

## *Trains à sustentation électromagnétique*

Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec des rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Il existe actuellement deux types de trains à grande vitesse à sustentation magnétique :

- un train à sustentation électromagnétique dans lequel le train lévite par attraction grâce à des aimants (Transrapid développé en Allemagne) ;
- un train à sustentation électrodynamique dans lequel le train lévite par répulsion grâce aux courants de Foucault induits par le déplacement du train (SCMaglev développé au Japon).

La seule réalisation commerciale du Transrapid est à l'heure actuelle la ligne de 30 kilomètres qui fonctionne depuis 2004 entre Shanghai et son aéroport international de Pudong. Le trajet s'effectue en moins de 8 minutes, à la vitesse moyenne de 245 km/h. Sur ce parcours le train atteint la vitesse de 430 km/h, il a la capacité d'accélérer de 0 à 350 km/h en 2 minutes.

La première version commerciale du SCMaglev doit relier en une heure Tokyo et Osaka, distantes de 400 km à vol d'oiseau. L'ouverture du premier tronçon de la ligne (Tokyo-Nagoya) est prévu en 2027 avec une vitesse de pointe sur le parcours de 505 km/h. En 2015 une rame de test de sept voitures a atteint la vitesse de 603 km/h, établissant ainsi l'actuel record de vitesse pour un train.



Transrapid



SCMaglev

**Figure 1**

Nous étudions ici quelques aspects du fonctionnement de ces trains, en accordant — sauf en partie I — une attention particulière au Transrapid.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données utiles, un formulaire et deux annexes sont regroupés en fin d'énoncé.

# I Réalisation d'un champ magnétique intense

Dans le système à sustentation électrodynamique (SCMaglev), un champ magnétique est créé par des bobines supraconductrices placées dans le train en mouvement. Le constructeur indique que pour faire léviter le train le champ magnétique produit doit dépasser la valeur de 4 teslas.

**Q 1.** Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réaliser un tel champ magnétique avec un solénoïde constitué d'un fil résistif. Pour répondre à cette question, vous pourrez vous appuyer sur les données fournies en annexe 1. Vous préciserez clairement les différentes étapes de votre raisonnement.

On se propose d'évacuer la puissance produite par la bobine avec un refroidissement à eau.

**Q 2.** Proposer une valeur maximale acceptable de la différence de température entre la bobine et l'eau. En déduire la valeur minimum de la surface de contact entre la bobine et l'eau.

**Q 3.** Quel débit d'eau faudrait-il assurer pour évacuer la puissance thermique produite par la bobine ?

**Q 4.** Commenter et conclure quant à la faisabilité d'un tel refroidissement.

**Q 5.** En quoi l'utilisation de bobines supraconductrices permet-elle la création de champs magnétiques très intenses ?

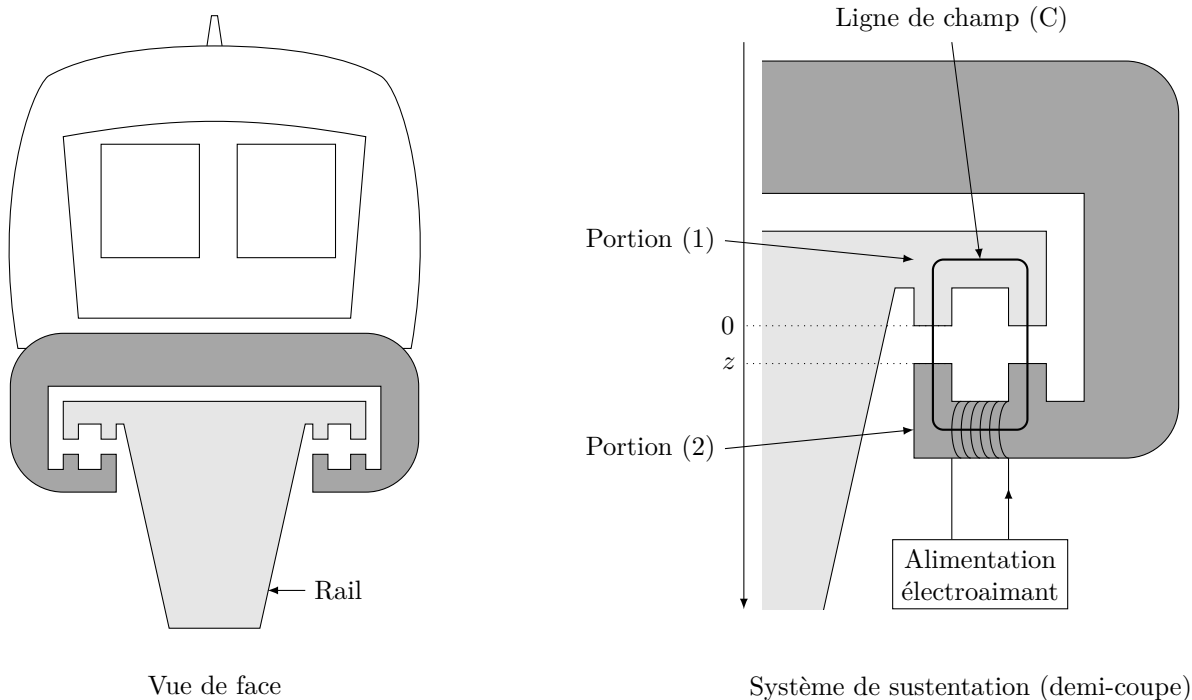
## II La sustentation électromagnétique du Transrapid

### II.A – Modélisation du champ magnétique dans l'entrefer

La figure 2 présente la rame du Transrapid sur son rail et, dans un plan de coupe, le détail du système de sustentation. Ce système est constitué d'un électroaimant dont le circuit magnétique est composé :

- d'une portion de rail (1) en matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative  $\mu_r$  ;
- d'une portion (2) solidaire de la rame, constituée du même matériau ferromagnétique, sur lequel sont bobinées  $N$  spires alimentées par un courant d'intensité  $i(t)$ .

Les deux portions sont séparées par un entrefer de largeur  $z$  variable. La section  $S$  du matériau ferromagnétique dans les portions (1) et (2) du circuit magnétique est supposée commune aux portions (1) et (2), constante le long du circuit magnétique et carrée de côté  $a$  :  $S = a^2$ . (C) est une ligne de champ magnétique du circuit (figure 2).



**Figure 2** Transrapid et son système de sustentation

Les hypothèses d'étude sont les suivantes :

- les milieux ferromagnétiques sont supposés doux ;
- on néglige les pertes par courants de Foucault ;
- toutes les lignes de champ sont canalisées par le circuit magnétique.



On note :

- $\vec{B}_1$  le champ magnétique dans la portion (1) ;
- $\vec{B}_2$  le champ magnétique dans la portion (2) ;
- $\vec{B}_a$  le champ magnétique dans les entrefers ;
- $z$  la largeur, variable, des entrefers entre les deux portions ferromagnétiques du circuit magnétique (l'origine  $O$  sur l'axe descendant ( $O, \vec{u}_x$ ) est choisie sur le rail fixe) ;
- $\ell$  la longueur moyenne de la partie de la ligne de champ (C) située à l'intérieur des portions ferromagnétiques (1) et (2) du circuit.

### II.A.1)

**Q 6.** Définir l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et donner l'expression reliant le vecteur  $\vec{H}$  au champ magnétique  $\vec{B}$  dans la matière et à l'aimantation  $\vec{M}$  de la matière.

**Q 7.** Rappeler les équations de Maxwell valables dans un milieu ferromagnétique dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

### II.A.2)

**Q 8.** Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique dans le circuit magnétique ?

**Q 9.** En déduire les relations liant  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  et  $\vec{B}_a$ .

**Q 10.** À quelle condition, supposée vérifiée ici, les lignes de champ restent-elles parallèles dans l'entrefer ?

### II.A.3)

**Q 11.** Rappeler les caractéristiques d'un milieu ferromagnétique doux.

**Q 12.** Quelle relation lie alors le champ magnétique  $\vec{B}$  et l'excitation magnétique  $\vec{H}$  dans un tel milieu ?

**Q 13.** Définir la perméabilité relative et en donner un ordre de grandeur pour un milieu ferromagnétique doux.

### II.A.4)

**Q 14.** Écrire le théorème d'Ampère sur le contour (C).

**Q 15.** En déduire  $B_2$  en fonction de  $\ell$ ,  $z$ ,  $N$ ,  $i$ ,  $\mu_0$  et  $\mu_r$ .

**Q 16.** Simplifier cette écriture en utilisant la question 12.

## II.B – Lévitiation par attraction

On rappelle que la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile d'un circuit magnétique, parcouru par un courant d'intensité  $i$ , en translation suivant la direction  $\vec{u}_z$  s'écrit  $\vec{F}_{em} = \left( \frac{\partial E_m}{\partial z} \right)_i \vec{u}_z$  où  $E_m$  est l'énergie magnétique.

**Q 17.** Montrer que l'inductance propre  $L(z)$  du bobinage peut s'écrire sous la forme  $L(z) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z}$ .

**Q 18.** Rappeler l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine d'inductance  $L(z)$  parcourue par le courant d'intensité  $i(t)$ .

**Q 19.** En déduire la force électromagnétique  $F_{em}$  s'exerçant sur la rame.

**Q 20.** Calculer la masse  $m$  qui peut ainsi être mise en sustentation à une distance  $\delta = 10$  mm du rail pour un électroaimant alimenté avec un courant d'intensité  $i_e = 10$  A.

**Q 21.** Une rame a une masse d'environ 180 tonnes. En déduire le nombre d'électroaimants nécessaires pour la sustentation de la rame. On donne :  $N = 1000$ ,  $S = 0,50$  m<sup>2</sup>.

**Q 22.** Montrer que le système de sustentation électromagnétique est instable.

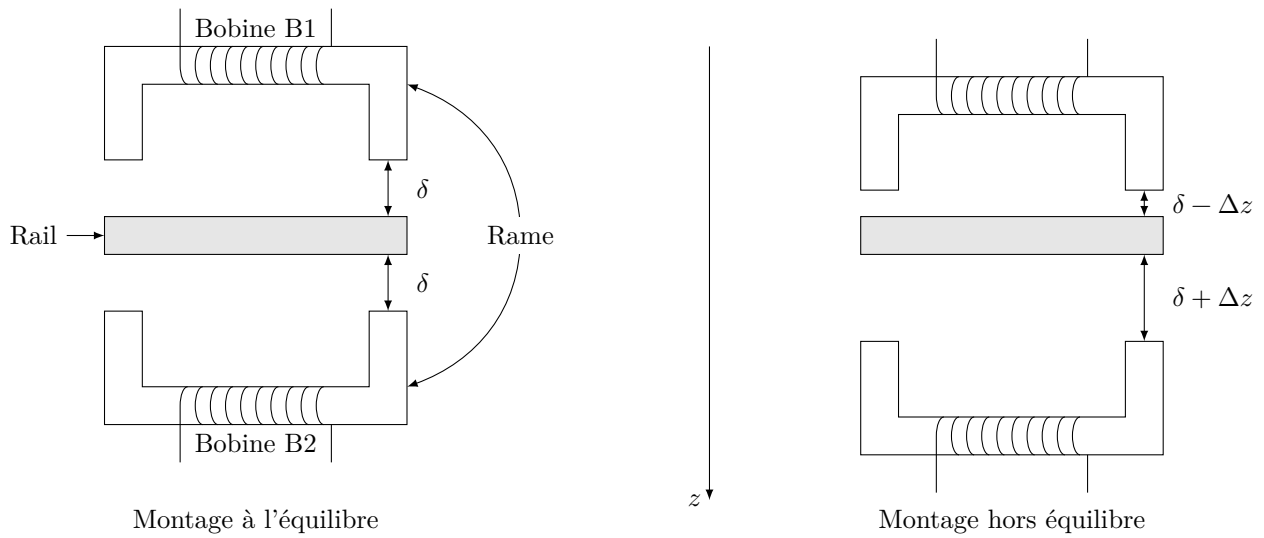
## III Capteur de position

L'instabilité de l'équilibre de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position de l'entrefer. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position. On se propose dans cette partie d'étudier le principe d'un capteur de position à inductance variable.

### III.A – Capteur à entrefer variable « push-pull »

La figure 3 décrit le schéma de principe d'un capteur inductif à entrefer variable dans un montage « push-pull ».

Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solidaire du rail fixe et de deux bobines B1 et B2 sur deux noyaux ferromagnétiques en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines B1 et B2 du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre (figure 3 à gauche). Ces bobines B1 et B2 sont indépendantes des bobines assurant la lévitation. Elles sont constituées de  $N_c$  spires de surface  $S$ .



**Figure 3**

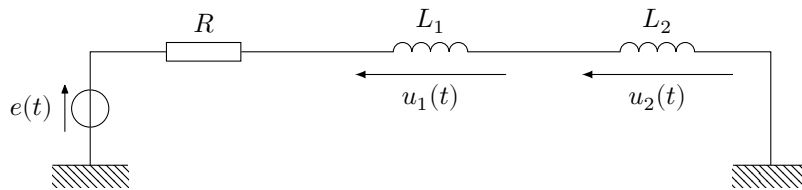
**Q 23.** Écrire l'inductance  $L_e$  des bobines B1 et B2 lorsque la rame est à l'équilibre.

On envisage une variation  $\Delta z$  de la position du train par rapport à la position d'équilibre  $z_e = \delta$  (figure 3 à droite), en considérant  $\Delta z \ll \delta$ .

**Q 24.** Écrire les inductances  $L_1$  et  $L_2$  de chacune des bobines B1 et B2 en se limitant au terme du premier ordre en  $\Delta z/\delta$ .

### III.B – Mesure des variations d'inductance

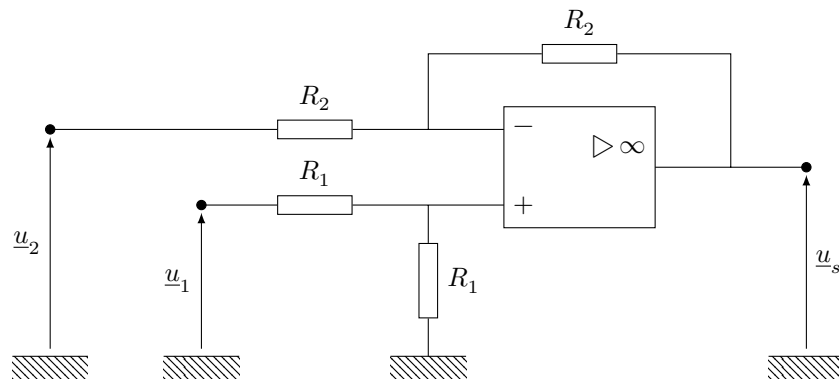
Les bobines B1 et B2 sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique  $e(t) = E \cos(\omega t)$ , de pulsation  $\omega$ , en série avec une résistance  $R$  (figure 4). On néglige ici les résistances des deux bobines.



**Figure 4** Alimentation du capteur

**Q 25.** Déterminer les expressions des tensions électriques complexes  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  en fonction de  $R$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\omega$  et  $\underline{e}$ .

Ces tensions sont placées à l'entrée du montage présenté figure 5. L'ALI est supposé idéal en fonctionnement linéaire.



**Figure 5** Montage soustracteur

**Q 26.** Montrer que la tension électrique de sortie du montage peut s'écrire sous la forme  $\underline{u}_s = K(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)$  où  $K$  est une constante que l'on déterminera en fonction des composants du montage.

**Q 27.** Exprimer la fonction de transfert complexe  $\underline{T}(j\omega)$  sous la forme  $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = T_0 \frac{j(\omega/\omega_0)}{1 + j(\omega/\omega_0)}$  où  $T_0$  et  $\omega_0$  sont des fonctions de  $L_e$ ,  $R$ ,  $\Delta z$  et  $\delta$ , que l'on déterminera.

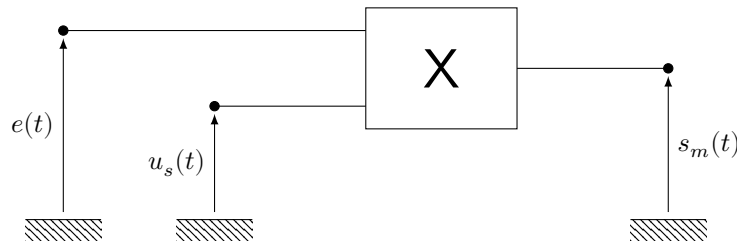
**Q 28.** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $\underline{T}(j\omega)$ .

**Q 29.** De quel type de filtre s'agit-il ?

- Q 30.** Quelle est la signification de la pulsation  $\omega_0$  ?
- Q 31.** Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que  $\underline{I}(j\omega)$  soit indépendant de  $\omega$  et proportionnel au déplacement de la rame ?
- On a  $R = 750 \, \Omega$ ,  $L_e = 60 \, \text{mH}$  et une fréquence d'utilisation  $f = 4 \, \text{kHz}$ .
- Q 32.** Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme  $u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$ .
- Q 33.** Exprimer et calculer le déphasage  $\varphi$ .

### III.C – Électronique de conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position  $z$  de la rame. On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication  $K_m$ , dans le montage donné figure 6.



**Figure 6** Multiplieur analogique

- Q 34.** Exprimer la tension électrique  $s_m(t)$  à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale. Préciser le terme représentatif de la position  $z$  de la rame.
- Q 35.** Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue  $S_m$  proportionnelle au déplacement  $\Delta z$  ? Préciser la nature et les caractéristiques de ce montage.
- Q 36.** Exprimer la sensibilité du capteur définie par  $\frac{\Delta S_m}{\Delta z}$ .
- Q 37.** *Application numérique* Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10 mV près. En déduire le plus petit écart relatif mesurable par rapport à la position d'équilibre. On prendra  $E = 6,00 \, \text{V}$ ,  $K_m = 1,00 \, \text{V}^{-1}$ .

## IV Énergétique du Transrapid

- Q 38.** En vous appuyant sur les documents fournis (annexes 1 et 2), évaluer les puissances consommées par le Transrapid et par un train conventionnel sur rail lorsqu'ils circulent à  $300 \, \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Discuter de la pertinence du dispositif Transrapid.

