs (I_a, U_{ac}) que l'on note (I_a^0, U_{ac}^0) . Pour le tube ECC83, le point de fonctionnement optimal préconisé par le constructeur correspond à l'intensité $I_a = I_a^0 = 1,2$ mA.

Q13. Déterminer la valeur U_{ac}^0 telle que $I_a^0 = 1,2$ mA.

II – Caractéristiques dynamiques de la diode

Q14. Pour $I_a^0 = 1,2$ mA, déterminer le temps de vol τ d'un électron entre la cathode et l'anode. En déduire, par analyse dimensionnelle, une expression et une estimation de la fréquence de coupure de la diode.

Si la tension U_{ac} varie légèrement de la quantité δu , cela engendre une légère variation de courant δi sur I_a . Ces variations sont, à l'ordre 1, proportionnelles entre elles et définissent la résistance dynamique de la diode $r_d = \frac{\delta u}{\delta i}$.

Q15. Exprimer la résistance dynamique r_d de la diode en fonction de β et I_a . Faire l'application numérique pour la valeur $I_a^0 = 1,2$ mA de I_a .

III – Polarisation de la diode

Pour polariser le tube ECC83 au point de fonctionnement souhaité, d'intensité $I_a^0 = 1,2$ mA, un générateur de tension continue $V_{cc} = 10$ V et une résistance R_a sont utilisés comme illustré sur le circuit de la figure 4 (le circuit de chauffage de la cathode est non représenté). On admet à présent que la diode est caractérisée par la loi $I_a = \beta U_{ac}^{\frac{3}{2}}$ avec $\beta = 2,2 \times 10^{-4}$ USI (unité du système international).

Q16. Écrire la relation entre I_a et U_{ac} , appelée droite de charge, imposée dans la maille où la diode se trouve.

Q17. Déterminer la valeur de R_a pour avoir $I_a^0 = 1,2$ mA.

Q18. Reproduire sur la copie la figure 5, puis y reporter la droite de charge de la question **Q16**, ainsi que la caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode. Ajouter également sur celle-ci les grandeurs précédemment introduites I_a^0 et δi (relative à δu). Indiquer aussi la signification de la pente de la caractéristique de la diode au point de fonctionnement.

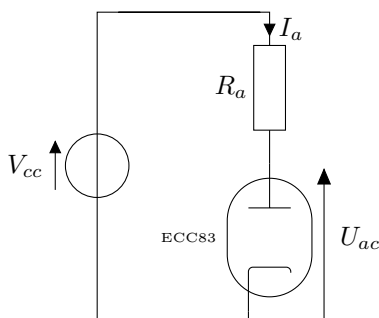


Figure 4 – Circuit de polarisation de la diode.

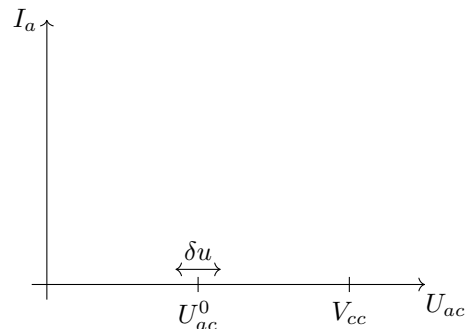


Figure 5 – Graphe schématique (pas à l'échelle) à reproduire et compléter.

Partie B – Température des éléments de la triode ECC83 et émission thermoïonique

I – Température du filament

Le filament qui chauffe la cathode, pour permettre une émission thermoïonique suffisante, est un fil de tungstène cylindrique homogène de longueur totale $L = 4,0$ cm et de rayon $r_f = 0,20$ mm, alimenté par une tension continue U_f . Cette tension d'alimentation du filament est en pratique de 3 V, 6 V ou 12 V selon les tubes, pour compenser le fait que la conductivité du tungstène, comme tous les métaux, diminue significativement avec la température ; cet effet est ignoré dans le cadre de ce sujet pour simplifier et on adopte pour la suite la valeur $U_f = 1,5$ V.

La conductivité électrique du tungstène est notée γ , sa masse volumique μ_W , sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ .

Q19. Donner l'expression et calculer la résistance électrique R_f du filament. En déduire la valeur de la puissance électrique P_{el} reçue par le filament.

Q20. Indiquer quels sont les différents modes de transfert thermique possibles. Préciser, avec justification, celui qui est mis en jeu lors du chauffage de la cathode par le filament.

On suppose que la loi de Stefan (ou de Stefan-Boltzmann) pour un corps noir s'applique à l'ensemble des éléments de la triode (filament, cathode et anode). La relation associée est $\phi = \sigma T^4$ avec T la température de surface du corps et σ la constante de Stefan.

Q21. Rappeler quelle est la signification de la grandeur ϕ .

Q22. À l'aide d'un bilan énergétique entre t et $t+dt$, établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la température du filament $T(t)$ (supposée uniforme). On pourra négliger le flux thermique reçu par le filament de la part du milieu extérieur.

Q23. En déduire l'expression et la valeur numérique de la température d'équilibre T_{eq} du filament en régime stationnaire.

Q24. Évaluer l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que le filament atteigne la température T_{eq} qui permet une émission thermoïonique stabilisée (les grandeurs μ_W , γ , λ et c pourront être supposées indépendantes de la température pour l'évaluation de cet ordre de grandeur). Commenter dans le cadre d'un amplificateur audio à tubes (figure 1b).

Q25. Déterminer la couleur du filament lorsqu'il est chaud.

II – Température de la cathode et émission thermoïonique

La loi de Richardson donne la densité volumique de courant électrique j émise par un métal en fonction de sa température T :

$$j = AT^2 \exp\left(\frac{-W}{k_B T}\right)$$

Dans cette relation, W est le travail de sortie, c'est-à-dire la barrière énergétique, de nature électrique, que doivent vaincre les électrons pour sortir du métal. La constante A intervient dans une relation traduisant l'émission d'électrons (masse m , charge e) via un processus microscopique non étudié ici.

Q26. Expliquer pourquoi la constante de Planck h est susceptible d'intervenir dans l'expression de A , en plus de m , e et de la constante de Boltzmann k_B .

Q27. Établir, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, une expression de A en fonction de m , e , k_B et h , à un facteur numérique sans dimension près (dont on admettra la valeur de 4π ici). Faire l'application numérique.

Dans la triode ECC83, la cathode et l'anode sont en nickel ($W_{Ni} = 4,6$ eV). De plus, la cathode est recouverte d'une fine couche d'oxyde de baryum ($W_{BaO} = 2,0$ eV) du côté anode. Ces valeurs sont supposées indépendantes de la température et on se place en régime stationnaire de fonctionnement.

Q28. En supposant que la cathode reçoit la totalité de la puissance émise par le filament, et en négligeant toute autre forme de transfert thermique reçu, déterminer la température T_c de la cathode.

Q29. Calculer l'intensité électrique I_{th-F} émise par la cathode côté filament et l'intensité électrique I_{th-A} émise par la cathode côté anode. Comparer I_{th-A} à l'intensité optimale de fonctionnement $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$. Commenter.

Q30. Reprendre le tracé de la caractéristique de la question **Q12** en tenant compte de ce qui précède et en justifiant.

Partie C – Amplificateur de tension à triode

Une troisième électrode, nommée *grille*, est ajoutée au dispositif décrit en partie A pour former une triode (voir figure 2). Il s'agit d'un nouveau filament conducteur entourant la cathode (à ne pas confondre avec le filament de chauffage). Ce filament est porté à une tension notée U_{gc} par rapport à la cathode, ce qui a pour conséquence de modifier le potentiel électrostatique régnant entre la cathode et l'anode; cela modifie aussi le courant anodique I_a .

On note I_g le courant de grille associé au flux d'électrons circulant depuis la cathode vers la grille. Le symbole de la triode et les grandeurs électriques associées sont illustrés sur la figure 6.

Dans une triode, l'influence électrostatique de la grille est significativement plus importante que celle de l'anode. Par conséquent, le fonctionnement électrique de la triode est décrit par la relation $I_a = \beta' (\mu U_{gc} + U_{ac})^{\frac{3}{2}}$ avec, pour la triode ECC83, $\beta' = 3,3 \times 10^{-6} \text{ USI}$ et $\mu = 100$ (μ ne dépend que de la géométrie du tube considéré et le facteur β' est différent de β en raison de la prise en compte de la présence de la grille). Cette relation est vérifiée lorsque $I_g = 0$. On rappelle que seule la cathode est chauffée par le filament et donc seule la cathode est le siège d'une émission significative d'électrons.

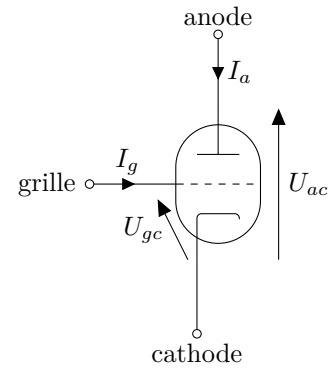


Figure 6 – Triode : symbole et fléchage des grandeurs électriques associées.

I – Montage amplificateur de tension à triode et principe d'analyse

Une triode ECC83 est utilisée pour réaliser un amplificateur de tension selon le schéma de la figure 7. La tension à amplifier est la tension $v_e(t)$, **variable**, dont l'amplitude vaut quelques centaines de millivolts; elle est délivrée par un générateur idéal de tension et est de fréquence $f = 1,0 \text{ kHz}$. La source de tension continue $V_{cc} = 3,5 \times 10^2 \text{ V}$ alimente le circuit, et permet de fixer le point de fonctionnement (ou point de polarisation) de la triode. Le signal de sortie $V_s(t)$ est pris à l'anode du tube et comporte une composante continue notée V_s^0 et une composante variable notée $v_s(t)$, soit $V_s(t) = V_s^0 + v_s(t)$.

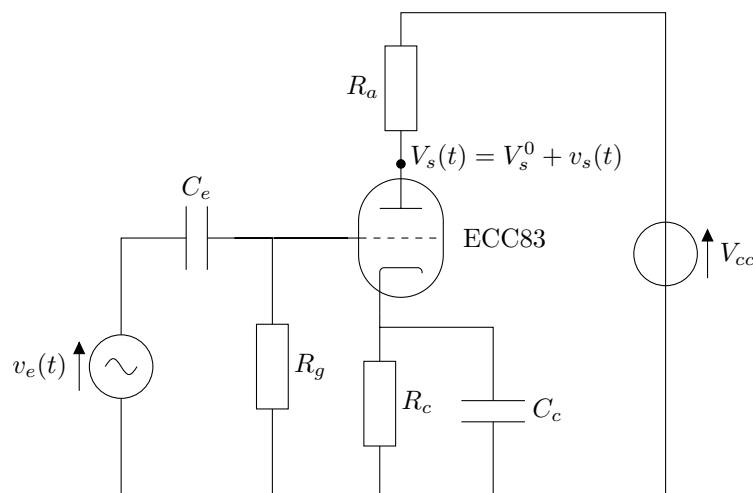


Figure 7 – Triode ECC83 utilisée en amplificateur de tension.

Q31. Donner une raison pour laquelle le principe de superposition ne s'applique pas dans ce circuit.

Les grandeurs électriques liées à la source $v_e(t)$ peuvent être vues comme une perturbation à l'ordre 1 du point d'équilibre électrique dû à la source V_{cc} . Ainsi, l'analyse de ce circuit va être menée de la façon suivante :

- étape 1 : étude, en régime stationnaire, du circuit sous la seule influence de V_{cc} , avec détermination du point de fonctionnement I_a^0 , U_{ac}^0 et U_{gc}^0 de la triode ECC83, puis détermination de V_s^0 ;

- étape 2 : linéarisation de la caractéristique de la triode, à l'ordre 1, autour du point de fonctionnement ;
- étape 3 : étude, en régime variable, du circuit linéarisé sous la seule influence de $v_e(t)$ pour déterminer $v_s(t)$.