Le constructeur indique que la distance de freinage du Transrapid est de 3,6 km à  $300 \, \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

- Q 39.** En déduire la puissance de freinage, supposée constante au cours du freinage, en négligeant la traînée aérodynamique du train devant la force de freinage.
- On pourra établir la loi de variation de la vitesse du train en fonction de la distance  $x$  parcourue à partir du début du freinage.
- Q 40.** Toujours dans la même approximation, calculer la valeur moyenne de la puissance de la traînée aérodynamique du train pendant la durée du freinage et la comparer à la puissance de freinage déterminée à la question précédente.
- Q 41.** Commenter la qualité de l'approximation utilisée.

### Données et formulaire

|                                              |                                                                         |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Perméabilité magnétique du vide              | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \, \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$           |
| Permittivité diélectrique du vide            | $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \, \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Charge élémentaire                           | $e = 1,602 \times 10^{-19} \, \text{C}$                                 |
| Intensité du champ de pesanteur terrestre    | $g = 9,8 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$                               |
| Capacité thermique massique de l'eau liquide | $c_e = 4,2 \, \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$       |

Loi de Newton du transfert conducto-convectif entre un solide et un fluide

$$P = hS\Delta T$$

où  $P$  est la puissance thermique échangée,  $S$  la surface de contact solide-fluide et  $\Delta T$  la différence de température entre la surface du solide et celle du fluide très loin du solide. Pour le coefficient de transfert thermique conducto-convectif  $h$ , on prendra ici  $h \approx 100 \, \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

## Annexe 1

### Caractéristiques du solénoïde

| Diamètre $D$ | Longueur $L$ | Nombre de spires $N$ | Diamètre du fil de cuivre $d$ |
|--------------|--------------|----------------------|-------------------------------|
| 0,2 m        | 0,5 m        | 10 000               | 2,0 mm                        |

### Données sur le cuivre

Masse volumique

$$\mu = 8,96 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Capacité thermique massique

$$c = 385 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

Résistivité électrique

$$\rho = 1,68 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$$

Température de fusion

$$T_f = 1356 \text{ K}$$

## Annexe 2

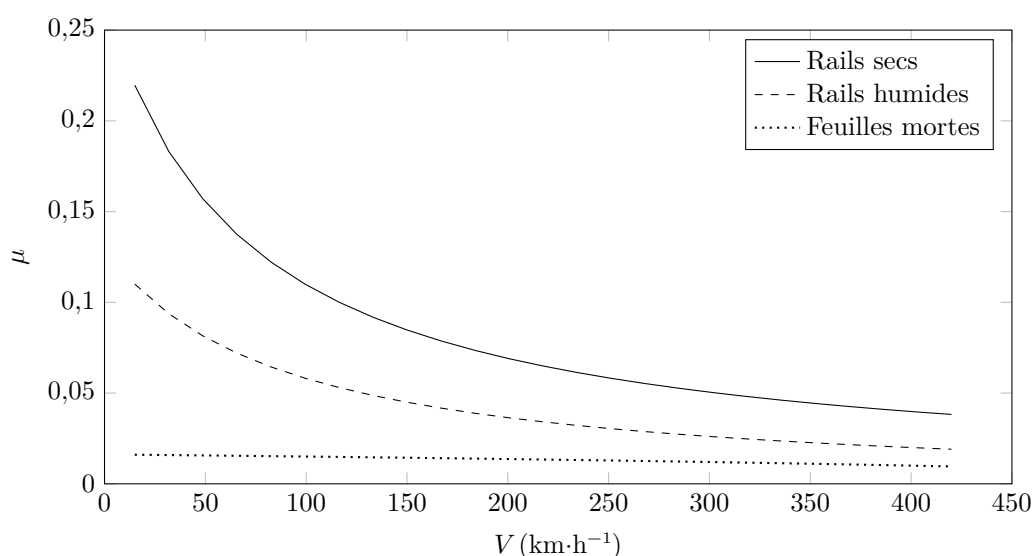
### Données comparatives Transrapid – TGV

|                                         | Transrapid                          | TGV duplex                                         |
|-----------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Masse (tonnes)                          | 190                                 | 390                                                |
| Nombre de places                        | 310                                 | 510                                                |
| Longueur (m)                            | 79,7                                | 200                                                |
| Puissance d'une motrice (kW)            |                                     | 8800                                               |
| Composition du train                    | 3 voitures motrices                 | motrice – 8 voitures – motrice                     |
| Type de moteur                          | Moteur synchrone linéaire           | Moteur rotatif asynchrone embarqué dans la motrice |
| Alimentation                            | Sous-stations réparties sur la voie | Caténaire                                          |
| Section aérodynamique (m <sup>2</sup> ) | 11                                  | 12                                                 |
| $C_x$                                   | 0,24                                | 0,35                                               |

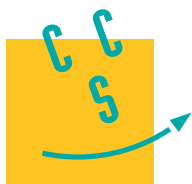
### D'après « Techniques de l'ingénieur – Ingénierie des transports | Systèmes ferroviaires »

Le Transrapid fonctionne avec des moteurs linéaires synchrones dont les bobinages « inducteurs » sont disposés le long de la voie. Les bogies d'articulation des rames comportent l'ensemble des « induits » de motorisation. Les constructeurs ont également combiné, sous les voies, les électroaimants de support vertical et le guidage.

La résistance à l'avancement du train due au contact sur les rails horizontaux et alignés est définie par une action tangentielle, opposée au mouvement, dont la norme  $\|\vec{T}\|$  peut s'écrire sous la forme  $\|\vec{T}\| = \mu(V)\|\vec{N}\|$  où  $V$  est la vitesse du train,  $\vec{N}$  la composante de la réaction normale du rail sur le train et  $\mu(V)$  le coefficient d'adhérence dont la forme est donnée figure 7.



**Figure 7** Adhérence maximale sollicitable pour un train à grande vitesse en fonction de la vitesse et de l'état du rail



Ce sujet porte sur l'oxygène que l'on respire : les ressources et les moyens de les exploiter, ainsi que la mesure du taux de dioxygène. Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

## I L'oxygène : ressources, production

**I.A –** L'oxygène est présent dans l'atmosphère (où la fraction molaire en dioxygène est très proche de 21%), dans les océans (il constitue 86,0% de la masse de l'eau de mer) et dans la croûte terrestre dont il est le principal élément (voir données en fin de sujet).

**Q 1.** Que vaut le pourcentage massique en oxygène dans l'eau pure ?

**Q 2.** En déduire la teneur globale, exprimée en  $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ , de l'ensemble des autres constituants de l'eau de mer.

**Q 3.** Citer, en donnant leur formule chimique, deux oxydes présents dans la croûte terrestre qui y expliquent la présence d'oxygène.

On se place dans un modèle d'atmosphère isotherme. On considère que la pression au niveau du sol vaut  $P_0 = 1 \text{ bar}$  et que la composition de l'atmosphère ne varie pas avec l'altitude : l'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M_a = 29,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**Q 4.** Déterminer l'expression de la pression  $P(z)$  de l'atmosphère en fonction notamment de l'altitude  $z$ .

**Q 5.** Évaluer la pression partielle en dioxygène à 11 km d'altitude (altitude de croisière typique pour un avion de ligne). On justifiera avec soin les valeurs numériques choisies intervenant dans cette évaluation.

**I.B –** L'oxygène peut être conditionné en bouteille sous forme gazeuse à une pression de 200 bar ; on le trouve également stocké sous forme liquide. Dans les avions de transport de passagers, les masques à oxygène peuvent être reliés à des générateurs chimiques contenant du chlorate de sodium solide, de formule  $\text{NaClO}_3$ . Celui-ci se décompose en chlorure de sodium  $\text{NaCl}$  et en dioxygène. Le déclenchement de la réaction se fait par percussion mécanique. Pour maintenir une vitesse de réaction suffisante, le chlorate de sodium doit être porté à  $300^\circ\text{C}$  ; on ajoute donc du fer en poudre, dont l'oxydation produit la chaleur nécessaire. Les deux réactions s'écrivent



Les enthalpies libres standard (en  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) de ces réactions dans le cadre de l'approximation d'Ellingham en fonction de la température (en K) sont respectivement  $\Delta_r G_1^\circ = -45,6 - 0,275 T$  et  $\Delta_r G_2^\circ = -824 + 0,220 T$ .

**Q 6.** Pour un volume donné de contenant, évaluer le rapport

$$r = \frac{\text{masse de dioxygène gazeux à 200 bar}}{\text{masse de dioxygène liquide à } 20^\circ\text{C}}$$

des masses de dioxygène contenu dans un même volume, suivant qu'il est liquide (à  $20^\circ\text{C}$ ) ou gazeux (à 200 bar et  $20^\circ\text{C}$ ). Commenter le résultat.

**Q 7.** Les réactions (I.1) et (I.2) sont-elles endo ou exothermiques ? Justifier.

**Q 8.** Quelle relation y-a-t-il entre la variation d'enthalpie  $Q_P$  du système réactionnel dans les conditions isothermes et isobares, l'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H^\circ$  et l'avancement de la réaction  $\xi$  ?

**Q 9.** Rappeler l'expression de la constante d'équilibre d'une réaction en fonction de l'enthalpie libre standard de réaction et de la température.

**Q 10.** Justifier que chacune des réactions (I.1) et (I.2) est totale dans les conditions d'utilisation des générateurs chimiques (on admettra qu'ils produisent une pression partielle de dioxygène de l'ordre de 0,7 bar).

**Q 11.** On suppose que la chaleur  $Q_P$  dégagée par la réaction (I.1) à  $300^\circ\text{C}$  permet de chauffer adiabatiquement à une température  $T_f$  du chlorate de sodium, initialement seul à  $20^\circ\text{C}$ , en quantité égale à celle consommée par la réaction (I.1). Déterminer  $T_f$ . Conclure quant à l'utilisation du fer.

**Q 12.** Un générateur chimique prévu pour 4 passagers permet de délivrer 84 litres de dioxygène sous une pression de 0,70 bar à  $20^\circ\text{C}$ . Évaluer la masse minimale de chlorate de sodium que contient ce générateur.



## II Pressurisation et conditionnement d'air dans la cabine d'un avion

### II.A – Pression dans la cabine.

La cabine d'un avion est pressurisée : il s'agit, pendant le vol, de maintenir une pression supérieure à la pression rencontrée à 2500 m d'altitude dans l'« atmosphère standard ». Dans ce modèle, l'air est considéré comme un gaz parfait dont la composition chimique est indépendante de l'altitude et on considère que, dans la couche d'atmosphère située à moins de 11 km d'altitude, la température diminue de manière uniforme avec l'altitude au taux de 6,5 °C par kilomètre.

**Q 13.** En considérant que la température vaut 20 °C à l'altitude 0 m, évaluer la pression partielle minimum en dioxygène dans la cabine d'un avion pendant le vol.

**Q 14.** Il est couramment admis que l'air à la pression  $P_0 = 1$  bar est « respirable » si sa fraction molaire en dioxygène est supérieure à 16%. En déduire la pression partielle minimale en dioxygène qu'il faut assurer pour respirer confortablement et commenter le choix de pression de la question précédente.

### II.B – Conditionnement d'air dans la phase de croisière

Le renouvellement de l'air de la cabine est essentiel au confort et à la sécurité des passagers. Pour maintenir un niveau suffisant d'oxygène, de l'air est prélevé à l'extérieur de l'avion. Cependant, cet air est trop froid pour être amené directement en cabine. Pour amener l'air extérieur à une température acceptable (en général réglable entre 18 et 26 °C), on utilise de l'air chaud en provenance des moteurs que l'on refroidit. Cet air froid est ensuite à nouveau mélangé à de l'air chaud avant d'être envoyé en cabine.

On s'intéresse au système de climatisation pneumatique dont le principe de fonctionnement est présenté figure 1. De l'air provenant des moteurs et préalablement refroidi à 180 °C est amené en entrée de l'ACM (« Air Cycle Machine ») ; la pression de l'air entrant vaut  $P_1 = 2,5$  bar. Cet air est ensuite amené à  $T_2 = 110$  °C après avoir traversé un premier échangeur thermique, puis il est comprimé ( $T_3 = 210$  °C), à nouveau refroidi dans un second échangeur thermique ( $T_4 = 100$  °C) et finalement détendu dans une turbine ( $T_5 = 5$  °C).

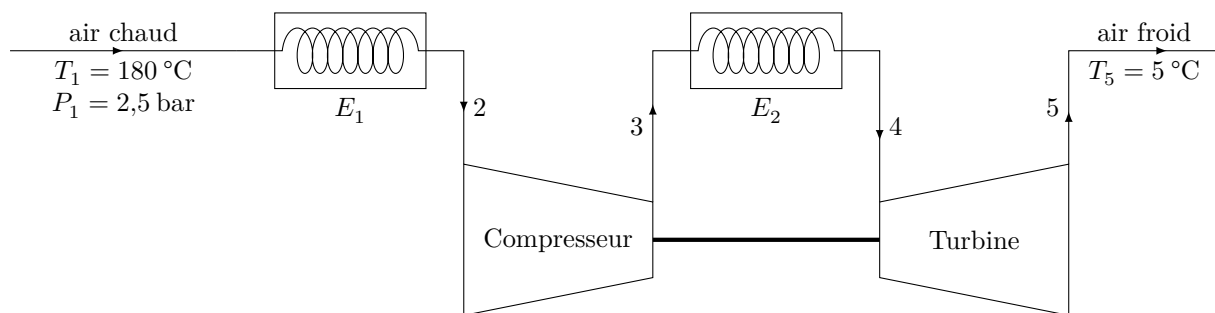


Figure 1 Air Cycle Machine

On fera les hypothèses de transformations adiabatiques réversibles pour l'air traversant le compresseur ou la turbine. L'air sera considéré comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma = C_p/C_v = 1,4$ . On rappelle que  $C_p$  et  $C_v$  sont des capacités thermiques massiques à volume et pression constants.

**Q 15.** Citer des différences entre ce dispositif et un système de climatisation « classique ».

**Q 16.** Déterminer la pression d'air en sortie du compresseur ( $P_3$ ), puis en sortie de la turbine ( $P_5$ ).

**Q 17.** Rappeler, pour un écoulement stationnaire, l'expression du premier principe « industriel », ou premier principe de la thermodynamique en système ouvert, mettant en jeu des grandeurs massiques, en définissant avec précision les notations utilisées.

**Q 18.** La puissance récupérée par la turbine est-elle suffisante pour entraîner le compresseur ?

**Q 19.** Montrer qu'envoyer directement l'air issu du premier échangeur thermique dans la turbine ne permet pas de produire, à une pression suffisante, un air à la température de sortie de 5 °C.

**Q 20.** Pourquoi ne se contente-t-on pas de refroidir l'air à l'aide d'un simple échangeur thermique ?

## III Analyseurs d'oxygène

Il existe plusieurs techniques permettant de déterminer la proportion de dioxygène présent dans l'air ou dans un mélange gazeux.

### III.A – Analyseur d'oxygène à oxyde de zirconium

Certaines céramiques, comme celles constituées d'oxyde de zirconium  $ZrO_2$ , ont la propriété d'être conductrices d'électricité à haute température grâce au déplacement d'ions oxygène, de formule  $O^{2-}$ . Un disque d'oxyde de zirconium est monté entre le gaz à mesurer et un gaz de référence (l'air en général). Des électrodes sont reliées à chaque face du disque (figure 2).

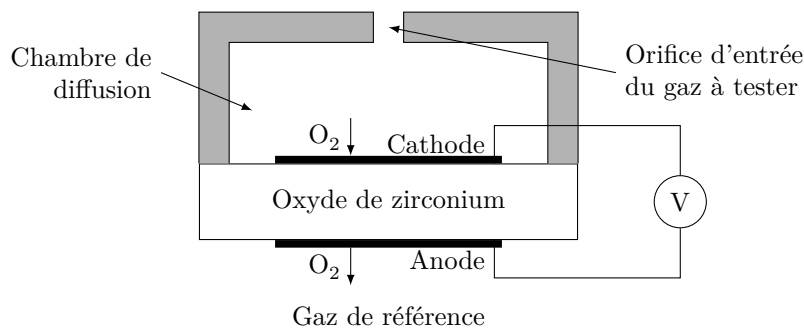


Figure 2

On admet que l'activité de l'ion  $O^{2-}$  est la même à l'anode et à la cathode.

**Q 21.** Écrire les demi-équations électroniques à l'anode et à la cathode.

**Q 22.** Exprimer les deux potentiels d'électrodes en fonction des activités. En déduire la tension  $e$  entre la cathode et l'anode de la pile ainsi constituée.

**Q 23.** Montrer que la fonction  $e = f(\ln P_{O_2})$  est une droite. Quel est l'intérêt d'avoir une réponse proportionnelle à un logarithme ?

**Q 24.** On considère que la cellule est chauffée à  $650^\circ C$ . Que vaut  $e$  pour un mélange gazeux issu d'une combustion contenant 12 ppm (parties par millions : 1 ppm correspond à une fraction molaire égale à  $10^{-6}$ ) de dioxygène ? On considère que les pressions sont égales à 1 bar de part et d'autre du disque de zirconium. Commenter le résultat.

### III.B – Sonde paramagnétique

Cette sous-partie utilise les documents 1 et 2 fournis en annexe.

#### III.B.1) Densité volumique de force magnétique

Cette série de questions est en lien avec le document 1, en annexe.

**Q 25.** Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans le vide en fonction notamment de l'induction magnétique  $\vec{B}$ .

**Q 26.** Qu'est-ce qu'un milieu magnétique « linéaire » ?

**Q 27.** On rappelle que la force magnétique s'exerçant sur la partie mobile d'un milieu magnétique linéaire s'écrit  $\vec{F}_m = \text{grad } E_m$ , où  $E_m$  est l'énergie potentielle d'interaction entre l'aimantation du milieu et le champ extérieur. À partir de l'expression (1) du document 1, donner l'expression de la densité volumique  $e_m$  d'énergie d'aimantation du milieu paramagnétique dans le champ extérieur.

**Q 28.** Justifier qu'une substance paramagnétique est attirée par les zones de champ magnétique élevé, alors qu'une substance diamagnétique est attirée par les zones de champ magnétique faible.

#### III.B.2) Étude du fonctionnement de la sonde paramagnétique

Cette série de questions est en lien avec le document 2, en annexe.

La figure 3 représente le schéma de principe de la sonde paramagnétique étudiée. On précise que la position d'équilibre de l'haltère est choisie de façon à être légèrement décalée par rapport au plan de symétrie des aimants (qui correspond à un plan vertical). Le champ magnétique est supposé vertical dans la zone où se situe l'haltère.

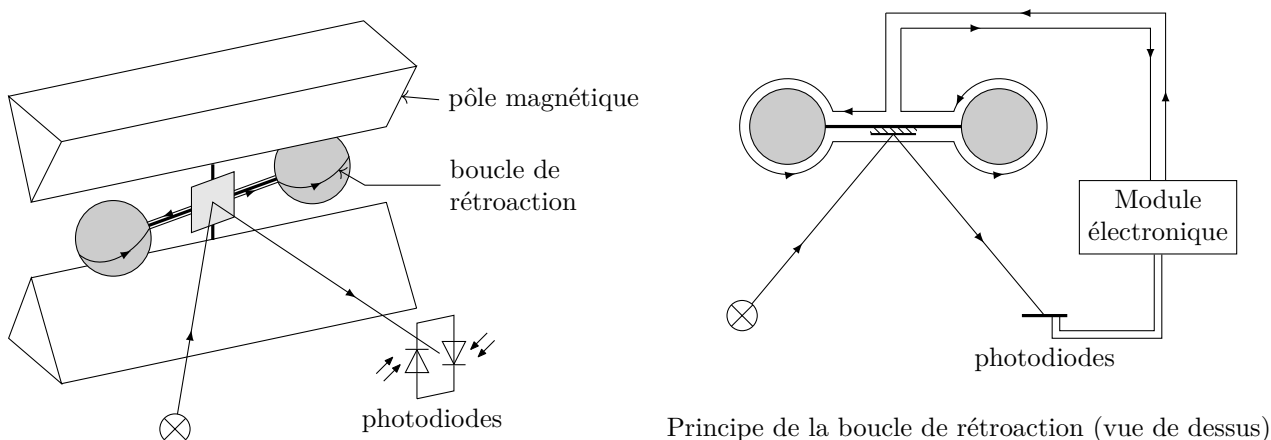


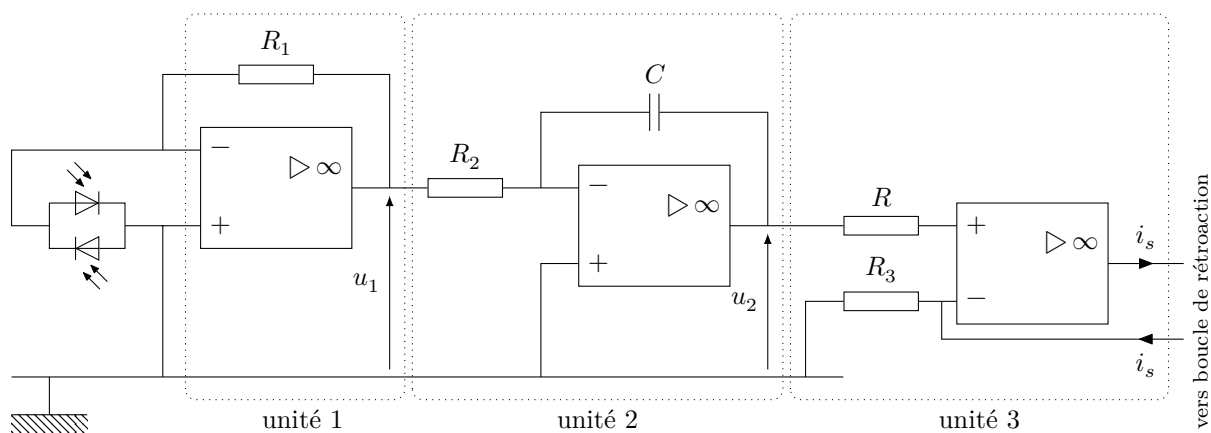
Figure 3 Sonde paramagnétique

**Q 29.** Pourquoi les deux sphères sont-elles remplies de diazote ?

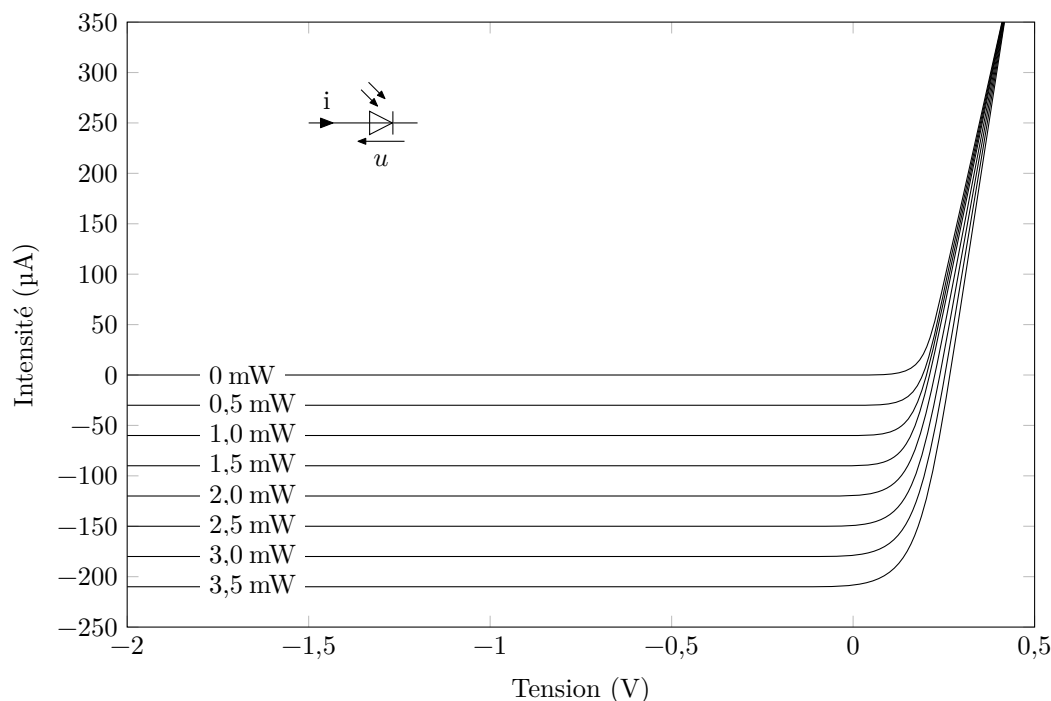
**Q 30.** Montrer que, à l'équilibre, la pression du gaz sondé (contenant du dioxygène) est une fonction affine du carré du module du champ magnétique existant en ce point. On négligera le poids.

- Q 31.** Évaluer la surpression dans l'air dont est responsable l'existence d'un champ magnétique  $B = 0,1 \text{ T}$ .
- Q 32.** La résultante des forces appliquées à chaque sphère de l'altère est-elle orientée vers les régions de champ magnétique intense ou de champ magnétique faible ?
- Q 33.** Expliquer alors pourquoi l'altère tend à s'écarter de sa position d'équilibre lorsque du gaz contenant du dioxygène est introduit dans la cellule.
- Q 34.** À l'aide d'un schéma sur lequel on fera figurer les forces en jeu et le sens du champ magnétique produit par les aimants, ainsi que le sens positif du courant dans la boucle de rétroaction, décrire le bilan de forces correspondant à l'équilibre de l'altère lorsqu'il y a un courant passant dans la boucle de rétroaction.
- Q 35.** Peut-on alors justifier la phrase « l'intensité du courant passant dans la spire est directement proportionnelle à la concentration d'oxygène dans le mélange gazeux ».

**III.B.3)** On s'intéresse dans cette série de questions au module électronique de la sonde. On propose le montage dont le schéma est donné figure 4, le module électronique étant constitué de l'association des trois unités entourées en pointillés. Chacune de ces 3 unités comporte un ALI supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire. On note la présence de 4 résistances  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , ainsi que d'un condensateur de capacité  $C$ . On donne par ailleurs en figure 5 la caractéristique intensité-tension d'une photodiode pour différentes puissances lumineuses reçues pour une longueur d'onde donnée (1140 nm).



**Figure 4** Module électronique



**Figure 5** Caractéristique d'une photodiode

a) Les photodiodes

**Q 36.** Comparer la caractéristique de la photodiode à celle d'une diode simple.

**Q 37.** Une donnée essentielle d'une photodiode est sa sensibilité  $s$  ( $s > 0$ ) pour une longueur d'onde donnée qui est le rapport de l'intensité  $i$  du photocourant (courant traversant la photodiode polarisée avec une tension  $u < 0$ ) à la puissance lumineuse reçue. Que vaut la sensibilité de cette photodiode à 1140 nm ?

On s'intéresse au montage des deux photodiodes sur le module électronique : on suppose qu'un pinceau lumineux incident de puissance 2,5 mW se divise en deux et que la photodiode D1 reçoit une puissance  $P_1$ , le reste ( $P_2$ ) étant reçu par l'autre photodiode (figure 6).  $I$  est le photocourant total produit par les deux photodiodes.

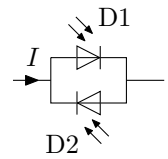


Figure 6

**Q 38.** Après avoir déterminé la tension aux bornes des deux photodiodes, tracer soigneusement la courbe représentant l'intensité  $I$  en fonction de  $P_1 - P_2$  ; donner l'équation de cette courbe faisant intervenir le paramètre  $s$ .

**Q 39.** Quel est l'intérêt de ce montage à deux photodiodes ?

b) Le module électronique

**Q 40.** On note  $u_2$  la tension en sortie de l'unité 2. On assimile la tension en entrée de cette unité à un échelon de tension (à l'instant  $t = 0$ , la tension d'entrée prend une valeur constante  $E$ ). Le condensateur est supposé initialement déchargé. Déterminer l'expression de  $u_2(t)$ . Comment nomme-t-on ce type de montage ?

**Q 41.** Quel est le rôle de l'unité 3 ? Le montrer.

**Q 42.** Exprimer l'intensité du courant de sortie  $i_s$  en fonction de la différence des puissances lumineuses reçues entre les deux photodiodes  $P_1 - P_2$ .

**Q 43.** Le choix des dipôles permet d'ajuster la quantité  $\frac{R_1}{R_2 R_3 C}$ . Pourquoi cette quantité est-elle cruciale pour le bon fonctionnement de la mesure ?

On peut ajouter sur l'unité 1 deux diodes montées comme indiqué sur la figure 7. La caractéristique de chacune de ces diodes est la même que celle des photodiodes D1 et D2, utilisées dans l'obscurité.

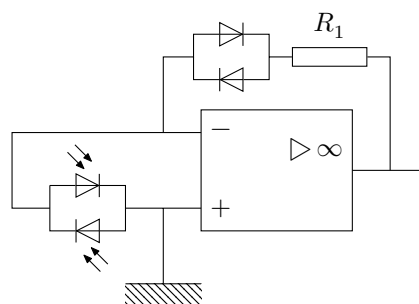


Figure 7 Unité 1 modifiée

**Q 44.** Représenter schématiquement la courbe  $u_1 = f(I)$  de l'unité 1 ainsi modifiée. Quel est l'intérêt de cette modification ?

### III.B.4) Disposition des photodiodes

**Q 45.** Faire deux schémas sur lequel on représentera le miroir, le pinceau lumineux qui l'éclaire, et les deux plaques photosensibles des deux photodiodes. On présentera deux situations : l'une correspondant à une position hors équilibre du miroir (on vient d'ajouter du dioxygène), l'autre à la position d'équilibre qui correspond à la prise de mesure.

**Q 46.** Résumer en quelques phrases le fonctionnement du montage complet.

# Annexe

## Document 1

Extrait de *Compensation magnétique de pesanteur dans des fluides : synthèse des performances et contraintes* par Alain MAILFERT, Daniel BEYSSENS, Denis CHATAIN et Clément LORIN

Symposium de génie électrique, 8–9 juillet 2014, ENS Cachan

Une distribution volumique de courant  $\vec{J}$  ( $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ ) ou une répartition d'aimantation magnétique  $\vec{M}$  ( $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ ) dans un milieu matériel peuvent créer en tout point de l'espace un champ magnétique  $\vec{H}$  ( $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ ). Des mesures de flux magnétique permettent de connaître l'induction magnétique  $\vec{B}$  (en T ou  $\text{Wb}\cdot\text{m}^{-2}$ ), reliée à  $\vec{H}$  dans le vide par  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide, et dans la matière par :  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ . Les équations de Maxwell de la magnétostatique relient le champ  $\vec{H}$  à ses deux sources possibles :

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{B}) &= 0 & \text{d'où} & & \text{div}(\vec{H}) &= -\text{div}(\vec{M}) \\ \text{rot}(\vec{H}) &= \vec{J}\end{aligned}$$

La création d'une aimantation  $\vec{M}$  dans un milieu matériel provient, réciproquement, de l'application d'un champ magnétique ; il correspond à l'aimantation, une densité volumique d'énergie magnétique, d'où des densités de force magnétique quand le champ  $\vec{H}$  varie avec la position.

Dans les milieux dits linéaires,  $\vec{M} = \chi \vec{H}$  et  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$ , où la constante  $\chi$  est la susceptibilité magnétique du milieu considéré. Les densités de forces volumiques ont alors l'expression simple :

$$\vec{f}_m = \frac{\mu_0 \chi}{2} \text{grad}(H^2) \quad (1)$$

Les fluides intéressant les techniques spatiales sont soit paramagnétiques (oxygène liquide ou gazeux, avec  $\chi \simeq 10^{-3}$ ), soit diamagnétiques (hélium, hydrogène, eau, avec  $\chi \simeq -10^{-6}$ ). L'obtention de forces importantes nécessite alors des valeurs élevées de  $\text{grad}(H^2)$ . « L'art » du concepteur de sources de champ magnétique est alors interpellé...

En outre, les susceptibilités étant en valeur absolue très petites devant 1, on écrit souvent avec une bonne approximation :

$$\vec{f}_m = \frac{\chi}{2\mu_0} \text{grad}(B^2) = \frac{\chi}{1\mu_0} \vec{G} \quad (2)$$

*Remarque : les valeurs des susceptibilités magnétiques sont fournies à des températures très faibles.*

## Document 2

D'après *Analyse d'oxygène paramagnétique*

© Servomex 2014

Contrairement à la plupart des gaz, l'oxygène est fortement attiré par un champ magnétique puissant. Le principe d'une sonde paramagnétique s'appuie sur deux sphères de verres remplies d'azote qui sont assemblées sous la forme d'un haltère mobile suspendu à l'intérieur d'un champ magnétique.

Un faisceau lumineux est projeté sur le miroir installé au centre de l'haltère. La lumière réfléchie est envoyée vers une paire de cellules photoélectriques. L'oxygène attiré vers le champ magnétique déplace les sphères d'azote et fait ainsi tourner l'haltère. Les cellules photoélectriques détectent le mouvement et produisent un signal qui passe par une boucle de contre-réaction. Cette boucle de contre-réaction fait passer un courant dans une spire placée autour de l'haltère. Cela provoque un effet de couple qui maintient l'haltère dans sa position initiale. L'intensité du courant passant dans la spire est directement proportionnelle à la concentration d'oxygène dans le mélange gazeux.

# Données

## Composition de la croûte terrestre

| Élément                                         | O    | Si   | Al  | Fe  | Ca  | Na  | K   | Mg  |
|-------------------------------------------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Pourcentage (en masse) dans la croûte terrestre | 46,7 | 27,7 | 8,1 | 5,0 | 3,7 | 2,8 | 2,6 | 2,1 |

## Masses molaires

| Élément ou composé                   | H    | O    | N    | Fe   | NaClO <sub>3</sub> |
|--------------------------------------|------|------|------|------|--------------------|
| Masse molaire (g·mol <sup>-1</sup> ) | 1,01 | 16,0 | 14,0 | 55,8 | 106,4              |

## Capacités thermiques massiques (supposées indépendantes de la température)

|                                                                    | Fe  | NaClO <sub>3</sub> | Air (à pression constante) |
|--------------------------------------------------------------------|-----|--------------------|----------------------------|
| Capacité thermique massique (J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ) | 444 | 983                | ≈ 1000                     |

## Susceptibilités magnétiques de quelques gaz purs à température et pression ordinaires (300 K, 1 bar)

| Gaz    | O <sub>2</sub>       | N <sub>2</sub>         | H <sub>2</sub>         | Ar                     |
|--------|----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\chi$ | $1,4 \times 10^{-7}$ | $-5,0 \times 10^{-10}$ | $-1,7 \times 10^{-10}$ | $-7,7 \times 10^{-10}$ |

## Loi de Nernst

Pour l'exemple du couple oxydant/réducteur Ag<sup>+</sup>/Ag, le potentiel du couple s'écrit

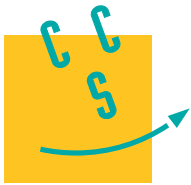
$$E = E^\circ + \frac{RT}{F} \ln(a(\text{Ag}^+))$$

où  $T$  représente la température en Kelvin et  $a(\text{Ag}^+)$  est l'activité des ions Ag<sup>+</sup>.

## Données diverses

|                                           |                                                                |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Masse volumique du dioxygène liquide      | 1140 kg·m <sup>-3</sup>                                        |
| Densité de l'eau de mer à 20 °C           | 1,03                                                           |
| Constante des gaz parfaits                | $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Constante de Faraday                      | $1 \text{ F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$        |
| Intensité du champ de pesanteur terrestre | $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$                      |
| 1 bar = 1 × 10 <sup>5</sup> Pa            |                                                                |

• • • FIN • • •



## *De l'atome d'hydrogène aux galaxies*

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 21$  cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies. Après avoir étudié l'origine physique de cette transition, nous verrons l'intérêt d'observer des galaxies dans cette fenêtre de rayonnement.

Ce sujet comprend une annexe située en fin de texte et regroupant des extraits de documents, un formulaire et des données numériques.

### **I La raie HI à 21 cm**

Un atome d'hydrogène protoné (isotope  $^1\text{H}$  dont le noyau est un proton) dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 21$  cm, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Pour interpréter exactement l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste).

Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie HI à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

#### ***I.A – Étude classique de l'atome d'hydrogène***

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par  $r$  la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sera noté  $\vec{L}$ .

- Q 1.** Rappeler l'expression de la force électrostatique  $\vec{F}$  s'exerçant sur l'électron.
- Q 2.** En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_P$  de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand  $r \rightarrow \infty$ .
- Q 3.** Montrer que le mouvement de l'électron est plan.
- Q 4.** Déterminer l'énergie mécanique  $E$  de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{P\text{eff}}(r)$$

où  $E_{P\text{eff}}(r)$  est une fonction de  $r$  à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital  $\vec{L}$  de l'électron.