Q32. Donner un argument numérique justifiant cette démarche. Préciser de quelle(s) source(s) dépendent respectivement les grandeurs V_s^0 et $v_s(t)$.

II – Étape 1 : point de fonctionnement et dimensionnement des résistances R_a et R_c

Dans cette partie, seules les grandeurs continues sont prises en compte. La source V_{cc} est ainsi considérée, tandis que la source $v_e(t)$ est supposée de tension nulle. À la mise sous tension, un régime transitoire apparaît le temps de charger les différents condensateurs du montage. À l'issue de ce régime transitoire, le circuit est en régime stationnaire.

Q33. Déterminer le comportement électrique d'un condensateur en régime stationnaire. En déduire la représentation du schéma électrique équivalent du montage de la figure 7 en régime stationnaire.

Q34. Montrer alors qualitativement que $I_g = 0$ quelles que soient les valeurs des résistances R_a , R_g et R_c .

Le point de fonctionnement souhaité est tel que $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$ et $U_{ac}^0 = 2,5 \times 10^2 \text{ V}$.

Q35. Déterminer la valeur de U_{gc}^0 de U_{gc} compatible. En déduire les valeurs à prendre pour R_c et R_a . Expliquer pourquoi la valeur de R_g n'intervient pas ici.

Q36. Préciser alors la valeur de V_s^0 .

III – Étape 2 : linéarisation du comportement de la triode ECC83

On s'intéresse maintenant aux petites variations autour du point de fonctionnement dues à la présence de v_e . Les grandeurs électriques sont notées $U_{gc} = U_{gc}^0 + u_{gc}$, $U_{ac} = U_{ac}^0 + u_{ac}$ et $I_a = I_a^0 + i_a$ avec u_{gc} , u_{ac} et i_a des infiniment petits d'ordre 1 devant respectivement U_{gc}^0 , U_{ac}^0 et I_a^0 .

Q37. Donner un argument numérique autorisant à utiliser la caractéristique statique $I_a(U_{gc}, U_{ac})$ de la triode en régime variable.

Q38. Montrer que les grandeurs u_{gc} , u_{ac} et i_a sont liées à l'ordre 1 par la relation suivante, où les coefficients g_m et r_a sont à exprimer en fonction de β' , μ et I_a^0 :

$$i_a = g_m u_{gc} + \frac{1}{r_a} u_{ac}. \quad (1)$$

Q39. Exprimer la quantité $g_m r_a$. Commenter.

Q40. Calculer les valeurs numériques de g_m et r_a .

IV – Étape 3 : détermination du gain de l'amplificateur

Les condensateurs C_e et C_c sont supposés suffisamment capacitifs pour se comporter comme des fils (interrupteurs fermés) dans le domaine fréquentiel du signal v_e . De plus, la source de tension V_{cc} étant une source continue, elle est aussi assimilable à un fil en régime variable car elle impose une variation de tension nulle à ses bornes. En se limitant aux signaux variables, le circuit électrique équivalent du montage amplificateur est donc celui de la figure 8 dans lequel les grandeurs u_{gc} , u_{ac} et i_a sont liées entre elles par la relation établie à la question **Q38**.

Q41. Montrer que $v_s = A_V v_e$ et préciser l'expression de l'amplification en tension A_V en fonction de g_m , r_a et R_a . Commenter le signe et calculer cette amplification en décimal et en décibels.

Q42. En réalité, la source v_e n'est pas idéale et possède une résistance de sortie notée $r_e = 50 \Omega$. Préciser, avec justification, comment doit être choisie la valeur de R_g pour ne pas altérer la valeur de A_V .

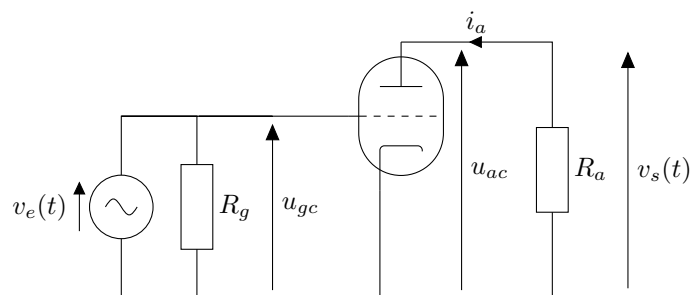


Figure 8 – Circuit équivalent en régime variable.

V – Distorsion harmonique de l'amplificateur

On cherche maintenant à quantifier la non-linéarité de l'amplificateur étudié en relation principalement avec la non-linéarité de la caractéristique de la triode vis-à-vis de U_{gc} .

Q43. En reprenant le raisonnement effectué à la question **Q38**, mais à l'ordre 2 en u_{gc} , établir la relation :

$$i_a = g_m u_{gc} + \xi u_{gc}^2 + \frac{1}{r_a} u_{ac} . \quad (2)$$

Exprimer ξ en fonction de μ , β' et I_a^0 . Faire l'application numérique.

Q44. Déterminer alors l'expression de $v_s(t)$ en fonction de $v_e(t)$, $v_e(t)^2$ et des autres grandeurs utiles.

Q45. Montrer que, pour un signal v_e sinusoïdal de la forme $v_e(t) = U \sin(\omega t)$, le signal v_s comporte plusieurs composantes spectrales. Identifier leurs caractéristiques.

On appelle distorsion harmonique de rang n , notée DH_n , le rapport de l'amplitude de l'harmonique de rang n sur l'amplitude du fondamental. On exprime ce rapport en pourcentage.

Q46. Calculer les valeurs de DH_2 pour $U = 0,1$ V, $U = 0,3$ V et $U = 0,5$ V. Commenter.

Données et formulaire

Données numériques

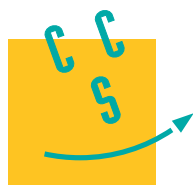
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Stefan	$\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Conductivité électrique du tungstène	$\gamma = 8,9 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse volumique du tungstène	$\mu_W = 1,9 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Conductivité thermique du tungstène	$\lambda = 1,7 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Capacité thermique massique du tungstène	$c = 1,3 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Formulaire

- Loi de Wien : $\lambda_{\max} T = 2,9 \text{ mm} \cdot \text{K}$.
- Pour un champ scalaire a , $\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} a \right) = \vec{0}$.
- Pour un champ scalaire a , $\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} a \right) = \Delta a$.
- Pour un champ scalaire a , à dépendance spatiale uniquement radiale en coordonnées cylindriques :

$$\Delta a(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a(r) \right) .$$

◇ Fin ◇



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique-chimie 2

MPI

4 heures

Calculatrice autorisée

2026

JO 2024 : comment ils nous ont fait vibrer...

Les Jeux Olympiques et Paralympiques de Paris 2024 resteront gravés dans les mémoires comme une édition exceptionnelle, en grande partie grâce aux performances et à l'esprit d'équipe des athlètes français.

Ces athlètes ont brillé dans de nombreuses disciplines, établissant de nouveaux records et faisant vibrer les spectateurs.



Figure 1 – Léon Marchand, quadruple champion olympique en natation, et Cassandre Beaugrand, championne olympique en triathlon [1].

Ce sujet contient quatre parties : une première partie axée sur une épreuve de sprint en natation et le traitement de l'eau de piscine ; une deuxième sur la vélocimétrie laser à franges, méthode utilisée pour étudier la vitesse en natation ; une troisième partie qui s'intéresse au plongeur de haut vol et au mouvement du plongeur une fois dans l'eau ; une quatrième partie qui interroge le caractère obligatoire de la combinaison lors de l'épreuve de la natation marathon ou triathlon.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé.

Partie A – Étude du 100 m nage libre

À l'école des Ponts ParisTech, une équipe de chercheurs étudie la physique de la natation. L'un des principaux sujets abordés est l'étude du départ du nageur et l'optimisation de sa trajectoire. Un autre objectif est de comprendre l'évolution de la vitesse en fonction de la cadence et de la mettre en relation avec la puissance délivrée au niveau des bras pour avancer.

Ces différents sujets sont abordés dans cette partie, ainsi qu'une étude du traitement de l'eau.

I – Première étape : plonger vite et loin

L'intérêt du départ plongé en crawl, papillon ou brasse réside dans le gain de temps induit par sa bonne réalisation, notamment lors des épreuves olympiques. En effet, le fait de s'appuyer sur un plongeur solide, de réaliser une trajectoire aérienne et profilée et, enfin, de partir de plus haut sont autant d'éléments qui favorisent la qualité du plongeur.

On suppose dans cette sous-partie que le nageur de masse m est assimilable à son centre de masse, soit un point M localisé au niveau de son bassin, à l'altitude initiale H_0 par rapport au niveau de l'eau (voir figure 2). On néglige l'inclinaison du plot de départ et les frottements de l'air lors de la phase de vol. On note v_0 la norme du vecteur vitesse initial à l'instant où le nageur décolle. Ce vecteur vitesse est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

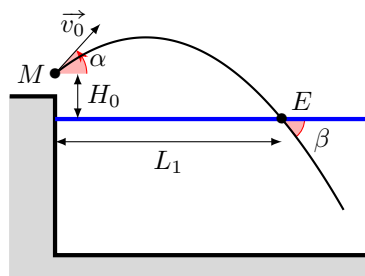


Figure 2 – Léon Marchand aux JO 2024 [1] et modélisation simplifiée de la position initiale du nageur. L'angle orienté α est positif sur la figure et l'angle β d'entrée dans l'eau est absolu.

- Q1.** Établir l'expression de la durée du plongeon t_1 (durée de la phase de vol jusqu'au point E d'entrée dans l'eau) en fonction des variables H_0 , v_0 , g et α . Dédire l'expression de la distance L_1 parcourue en dehors de l'eau selon l'axe horizontal (figure 2) en fonction de ces mêmes variables.
- Q2.** Sachant que le nageur est plus rapide en dehors de l'eau, estimer, grâce à la figure 3, la valeur de la distance L_1 idéale pour le plongeon étudié, ainsi que celle de l'angle α correspondant en degrés. Estimer d'autre part la durée du plongeon correspondant ; vérifier la valeur de durée du plongeon à l'aide de la question précédente.

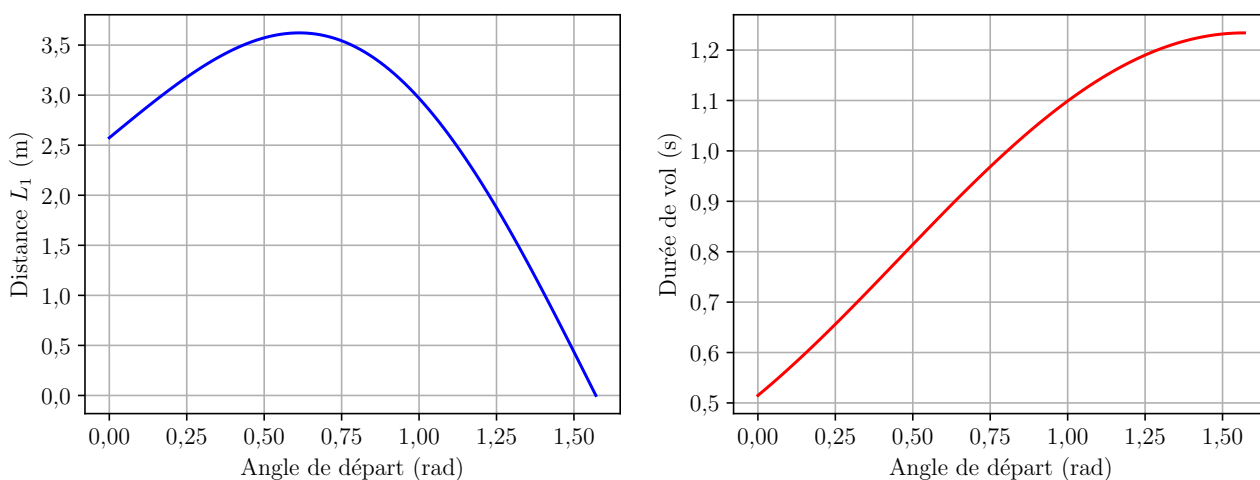


Figure 3 – Distance parcourue L_1 et durée du plongeon en fonction de l'angle de départ α .