- Q 5.** Donner l'allure de la représentation graphique de  $E_{P\text{eff}}(r)$ . Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique  $E$  et du moment cinétique  $\vec{L}$ .
- Q 6.** À quelles conditions (sur  $L$  et  $E$ ) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon  $r$  de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique  $E$  de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de  $L$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .
- Q 7.** Dessiner une trajectoire de l'électron si  $L = 0$ .

#### ***I.B – Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène***

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon  $r$  et son moment cinétique orbital  $L$  est quantifié par

$$L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où  $n$  est un nombre entier strictement positif et  $h$  la constante de Planck.

- Q 8.** Montrer que les orbites sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon  $a_0$  de la première orbite de Bohr.
- Q 9.** En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.
- Q 10.** À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.



**Q 11.** L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de  $\lambda = 21$  cm. Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

### I.C – La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

Pour comprendre l'origine de la raie HI il faut étudier les interactions magnétiques entre le proton et l'électron. Afin d'en obtenir un ordre de grandeur, nous allons étudier ici l'interaction entre le dipôle magnétique associé au spin de l'électron et le dipôle magnétique associé au spin du proton, qui est appelée « interaction spin-spin ».

**Q 12.** Dans le cadre du modèle planétaire classique de l'atome d'hydrogène, montrer que le moment magnétique  $\vec{M}_o$  de l'électron sur une orbite circulaire est proportionnel à son moment cinétique orbital  $\vec{L}$  :  $\vec{M}_o = \gamma_o \vec{L}$ .

**Q 13.** Exprimer  $\gamma_o$  en fonction de  $e$  et de  $m_e$ , la masse de l'électron. Comment se nomme cette constante ? Le résultat précédent est encore vrai en théorie quantique : le moment magnétique d'une particule est proportionnel à son moment cinétique. En outre, dans une théorie quantique relativiste chaque particule élémentaire possède un spin qui est interprété comme son moment cinétique intrinsèque. En généralisant le résultat précédent, elle possède aussi un moment magnétique intrinsèque (ou moment magnétique de spin) qui est proportionnel à son spin. Ainsi :

- l'électron, de spin  $\vec{S}_e$ , possède un moment magnétique  $\vec{M}_e$  proportionnel à son spin :  $\vec{M}_e = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S}_e$ , où  $g_s \approx 2,00$  ;
- le proton de masse  $m_p$  et de spin  $\vec{S}_p$ , possède un moment magnétique de spin  $\vec{M}_p = g_p \frac{e}{2m_p} \vec{S}_p$  où  $g_p = 5,58$  ; les coefficients  $g_s$  et  $g_p$  sont appelés « facteurs de Landé » de l'électron et du proton ;
- l'expression du champ magnétique créé en un point  $P$  (différent de  $O$ ) par un moment magnétique ponctuel  $\vec{M}$  placé en  $O$  est

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{M}}{r^3}$$

où  $r = \|\vec{OP}\|$  et  $\vec{u} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$  ;

- on rappelle que l'énergie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  se met sous la forme  $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$  ;
- une propriété remarquable du spin de l'électron (ou du proton) est que sa projection suivant une direction quelconque ne peut prendre que deux valeurs  $\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$  .

**Q 14.** Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le proton, sur l'électron, en supposant que l'électron est sur l'orbite fondamentale du modèle de Bohr et en admettant que le moment magnétique de spin du proton  $\vec{M}_p$  est orthogonal au plan de l'orbite.

**Q 15.** À partir des éléments précédents, montrer que l'état fondamental de l'hydrogène est formé de deux « sous-niveaux » d'énergie  $E_l$  et  $E_u = E_l + \Delta E$  (avec  $E_l < E_u$ ). On parle de « structure hyperfine » de l'état fondamental.

**Q 16.** Donner l'expression, en fonction de  $g_s$ ,  $g_p$ ,  $e$ ,  $m_e$ ,  $m_p$  et  $a_0$ , de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre les deux sous-niveaux hyperfins à laquelle conduit ce modèle.

En fait, cette modélisation ne permet pas de déterminer correctement la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, pour deux raisons :

- elle ne prend pas en compte toutes les interactions magnétiques entre le proton et l'électron ;
- le modèle de Bohr utilisé dans les questions précédentes est très insuffisant pour décrire de façon réaliste l'atome d'hydrogène et en particulier son état électronique fondamental 1s.

**Q 17.** La théorie quantique nous apprend que dans cet état 1s ( $n = 1$ ,  $\ell = 0$ ), le moment cinétique orbital de l'électron est nul (soit  $L_o = 0$ ). Montrer que ceci est contradictoire avec le fait d'assimiler cet état à celui d'un électron décrivant l'orbite fondamentale de l'orbite de Bohr.

Dès lors, il est légitime de penser que la théorie quantique ne donne pas toujours les mêmes résultats que la théorie « semi-classique » de l'atome de Bohr. Par exemple, la théorie quantique permet de montrer que l'interaction spin-spin dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène est nulle (ceci est dû à ce que la fonction d'onde de l'électron 1s est à symétrie sphérique, ce qui est une autre façon d'exprimer le fait que le moment cinétique orbital de l'électron est nul).

Il existe d'autres interactions magnétiques entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène. En particulier, on a négligé jusque là l'interaction spin-spin contact (ou interaction de contact de Fermi), qui comme l'interaction spin-spin conduit à une énergie d'interaction proportionnelle à  $\vec{M}_e \cdot \vec{M}_p$ , mais qui n'existe que si l'électron a une probabilité de présence non nulle dans le proton, c'est-à-dire au point  $O$  (c'est pourquoi on qualifie cette

interaction de spin-spin « contact » puisqu'elle n'existe que si l'électron (ponctuel) est en « contact » avec le proton, ponctuel lui aussi).

Les fonctions d'onde  $\varphi_{nlm}(\vec{r})$  de l'électron de l'atome d'hydrogène prennent des valeurs non nulles en  $\vec{r} = \vec{0}$  pour les états ns (tels que  $\ell = 0$ ), tandis que pour les états np, nd, etc. (tels que  $\ell \neq 0$ ) elles s'annulent en  $\vec{r} = \vec{0}$ . Ainsi, l'électron dans un état s ( $\ell = 0$ , donc  $L_o = 0$ ) a une probabilité de présence en  $O$  non nulle, soit  $\|\varphi_{ns}(\vec{r} = \vec{0})\|^2 \neq 0$ , tandis qu'un électron dans un état p, d, f, ... ( $\ell = 1, 2, \dots$ , donc  $L_o \neq 0$ ) a une probabilité de présence nulle en  $O$ .

**Q 18.** Donner une interprétation physique de ce résultat dans le cadre d'une théorie classique de l'atome d'hydrogène (sous-partie I.A).

Dans la mesure où l'énergie d'interaction spin-spin contact est proportionnelle à  $\vec{M}_e \cdot \vec{M}_p$ , la prise en compte de cet effet conduit à l'existence de deux sous-niveaux hyperfins  $l$  et  $u$  dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. Un calcul quantique de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre ces deux sous-niveaux conduit à

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8}{3} g_S g_P \frac{m_e}{m_p} \left( \frac{e\hbar}{2m_e} \right)^2 \frac{1}{a_0^3}$$

**Q 19.** Calculer la fréquence  $\nu_0$  et la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins  $l$  et  $u$ . Commenter ce résultat. Dans quel domaine spectral se situe cette raie ?

## II Étude de l'émission et de l'absorption entre les deux niveaux hyperfins

L'analyse du rayonnement HI joue un rôle majeur en radioastronomie. Le milieu interstellaire est essentiellement gazeux (99% de sa masse prend la forme de gaz) et, parmi ces gaz, 89% des atomes sont de l'hydrogène. Le rayonnement HI est donc un moyen privilégié pour étudier le milieu interstellaire. En outre, le rayonnement HI à  $\lambda = 21$  cm est très peu diffusé par les poussières interstellaires constituées de petits grains (silicates, graphite, glace) de quelques micromètres à quelques millimètres de diamètre, à la différence de rayonnements de plus courte longueur d'onde. La raie HI permet donc de « voir » les régions denses des galaxies.

*Nous supposons par la suite que ce rayonnement est émis de façon isotrope et que les seuls processus envisagés sont les processus d'absorption et d'émission.*

Les niveaux  $l$  et  $u$  de l'hydrogène dans son état électronique fondamental peuvent être « alimentés » par les collisions entre les atomes mais également par le rayonnement (absorption ou émission de photons). Lorsque les mécanismes de collision entre les atomes déterminent totalement les populations de ces niveaux, on dit d'un tel système qu'il est à l'équilibre thermique local à la température  $T$  et la répartition des populations dans les différents niveaux est alors régie par la relation de Boltzmann

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{E_u - E_l}{kT}\right)$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann,  $n_l$  et  $n_u$  sont les densités particulières (nombre d'atomes par unité de volume) dans les deux niveaux d'énergie  $E_l$  et  $E_u = E_l + \Delta E$ .  $g_u$  et  $g_l$  sont les dégénérescences des niveaux  $u$  et  $l$ . La dégénérescence d'un niveau  $x$  d'énergie  $E_x$  est le nombre d'états différents du système ayant l'énergie  $E_x$ . Un niveau d'énergie  $E_x$  est dit non dégénéré ( $g_x = 1$ ) s'il n'y a qu'un seul état du système possédant l'énergie  $E_x$ . Pour les niveaux hyperfins de l'atome d'hydrogène étudiés précédemment, on a  $g_u = 3$  et  $g_l = 1$ .

### II.A – Bilan radiatif de la raie HI

On note  $A_{ul}$ ,  $B_{ul}$  et  $B_{lu}$  les coefficients d'Einstein correspondant respectivement à l'émission spontanée, à l'émission stimulée et à l'absorption entre les niveaux  $u$  et  $l$ . On donne  $A_{ul} = 2,85 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ .

**Q 20.** Rappeler sommairement les différentes caractéristiques de ces trois processus.

**Q 21.** Quelle est la durée de vie  $\tau$  de l'état excité d'énergie  $E_u$  ?

**Q 22.** Dans le milieu interstellaire ce rayonnement conduit à une raie de forte intensité. Pourquoi ?

Dans la suite, on considère qu'on étudie un nuage froid d'hydrogène à la température  $T = 100$  K et de densité particulière  $n_H = 25 \text{ cm}^{-3}$ .

**Q 23.** Montrer que l'essentiel de l'hydrogène du milieu interstellaire se trouve dans les deux niveaux hyperfins et que la densité particulière en atomes d'hydrogène  $n_H$  est telle que  $n_H = n_u + n_l = 4n_l$ .

**Q 24.** Exprimer  $\frac{dn_l}{dt}$  en fonction des coefficients d'Einstein, de la densité spectrale  $u_\nu$  du rayonnement électromagnétique et des densités particulières  $n_u$  et  $n_l$ .

On rappelle que la densité spectrale est la densité volumique d'énergie d'un rayonnement électromagnétique dont la fréquence se situe dans l'intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$  (unité :  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ).

**Q 25.** En supposant la largeur de la raie HI nulle, relier  $\frac{dn_l}{dt}$  à  $\frac{dn}{dt}$  où  $n$  est la densité particulière des photons associés à cette transition.

En réalité la largeur de la raie n'est pas nulle, sa largeur est caractérisée par une fonction  $\Phi(\nu)$ . Cette fonction est centrée sur la fréquence  $\nu_0$  et elle vérifie la condition de normalisation  $\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1$ . Dans chaque intervalle de fréquence  $[\nu, \nu + d\nu]$  les probabilités de transition sont alors pondérées par  $\Phi(\nu)$ . On note  $n_\nu$  la densité particulière des photons dont la fréquence est comprise dans l'intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$  (unité :  $\text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ).

**Q 26.** Montrer que

$$\frac{dn_\nu}{dt} = A_{ul}n_u\Phi(\nu) + B_{ul}n_u\Phi(\nu)u_\nu - B_{lu}n_l\Phi(\nu)u_\nu$$

Un corps noir est un corps qui absorbe tous les rayonnements électromagnétiques qu'il reçoit, sans les réfléchir ni les transmettre. Maintenu à une température  $T$  constante il émet un rayonnement isotrope dont la densité spectrale d'énergie  $u_\nu$  est régie par la relation de Planck

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

où  $\nu$  est la fréquence du rayonnement. Le rayonnement émis est alors en équilibre thermique avec les atomes.

**Q 27.** Que vaut  $\frac{dn_\nu}{dt}$  à l'équilibre thermique ? En déduire une expression de  $u_\nu$  en fonction des coefficients d'Einstein et des densités particulières  $n_u$  et  $n_l$ .

**Q 28.** Montrer que les coefficients d'Einstein vérifient les relations

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \quad \text{et} \quad B_{ul} = \frac{c^3}{8\pi h\nu_0^3} A_{ul}$$

## II.B – Intensité spécifique de la raie HI émise par un nuage d'hydrogène atomique

**Q 29.** Rappeler l'expression du vecteur de Poynting associé à une onde électromagnétique plane  $(\vec{E}, \vec{B})$  de fréquence  $\nu$  se propageant dans le vide.

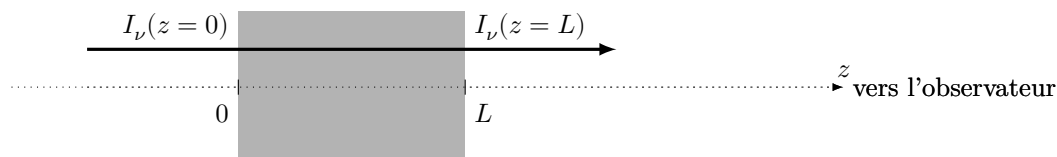
L'intensité  $I$  de cette onde est définie comme sa puissance, moyennée sur une période, par unité de surface perpendiculaire à sa direction de propagation.

**Q 30.** Montrer que l'intensité  $I$  de cette onde se met sous la forme  $I = cu$  où  $u$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde, moyennée sur une période.

**Q 31.** Quelle relation existe-il entre  $u_\nu$ ,  $\nu$  et  $n_\nu$  ?

Pour un rayonnement isotrope, on définit l'intensité spécifique  $I_\nu$  par  $I_\nu = \frac{cu_\nu}{4\pi}$ . Il s'agit de l'intensité émise par unité de fréquence et par unité d'angle solide (unité :  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$ ). La notion d'angle solide est présentée en annexe.

Considérons une onde d'intensité spécifique  $I_\nu$  entrant dans un nuage d'hydrogène à la température  $T$  d'épaisseur  $L$  et se propageant le long d'un axe ( $Oz$ ) dans la direction de l'observateur (figure 1).



**Figure 1** Onde traversant un nuage d'hydrogène

**Q 32.** En posant  $dz = cdt$ , montrer que sur une distance  $dz$  le long de la direction de propagation, l'intensité spécifique  $I_\nu$  varie de  $dI_\nu = j_\nu dz - \kappa_\nu I_\nu dz$  où

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_0^3} \Phi(\nu) A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT}\right)\right) \quad \text{et} \quad j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} n_u \Phi(\nu)$$

**Q 33.** En supposant l'intensité spécifique  $I_\nu(z=0)$  nulle à l'entrée du nuage, déterminer  $I_\nu(z)$  en fonction de  $z$ ,  $j_\nu$ ,  $\kappa_\nu$ . En déduire la valeur de  $I_\nu(z=L)$  à la sortie du nuage.

**Q 34.** Montrer que pour les nuages d'hydrogène du milieu interstellaire on a

$$\kappa_\nu \simeq \frac{3c^2 h\nu}{32\pi kT\nu_0^2} \Phi(\nu) A_{ul} n_H$$

**Q 35.** Pour le nuage interstellaire considéré plus haut ( $n_H = 25 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 100 \text{ K}$ ), la forme de raie  $\Phi(\nu)$  est dominée par l'élargissement Doppler thermique et turbulent et  $\Phi(\nu_0) \approx 6 \times 10^{-6} \text{ Hz}^{-1}$ . Si ce nuage a une épaisseur  $L = 3 \text{ pc}$ , montrer que l'intensité spécifique à la sortie de ce nuage peut être mise sous la forme simplifiée  $I_\nu(z = L) \simeq j_\nu L$ .

**Q 36.** Pourquoi retrouve-t-on également cette valeur au niveau du détecteur (radiotélescope) situé sur Terre ? (On suppose qu'il n'y a pas d'autres nuages entre le nuage observé et la Terre).

**Q 37.** Exprimer l'intensité spécifique à la sortie du nuage en fonction de  $N(H) = n_H L$ .  $N(H)$  est appelé *densité de colonne* des atomes d'hydrogène, c'est le nombre d'atomes d'hydrogène se trouvant dans un cylindre de section unité, le long de la ligne de visée matérialisée par l'axe ( $Oz$ ).

**Q 38.** Le radiotélescope détectant la raie HI est sensible à la densité spectrale de flux  $F_\nu = \int I_\nu d\Omega$  où  $\Omega$  est l'angle solide sous lequel le nuage d'hydrogène est vu depuis le radiotélescope. Montrer que

$$F_\nu = \frac{3h\nu}{16\pi D^2} A_{ul} N_H \Phi(\nu)$$

où  $D$  est la distance séparant le nuage d'hydrogène de la Terre et  $N_H$  est le nombre d'atomes d'hydrogène présents dans le nuage.

L'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet  $\alpha$  est  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ .

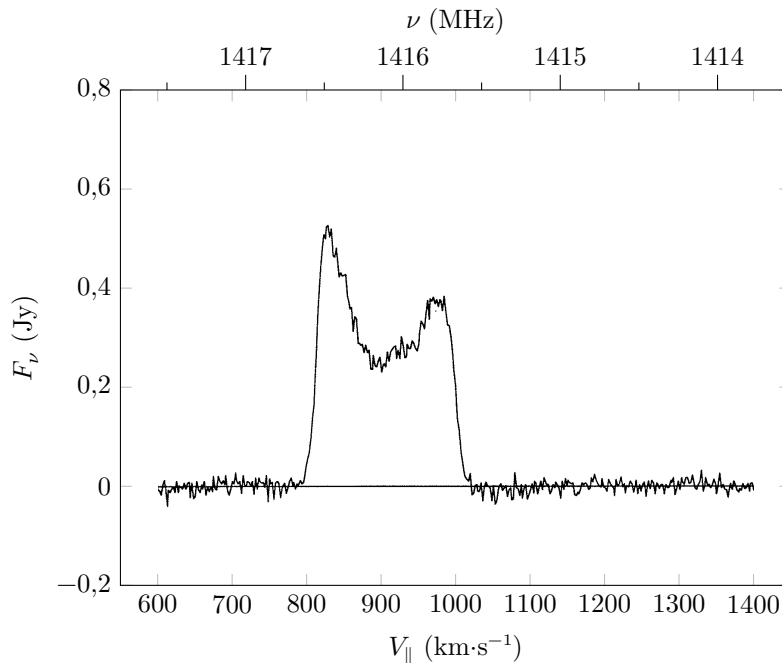
**Q 39.** Pour une raie fine  $\frac{\delta\nu}{\nu_0} \ll 1$  où  $\delta\nu$  est la largeur de la raie. On peut considérer que  $\int_0^\infty \nu \Phi(\nu) d\nu \simeq \nu_0$  où  $\nu_0$  est la fréquence centrale de la raie. Montrer que

$$\int_0^\infty F_\nu d\nu = \frac{3h\nu_0}{16\pi D^2} A_{ul} N_H$$

## II.C – Quelles informations nous apporte la raie HI émise par une galaxie ?

La figure 2 présente la densité spectrale de flux  $F_\nu$  provenant de la galaxie spirale UGC 11707. L'unité de flux employée est le Jansky (Jy), unité habituellement employée en radioastronomie ( $1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ). Deux échelles sont utilisées pour l'axe des abscisses :  $F_\nu$  est représenté en fonction de la fréquence  $\nu$  mais également en fonction de la vitesse tangentielle  $V_{\parallel}$  du nuage.

**Q 40.** Pourquoi peut-on adopter l'une ou l'autre de ces échelles ?



**Figure 2** Spectre HI émis par l'hydrogène de la galaxie UGC 11707

La fréquence  $\nu_0$  est connue avec une très grande précision, elle vaut  $\nu_0 = 1420,405\,751\,8 \text{ MHz}$ .

On admet que la vitesse d'éloignement  $V_0$  d'une galaxie se situant à une distance  $D$  de la Terre suit la loi de Hubble  $V_0 = H_0 D$  où  $H_0$  est la constante de Hubble  $H_0 \simeq 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$  (le parsec (pc) et ses multiples

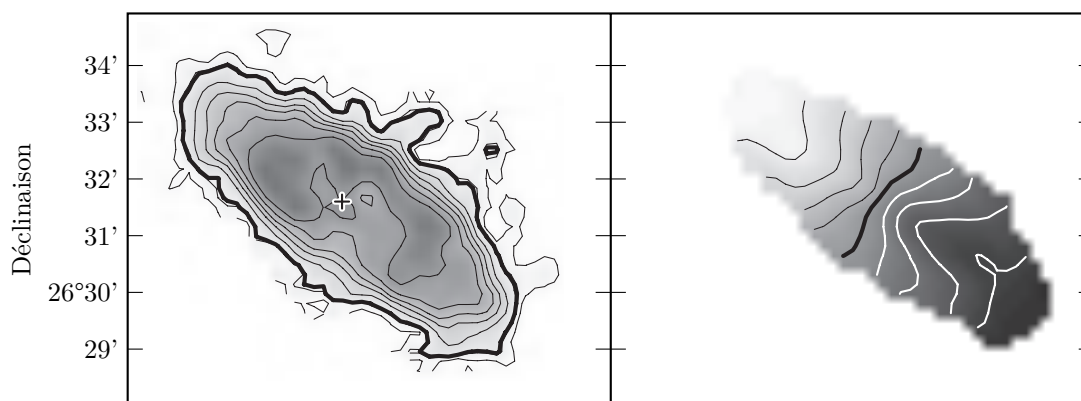
(kpc, Mpc) sont des unités de distance fréquemment employées en astrophysique :  $1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$ ,  $1 \text{ Mpc} = 1 \times 10^6 \text{ pc}$ .

**Q 41.** Évaluer la distance  $D$  (en Mpc) de la galaxie UGC 11707 ainsi que la valeur de l'intégrale  $\int_0^\infty F_\nu d\nu$  de son spectre HI.

**Q 42.** Expliquer pourquoi de nombreuses galaxies possèdent un spectre HI en structure de « bicolore », analogue au spectre de la galaxie UGC 11707.

**Q 43.** Dédurre de ce qui précède une estimation de la masse d'hydrogène atomique dans la galaxie UGC 11707. Comparer le résultat à la masse du soleil.

On peut considérer que les orbites des nuages HI sont circulaires, que les galaxies ont une forme de disque et que le champ gravitationnel à une distance  $r$  du centre de la galaxie est en bonne approximation donné par le champ créé par une distribution de masse à symétrie sphérique.



**Figure 3** Images HI du disque galactique UGC 11707

La figure 3 montre, à gauche, une « photographie » de la galaxie UGC 11707 obtenue à la fréquence de la raie HI ; les contours de cette photographie délimitent des zones de même intensité. Les contours de l'image de droite de la figure 3 délimitent des zones de même vitesse tangentielle, ils sont séparés de  $\Delta V_\parallel = 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Les zones sombres correspondent à du gaz se rapprochant de l'observateur, les zones claires s'en éloignent. Les axes (se référer à l'échelle de l'axe vertical) sont gradués en degrés ( $^\circ$ ) et minutes ( $'$ ) d'angle ( $1^\circ = 60'$ ).

**Q 44.** Estimer à partir de la figure 3 :

- l'angle  $\alpha$  que fait la normale au disque galactique avec la direction d'observation ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ) ;
- la vitesse tangentielle puis la vitesse totale d'un nuage d'hydrogène de la périphérie de la galaxie, dans le référentiel lié à la galaxie UGC 11707.

**Q 45.** En faisant l'hypothèse que la répartition de masse de la galaxie est à symétrie sphérique, donner une estimation de la masse totale de la galaxie. Comparer le résultat obtenu à la masse de l'hydrogène atomique de cette galaxie.

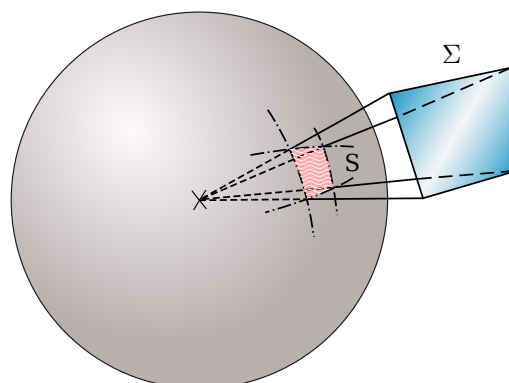
## Annexe

### Angle solide

Par analogie avec l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit dans le plan un arc de courbe depuis le point  $O$ , on définit l'angle solide  $\Omega$  sous lequel on voit dans l'espace une surface  $\Sigma$  depuis  $O$ . C'est l'angle solide du cône de sommet  $O$  s'appuyant sur  $\Sigma$ , ce cône découpe sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  une portion de sphère de surface  $S$ . Par définition, l'angle solide  $\Omega$  est le rapport  $\Omega = S/R^2$ . L'angle solide est une grandeur sans dimension et son unité est le stéradian (sr). L'angle solide sous lequel on voit une surface fermée entourant le point  $O$  est  $\Omega = 4\pi \text{ sr}$ . L'angle solide d'un cône de révolution de demi-angle au sommet  $\alpha$  est

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

Si  $\alpha \ll 1$ ,  $\Omega \approx \pi\alpha^2$ .



## L'effet Doppler

L'effet Doppler est utilisé en astrophysique pour mesurer la vitesse tangentielle de l'astre observé. La vitesse tangentielle est la composante de la vitesse parallèle à la ligne de visée qui relie l'astre à l'observateur.

Soit  $(Oz)$  l'axe Observateur-Étoile orienté de l'observateur vers l'étoile avec  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire porté par cet axe. Soit  $\vec{V}$  la vitesse de l'astre dans un référentiel galiléen adapté à l'étude, la vitesse tangentielle de l'astre est alors  $V_{\parallel} = \vec{V} \cdot \vec{e}_z$ .

Si l'astre émet un rayonnement électromagnétique de fréquence  $\nu$ , l'observateur perçoit un rayonnement de fréquence

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + V_{\parallel}/c}$$

Cette relation se simplifie, compte tenu des vitesses habituellement rencontrées, en effet  $|V_{\parallel}| \ll c$  et on obtient

$$\nu' \simeq \nu \left( 1 - \frac{V_{\parallel}}{c} \right)$$

La fréquence apparente est plus faible que la fréquence émise si l'étoile s'éloigne de l'observateur (la longueur d'onde est plus grande, il y a décalage vers le rouge).

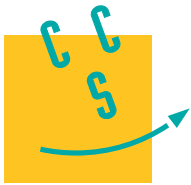
## Gradient en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

## Données numériques

|                                     |                                                                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Constante de Planck                 | $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$                                |
| Constante de Planck réduite         | $\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$                           |
| Célérité de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$                               |
| Permittivité du vide                | $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$               |
| Perméabilité du vide                | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$                        |
| Charge élémentaire                  | $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$                                             |
| Masse de l'électron                 | $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$                                          |
| Masse du proton                     | $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836 m_e$                               |
| Facteur de Landé de l'électron      | $g_S = 2,00$                                                                     |
| Facteur de Landé du proton          | $g_p = 5,58$                                                                     |
| Magnéton de Bohr                    | $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$ |
| Constante de Boltzmann              | $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$                           |
| Constante de gravitation            | $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$      |
| Parsec                              | $1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$                                   |
| Masse du Soleil                     | $M_{\odot} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$                                      |

• • • FIN • • •



## Capteurs photovoltaïques

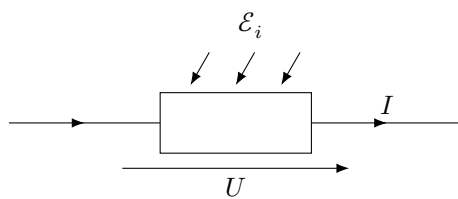
Ce problème traite de quelques aspects du fonctionnement d'un capteur photovoltaïque. Il se compose de quatre parties. La première traite de la production d'électricité à l'aide de tels capteurs. La deuxième s'intéresse au mécanisme électronique de l'effet photovoltaïque. La troisième concerne le traitement antireflet des vitres de protection des panneaux photovoltaïques. Enfin, la quatrième partie aborde certains aspects quantiques des semi-conducteurs.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse fournissant certaines données utiles.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche et les choix effectués et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

### I Énergie photovoltaïque

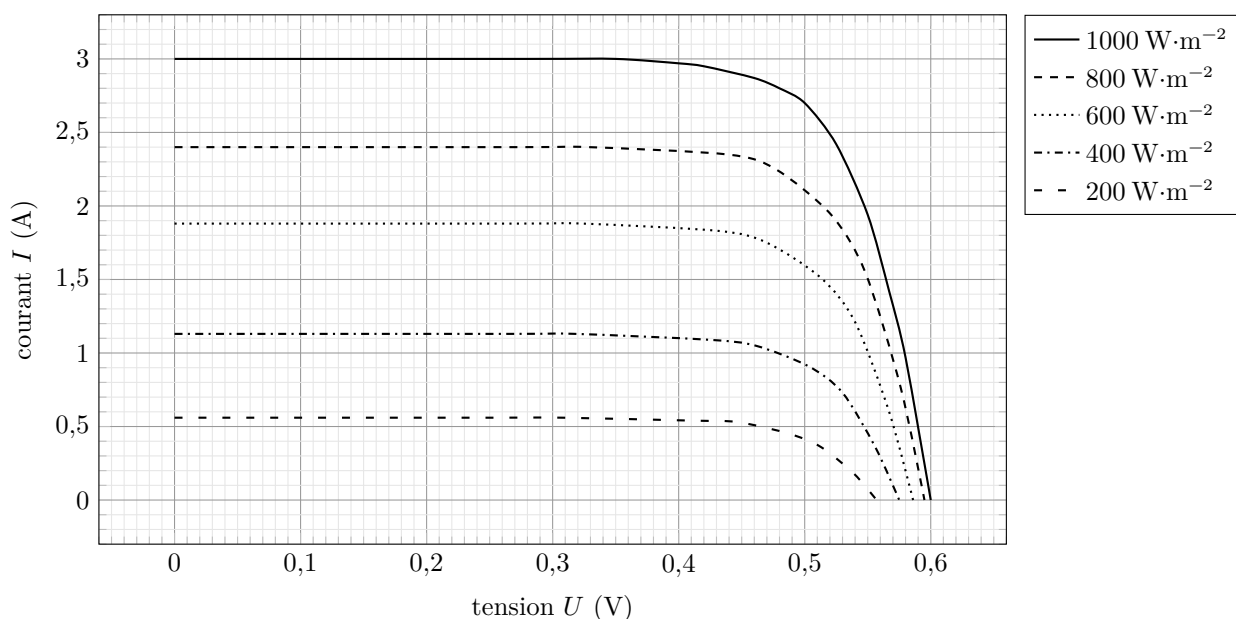
Une cellule photovoltaïque est un dipôle électrique qui, lorsqu'il reçoit de la lumière, est susceptible de produire de l'énergie électrique grâce à l'effet photovoltaïque. La figure 1 présente des données relatives au fonctionnement d'une telle cellule.



Valeurs sous éclairement  
 $\mathcal{E}_i = 1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$

| Caractéristique          | Valeur                 |
|--------------------------|------------------------|
| Tension à vide           | $U_v = 0,60 \text{ V}$ |
| Courant de court-circuit | $I_c = 3,0 \text{ A}$  |
| Puissance nominale       | $P_n = 1,32 \text{ W}$ |
| Tension nominale         | $U_n = 0,47 \text{ V}$ |
| Courant nominal          | $I_n = 2,8 \text{ A}$  |

Caractéristiques pour  $\mathcal{E}_i$  allant de 200 à  $1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$



**Figure 1** Caractéristiques d'une cellule photovoltaïque de  $100 \text{ cm}^2$



**Q 1.** En utilisant les données de la figure 1, déterminer à l'aide d'un graphe les valeurs de  $U$  et  $I$  qui maximisent la puissance électrique fournie pour un éclairage  $\mathcal{E}_i = 1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Comparer ces résultats aux valeurs nominales données en figure 1 et commenter.

**Q 2.** Évaluer et commenter l'efficacité énergétique de la cellule en régime nominal.

Le facteur de forme de la cellule est  $FF = \frac{U_n I_n}{U_v I_c}$ . Il indique la qualité de la cellule photovoltaïque.

**Q 3.** En reproduisant l'allure de la caractéristique  $I(U)$  de la cellule, illustrer graphiquement les produits présents au numérateur et au dénominateur de ce rapport et proposer une majoration très simple de  $FF$ .

**Q 4.** Quelle est la valeur du facteur de forme  $FF$  pour la cellule étudiée ?

## II Conduction, jonction, effet photovoltaïque

### II.A – Conduction électrique

Dans une approche classique, un milieu est conducteur s'il contient des charges mobiles. Ainsi, des électrons, de masse  $m$  et de charge  $-e$ , peu liés aux noyaux, peuvent se déplacer dans le réseau cristallin : ce sont les électrons de conduction. Lors de l'application d'un champ électrique  $\vec{E}$  au matériau, les électrons sont soumis à la force de Lorentz correspondante qui entraîne leur déplacement à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au réseau cristallin. Dans le modèle de Drude, les électrons sont également soumis à une force de frottement fluide exercée par le réseau cristallin. Ainsi, en négligeant l'effet du poids et de la force de Lorentz magnétique, l'évolution d'un électron de conduction est décrite par l'équation

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau}.$$

**Q 5.** Indiquer la signification de chacun des trois termes de cette équation.

**Q 6.** Montrer qu'en régime permanent la vitesse  $\vec{v}$  des électrons est proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}$ . On définit ainsi la mobilité des électrons  $\mu_e$  en posant  $\vec{v} = \mu_e \vec{E}$ . On note  $n_e$  la densité volumique d'électrons de conduction dans le matériau.

**Q 7.** Calculer la conductivité  $\gamma$  du conducteur en fonction de  $n_e$ ,  $e$ ,  $\tau$  et  $m$ .

Quand un électron de conduction est libéré par les atomes de silicium pour se déplacer dans le réseau cristallin, son départ crée un trou, ou défaut électronique, de charge  $+e$ , qui peut lui aussi se déplacer de proche en proche entre atomes voisins. La mobilité d'un trou est notée  $\mu_p$ . Pour du silicium pur, la conductivité intrinsèque est assurée par les électrons de conduction et par les trous, qui ont ici même densité  $n_e = n_p$ . Pour simplifier, on admet que la masse des trous est identique à celle des électrons.

**Q 8.** Déterminer la densité électronique  $n_e$  à partir des données figurant en annexe, à la température de  $25^\circ\text{C}$ . En déduire la proportion d'atomes de silicium qui libèrent un électron de conduction.

### II.B – Semi-conducteur dopé

Dans un cristal de silicium dopé, des atomes d'un autre élément (dit dopant) se substituent à des atomes de silicium. Dans le cas d'un dopant de type  $N$  (dit donneur), le nombre d'électrons de valence de l'élément dopant est supérieur à celui du silicium. Le ou les électrons supplémentaires deviennent des électrons de conduction. De façon symétrique, un dopant de type  $P$  (dit accepteur) possède un nombre d'électrons de valence inférieur à celui du silicium. Le ou les électrons manquants deviennent des trous. Ainsi, la présence de dopants peut modifier fortement les densités d'électrons et de trous de conduction, qui peuvent alors être très différentes l'une de l'autre.

**Q 9.** Le bore (B), le phosphore (P), l'arsenic (As), le gallium (Ga) sont souvent utilisés comme dopants pour le silicium. Classer ceux-ci en types  $N$  ou  $P$ .

**Q 10.** Du silicium est dopé au bore à raison de  $10^{22}$  atomes de substitution par unité de volume. Quel est le taux de dopage (ou pourcentage de substitution) obtenu ?

**Q 11.** Proposer, en précisant les choix utilisés pour cela, une évaluation de la conductivité de ce silicium dopé. Commenter cette valeur.

**Q 12.** Quel intérêt présente ce dopage pour un générateur électrique comme une cellule photovoltaïque ?

### II.C – Jonction PN

Une feuille de silicium a été dopée  $P$ . Un traitement de surface permet de créer une couche dopée  $N$  dont l'épaisseur est typiquement de  $0,5 \mu\text{m}$ . Dans la zone  $P$  (respectivement  $N$ ),  $n_P$  (respectivement  $n_N$ ) est le nombre d'atomes dopants par unité de volume.