- Q3.** Montrer que l'angle α n'a pas d'influence sur la norme v_E de la vitesse d'entrée dans l'eau au point E , puis évaluer v_E numériquement.

Sachant que la vitesse en crawl, dans l'eau, est plutôt de l'ordre de $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on comprend vite l'intérêt de la phase de propulsion.

- Q4.** Déterminer l'expression de l'angle d'entrée dans l'eau β au point E (figure 2) en fonction des variables L_1 , v_0 , g et α . L'évaluer dans le cadre de la question **Q2**. Cette valeur de β constitue un compromis : citer un inconvénient à ce que β soit proche de $\frac{\pi}{2}$ ou encore de 0.

II – Deuxième étape : nager à fond le 100 m nage libre

On réunit dans cette sous-partie des résultats de diverses études biomécaniques du crawl.

Étude 1 : décomposition des phases en crawl

Le trajet aquatique du bras lors de la nage en crawl s'effectue dans les trois plans de l'espace, avec des balayages externes et internes ainsi que hauts et bas (figure 4). Les différentes phases sont les suivantes, les points 1 à 6 correspondant aux positions successives de la main gauche du nageur :

- 1 à 2 : "Entry and stretch" (ES : entrée et allongement);
- 2 à 3 : "Downsweep to catch" (DC : balayage vers le bas et « prise d'appui »);
- 3 à 4 : "Insweep" (IN : balayage interne);
- 4 à 5 : "Upsweep" (UP : balayage vers le haut);
- 5 à 6 : "Exit" (EX : sortie de la main).

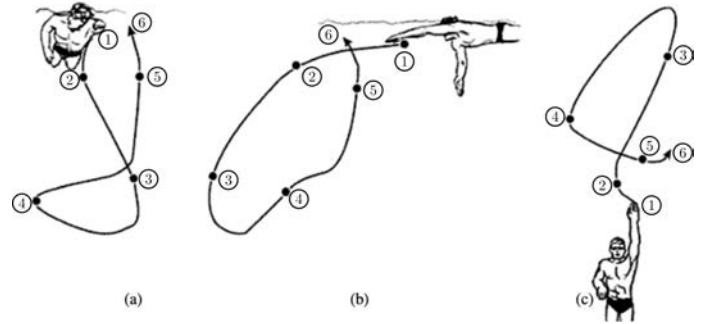


Figure 4 – (a) vue de face; (b) vue de profil; (c) vue de dessous. ES : 1-2, DC : 2-3, IN : 3-4, UP : 4-5, EX : 5-6 [2].

Étude 2 : le « MAD system »

Des chercheurs ont mis au point un dispositif de mesure de forces de résistance à l'avancement (« MAD system », pour « Measuring Active Drag ») qui permet indirectement d'obtenir les forces propulsives en sprint. Le « MAD system » est composé de capteurs de forces fixes par rapport au bassin de nage de 25 m (voir la figure 5 où les capteurs sont symbolisés par des triangles). Les nageurs dans cette étude utilisent uniquement leurs bras pour la propulsion; un pull-buoy (flotteur) est placé entre les jambes pour maintenir le corps à la surface de l'eau. Chaque capteur de force permet la mesure directe des forces créées à chaque coup de bras.

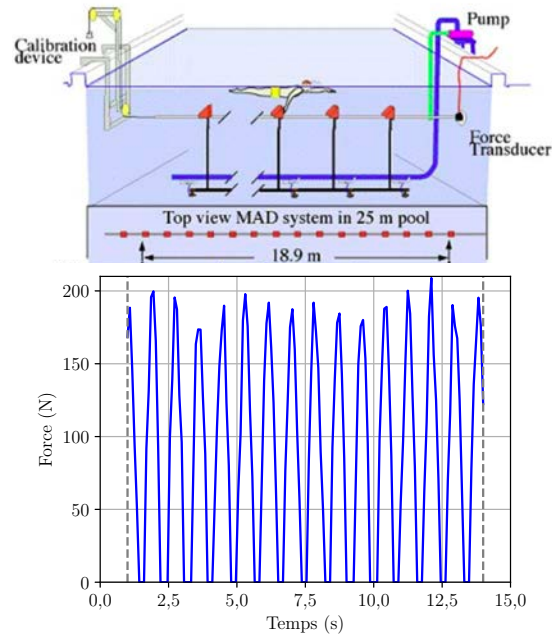


Figure 5 – « MAD system » [3, 4].

Étude 3 : mesures de vitesse et de force exercée sur la main et l'avant-bras du nageur

Des mesures de vitesses et de forces hydrodynamiques exercées sur la main et l'avant-bras du nageur en sprint ont été effectuées expérimentalement et ont été recoupées avec une modélisation numérique de l'écoulement. Les résultats expérimentaux sont fournis sur la figure 6.

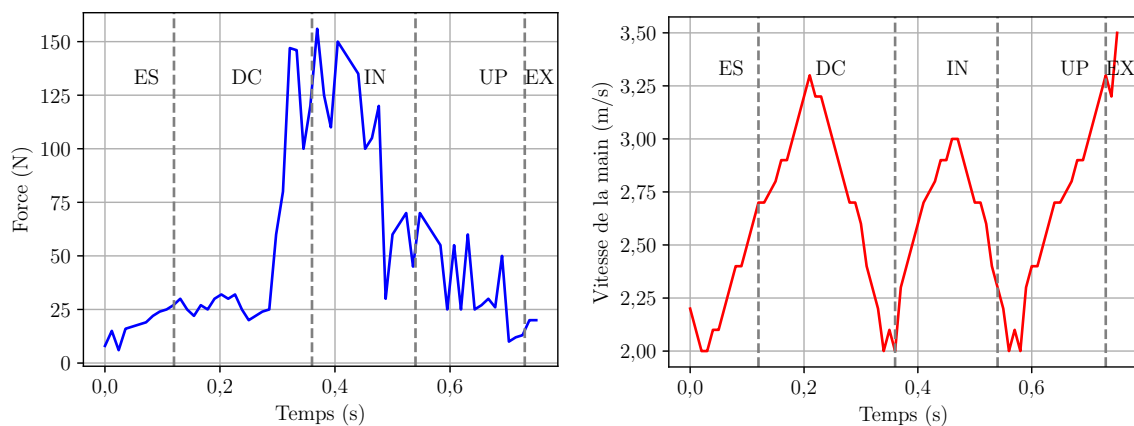


Figure 6 – Forces appliquées sur la main et l'avant-bras et vitesse de la main [5].

Q5. À l'aide des études précédentes, évaluer numériquement l'énergie dépensée par un nageur de crawl en sprint sur une distance de 100 m et la comparer à l'apport énergétique de 205 kcal pour une barre chocolatée.

III – Traitement de l'eau du centre aquatique olympique

L'électrolyse est une méthode moderne utilisée pour désinfecter l'eau d'une piscine. Ce système utilise le sel (du chlorure de sodium) et de l'électricité pour produire du dichlore lors d'une étape 1. Dans une étape 2, le dichlore est converti en ions hypochlorite (ClO^-) qui ont la propriété de tuer les bactéries, virus et autres microorganismes. Il s'agit par ailleurs des ions contenus dans l'eau de javel.

Les ions hypochlorite, lorsqu'ils réagissent sur les bactéries et les microorganismes, forment à nouveau des ions chlorure Cl^- . Cette réaction permet de régénérer les ions chlorure consommés lors de l'étape 1. C'est ce cycle fermé qui fait de l'électrolyse un système durable pour le traitement de l'eau de piscine. Il n'est donc nécessaire de remettre du sel dans l'eau que très occasionnellement.

Le pH est maintenu entre 7,2 et 7,6 pour maximiser l'efficacité du traitement et assurer le confort des nageurs. Le bassin de nage du centre aquatique olympique en figure 7 possède une surface de 1250 m^2 pour une profondeur de 3 m. La concentration massique en chlorure de sodium dans l'eau est de $5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.



Figure 7 – Centre Aquatique Olympique [1].

III.1 – Étude de l'étape 1

La cellule qui permet l'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium est composée de deux électrodes reliées chacune à l'une des bornes d'un générateur (noté G sur la figure 8), de tension continue d'environ 10 V. On relève une intensité de 20 A.

Au niveau d'une électrode (A), on forme du dihydrogène gazeux et des ions hydroxyde HO^- ; au niveau de l'autre électrode (B), on observe un dégagement de dichlore gazeux (figure 8).

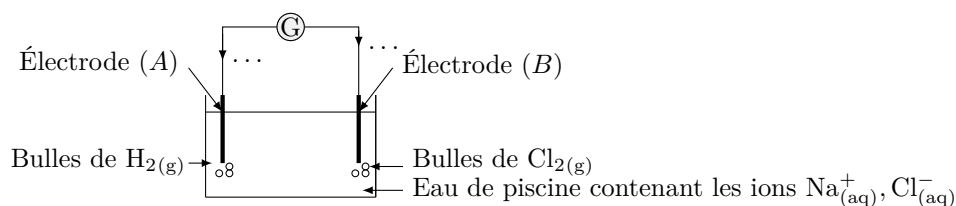


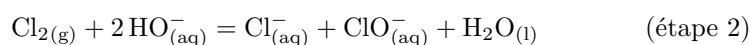
Figure 8 – Électrolyse d'une solution de chlorure de sodium.

- Q6.** Identifier les deux couples oxydant/réducteur qui interviennent lors de cette étape afin d'en déduire l'équation bilan de la réaction correspondante.
- Q7.** Indiquer l'espèce chimique oxydée et l'espèce réduite.
- Q8.** Reproduire la figure 8 en indiquant le sens de déplacement des électrons, le sens positif du courant i et si les électrodes (A) et (B) sont le siège d'une oxydation ou d'une réduction.
- Q9.** Justifier qualitativement si la réaction bilan qui a lieu à l'étape 1 est thermodynamiquement favorisée.

L'électrolyse permet donc de réaliser une transformation chimique grâce à une activation électrique. Pour la suite, on suppose cette étape 1 comme totale et rapide.

III.2 – Étude de l'étape 2

Les ions hydroxyde et le dichlore formés sont ensuite consommés lors d'une nouvelle transformation chimique dont l'équation bilan est la suivante :



- Q10.** Déterminer l'expression, puis la valeur numérique de la constante d'équilibre associée à cette équation bilan de l'étape 2.
- Q11.** Indiquer la quantité de matière d'électrons échangés lors de l'étape 1 au cours d'une heure de traitement et en déduire la quantité de matière d'ions hypochlorite formés.

- Q12.** Déterminer d'autre part la masse de chlorure de sodium que l'on devrait dissoudre pour assurer une heure de traitement au cours de l'étape 1 (en l'absence de régénération de ces ions dans les étapes suivantes) et justifier que la quantité disponible dans le bassin est suffisante.

III.3 – Ajustement du pH

On mesure un matin une valeur de pH égale à 8,0 dans le bassin de natation olympique.

- Q13.** Utiliser le rapport de concentrations $\frac{[\text{ClO}^-_{(\text{aq})}]}{[\text{HClO}_{(\text{aq})}]}$ correspondant (où HClO est l'acide hypochloreux) afin d'expliquer comment le fait de verser de l'acide sulfurique H_2SO_4 (un acide fort) va permettre d'abaisser le pH.

Partie B – Vélocimétrie laser à franges

À l'Institut Physique et Ingénierie en matériaux du CNRS, les scientifiques utilisent un robot et la vélocimétrie pour étudier les mécanismes propulsif et résistif chez le nageur expert.

La vélocimétrie à deux faisceaux (ou à franges) repose sur la superposition de deux faisceaux laser qui crée une zone d'interférence permettant de mesurer précisément la vitesse des particules en mouvement. Pour que le dispositif fonctionne, les deux ondes incidentes doivent être planes, cohérentes et de même intensité. Elles sont construites à l'aide d'un faisceau laser que l'on doit tout d'abord élargir, puis diviser, avant de générer le phénomène d'interférences. Le principe est décomposé dans les sous-parties suivantes. La mesure de la vitesse des particules dans le fluide permet de connaître la vitesse du fluide.

I – Expansion du faisceau

Les rayons en sortie d'un expandeur de faisceau ressortent parallèles à l'axe optique. On note d_0 la largeur du faisceau entrant dans l'expandeur (voir figures 9 et 10) et d'_0 celle du faisceau sortant. On souhaite obtenir un taux d'expansion du faisceau $\tau = \frac{d'_0}{d_0} > 1$. Deux types d'expandeurs sont étudiés dans cette sous-partie.

Les expandeurs de faisceau képlériens sont constitués de deux lentilles convergentes (figure 9). On définit l'encombrement du système comme la distance D qui sépare les deux lentilles.

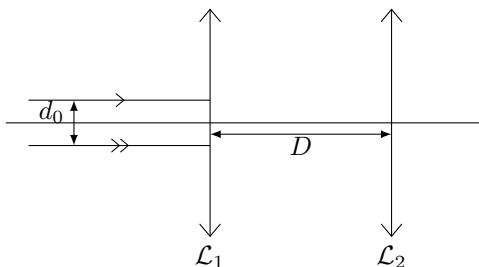


Figure 9 – Expandeur de faisceau képlérien.

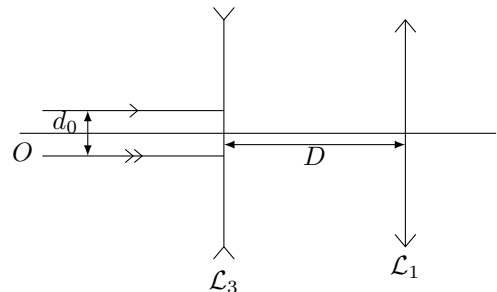


Figure 10 – Expandeur de faisceau galiléen.

- Q14.** Reproduire la figure 9 en indiquant la position des foyers des lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, de distances focales images respectives f'_1 et f'_2 , et le trajet des rayons en sortie des lentilles permettant de respecter la condition $\tau > 1$.
- Q15.** Établir l'expression de τ en fonction de f'_1 et f'_2 .

Les expandeurs de faisceau képlériens offrent des taux d'expansion élevés, mais donnent naissance à un point au sein du système où se concentre l'énergie du laser. Aussi ce système chauffe l'air entre les lentilles et entraîne un risque d'erreurs. On envisage alors un expandeur de faisceau dit galiléen (figure 10) qui se compose d'une lentille divergente $\mathcal{L}_3$ et de la lentille convergente $\mathcal{L}_1$.

- Q16.** Reproduire la figure 10 en indiquant la position des foyers des lentilles, de distances focales images respectives f'_3 et f'_1 , et le trajet des rayons en sortie des lentilles permettant un nouveau taux d'expansion $\tau' > 1$.
- Q17.** Établir l'expression de τ' en fonction de f'_3 et f'_1 .
- Q18.** Exprimer D en fonction de f'_1 et du taux d'expansion pour les deux types d'expandeurs. Indiquer quel type d'expandeur permet un encombrement moindre à distance focale f'_1 et taux d'expansion donnés.

II – Division du faisceau

Une fois élargi, le faisceau incident de diamètre d'_0 est divisé en deux à l'aide d'un prisme cubique en verre dont l'indice optique vaut $n_v = 1,5$. Le prisme est placé dans l'air d'indice $n \simeq 1$.

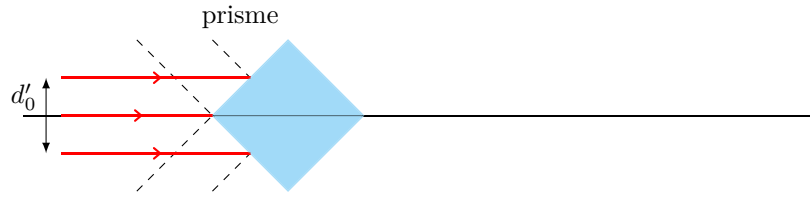


Figure 11 – Montage du prisme cubique diviseur de faisceau. Le faisceau incident est parallèle à l'axe optique confondu avec un axe de symétrie du prisme. Les traits en pointillés correspondent aux droites normales à chaque face que l'on doit considérer pour le tracé des rayons.

Q19. Reproduire la figure 11 et poursuivre le tracé des trois rayons afin d'expliquer la division du faisceau par le prisme cubique. On prêter une attention particulière au rayon sur l'axe optique qui sera dévié par chacune des deux faces de gauche du prisme.

Q20. Exprimer le diamètre d_f de chacun des faisceaux obtenus après division.

Q21. Indiquer la différence de marche δ entre deux rayons situés dans chacun des deux faisceaux, au niveau d'un plan orthogonal à l'axe optique en sortie du prisme. Conclure quant à l'intérêt de ce dispositif dans le cadre de notre démarche.

On dispose à présent de deux faisceaux lumineux qui vont interférer entre eux grâce au dispositif exposé dans la sous-partie suivante.

III – Interférences des deux faisceaux

À l'aide d'un montage optique complet, on obtient deux sources lumineuses qui interfèrent dans l'eau comme en figure 12. Dans cette partie, on considérera que l'indice de l'eau est égal à 1 afin de simplifier les expressions.

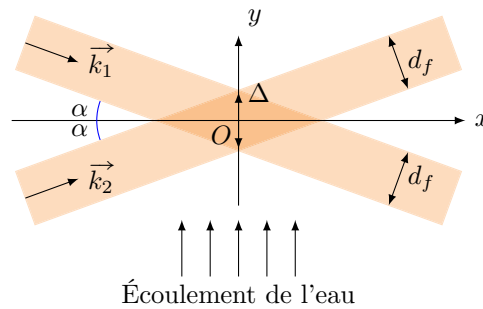


Figure 12 – Interférences à deux faisceaux.

Ces deux ondes incidentes sont planes, cohérentes et de même intensité I_0 . Elles sont construites à l'aide d'un faisceau laser argon (de longueur d'onde λ_0 ; voir tableau 1 dans les données en fin d'énoncé). Ces ondes peuvent s'écrire en notation complexe avec les amplitudes instantanées complexes

$$\underline{s}_1(M,t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})} \quad \text{et} \quad \underline{s}_2(M,t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})},$$

avec $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ les vecteurs d'onde respectivement associés à chacun des faisceaux incidents, ω la pulsation et s_0 une constante.

On introduit dans l'eau des particules d'ensemencement qui suivent l'écoulement selon l'axe (Oy) , à la vitesse $\vec{V} = V \vec{u}_y$ et émettent un clignotement lumineux par réflexion lorsqu'elles passent d'une frange sombre à une frange brillante. L'intensité I diffusée par les particules d'ensemencement permet d'obtenir l'expression de la norme de la vitesse de l'eau.

On fixe l'angle $\alpha = 6,00^\circ$ avec une incertitude-type $u(\alpha) = 0,10^\circ$. La fréquence du clignotement des particules est $f = 1,200$ MHz avec une incertitude-type $u(f) = 0,050$ MHz.

- Q22.** Exprimer l'intensité I en un point de coordonnées (x, y, z) dans le champ d'interférence en fonction des grandeurs utiles parmi I_0 , λ_0 , α , x , y et z . Décrire la figure d'interférence observée.
- Q23.** Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.
- Q24.** Déterminer l'expression de la norme V de la vitesse de l'eau. L'évaluer numériquement avec une estimation de son incertitude-type.
- Q25.** Exprimer la dimension Δ de la zone d'interférence (voir figure 12) en fonction de d_f et α .
- Q26.** Établir et évaluer numériquement la valeur minimale de d_f . Conclure quant à l'utilisation du laser argon pour la mesure de vitesse.

Partie C – Le plongeon de haut vol

Le plongeon est une discipline de la natation, comme la natation synchronisée ou le water-polo. En compétition olympique de natation, les plongeurs peuvent être réalisés à partir de tremplins ou plateformes allant jusqu'à 10 mètres de hauteur. On parle de plongeon de haut vol à partir de cette altitude.

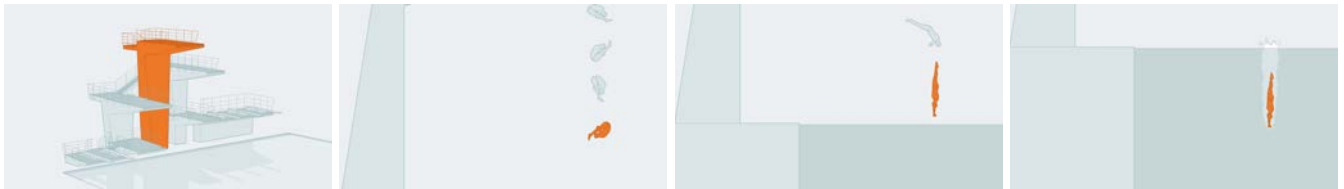


Figure 13 – Plongeur du centre aquatique olympique et les phases du plongeon [6].

Poussée d'Archimède : tout corps plongé dans un fluide au repos subit de la part de celui-ci une force appelée poussée d'Archimède dirigée vers le haut et de norme égale à celle du poids du fluide déplacé. Elle s'exprime en norme $P_A = \rho V g$ avec ρ la masse volumique du fluide et V le volume de la partie immergée du corps.

Force de frottement fluide : un système en mouvement dans un fluide, se déplaçant à vitesse élevée, est soumis à une force de frottement modélisée par la loi $\vec{f} = -k v \vec{v}$ où k est un coefficient de frottement et v la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$. Dans le modèle utilisé, $k = \frac{1}{2} \rho C_x S$ avec C_x le coefficient de traînée et S la surface frontale du solide (orthogonale au vecteur vitesse ; figure 14). Des valeurs du coefficient C_x sont fournies par le tableau 2 dans les données en fin d'énoncé.



Figure 14 – Estimation de la surface frontale S chez l'athlète [7].

Contrairement au nageur de 100 m étudié dans la première partie, le plongeur de haut vol va chercher à entrer dans l'eau à la verticale (voir schémas de droite de la figure 13) afin de réduire l'impact sur son corps et donc d'éviter de se blesser. En effet, le plongeur de haut vol peut atteindre une vitesse d'entrée dans l'eau supérieure à $50,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On s'intéresse à la chute du plongeur (de masse m et de masse volumique après expiration $\rho_h > \rho$) une fois qu'il est entré dans l'eau.

- Q27.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse du plongeur après son entrée dans l'eau.
- Q28.** Montrer l'existence d'une vitesse limite v_{lim} et l'exprimer en fonction de k , ρ , ρ_h , g , m . L'évaluer numériquement.

On souhaite résoudre l'équation différentielle de la question **Q27** analytiquement. Les équations différentielles du type $\frac{dv}{dt} = -A v^2 + B$, avec A et B des constantes strictement positives, admettent pour solution générale

$$v(t) = k_1 \frac{1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau} + k_2\right)}{1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau} + k_2\right)} \quad \text{avec } k_1, k_2 \text{ et } \tau \text{ des constantes.}$$

- Q29.** Dans le cadre de l'équation différentielle de la question **Q27**, exprimer A et B en fonction de k , ρ , ρ_h , g et m . Puis, exprimer k_1 , k_2 , ainsi que τ en fonction de A , de B et de la vitesse initiale v_0 du plongeur dans l'eau.