L'interface entre la zone  $P$  et la zone  $N$  constitue la jonction PN : de part et d'autre, les porteurs de charge mobiles majoritaires sont de signes opposés, de concentrations  $n_P$  et  $n_N$  dans les zones  $P$  et  $N$  respectivement. Des porteurs de charge migrent d'une zone à l'autre, engendrant une zone de charge d'espace (ou zone de déplétion) et un champ électrique de jonction. La figure 2 donne une représentation simplifiée de cette situation dans une modélisation unidimensionnelle.

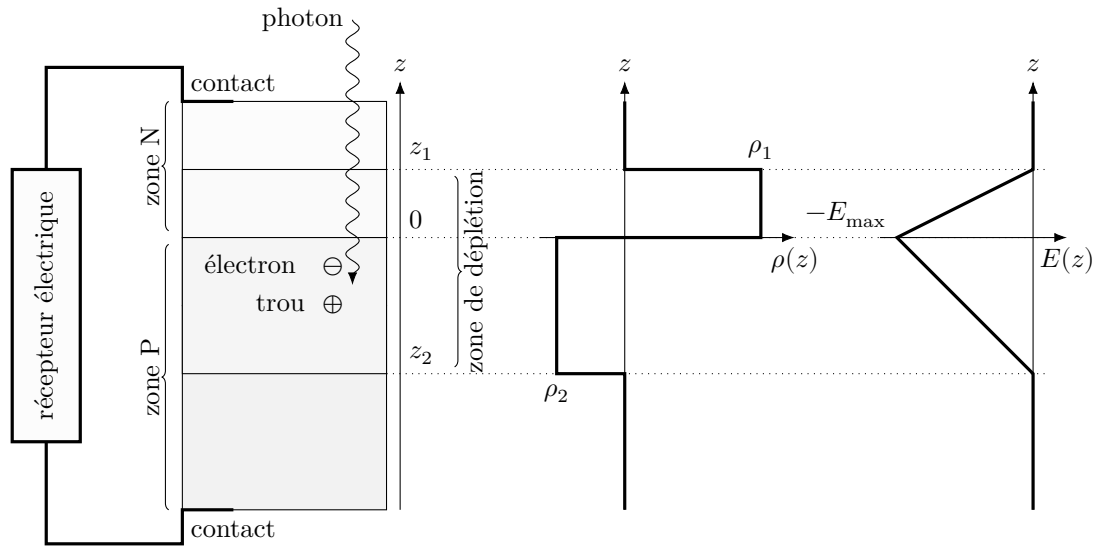


Figure 2

On associe le milieu à un diélectrique linéaire homogène et isotrope. On admet que dans un tel milieu, les équations de Maxwell pour le vide restent valables en remplaçant la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  où  $\epsilon_r$  est appelé permittivité relative du milieu. Pour le silicium,  $\epsilon_r = 11,8$ .

**Q 13.** Quel peut-être le phénomène physique responsable d'une migration des porteurs majoritaires, électrons ou trous, d'une zone vers l'autre ?

**Q 14.** Dans un modèle simplifié de jonction abrupte, tous les atomes accepteurs situés dans une zone d'épaisseur  $-z_2$  au voisinage de la jonction captent les électrons venus d'atomes donneurs de la zone N sur une épaisseur  $z_1$ . Déterminer les densités de charge  $\rho_1$  et  $\rho_2$  associées à cette modélisation (figure 2).

**Q 15.** Déterminer une relation liant  $n_P$ ,  $n_N$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .

**Q 16.** Expliquer pourquoi, dans ce modèle unidimensionnel, le champ électrostatique est parallèle à l'axe ( $Oz$ ). Justifier la forme de la représentation graphique de  $E(z)$  donnée figure 2.

**Q 17.** Relier la valeur maximale  $E_{\max}$  de la norme du champ électrique à  $e$ ,  $\epsilon$ ,  $n_N$  et  $z_1$  d'une part, à  $e$ ,  $\epsilon$ ,  $n_P$  et  $z_2$  d'autre part.

**Q 18.** Déterminer la différence de potentiel électrostatique  $V_0 = V(z_1) - V(z_2)$  en fonction de  $E_{\max}$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .

**Q 19.** Établir l'expression de l'épaisseur de la jonction  $w = z_1 - z_2 = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{e} \left( \frac{1}{n_P} + \frac{1}{n_N} \right)}$ .

**Q 20.** Évaluer numériquement l'épaisseur de jonction  $w$  si  $V_0 = 0,84 \text{ V}$ ,  $n_N = 1 \times 10^{24} \text{ m}^{-3} = 100 n_P$ .

## II.D – Effet photovoltaïque

L'absorption d'un photon incident crée au niveau de la jonction une paire électron-trou. On admet que l'énergie minimale nécessaire à cette création est comparable à celle permettant à un électron (ou à un trou) de franchir une barrière de potentiel associée à une tension de valeur  $V_0$ .

**Q 21.** Quelles sont les longueurs d'onde susceptibles de créer une paire électron-trou ? Cette jonction PN convient-elle à la conversion photovoltaïque du rayonnement solaire ?

**Q 22.** Reproduire le schéma de la cellule, avec sa jonction PN, reliée à un récepteur électrique. En complétant ce schéma, décrire qualitativement les évolutions de l'électron et du trou créés dans la zone de déplétion, expliquer le rôle de générateur électrique réalisé par la cellule photovoltaïque, en précisant sa polarité et le sens du courant électrique délivré par celle-ci.

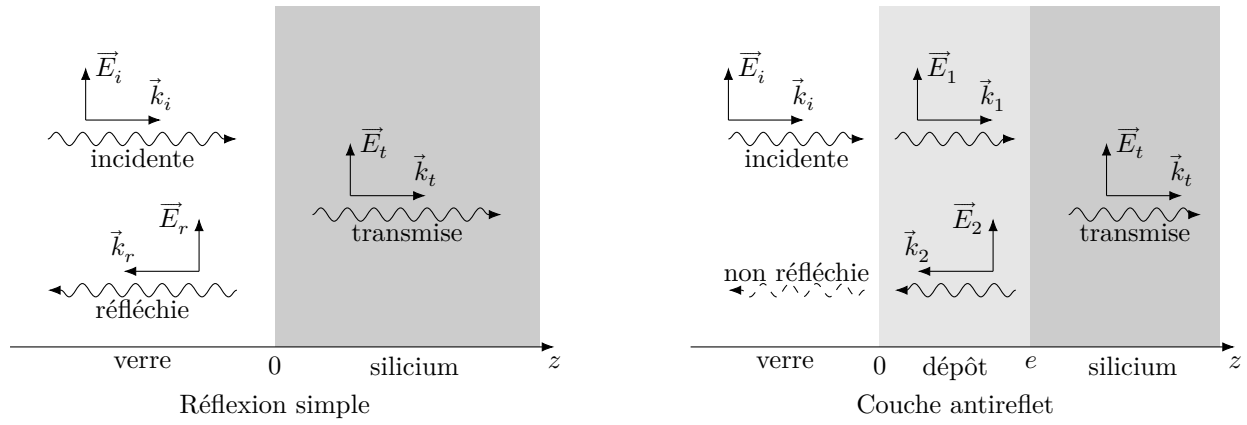
## III Traitement antireflet de la cellule

Le capteur est constitué de silicium, placé sous une vitre en verre. Il est recouvert d'un film de nitrure de silicium (formule  $\text{SiN}_x$ ) participant à son reflet bleu. Cette partie propose une analyse du rôle de ce dépôt dans l'amélioration de l'efficacité énergétique de la cellule.

Pour une longueur d'onde de 600 nm, l'indice de réfraction du verre est  $n_v = 1,5$ , celui du silicium, supposé réel, est  $n_s = 4,0$ .

On admettra qu'à l'interface de deux milieux, les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont ici continues.

Si  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices de deux milieux notés 1 et 2, on note  $r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ .



**Figure 3** Réflexion sur le silicium et traitement antireflet

### III.A – Réflexion sur le silicium

Une onde électromagnétique sinusoïdale arrive, sous incidence normale, sur le capteur dont la surface est assimilée au plan d'équation  $z = 0$ .

Les champs électriques des ondes réfléchi et transmise (figure 3, réflexion simple) seront exprimés en notation complexe,

$$\underline{\vec{E}}_i(z, t) = \underline{\vec{E}}_{0i} e^{i(\omega t - k_i z)}, \quad \underline{\vec{E}}_r(z, t) = \underline{\vec{E}}_{0r} e^{i(\omega t + k_r z)}, \quad \underline{\vec{E}}_t(z, t) = \underline{\vec{E}}_{0t} e^{i(\omega t - k_t z)}.$$

- Q 23.** Exprimer les vecteurs d'onde  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  à l'aide de  $\omega$ ,  $c$ ,  $n_v$ ,  $n_s$  et  $\vec{e}_z$ .
- Q 24.** Exprimer les champs magnétiques des trois ondes, en notation complexe, en précisant leurs amplitudes  $\vec{B}_{0i}$ ,  $\vec{B}_{0r}$  et  $\vec{B}_{0t}$  en fonction de  $\underline{\vec{E}}_{0i}$ ,  $\underline{\vec{E}}_{0r}$ ,  $\underline{\vec{E}}_{0t}$ ,  $n_v$ ,  $n_s$ ,  $c$  et  $\vec{e}_z$  (vecteur unitaire de l'axe  $(Oz)$ ).
- Q 25.** En traduisant les conditions aux limites, exprimer le coefficient de réflexion pour l'amplitude du champ électrique en fonction de  $r_{vs}$ .
- Q 26.** Exprimer le coefficient de réflexion énergétique. Calculer et commenter sa valeur numérique.

### III.B – Couche antireflet

Les traitements antireflet réalisés utilisent des dépôts en couches minces multiples, combinées avec une microstructuration de la surface. Nous envisageons ici simplement le cas d'une couche antireflet simple, qui occupe la zone  $0 < z < e$  (zone  $z < 0$  : verre,  $z > e$  : silicium). Les indices  $n_d$  et  $n_s$  sont supposés réels et on pose  $\varphi = 2n_d e \omega / c$ .

Les notations précédentes sont conservées pour les champs électromagnétiques, en y ajoutant les champs électriques complexes

$$\underline{\vec{E}}_1(z, t) = \underline{\vec{E}}_{01} e^{i(\omega t - k_d z)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_2(z, t) = \underline{\vec{E}}_{02} e^{i(\omega t + k_d z)}$$

des ondes se propageant, respectivement dans la direction des  $z$  croissants des  $z$  décroissant, dans la couche antireflet.

Par hypothèse, la fonction antireflet est idéalement réalisée : l'onde réfléchi est annulée (figure 3, couche antireflet).

- Q 27.** Établir la relation  $\underline{\vec{E}}_{02} = r_{ds} \underline{\vec{E}}_{01} e^{-i\varphi}$ .
- Q 28.** En déduire que la fonction antireflet n'est réalisée que si  $\varphi = (2p + 1)\pi$ , avec  $p$  entier, et  $n_d = \sqrt{n_v n_s}$ .
- Q 29.** Justifier que l'on a intérêt à se placer dans ces conditions pour la conversion photovoltaïque du rayonnement solaire.

## IV Bandes d'énergie dans un semi-conducteur

### IV.A – Équation de Schrödinger à une dimension

Pour un problème à une dimension, l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  d'une particule de masse  $m$  évoluant dans un potentiel d'énergie  $V(x)$  s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t).$$

- Q 30.** Pour quel type de potentiel  $V(x)$  une onde plane sinusoïdale  $\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}$  est-elle solution de cette équation ? Quelle est alors la relation de dispersion de cette onde ?
- Q 31.** Interpréter les résultats de la question précédente en relation avec l'expression de l'énergie en mécanique classique et les relations de de Broglie et de Planck-Einstein.

**Q 32.** Pour une solution stationnaire  $\psi(x, t) = \varphi(x)\chi(t)$ , établir l'équation vérifiée par la fonction d'amplitude  $\varphi(x)$  en faisant apparaître l'énergie  $E$  de la particule.

#### IV.B – Gaz d'électrons sur un segment

Les électrons contenus dans un milieu conducteur sont assimilés à des particules évoluant dans une boîte à une dimension de longueur  $L$  :  $V(x) = 0$  pour  $0 < x < L$ ,  $V(x) = +\infty$  en dehors.

La densité d'électrons libres est  $N_0 \approx 1 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$  dans un métal. On considérera donc qu'il y en a environ  $N_0^{1/3}$  électrons libres par unité de longueur dans cette boîte de longueur  $L$ .

**Q 33.** Avec ce choix d'origine de l'énergie potentielle, l'énergie  $E$  de la particule peut-elle être négative ?

**Q 34.** Justifier que les valeurs prises par la grandeur  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  sont de la forme  $k_n = n k_1$ , où  $n$  est un entier strictement positif. Exprimer complètement, à un facteur de phase près, les fonctions d'ondes  $\psi_n(x, t)$  associées à ces états stationnaires dont les énergies sont notées  $E_n$ .

**Q 35.** Représenter graphiquement la relation  $E = f(k)$  en faisant figurer avec une échelle adaptée les trois états stationnaires de plus faible énergie.

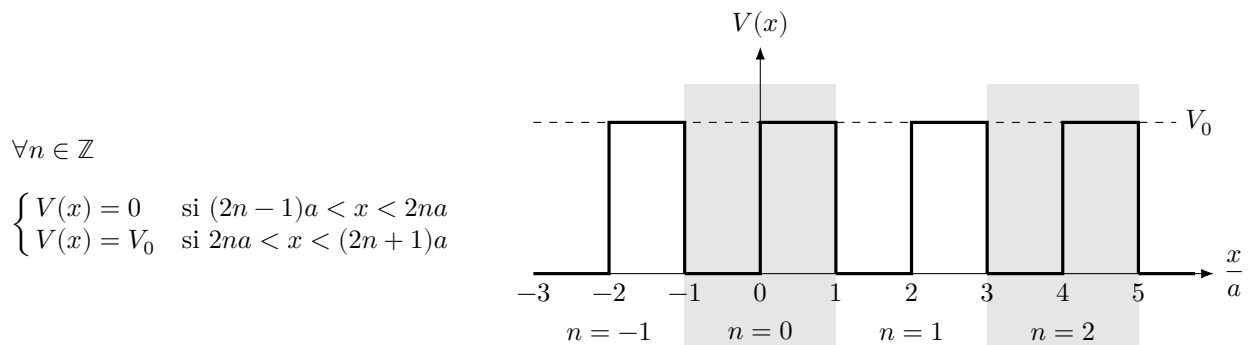
**NB.** Pour les applications numériques qui suivent, les énergies devront être exprimées en eV.

**Q 36.** Calculer la valeur numérique de  $E_1$ , pour  $L = 1 \text{ }\mu\text{m}$ . Comparer cette valeur à l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique à  $T = 300 \text{ K}$ . Pourquoi parle-t-on de quasi-continuum d'énergie au sein du matériau ?

**Q 37.** À  $T = 0 \text{ K}$ , les électrons peuplent les états obtenus par énergie croissante, avec au plus deux électrons dans le même état d'énergie d'après le principe d'exclusion de Wolfgang Pauli. En déduire le nombre de Fermi  $n_F$ , défini par la valeur maximale atteinte par l'entier  $n$  à  $T = 0 \text{ K}$ . Exprimer l'énergie de Fermi  $E_F$  associée en fonction de  $N_0$ ,  $L$  et  $E_1$ .

#### IV.C – Potentiel périodique, bandes d'énergie

Le modèle précédent permet de rendre compte d'un quasi-continuum des niveaux d'énergie (on adoptera par la suite la limite  $L = \infty$ ), mais pas de l'existence de bandes d'énergie interdites dont on sait qu'elles conditionnent la conductivité électrique du matériau. L'utilisation d'un modèle de potentiel périodique en permet ici une approche simplifiée adaptée à un solide cristallin (figure 4).



**Figure 4** Potentiel périodique

**Q 38.** Que représentent, dans ce modèle, les cuvettes de potentiel et la période  $2a$  ?

**Q 39.** Nous nous intéresserons par la suite aux états stationnaires d'énergie  $E > V_0$ . Justifier, en précisant les expressions des grandeurs positives  $k$  et  $K$ , la forme des solutions  $\varphi(x)$ , où  $n$  est un entier quelconque :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A_n e^{-ikx} + B_n e^{ikx} & \text{si } (2n-1)a < x < 2na \\ \varphi(x) = C_n e^{-iKx} + D_n e^{iKx} & \text{si } 2na < x < (2n+1)a \end{cases}$$

**Q 40.** En rappelant les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde pour une particule évoluant dans un potentiel fini, justifier le système homogène suivant :

$$\begin{aligned} A_n &+ B_n &- C_n &- D_n &= 0 \\ A_{n+1} e^{-ika} &+ B_{n+1} e^{ika} &- C_n e^{-iKa} &- D_n e^{iKa} &= 0 \\ k A_n &- k B_n &- K C_n &+ K D_n &= 0 \\ k A_{n+1} e^{-ika} &- k B_{n+1} e^{ika} &- K C_n e^{-iKa} &+ K D_n e^{iKa} &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions obtenues sont physiquement acceptables lorsque l'une des relations suivantes, où  $\alpha = K/k$ , est vérifiée :

- a)  $-1 \leq F_\alpha(ka) = \cos(ka) \cos(\alpha ka) - \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{2}{\alpha} \right) \sin(ka) \sin(\alpha ka) \leq +1 ;$
- b)  $-1 \leq F_\alpha(ka) = \cos(ka) \cos(\alpha ka) - \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \sin(ka) \sin(ka) \leq +1 ;$
- c)  $-1 \leq F_\alpha(ka) = \cos(ka) \cos(\alpha ka) - \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \sin(ka) \sin(\alpha ka) \leq +1.$

**Q 41.** En analysant l'effet sur le système d'une translation de  $a$ , indiquer, sans calcul, l'expression correcte de  $F_\alpha(ka)$ .

Les fonctions  $F_\alpha(ka)$  et  $E(ka)$  (unité arbitraire) ont été tracées sur la figure A du document réponse pour  $\alpha = 0,2$ .

**Q 42.** Compléter avec soin la figure A du document réponse et expliquer en quoi ce modèle permet de rendre compte de l'existence de bandes d'énergie, soit permises, soit interdites.