Cette résolution analytique n'étant pas immédiate, on se propose de résoudre l'équation différentielle de la question **Q27** de manière approchée à l'aide de la méthode d'Euler. On superpose ensuite la résolution analytique à la solution numérique sur la figure 15.

Q30. Expliquer le principe de la méthode d'Euler. Sur votre copie, compléter les deux lignes manquantes de l'extrait du programme (situé dans la partie des données en fin de sujet) qui permet le tracé de la vitesse dans l'eau en fonction du temps pour une valeur de C_x donnée.

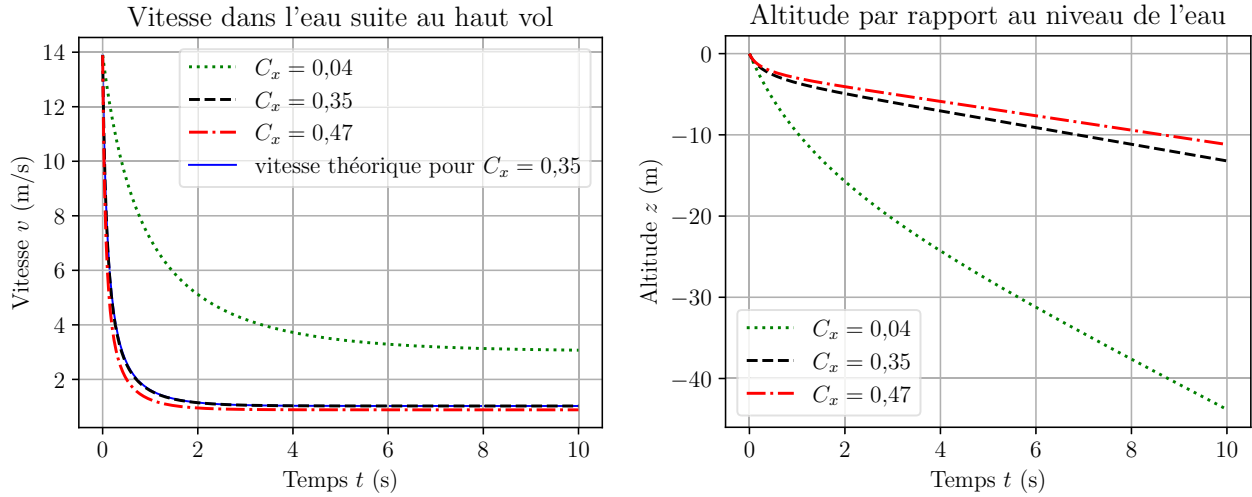


Figure 15 – Modélisation de la chute du plongeur pour des coefficients de traînée différents : vitesse et altitude du centre de masse du plongeur.

Le temps de réaction de l'être humain est d'environ une seconde et son centre de masse se situe à 1 m de ses mains lorsque ses bras sont tendus devant lui.

Q31. Justifier grâce aux résultats de la modélisation en figure 15, le choix d'une profondeur de 5 m pour le bassin du centre aquatique olympique destiné à accueillir le plongeur de haut vol.

Partie D – Comment éviter l'hypothermie en natation marathon ou triathlon ?

Pour des raisons de sécurité, de performance et de confort, la combinaison en néoprène est autorisée en triathlon et natation marathon lorsque la température de l'eau est inférieure à 24 °C. Elle devient obligatoire lorsque la température de l'eau est inférieure à 16 °C. L'objectif de cette partie est de déterminer en combien de temps un athlète entrerait en hypothermie avec, puis sans combinaison.

Pour cela, on modélise les transferts thermiques entre le corps du nageur et l'eau de la Seine. Soit $T(t)$ la température interne du nageur à l'instant t , supposée uniforme, et $T_0 = 16$ °C la température de l'eau, supposée constante. Les informations de modélisation suivantes ont été réunies :

- la surface S (exprimée en m^2) de la peau d'un nageur peut être calculée à partir de la masse m du nageur (en kg) et de sa taille H (en cm) par la relation

$$S = 0,007184 \times m^{0,425} \times H^{0,725} ;$$

- le nageur est équipé d'une combinaison en néoprène soufflée à l'argon d'épaisseur standardisée notée e . Le contact thermique entre la peau du plongeur et l'intérieur de la combinaison est supposé parfait. On note R_{combi} la résistance thermique associée ;
- le nageur étant en déplacement, les transferts thermiques entre la paroi externe de la combinaison à la température T_{paroi} et l'eau à la température T_0 sont modélisés par la loi de Newton. Celle-ci donne le vecteur densité de flux thermique conducto-convectif

$$\vec{j}_{\text{cc}} = h(T_{\text{paroi}} - T_0) \vec{n} ,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire sortante et h un coefficient conducto-convectif qui dépend de la vitesse de nage et des grandeurs caractéristiques du fluide en écoulement. On note R_{cc} la résistance thermique conducto-convective ;

- au cours de l'effort, le nageur libère une puissance thermique $\mathcal{P}_h$;
- les transferts par rayonnement de la combinaison vers l'eau sont modélisés par la loi de Stefan donnant le flux thermique radiatif global

$$\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma S (T_{\text{paroi}}^4 - T_0^4),$$

avec T_{paroi} la température de la paroi externe de la combinaison et T_0 la température de l'eau, σ la constante de Stefan, ε l'émissivité de la combinaison en néoprène (nombre sans dimension traduisant l'efficacité des processus radiatifs) et S la surface externe de la combinaison supposée identique à la surface de la peau du nageur ;

- la peau d'un être humain est décomposée en trois couches : l'épiderme, le derme et la graisse, d'épaisseurs respectives e_e , e_d et e_g et de conductivités thermiques respectives λ_e , λ_d et λ_g . Le tableau 3 dans les données en fin d'énoncé en précise des valeurs. On suppose que le transfert thermique à travers chacune de ces couches, de surface S et non plane, est identique au transfert thermique unidirectionnel à travers une couche plane de surface S et de mêmes caractéristiques.

On se place dans un premier temps en régime stationnaire.

- Q32.** Établir, à partir d'un modèle de diffusion en géométrie unidimensionnelle cartésienne, l'expression de la résistance thermique qui modélise l'épiderme. En déduire l'expression de la résistance thermique de l'ensemble épiderme, derme et graisse notée R_{peau} en fonction des différentes épaisseurs, conductivités thermiques et de la surface S . Évaluer numériquement R_{peau} .
- Q33.** Exprimer d'autre part la résistance conducto-convective R_{cc} modélisant l'échange entre la paroi extérieure de la combinaison et l'eau, puis la calculer.
- Q34.** Montrer que si l'écart $\Delta T = T_{\text{paroi}} - T_0$ est faible devant T_{paroi} et T_0 , le flux thermique radiatif Φ_{rad} est approximativement proportionnel à ΔT . En déduire que les phénomènes radiatifs sont modélisables par une résistance thermique radiative R_{rad} dont on donnera l'expression et la valeur numérique.
- Q35.** Proposer le schéma électrique équivalent permettant de déterminer la résistance thermique totale R_{tot} entre l'intérieur du corps du nageur et l'eau en fonction de R_{rad} , R_{cc} , R_{peau} , R_{combi} et en déduire l'expression du flux thermique total Φ_{tot} en fonction de T , T_0 et R_{tot} .
- Q36.** Montrer que le schéma équivalent précédent est simplifiable et commenter le résultat. Donner la valeur numérique de R_{tot} qui s'en déduit.

On se place dans un second temps en régime instationnaire pour étudier l'évolution de la température du nageur au cours du temps. On émet toutefois l'hypothèse que le régime est suffisamment lentement variable pour que l'expression de Φ_{tot} établie à la question **Q35** soit toujours utilisable.

- Q37.** Montrer que la température T du nageur est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \xi,$$

avec τ et ξ des constantes à exprimer en fonction de m , c , R_{tot} , T_0 et $\mathcal{P}_h$.

- Q38.** Résoudre cette équation différentielle. Pour cela, introduire la température T_c du corps du nageur en dehors de l'eau.
- Q39.** Déterminer l'expression de la température du nageur atteinte en régime permanent, notée T_∞ , puis sa valeur numérique. En déduire au bout de combien de temps environ cette température serait atteinte avec combinaison. On supposera pour cela que, malgré tout, durant toute cette durée, l'athlète ne cesse pas de nager...

Le nageur est en hypothermie lorsque sa température devient inférieure à 35 °C. Dans la question suivante, afin de simplifier l'étude, on néglige le transfert radiatif et on suppose le coefficient conducto-convectif $h = 455,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ valable avec ou sans combinaison.

- Q40.** Déterminer le temps maximal que peut durer une épreuve de natation marathon sans danger avec, puis sans combinaison dans une eau à $T_0 = 16 \text{ °C}$. Justifier le caractère obligatoire de la combinaison dans cette eau froide sachant que le champion olympique nage le marathon en un peu plus de deux heures.

Données et formulaire

Données numériques pour la partie A

- Altitude initiale du point M : $H_0 = 1,3$ m.
- Norme de la vitesse initiale : $v_0 = 5,0$ m·s⁻¹.
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,81$ m·s⁻².
- Masse du nageur : $m = 75$ kg.
- Taille du nageur : $H = 175$ cm.
- Conversion entre J et cal : 1 cal = $4,18$ J.
- Température de l'eau de piscine : 25 °C.
- Masses molaires : sodium $M_{\text{Na}} = 23,0$ g·mol⁻¹ et chlore $M_{\text{Cl}} = 35,5$ g·mol⁻¹.
- Constante de Faraday : $F = e\mathcal{N}_A = 96\,485$ C·mol⁻¹, e étant la charge d'un électron et $\mathcal{N}_A$ le nombre d'Avogadro.
- Potentiel standard du couple de l'eau $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_{2(\text{g})}$ en milieu basique : $E_1^\circ = -0,83$ V.
- Potentiel standard du couple de l'eau $\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})}$: $E_2^\circ = 0,0$ V.
- Potentiel standard du couple $\text{Cl}_{2(\text{g})}/\text{Cl}_{(\text{aq})}^-$: $E_3^\circ = 1,36$ V.
- Potentiel standard du couple $\text{ClO}_{(\text{g})}^-/\text{Cl}_{2(\text{g})}$: $E_4^\circ = 0,42$ V.
- Couples acide/base :
 - $\text{pK}_a(\text{H}_3\text{O}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_2\text{O}) = 0$ et $\text{pK}_a(\text{H}_2\text{O}/\text{HO}_{(\text{aq})}^-) = 14$;
 - acide hypochloreux/ion hypochlorite : $\text{pK}_a(\text{HClO}_{(\text{aq})}/\text{ClO}_{(\text{aq})}^-) = 7,5$.

Données numériques pour la partie B

- Indices optiques : du verre $n_v = 1,5$, de l'air $n_{\text{air}} = 1,0$ et de l'eau $n_e \simeq 1,0$ pour simplifier l'étude.

Grandeur	Valeur
Longueur d'onde (argon) λ_0 (nm)	514 (incertitude-type $u(\lambda_0) = 10$ nm)
Puissance maximale de sortie (mW)	50,0
Diamètre de faisceau d_f (mm)	0,65

Tableau 1 – Propriétés du laser Stellar-Pro Select 150.

Données numériques pour la partie C

- Masse volumique de l'eau : $\rho = 1000$ kg·m⁻³.
- Masse volumique d'un athlète après expiration : $\rho_h = 1076$ kg·m⁻³.
- Masse de l'athlète : $m = 75$ kg.

Modèle du plongeur	L/D	Vitesse (m·s ⁻¹)	C_x
Sphère : diamètre D		< 0,5	0,47
Sphère : diamètre D		> 1,5	0,2
Ellipse : grand axe L , petit axe D		> 1,0	0,04
Cylindre : hauteur L , diamètre D	$\simeq 1$	< 0,5	0,63
Cylindre : hauteur L , diamètre D	$\simeq 5$	< 0,5	0,74
Cylindre : hauteur L , diamètre D	$\simeq 20$	< 0,5	0,90
Cylindre : hauteur L , diamètre D	$\simeq 5$	> 2,5	0,35
Parallélépipède base carrée : hauteur L , arête D			2,0

Tableau 2 – Coefficient C_x pour différentes géométries et vitesses du plongeur [7].

Extrait de programme Python pour la partie C

Seules les deux lignes incomplètes sont à écrire, complétées, sur la copie. On suppose que toutes les bibliothèques ont été importées et que les constantes A et B ont été définies comme : A et B . La fonction $F1$ admet pour paramètre d'entrée une vitesse v et renvoie le terme de droite de l'équation différentielle de la question **Q27** calculé pour v .

```
1 t0 = 0 # en s
2 tf = 10 # en s
3 N = 1000
4
5 def F1(v):
6     return _____ # compléter
7
8 def Euler(F, t0, tf, N, v0):
9     valeurs_t = [t0]
10    valeurs_v = [v0]
11    h = (tf - t0) / (N - 1)
12    for i in range(N - 1):
13        valeurs_t.append(valeurs_t[i] + h)
14        valeurs_v.append(_____ ) # compléter
15    return valeurs_t, valeurs_v
16
17 t, v_num1 = Euler(F1, t0, tf, N, v0)
18 plt.plot(t, v_num1)
19 plt.xlabel("Temps (s)")
20 plt.ylabel("Vitesse (m/s)")
```

Données numériques pour la partie D

- Masse du nageur : $m = 75$ kg.
- Taille du nageur : $H = 175$ cm.
- Température du corps du nageur en dehors de l'eau : $T_c = 37,0$ °C.
- Capacité thermique massique du nageur (avec ou sans combinaison) : $c \simeq 3,5 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Puissance thermique libérée au cours de l'effort : $\mathcal{P}_h = 2,5 \times 10^2 \text{ W}$.
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.
- Émissivité de la combinaison en néoprène : $\varepsilon = 0,9$.
- Coefficient conducto-convectif lors de l'échange entre la paroi de la combinaison et l'eau : $h = 455,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Structure	Épaisseur (mm)	Conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
Épiderme	0,08	0,24
Derme	2,0	0,45
Graisse sous-cutanée	10,0	0,19

Tableau 3 – Propriétés de la peau et des tissus d'un nageur [8].

	Gaz	Conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
Épaisseur $e = 4$ mm	Air	0,05686
	Argon	0,04887
	Xénon	0,03419

Tableau 4 – Conductivités thermiques des combinaisons en néoprène à cellules fermées soufflées au gaz [9].

Estimation d'une incertitude-type composée

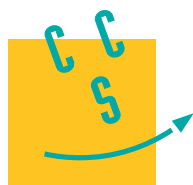
Si une grandeur y est le produit de deux grandeurs x_1 et x_2 ($y = x_1 \times x_2$) ou leur quotient ($y = x_1/x_2$), alors l'incertitude-type sur y , notée $u(y)$, est reliée aux incertitudes-types respectives $u(x_1)$ et $u(x_2)$ sur x_1 et x_2 par

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}.$$

Références

- [1] *Wikimediacommons*.
- [2] Ernest MAGLISCHO. « Swimming fastest. The essential reference on technique, training, and program design ». In : *Hum. Kinet.* (jan. 2003), p. 593-688.
- [3] Peter HOLLANDER et al. « Measurement of active drag during Crawl stroke swimming ». In : *Journal of sports sciences* 4 (fév. 1986), p. 21-30. DOI : 10.1080/02640418608732094.
- [4] Huub TOUSSAINT, Coen BERG et Wiero BEEK. « "Pumped-up propulsion" during front crawl swimming ». In : *Medicine and science in sports and exercise* 34 (mars 2002), p. 314-9. DOI : 10.1097/00005768-200202000-00020.
- [5] Mathias SAMSON. « Étude expérimentale et numérique, en écoulement instationnaire, du trajet des bras en crawl à différentes allures de nage ». In : *HAL open science* (juin 2016), p. 138.
- [6] Thomas Higashiyama SÉBASTIEN XAVIER. « JO Paris 2024 : épreuves, hauteur du saut, notation... Tout comprendre aux règles du plongeon en images ». In : *Le Parisien* (juill. 2024).
- [7] Charlie PRETOT. « Etude physique des courses de natation ». In : *HAL open science* (déc. 2022), p. 44.
- [8] Ramesh Singh F TALORCHAN. « Heat transfer model for predicting survival time in cold water immersion ». In : *Biomedical Engineering Applications Basis and Communications* (août 2005). DOI : 10.4015/S1016237205000251.
- [9] Anton L. Cottrill JEFFREY L. MORAN. « Noble-Gas-Infused Neoprene Closed-Cell Foams Achieving Ultra-Low Thermal Conductivity Fabrics ». In : *The Royal Society of Chemistry* (2018).

◇ Fin ◇



Microscopie thermique à sonde locale

Les microprocesseurs les plus récents incorporent plusieurs milliards de transistors, avec une finesse de gravure de l'ordre de seulement quelques nanomètres. À ces échelles, la notion d'équilibre thermodynamique local est mise en défaut et la loi de Fourier ne s'applique plus. Il devient alors nécessaire de développer des technologies spécifiques afin de mieux comprendre les transferts thermiques qui interviennent dans ces composants. La microscopie thermique à sonde locale répond à ce besoin en permettant des mesures de conductivité thermique avec une résolution nanométrique.

La méthode, proposée par R. Dinwiddie et R. Pylkki en 1994 [1], s'appuie sur un microscope à force atomique. Cet appareil est habituellement utilisé pour déterminer le profil topographique de surfaces en exploitant les interactions entre une micro-pointe et le matériau étudié. Dans le cas de la microscopie thermique, la micro-pointe est réalisée à partir d'un fil de Wollaston : il s'agit d'un fil d'argent contenant en son cœur un filament de platine rhodié (Pt90/Rh10). Le fil est plié en forme de V, avant d'être partiellement dénudé, laissant apparent le filament de platine constituant la micro-pointe (cf. figure 1). Parcouru par un courant, le filament chauffe par effet Joule et sa résistance électrique augmente ; lorsqu'il est mis au contact d'un matériau, un flux thermique est transmis à l'échantillon et sa résistance diminue en conséquence. La mesure de la variation de la tension à ses bornes permet de déterminer la conductivité thermique locale du matériau. Le processus peut être répété en tout point de l'échantillon afin d'obtenir une image thermique, qui cartographie les variations de conductivité thermique sur la surface.

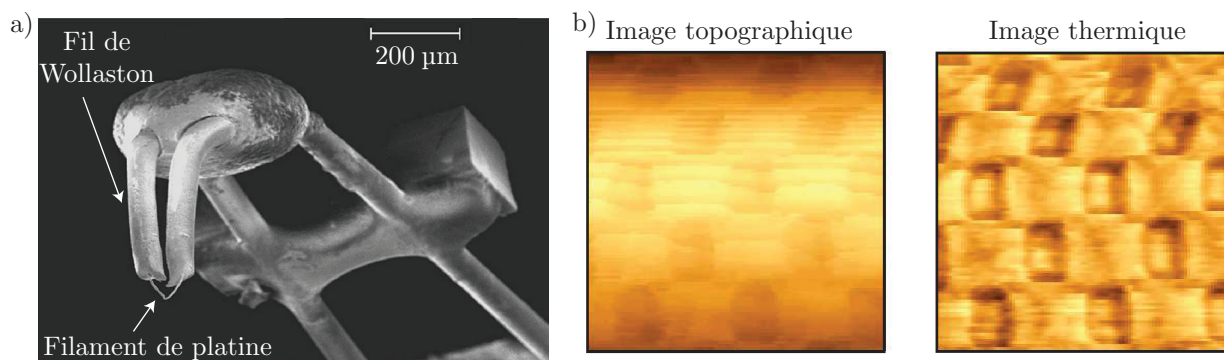


Figure 1 – a) Image au microscope à balayage électronique de la micro-pointe Wollaston [1]. b) Images topographique et thermique obtenues sur un damier micrométrique constitué de deux matériaux de conductivités thermiques différentes [2].

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Le problème comporte trois parties : la première partie est indépendante des deux suivantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé.

Partie A – Production de la pointe

La micro-pointe est réalisée par attaque chimique de l'argent de la gaine du fil de Wollaston dans un bain d'acide. Afin d'étudier les réactions qui ont lieu, on fournit le diagramme potentiel-pH simplifié de l'azote, se limitant aux acides nitreux $\text{HNO}_2(\text{aq})$ et nitrique $\text{HNO}_3(\text{aq})$, aux ions nitrite $\text{NO}_2^-(\text{aq})$ et nitrate $\text{NO}_3^-(\text{aq})$ et au monoxyde d'azote $\text{NO}(\text{g})$ (cf. figure 2). On choisit la convention de tracé $c_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ pour chaque espèce en solution et, pour les gaz, la pression standard de référence $P_0 = P^\circ = 1 \text{ bar}$. La température est $T = 298 \text{ K}$.

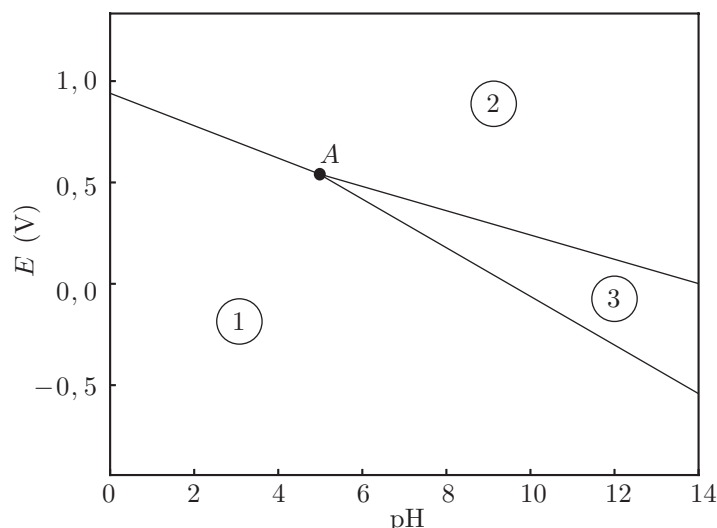


Figure 2 – Diagramme potentiel-pH simplifié de l'azote.

L'azote et l'oxygène sont situés sur la seconde ligne du tableau périodique des éléments, dans les colonnes portant respectivement les numéros 15 et 16. Pour les applications numériques, on prendra $\frac{RT \ln(10)}{\mathcal{F}} = 0,06 \text{ V}$ où R est la constante des gaz parfaits et $\mathcal{F}$ la constante de Faraday.

- Q1.** Donner les représentations de Lewis des différentes espèces azotées envisagées, les atomes d'oxygène étant systématiquement liés à l'atome d'azote. Préciser la particularité du monoxyde d'azote $\text{NO}(\text{g})$ qui explique sa forte réactivité.
- Q2.** Écrire la réaction de dissolution de l'acide nitrique HNO_3 dans l'eau. Justifier alors que l'acide nitrique HNO_3 n'apparaît pas dans le diagramme potentiel-pH fourni.
- Q3.** Justifier que l'acide nitreux HNO_2 n'apparaît pas non plus dans le diagramme.
- Q4.** Déterminer alors les espèces correspondant aux domaines 1, 2 et 3 du diagramme.
- Q5.** Établir à partir des données thermodynamiques les équations des frontières séparant les domaines 2 et 3 d'une part et 1 et 3 d'autre part.
- Q6.** En déduire les coordonnées du point A .
- Q7.** Écrire l'équation de la réaction que subit l'espèce associée au domaine 3 pour $\text{pH} < \text{pH}_A$. Nommer cette réaction.
- Q8.** Déterminer par quel acide et dans quel domaine de pH l'argent peut être attaqué spontanément. Écrire l'équation bilan de la réaction et calculer numériquement sa constante d'équilibre.