**Q 43.** Que deviennent ces résultats lorsque  $\alpha = 1$  ? Justifier votre réponse.

**Q 44.** En prenant pour valeur le paramètre de maille du silicium  $2a = 0,357$  nm, calculer dans ce modèle et pour  $\alpha = 0,2$  la largeur en énergie de la première bande d'énergie interdite.

**Q 45.** On sait que pour le silicium, la largeur de bande interdite est de l'ordre de 1 eV. Commenter.

---

• • • FIN • • •

---



|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

Signature

[illegible][illegible]

Épreuve : Physique 1 PC

## Feuille

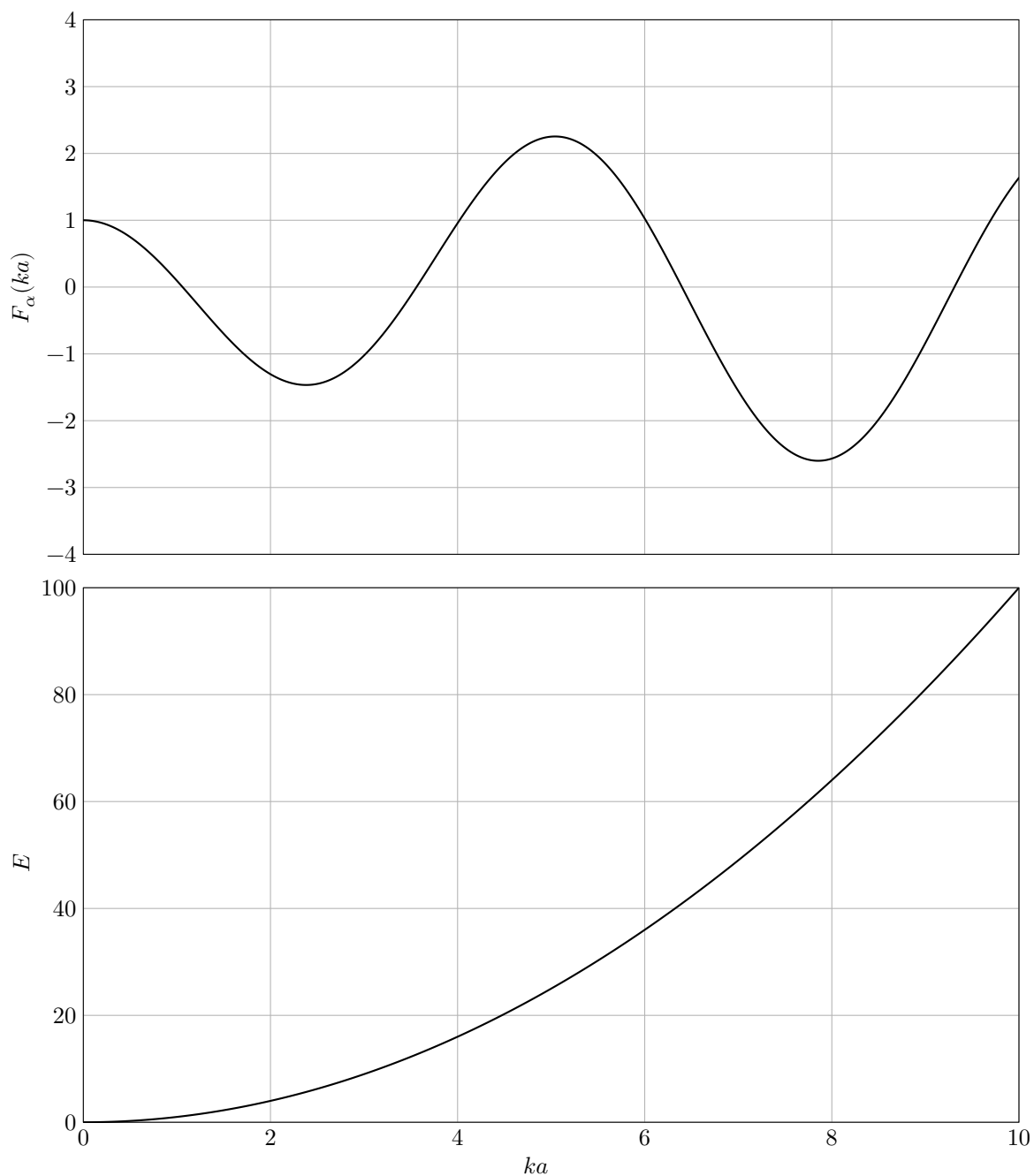
|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

 / 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

**Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête**

### Question 42



**Figure A** Fonction  $F_\alpha(ka)$  et énergie  $E(ka)$  (unité arbitraire) tracés pour  $\alpha = 0,2$

luametatex 2.0932 20211203 LMTX

Ne rien écrire

dans la partie barrée

P004-DR/2022-03-14 15:05:12

Extrait du tableau périodique des éléments

|                                                                   |                                                                    |                                                                                                                              |                                                                    |                                                                   |                                                                   |                                                                    |                                                                    |                                                                  |                                                                    |                                                                 |                                                                  |                                                                    |                                                                    |                                                                    |                                                                   |                                                                 |                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| <div>Hydrogène</div> <div>1</div> <div>H</div> <div>1,0080</div>  |                                                                    | <div>← Nom de l'élément</div> <div>← Numéro atomique</div> <div>← Symbole chimique</div> <div>← Masse molaire atomique</div> |                                                                    |                                                                   |                                                                   |                                                                    |                                                                    |                                                                  |                                                                    |                                                                 |                                                                  |                                                                    |                                                                    |                                                                    |                                                                   |                                                                 | <div>Hélium</div> <div>2</div> <div>He</div> <div>4,0026</div>   |
| <div>Lithium</div> <div>3</div> <div>Li</div> <div>6,9395</div>   | <div>Béryllium</div> <div>4</div> <div>Be</div> <div>9,0122</div>  |                                                                                                                              |                                                                    |                                                                   |                                                                   |                                                                    |                                                                    |                                                                  |                                                                    |                                                                 |                                                                  | <div>Bore</div> <div>5</div> <div>B</div> <div>10,814</div>        | <div>Carbone</div> <div>6</div> <div>C</div> <div>12,011</div>     | <div>Azote</div> <div>7</div> <div>N</div> <div>14,007</div>       | <div>Oxygène</div> <div>8</div> <div>O</div> <div>15,999</div>    | <div>Fluor</div> <div>9</div> <div>F</div> <div>18,998</div>    | <div>Néon</div> <div>10</div> <div>Ne</div> <div>20,180</div>    |
| <div>Sodium</div> <div>11</div> <div>Na</div> <div>22,990</div>   | <div>Magnésium</div> <div>12</div> <div>Mg</div> <div>24,306</div> |                                                                                                                              |                                                                    |                                                                   |                                                                   |                                                                    |                                                                    |                                                                  |                                                                    |                                                                 |                                                                  | <div>Aluminium</div> <div>13</div> <div>Al</div> <div>26,982</div> | <div>Silicium</div> <div>14</div> <div>Si</div> <div>28,085</div>  | <div>Phosphore</div> <div>15</div> <div>P</div> <div>30,974</div>  | <div>Soufre</div> <div>16</div> <div>S</div> <div>32,068</div>    | <div>Chlore</div> <div>17</div> <div>Cl</div> <div>35,452</div> | <div>Argon</div> <div>18</div> <div>Ar</div> <div>39,948</div>   |
| <div>Potassium</div> <div>19</div> <div>K</div> <div>39,098</div> | <div>Calcium</div> <div>20</div> <div>Ca</div> <div>40,078</div>   | <div>Scandium</div> <div>21</div> <div>Sc</div> <div>44,956</div>                                                            | <div>Titane</div> <div>22</div> <div>Ti</div> <div>47,867</div>    | <div>Vanadium</div> <div>23</div> <div>V</div> <div>50,941</div>  | <div>Chrome</div> <div>24</div> <div>Cr</div> <div>51,996</div>   | <div>Manganèse</div> <div>25</div> <div>Mn</div> <div>54,938</div> | <div>Fer</div> <div>26</div> <div>Fe</div> <div>55,845</div>       | <div>Cobalt</div> <div>27</div> <div>Co</div> <div>58,933</div>  | <div>Nickel</div> <div>28</div> <div>Ni</div> <div>58,693</div>    | <div>Cuivre</div> <div>29</div> <div>Cu</div> <div>63,546</div> | <div>Zinc</div> <div>30</div> <div>Zn</div> <div>65,38</div>     | <div>Gallium</div> <div>31</div> <div>Ga</div> <div>69,723</div>   | <div>Germanium</div> <div>32</div> <div>Ge</div> <div>72,630</div> | <div>Arsenic</div> <div>33</div> <div>As</div> <div>74,921</div>   | <div>Sélénium</div> <div>34</div> <div>Se</div> <div>78,971</div> | <div>Brome</div> <div>35</div> <div>Br</div> <div>79,904</div>  | <div>Krypton</div> <div>36</div> <div>Kr</div> <div>83,798</div> |
| <div>Rubidium</div> <div>37</div> <div>Rb</div> <div>85,467</div> | <div>Strontium</div> <div>38</div> <div>Sr</div> <div>87,62</div>  | <div>Yttrium</div> <div>39</div> <div>Y</div> <div>88,906</div>                                                              | <div>Zirconium</div> <div>40</div> <div>Zr</div> <div>91,224</div> | <div>Niobium</div> <div>41</div> <div>Nb</div> <div>92,906</div>  | <div>Molybdène</div> <div>42</div> <div>Mo</div> <div>95,95</div> | <div>Technétium</div> <div>43</div> <div>Tc</div> <div>[98]</div>  | <div>Ruthénium</div> <div>44</div> <div>Ru</div> <div>101,07</div> | <div>Rhodium</div> <div>45</div> <div>Rh</div> <div>102,91</div> | <div>Palladium</div> <div>46</div> <div>Pd</div> <div>106,42</div> | <div>Argent</div> <div>47</div> <div>Ag</div> <div>107,87</div> | <div>Cadmium</div> <div>48</div> <div>Cd</div> <div>112,41</div> | <div>Indium</div> <div>49</div> <div>In</div> <div>114,82</div>    | <div>Étain</div> <div>50</div> <div>Sn</div> <div>118,71</div>     | <div>Antimoine</div> <div>51</div> <div>Sb</div> <div>121,76</div> | <div>Tellure</div> <div>52</div> <div>Te</div> <div>127,60</div>  | <div>Iode</div> <div>53</div> <div>I</div> <div>126,90</div>    | <div>Xénon</div> <div>54</div> <div>Xe</div> <div>131,29</div>   |
| <div>Césium</div> <div>55</div> <div>Cs</div> <div>132,91</div>   | <div>Baryum</div> <div>56</div> <div>Ba</div> <div>137,33</div>    |                                                                                                                              | <div>Hafnium</div> <div>72</div> <div>Hf</div> <div>178,49</div>   | <div>Tantale</div> <div>73</div> <div>Ta</div> <div>180,948</div> | <div>Tungstène</div> <div>74</div> <div>W</div> <div>183,84</div> | <div>Rhénium</div> <div>75</div> <div>Re</div> <div>186,21</div>   | <div>Osmium</div> <div>76</div> <div>Os</div> <div>190,23</div>    | <div>Iridium</div> <div>77</div> <div>Ir</div> <div>192,22</div> | <div>Platine</div> <div>78</div> <div>Pt</div> <div>195,08</div>   | <div>Or</div> <div>79</div> <div>Au</div> <div>196,97</div>     | <div>Mercure</div> <div>80</div> <div>Hg</div> <div>200,59</div> | <div>Thallium</div> <div>81</div> <div>Tl</div> <div>204,38</div>  | <div>Plomb</div> <div>82</div> <div>Pb</div> <div>207,2</div>      | <div>Bismuth</div> <div>83</div> <div>Bi</div> <div>208,98</div>   | <div>Polonium</div> <div>84</div> <div>Po</div> <div>[209]</div>  | <div>Astate</div> <div>85</div> <div>At</div> <div>[210]</div>  | <div>Radon</div> <div>86</div> <div>Rn</div> <div>[222]</div>    |



## Données et formulaire

### Constantes physiques

|                                     |                                                                    |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Célérité de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$                 |
| Masse de l'électron                 | $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$                              |
| Charge élémentaire                  | $e = 1,62 \times 10^{-19} \text{ C}$                               |
| Permittivité diélectrique du vide   | $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Constante d'Avogadro                | $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$             |
| Constante de Boltzmann              | $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$           |
| Constante de Planck                 | $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$                  |

### Données sur le silicium (à 20 °C)

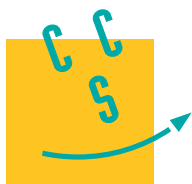
|                          |                                                                                |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Structure électronique   | $[\text{Ne}]3s^23p^2$                                                          |
| Masse molaire            | $M = 28,1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                       |
| Masse volumique          | $\rho = 2,33 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$                         |
| Mobilité des électrons   | $ \mu_e  = 1,5 \times 10^{-1} \text{ m}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Mobilité des trous       | $\mu_p = 4,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$   |
| Conductivité intrinsèque | $\gamma = 4,3 \times 10^{-4} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$                      |

### Formulaire

Soient  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  un repère orthonormé direct et  $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$  un champ vectoriel

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$



## *Du neuf dans les sillages*

Étudiées depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par Frédéric Reech, William Froude et William Thomson (Lord Kelvin), les ondes à la surface de l'eau sont souvent citées en exemples lors de l'évocation des ondes : plus visuelles que les ondes acoustiques ou électromagnétiques, elles n'en sont pas moins plus complexes à étudier !

Générées par le vent, elles provoquent la houle, dont l'étude est aujourd'hui très importante : prévention des risques sur les littoraux, utilisation de l'énergie houlomotrice, etc. Générées par des bateaux, elles sont nuisibles, car elles sont à l'origine de l'érosion importante des berges, et elles provoquent une résistance à l'avancement.

Ce sujet étudie la forme des sillages à la surface de l'eau provoqués par des objets en déplacement. Il s'intéresse notamment à une découverte récente à propos de ce phénomène qui a un temps remis en cause les bases fondées par lord Kelvin voici 150 ans. Cette découverte est rapportée dans un article paru dans *Reflète de la Physique* en 2013, cosigné par Marc Rabaud et Frédéric Moisy, dont les deux tiers sont joints en annexe 1. En annexe 2, on trouve des données techniques relatives aux satellites SPOT 6 et 7 issues de brochures de l'industriel Astrium. Les constantes physiques utiles au problème, des définitions d'unités hors système international et un formulaire mathématique figurent en fin d'énoncé.

Les trois parties peuvent être abordées indépendamment, mais il est conseillé de les aborder dans l'ordre pour se familiariser avec les résultats et de lire l'article en premier. Les résultats mentionnés dans une question peuvent être utilisés dans les questions suivantes, même s'ils n'ont pas été démontrés.

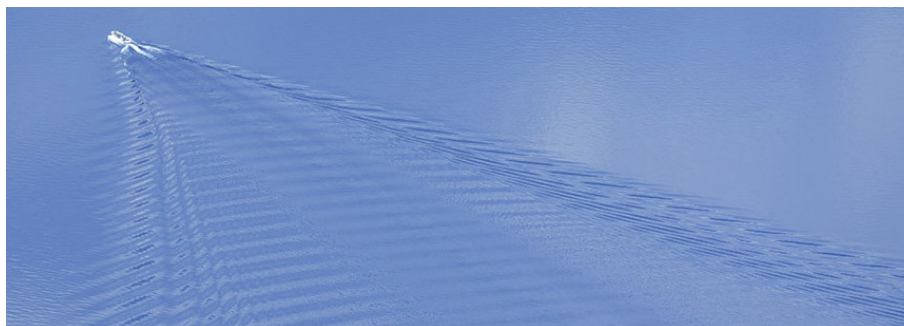
On note  $g$  l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et les vitesses sont mesurées dans le référentiel terrestre. On supposera que les courants sont négligeables, de sorte que la vitesse du bateau, supposée constante et rectiligne, représente aussi bien la vitesse du bateau dans le référentiel terrestre que la vitesse du bateau par rapport à l'eau. On la note  $U$  dans le sens de déplacement du bateau que l'on supposera dans toute l'épreuve se déplacer selon un axe  $x$ , l'axe  $z$  étant dirigé dans le sens vertical ascendant. On note  $L$  la longueur du bateau et on supposera que c'est la seule caractéristique géométrique importante du navire pour l'étude. Les caractéristiques des ondes à la surface de l'eau sont bien capturées par l'étude d'un nombre sans dimension, le nombre de Reech-Froude (ou plus simplement Froude), défini par

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}.$$

Les vecteurs unitaires selon  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont notés  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$ .

On considérera que l'eau et l'eau de mer ont les mêmes propriétés physico-chimiques, notamment la même masse volumique notée  $\rho$ .

Les résultats des applications numériques doivent être donnés avec un nombre de chiffres significatifs adapté à la précision des données et à la finalité des calculs : détermination d'un ordre de grandeur ou d'une valeur aussi précise que possible.



**Figure 1** L'avancée d'un bateau forme un sillage sur le Crater Lake dans l'Oregon  
Source : Wave pattern in lake, Jim Hicks, The Physics Teacher 55, 256 (2017)

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

# I Analyse des données de sillages

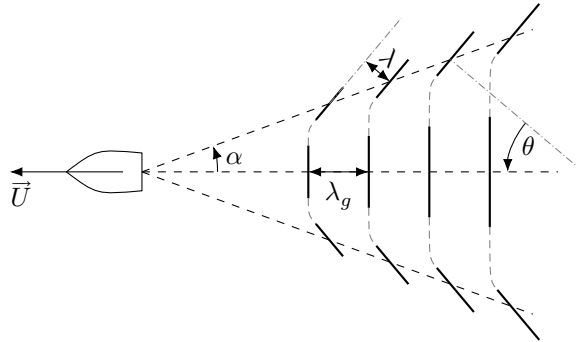
Cette première partie, dont les différentes sous-parties sont relativement indépendantes, cherche à estimer différents ordres de grandeur intervenant dans la physique des sillages et dans la mesure de leurs caractéristiques.

## I.A – Généralités

**Q 1.** À partir de la définition du nombre de Froude expliquée dans l'annexe 1, quelle est, en ordre de grandeur, l'expression de la vitesse des ondes de gravité ayant une longueur d'onde égale à  $L$ , la longueur du bateau ?