Dans la méthode de fabrication proposée par Philip Ligrani en 1984 [3], il est préconisé de recourir à une électrolyse, une des deux électrodes étant le fil de Wollaston, la seconde étant une électrode de platine.

- Q9.** Faire un schéma du dispositif expérimental en précisant le sens du courant et les réactions aux électrodes. Justifier son intérêt.

Partie B – Mesures thermiques en régime continu

La pointe obtenue est représentée schématiquement sur la figure 3. La demi-longueur nominale du filament est $L = 100 \mu\text{m}$ et son rayon nominal est $R = 2,5 \mu\text{m}$.

Dans toute cette partie, on modélise le filament par une ailette thermique cylindrique rectiligne de longueur $2L$ et de section $S = \pi R^2$, parallèle à l'axe Ox et telle que $x = 0$ correspond au milieu de la pointe. L'étude est menée en régime permanent, sauf mention contraire. On néglige les échanges thermiques avec l'air ambiant, ainsi que les transferts thermiques par rayonnement. Toute section du fil est alors isotherme : on note $T(x)$ la température du fil à l'abscisse x et $\theta(x) = T(x) - T_0$ l'échauffement par rapport à la température ambiante $T_0 = 20^\circ\text{C}$ supposée constante.

Les fils de Wollaston de part et d'autre du filament se comportent comme des thermostats à la température T_0 , donc :

$$\theta(x = -L) = \theta(x = L) = 0.$$

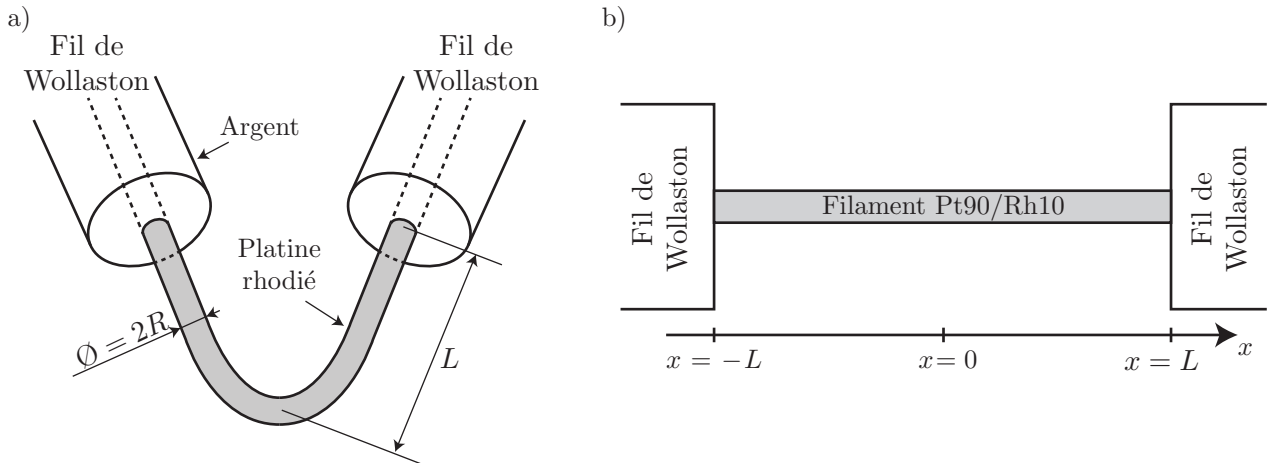


Figure 3 – a) Géométrie de la pointe. b) Modélisation du filament par une ailette thermique rectiligne.

I – Principe de la mesure

La pointe est traversée par un courant continu d'intensité I_0 . Le protocole consiste à mesurer, lors de la mise en contact de la pointe avec l'échantillon, la variation de tension ΔU_{DC} à ses bornes. L'échauffement du filament est noté $\theta_{hc}(x)$ lorsqu'il n'est pas en contact avec l'échantillon (hors contact) et θ_{ec} lorsqu'il l'est (en contact). La valeur moyenne d'une fonction $F(x)$ définie sur $[-L, L]$ est notée $\langle F \rangle$.

Q10. Exprimer la résistance électrique R_0 du filament à température ambiante T_0 en fonction des paramètres géométriques L et S de la pointe et de sa résistivité électrique ρ_0 à $T = T_0$. Faire l'application numérique.

La résistance électrique des fils de Wollaston qui relie la pointe au support est $R_W = 1,5 \times 10^{-3} \Omega$.

Q11. Justifier que la tension mesurée aux bornes de la pointe est sensiblement égale à celle aux bornes du filament.

Comme la température du filament dépend de x , sa conductivité présente des variations spatiales. On admet que sa résistance électrique est la même que s'il possédait une résistivité uniforme égale à $\rho_0(1 + a\langle\theta\rangle)$, avec a le coefficient thermique de résistivité.

Q12. Montrer que la variation de tension ΔU_{DC} aux bornes de la pointe lors de sa mise en contact avec l'échantillon est proportionnelle à $\langle\Delta\theta\rangle$, où $\Delta\theta(x) = \theta_{ec}(x) - \theta_{hc}(x)$.

II – Échauffement hors contact

On considère dans un premier temps que la pointe est suffisamment loin de l'échantillon de sorte que l'on puisse négliger tout transfert thermique vers celui-ci. On souhaite calculer l'échauffement $\theta_{hc}(x)$ le long du filament.

Q13. Montrer que la température $T(x, t)$ dans le filament est solution, en régime quelconque, de l'équation de la diffusion thermique :

$$\mu c S \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{J, \text{lin}}$$

où $p_{J, \text{lin}}$ est la puissance thermique linéique générée par effet Joule le long du filament de platine.

Q14. En négligeant les variations de la résistivité électrique du filament avec la température, exprimer la puissance thermique linéique $p_{J, \text{lin}}$ générée par effet Joule le long du filament de platine en fonction de ρ_0 , I_0 et S .

Q15. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par l'échauffement $\theta_{hc}(x)$ en régime permanent.

Q16. En déduire que :

$$\theta_{\text{hc}}(x) = -\frac{J}{2}x^2 + Ax + B \quad \text{avec} \quad J = \frac{\rho_0}{\lambda S^2} I_0^2$$

et donner les expressions de A et B en fonction de J et des paramètres géométriques du filament.

Q17. Représenter graphiquement le profil de l'échauffement $\theta_{\text{hc}}(x)$ pour $x \in [-L, L]$.

Q18. Calculer la valeur moyenne de l'échauffement dans le fil $\langle \theta_{\text{hc}} \rangle$. Faire l'application numérique pour $I_0 = 50$ mA.

III – Mesure du flux transmis au contact

La pointe est désormais étudiée en contact avec l'échantillon en $x = 0$. On modélise les échanges thermiques entre la surface du filament et l'échantillon par une conductance thermique de contact G_c constante. On suppose par ailleurs que, dans l'échantillon, la température est uniforme dans une demi-boule de rayon b autour du point de contact [4] ; on note cette température T_1 . La diffusion thermique a alors lieu radialement dans l'échantillon depuis cette demi-boule et on note G_e la conductance thermique engendrée par l'épanouissement des lignes de flux dans le matériau jusqu'à l'infini, où la température est constante égale à T_0 (cf. figure 4).

L'échauffement le long du filament est dorénavant noté $\theta_{\text{ec}}(x)$.

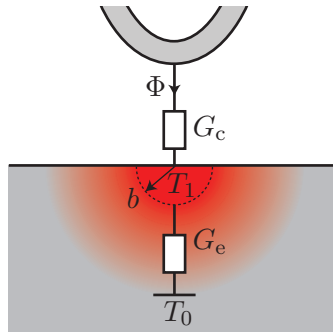


Figure 4 – Modélisation thermique du contact en régime permanent.

Q19. Montrer que :

$$G_e = 2\pi\lambda_e b.$$

Q20. Justifier que le flux thermique Φ transmis dans l'échantillon est proportionnel à l'échauffement de la pointe en $x = 0$, soit :

$$\Phi = G\theta_{\text{ec}}(0),$$

et exprimer G en fonction de la conductivité thermique de l'échantillon λ_e , de b et de G_c .

Comme le contact du filament avec l'échantillon est ponctuel, le bilan thermique et l'équation différentielle établis dans les questions **Q13** et **Q15** s'appliquent toujours sur chacun des intervalles $] -L, 0[$ et $] 0, L[$. En $x = 0$, le flux Φ diffusant vers l'échantillon, qui est extrait à parts égales des deux parties du filament, introduit une singularité dans le profil de température.

On note $j_x(x) = \vec{j}(x) \cdot \vec{u}_x$ la projection du vecteur densité de flux thermique dans le filament selon le vecteur unitaire $\vec{u}_x$; elle est définie sur les intervalles $] -L, 0[$ et $] 0, L[$.

Q21. Sachant que le filament évacue de l'énergie vers l'échantillon, déterminer les signes de Φ , de $j_x(0^-)$ et de $j_x(0^+)$.

Q22. En raisonnant sur la partie droite ($x > 0$), exprimer $\frac{d\theta_{\text{ec}}}{dx}(0^+)$ en fonction de la conductivité thermique du filament λ , de G , de S et de l'échauffement à l'extrémité de la pointe $\theta_{\text{ec}}(0)$.

Q23. En déduire que, pour $x > 0$:

$$\theta_{\text{ec}}(x) = \frac{J}{2} \left(-x^2 + \frac{u}{1+u} Lx + \frac{L^2}{1+u} \right),$$

et donner l'expression de u en fonction de G , λ , S et L .

Q24. Représenter graphiquement les variations de l'échauffement $\theta_{\text{ec}}(x)$ pour $x \in [-L, L]$.

Q25. Exprimer la différence $\Delta\theta(x) = \theta_{\text{ec}}(x) - \theta_{\text{hc}}(x)$ pour $x > 0$ en fonction de J , L , u et x .

- Q26.** En déduire l'expression de $\langle \Delta\theta \rangle$ en fonction de J , L et u , puis exprimer $|\langle \Delta\theta \rangle|/\langle \theta_{hc} \rangle$ en fonction uniquement de u .
- Q27.** Expliquer pourquoi, sur la figure 5, les matériaux présentant une grande conductivité thermique ($\lambda_e \gg \lambda$), tels que le tantale et le titane, donnent lieu à une variation relative de la puissance dissipée à travers la pointe comparable, bien que leurs conductivités thermiques soient différentes.

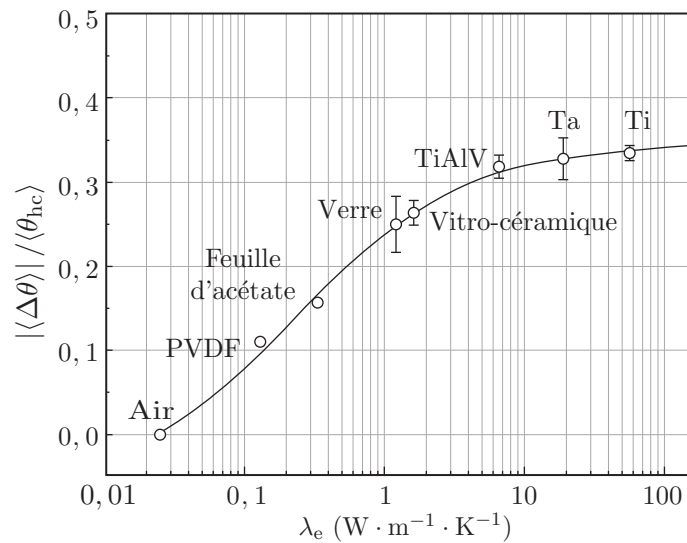


Figure 5 – Variation relative de la puissance dissipée à travers la pointe pour différents matériaux [5].

- Q28.** En vous appuyant sur les mesures de la figure 5, déterminer les valeurs approximatives du rayon de contact b et de la conductance de contact G_c .

Partie C – Mesure des paramètres géométriques de la pointe en mode alternatif

La technique rudimentaire de production de la micro-pointe détaillée dans la partie A entraîne inévitablement de fortes incertitudes sur les paramètres géométriques, dégradant ainsi la précision de la mesure de la conductivité thermique. Ces dimensions peuvent évidemment être mesurées à l'aide d'un microscope à balayage électronique, mais cet équipement étant lourd et onéreux, les laboratoires qui utilisent la microscopie thermique en sont souvent dépourvus. On s'intéresse ici à une méthode beaucoup plus simple à mettre en œuvre consistant à faire traverser la pointe par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

I – Réponse thermique en fonction de la fréquence

- Q29.** En négligeant les variations de la résistivité électrique du filament avec la température, montrer que la puissance thermique linéique $p_{J,\text{lin}}$ générée par effet Joule le long du filament de platine est constituée d'une contribution indépendante du temps et d'une contribution à la pulsation 2ω . Écrire l'équation de la diffusion thermique dans cette situation.

- Q30.** Justifier qu'en régime établi, l'échauffement en un point de la pointe $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$ peut s'écrire sous la forme :

$$\theta(x,t) = \theta_{DC}(x) + \theta_{AC}(x) \cos(2\omega t + \phi(x)).$$

Écrire une égalité reliant $\theta_{DC}(x)$ à $\theta_{hc}(x)$ obtenu à la partie B.

Dans la suite, on supposera pour simplifier que ϕ est indépendant de x .

- Q31.** Exprimer la résistance $R_p(t)$ de la pointe à l'instant t en fonction de R_0 , a , $\langle \theta_{DC} \rangle$, $\langle \theta_{AC} \rangle$, ω , ϕ et t .

- Q32.** En déduire que la tension mesurée aux bornes de la pointe comporte une harmonique à la pulsation 3ω dont on exprimera l'amplitude $U_{3\omega}$ en fonction de a , R_0 , I_0 et $\langle \theta_{AC} \rangle$. Préciser la relation que l'on peut écrire entre ϕ et le déphasage $\varphi_{3\omega}$ de cette harmonique par rapport à l'intensité du courant.

On définit l'amplitude complexe de la composante alternative de l'échauffement $\underline{\theta}_{AC}(x) = \theta_{AC}(x) e^{j\phi}$ de sorte que $\Re(\underline{\theta}_{AC}(x) e^{2j\omega t}) = \theta_{AC}(x) \cos(2\omega t + \phi)$ où $\Re$ désigne la partie réelle pour une grandeur complexe.

Q33. Montrer que, en un point d'abscisse x , l'échauffement alternatif $\underline{\theta}_{AC}(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 \underline{\theta}_{AC}}{dx^2} - \underline{m}^2 \underline{\theta}_{AC}(x) = -\frac{J}{2} \quad \text{avec} \quad \underline{m}^2 = 2j\omega \frac{\mu c}{\lambda}.$$

Q34. En déduire que :

$$\underline{\theta}_{AC}(x) = \frac{J}{2\underline{m}^2} \left(1 - \frac{e^{\underline{m}x} + e^{-\underline{m}x}}{e^{\underline{m}L} + e^{-\underline{m}L}} \right).$$

Q35. Exprimer alors l'échauffement moyen $\langle \underline{\theta}_{AC} \rangle$ le long de la pointe en fonction de J , $\underline{m}$ et L .

Q36. Déterminer le comportement basses fréquences de $U_{3\omega}$. On exprimera sa limite $U_{3\omega,BF}$ en fonction de R_0 , a , I_0 , J et L . On donne pour cela le développement limité au voisinage de $x = 0$:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Q37. En déduire une expression du rayon R du filament en fonction de ρ_0 , I_0 , L , a , λ et $U_{3\omega,BF}$.

Q38. Déterminer de même le comportement hautes fréquences de $U_{3\omega,HF}$ en fonction de R_0 , a , I_0 , J , λ , μ , c et ω .

Q39. Déterminer les comportements asymptotiques de la phase pour les basses et les hautes fréquences, de notations respectives associées $\varphi_{3\omega,BF}$ et $\varphi_{3\omega,HF}$.

Q40. Montrer que l'intersection des deux régimes asymptotiques permet de définir une fréquence caractéristique :

$$f_c = \frac{3\lambda}{2\pi L^2 \mu c}.$$

Q41. Vérifier la compatibilité des mesures de la figure 6 avec les résultats précédents.

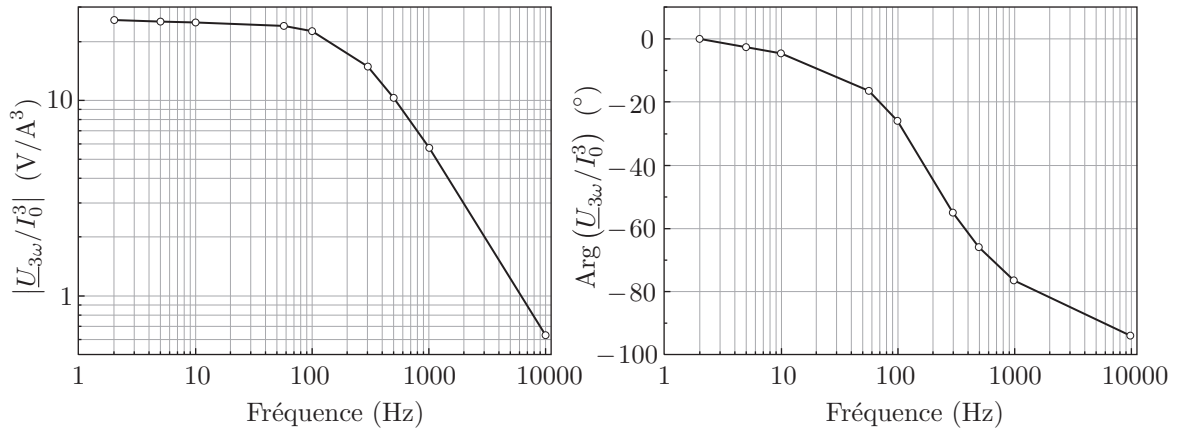


Figure 6 – Mesure de la réponse du signal à 3ω en fonction de la fréquence du courant [6].

Q42. Déterminer numériquement la demi-longueur L du filament, puis son rayon R , pour la pointe utilisée lors des mesures de la figure 6.

II – Traitement électronique du signal

Le coefficient thermique de résistivité a étant assez faible, l'amplitude de la composante de l'harmonique de rang 3 de la tension directement mesurée aux bornes de la pointe a une amplitude environ 1000 fois plus faible que celle du fondamental. Afin de pouvoir mesurer l'amplitude de cette composante fréquentielle, on branche la pointe dans un pont de Wheatstone alimenté par une source de tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$ (cf. figure 7). Les résistances ont pour valeur $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 220 \Omega$. La qualité du voltmètre est suffisante pour considérer son impédance interne infinie.

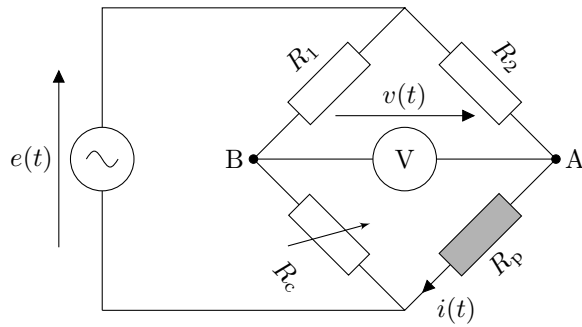


Figure 7 – Schéma du pont Wheatstone utilisé pour la mesure. La pointe correspond à la résistance grisée.

Q43. Exprimer l'intensité $i(t)$ en fonction de $e(t)$ et des résistances pertinentes.

Q44. Montrer qu'avec la valeur de la résistance R_2 choisie, un doublement de la résistance de la pointe par rapport à sa valeur à température ambiante entraîne une variation relative de l'amplitude I_0 du courant $i(t)$ inférieure à 1 %. Commenter alors l'impact des variations de température de la pointe sur l'amplitude du courant qui la traverse.

Q45. Montrer que la tension $v(t)$ mesurée entre les bornes A et B s'écrit :

$$v(t) = \frac{R_1 R_p - R_2 R_c}{R_c + R_1} i(t).$$

Q46. Proposer une valeur de R_c afin que le fondamental de la tension $v(t)$ ait une amplitude du même ordre de grandeur que l'harmonique de rang 3, proportionnelle à $\langle \theta_{AC} \rangle$.

Un dispositif dit « de détection synchrone », non étudié dans ce sujet, permet alors d'extraire cette amplitude et la phase associée afin d'obtenir les mesures de la figure 6.

Données

Notation

j représente l'unité imaginaire telle que $j^2 = -1$.

pKa associés aux constantes d'acidité à 298 K

	$\text{HNO}_3(\text{aq})/\text{NO}_3^-(\text{aq})$	$\text{HNO}_2(\text{aq})/\text{NO}_2^-(\text{aq})$
pKa	-1,4	3,3

Potentiels standards à 298 K, 1 bar et pH=0

	$\text{Ag}^+(\text{aq})/\text{Ag}(\text{s})$	$\text{NO}_3^-(\text{aq})/\text{NO}_2^-(\text{aq})$	$\text{NO}_3^-(\text{aq})/\text{HNO}_2(\text{aq})$
E° (V)	0,80	0,84	0,94

	$\text{NO}_3^-(\text{aq})/\text{NO}(\text{g})$	$\text{HNO}_2(\text{aq})/\text{NO}(\text{g})$	$\text{NO}_2^-(\text{aq})/\text{NO}(\text{g})$
E° (V)	0,96	1,00	1,20

Caractéristiques physiques du platine rhodié Pt90/Rh10

Capacité thermique massique	$c = 0,15 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Conductivité thermique à 20 °C	$\lambda = 38 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Masse volumique	$\mu = 19,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Résistivité électrique à 20 °C	$\rho_0 = 1,9 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$
Coefficient thermique de résistivité	$a = 1,66 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Références

- [1] R. DINWIDDIE, R. PYLKKI et P. WEST. « Thermal conductivity contrast imaging with a scanning thermal microscope ». In : *Thermal Conductivity* 22.3 (1994), p. 668-677.
- [2] P.-O. CHAPUIS. « Contribution à l'étude des transferts thermiques à l'échelle nanométrique : interaction pointe-surface ». École Centrale Paris, 2007.
- [3] P. M. LIGRANI. « Subminiature hot-wire sensor construction ». In : *Report NPS69-84-010 Naval Postgraduate School, Monterey, CA* (1984).
- [4] A. MAJUMDAR. « Scanning thermal microscopy ». In : *Annual Review of Material Science* 29 (1999), p. 505-585.
- [5] D. TREFON-RADZIEJEWSKA et al. « Thermal characterization of metal phthalocyanine layers using photothermal radiometry and scanning thermal microscopy methods ». In : *Synthetic Metals* 232 (2017), p. 72-78.
- [6] S. LEFÈVRE et al. « Probe calibration of the scanning thermal microscope in the AC mode ». In : *Superlattices and Microstructures* 35.3 (2004), p. 283-288.