**Q 2.** Démontrer l'expression de la vitesse en fin d'une chute libre de hauteur  $L$  dans le champ de pesanteur. Comparer cette expression à celle obtenue à la question précédente.

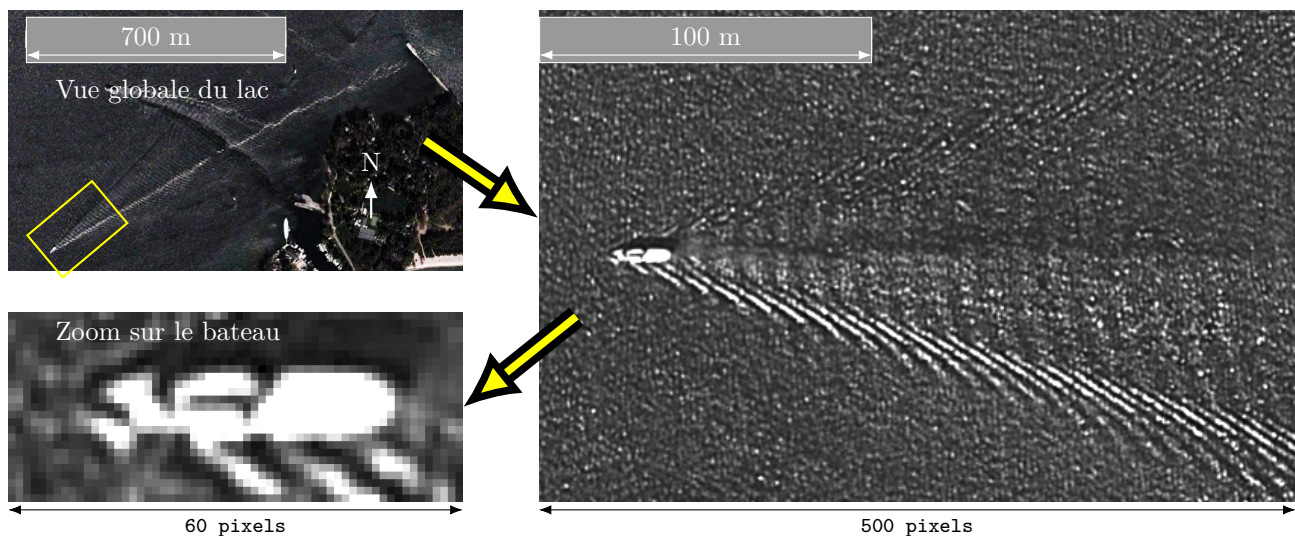
**Q 3.** Citer un autre nombre sans dimension utilisé en dynamique des fluides, en rappelant son nom, sa définition, ainsi que les effets qu'il compare.



**Figure 2** Notation des grandeurs caractéristiques sur la forme simplifiée d'un sillage « en V »

## I.B – Observation des sillages

La figure 3 présente une vue aérienne d'un bateau navigant sur le lac Ontario à différents niveaux de zoom.



**Figure 3** Zoom successifs sur l'image satellitaire d'un bateau créant un sillage sur le lac Ontario près de Toronto en Octobre 2013. Les contrastes ont été retouchés pour une meilleure visibilité. Source : Google Earth©

On estime la vitesse du bateau  $U$  grâce aux relations (I.1), faisant intervenir la longueur d'onde  $\lambda_g$  des ondes observées dans l'axe du bateau (figure 2), la longueur d'onde  $\lambda$  dans le sillage et l'angle  $\theta$ . Ces relations seront démontrées dans la partie III.

$$\lambda_g = \frac{2\pi U^2}{g} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_g}} \quad (\text{I.1})$$

**Q 4.** Dans cette question, il est attendu une rédaction détaillée et explicite des méthodes utilisées. Estimer la taille  $L$  du bateau sur la figure 3 et évaluer simplement l'incertitude sur cette mesure. De même, estimer l'angle du sillage  $\alpha$  en degrés, et la vitesse  $U$ , grandeurs définies sur la figure 2.

**Q 5.** Donner les coordonnées de ce sillage dans la représentation graphique de la figure 4 de l'annexe 1 et commenter.

### **I.C – Capillarité**

L'article aborde les effets correctifs dus à la tension superficielle à l'interface entre l'eau et l'air, où le coefficient de tension de surface est  $\gamma = 7 \times 10^{-2}$  dans le système d'unités international.

**Q 6.** Quelle est l'unité du coefficient de tension de surface ? Que mesure une telle grandeur ?

Un nombre sans dimension, que l'on notera  $We$ , caractérise les écoulements à l'interface entre un fluide de masse volumique  $\rho$  et un gaz, avec un coefficient de tension de surface  $\gamma$ . Il se construit à partir de  $\rho$ ,  $\gamma$ , la vitesse caractéristique de l'écoulement  $U$  et l'échelle spatiale  $L$  de l'écoulement. Il est inversement proportionnel à  $\gamma$  car il compare les effets de l'inertie à ceux de la tension de surface.

**Q 7.** Donner par analyse dimensionnelle l'expression de  $We$ .

**Q 8.** Évaluer  $We$  pour le bateau de la figure 3 et conclure quant à la prise en compte de la tension de surface pour la suite du sujet.

### **I.D – Force de trainée de vague**

Lorsqu'il se déplace, on peut considérer que le bateau de longueur  $L$  émet des vagues, de vitesse  $U$  autour de lui. Nous allons estimer la puissance dissipée dans les vagues et donc la force de frottement des vagues sur le bateau, dite de trainée de vague. L'étude se fait ici dans le référentiel terrestre et on étudie des petites vagues, c'est-à-dire des vagues dont l'amplitude  $a$  est très petite devant leur longueur d'onde  $\lambda$ . Les évaluations demandées dans cette partie sont des ordres de grandeur ; autrement dit, les facteurs numériques y ont peu d'importance. On s'attachera donc à ne donner que des relations de proportionnalité avec les paramètres physiques pertinents.

**Q 9.** Pour des ondes de gravité, quel type d'énergie, autre que l'énergie cinétique, est mis en jeu lors de la formation d'une vague d'une hauteur  $a$ , d'une longueur d'onde  $\lambda$  ?

**Q 10.** Donner une expression qui estime, en ordre de grandeur, cette énergie par unité de longueur de vague en fonction notamment de  $a$  et  $\lambda$ . Pour cette question, on pourra, entre autres, estimer pour une vague, son volume situé au dessus du niveau zéro, ainsi que l'altitude de son centre de gravité.

Dans l'étude de ce type d'onde, on peut montrer que l'énergie cinétique liée à l'existence de la vague possède en moyenne exactement la même valeur que l'énergie précédemment demandée, il n'est donc pas, en ordre de grandeur, nécessaire de la prendre en compte.

**Q 11.** Déterminer, en fonction des paramètres du problème, la fréquence de production de ces vagues, ainsi que l'ordre de grandeur de leur largeur.

**Q 12.** En déduire la puissance totale rayonnée dans les vagues et la force de trainée de vague  $F$  en fonction de  $\rho$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $L$  et  $U$ .

**Q 13.** En choisissant un ordre de grandeur raisonnable pour  $a$  et les valeurs trouvées pour  $L$  et  $U$ , calculer l'ordre de grandeur de  $P$ .

**Q 14.** Un bateau de plaisance de 52 pieds est vendu typiquement avec un moteur d'une puissance de 715 chevaux-vapeur : comparer et conclure.

### **I.E – Imagerie satellitaire**

Pour ces questions, la lecture de l'annexe 2 peut être utile.

On appelle résolution  $r$  d'une image la largeur à la surface de la Terre que couvre une image d'un pixel de large.

**Q 15.** En supposant que le satellite d'imagerie se situe sur une orbite circulaire, redémontrer l'expression donnant la période  $T$  du satellite autour de la Terre, en fonction de sa hauteur  $h$  de l'orbite mesurée depuis la surface terrestre, de  $M_T$  la masse de la Terre, de  $R_T$  le rayon terrestre et de  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation, puis en fonction uniquement de  $h$ ,  $R_T$  et  $g$  l'accélération de la pesanteur à la surface. Faire l'application numérique pour le temps de révolution d'un des satellites décrits dans l'annexe 2 et commenter.

**Q 16.** Quel est l'angle minimal  $\theta_r$  de résolution étant données la hauteur  $h$  du satellite et la résolution minimale  $r$  annoncée ?

**Q 17.** La taille d'un pixel sur le capteur des satellites SPOT 6 et 7 est de  $r_p = 12 \mu\text{m}$ . Quelle serait la focale équivalente  $f$  d'une lentille convergente qui aurait le même grandissement ? Commenter.

**Q 18.** Le système optique utilisé est limité par la diffraction provoquée par l'ouverture qui provoque une tâche d'Airy sur le plan focal. Donner l'expression de l'ordre de grandeur de l'ouverture angulaire  $\theta_d$  provoquée par la diffraction en fonction notamment de la longueur d'onde optique  $\lambda_o$ .

**Q 19.** Montrer que la taille  $r_d$  de la tâche de diffraction sur le capteur s'exprime  $r_d = A N_O \lambda_o$ , avec le nombre d'ouverture  $N_O$  donné dans l'annexe et dont on rappellera la valeur ici, et  $A$  une constante indéterminée.

**Q 20.** Faire une évaluation de  $r_d$  en prenant  $A = 2,44$  et  $\lambda_o = 600 \text{ nm}$  et commenter.

**Q 21.** Estimer la résolution de l'image sur la figure 3 et conclure.

## II Modèle hydrodynamique des ondes de surface

On étudie l'écoulement parfait d'un liquide incompressible et homogène de masse volumique  $\rho$ , sous l'influence de la pesanteur dont le champ est noté  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ .

On supposera que l'écoulement est bidimensionnel, avec un champ de vitesses de la forme  $\vec{v} = v_x(x, z, t)\vec{u}_x + v_z(x, z, t)\vec{u}_z$ . La pression dans le fluide est notée  $P$  et celle dans l'air, à la surface du fluide, est supposée uniforme et constante et notée  $P_{\text{air}}$ . Le fond du fluide est supposé plat à l'altitude  $z = -h$  ( $h > 0$ ) et sa surface libre, en l'absence d'ondes de surface, en  $z = 0$ . En présence d'ondes, l'altitude de la surface libre est notée  $z = \zeta(x, t)$  et est supposée très petite devant la longueur d'onde, ce qui signifie entre autres qu'évaluer une dérivée ou une fonction en  $z = \zeta(x, t)$  revient à l'évaluer en  $z = 0$ .

On rappelle l'équation d'Euler, décrivant l'écoulement du milieu fluide, dans les hypothèses et notations précédentes :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} \quad (\text{II.1})$$

Dans toute la suite, on linéariser les équations en supposant que la présence d'onde se réduit à une perturbation par rapport à l'état d'équilibre. On pourra noter les développements sous la forme  $\vec{v} = \vec{v}_1$  et  $P = p_0 + p_1$ , où  $\|\vec{v}_1\|$  est très petit devant la célérité des ondes étudiées et  $p_1 \ll p_0$ .

### II.A – Champ des vitesses

**Q 22.** Déterminer la forme de l'équation d'Euler à l'ordre le plus bas (vitesse nulle).

**Q 23.** En déduire l'expression explicite de  $p_0(z)$ , que l'on supposera toujours valide, même en présence d'ondes.

**Q 24.** Quelle équation lie alors  $p_1$  et  $\vec{v}_1$  ?

L'étude d'ondes de surface se ramène à l'étude des forme harmoniques complexes de pulsation  $\omega$ . On introduit alors la vitesse complexe  $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1,0}(x, z) \exp(j\omega t)$ , la pression complexe  $p_1 = p_{1,0}(x, z) \exp(j\omega t)$ , ainsi que l'altitude complexe  $\zeta(x, t) = \zeta_{1,0}(x) \exp(j\omega t)$ . Les grandeurs complexes associées  $\vec{v}_1$  et  $p_1$  vérifient alors l'équation précédemment trouvée.

**Q 25.** Quelle propriété de l'équation entre  $p_1$  et  $\vec{v}_1$  permet de se restreindre à l'étude des formes proposées ?

**Q 26.** Dans ces hypothèses, donner l'expression de  $\vec{v}_{1,0}$  en fonction de  $p_{1,0}$ ,  $\rho$  et  $\omega$ .

**Q 27.** En déduire que l'écoulement est irrotationnel et introduire le potentiel des vitesses  $\phi(x, z, t)$ .

**Q 28.** Montrer que le potentiel vérifie

$$\Delta \phi = 0. \quad (\text{II.2})$$

**Q 29.** Dans quelles autres situations en physique rencontre-t-on ce type d'équation ? Les décrire en quelques lignes.

**Q 30.** Montrer qu'en  $z = -h$ , on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (\text{II.3})$$

**Q 31.** Pourquoi peut-on considérer que,  $\forall x \in ]-\infty, +\infty[$ , le gradient de  $\phi$  est borné ?

On cherche les solutions de l'équation précédente sous la forme  $\phi = f(x)g(z) \exp(j\omega t)$ .

**Q 32.** Montrer que  $g(z)$  peut s'écrire  $g(z) = A \cosh(k(z + h))$ , où  $k$  est une constante.

**Q 33.** Déterminer complètement l'expression générale de  $\phi$  et donner une interprétation pour la signification de  $k$ .

**Q 34.** Commenter la forme de cette solution.

### II.B – Relation de dispersion

**Q 35.** Montrer que la pression totale et le potentiel sont reliés par  $\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \rho g z = \text{Constante}$ . En déduire qu'en  $z = \zeta(x, t)$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (\text{II.4})$$

**Q 36.** En déduire la relation de dispersion.

**Q 37.** Quelles sont les définitions et significations des vitesses de phase et de groupe ? Donner l'expression de la vitesse de phase en fonction de  $g$ ,  $h$  et  $k$ .

**Q 38.** Comment se simplifient les expressions de la relation de dispersion et de la vitesse de phase lorsque  $h \rightarrow \infty$ , cas de figure nommé « en eaux profondes » ?

**Q 39.** En pratique, en considérant qu'une erreur relative de  $e = 1\%$  est acceptable sur l'évaluation de la vitesse de phase, à partir de quelle profondeur  $h_\infty$  peut-on traiter des vagues comme si elles étaient en eau profonde ? Donner l'expression de  $h_\infty$  en fonction de  $e$  puis la valeur du rapport  $h_\infty/\lambda$  où  $\lambda$  représente la longueur d'onde.

**Q 40.** Interpréter l'évolution de la vitesse de phase lorsque les fonds marins remontent, notamment lorsqu'une vague s'approche d'un rivage.

### III Sillages en V

#### III.A – Cas des ondes acoustiques

Cette sous-partie étudie le comportement des ondes acoustiques dans un fluide.

On néglige l'effet de la pesanteur et on considère que la pression au repos est uniforme, on la note  $P_0$ . On considère enfin l'écoulement unidimensionnel dans ce fluide de masse volumique  $\rho(x, t)$ , de vitesse  $\vec{v} = v(x, t)\vec{u}_x$  et de pression  $P(x, t)$ . On pourra se référer à l'équation d'Euler donnée en (II.1).

**Q 41.** Par rapport aux conditions dans lesquelles les ondes de surfaces ont été étudiées en début de partie II, quelle est l'hypothèse majeure à modifier à propos du comportement du milieu ?

**Q 42.** Rappeler la définition, en fonction de la masse volumique et de la pression, du coefficient de compressibilité. Rappeler l'expression de l'équation locale de conservation de la masse.

**Q 43.** Introduire les grandeurs linéarisées associées à  $\rho$ ,  $\vec{v}$  et  $P$  dans l'approximation acoustique. Écrire, en le justifiant, le système des trois équations reliant ces grandeurs à l'ordre 1 et en déduire l'équation de propagation des ondes acoustiques sur  $v(x, t)$ .

**Q 44.** En déduire la célérité  $c$  des ondes acoustiques dans ce fluide et rappeler un ordre de grandeur pour la vitesse du son dans l'air.

**Q 45.** Démontrer la relation de dispersion de ces ondes. Quelle est la propriété importante de ce type de relation de dispersion ?

On considère maintenant un avion, considéré comme un point, se déplaçant à vitesse constante  $U$  dans une direction constante et émettant des ondes acoustiques, que l'on supposera sphériques, à mesure que l'avion avance.

**Q 46.** Dans le cas où  $U < c$ , proposer une représentation graphique à un instant  $t$ , dans le référentiel où l'air est immobile, de quelques surfaces d'ondes émises par l'avion avant l'instant  $t$ .

**Q 47.** En déduire une explication du phénomène d'effet Doppler.

**Q 48.** Dans le cas où  $U > c$ , proposer la même représentation. À un instant donné, que dire de la forme de l'enveloppe de toutes les ondes émises auparavant ?

**Q 49.** En considérant l'instant où l'avion émet une onde sphérique et l'instant où on l'observe après qu'elle s'est propagée et que l'avion a avancé, déterminer l'angle  $\alpha$  que fait l'enveloppe au dessus de l'axe de déplacement de l'avion. Exprimer cet angle en fonction de la grandeur adimensionnée  $M = U/c$  uniquement, nommée nombre de Mach.

#### III.B – Les ondes de surface

Dans la suite de cette partie III, nous négligeons les effets dus à la tension de surface et à la viscosité et nous supposons que l'eau est infiniment profonde. Dans ces hypothèses, la relation de dispersion des ondes de surface est, pour une pulsation  $\omega$  et un nombre d'onde  $k$ ,  $\omega^2 = gk$ .

On se place en régime permanent, le navire considéré avançant de manière rectiligne à vitesse constante  $U$  dans une direction constante, son vecteur vitesse est noté  $\vec{U}$ . Dans le référentiel du navire, on considère que le sillage est stationnaire.

Tous les angles sont mesurés par rapport à l'axe du navire (figure 2). On note  $O$  l'origine fixe du repère, sur l'axe du bateau,  $N$  la position du navire sur cet axe et pour un point  $M$  à la surface de l'eau,  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . On peut exprimer la position d'un point  $M$  sur l'eau du point de vue du navire en  $\vec{r}' = \overrightarrow{NM}$ .

Supposons pour commencer qu'une onde sphérique a été émise lors du passage du bateau au point  $O$  à  $t = 0$ . Loin du point  $O$ , cette onde sphérique peut être assimilée localement à une onde plane.

**Q 50.** Donner la forme générale de la phase de  $\zeta(\vec{r}, t)$  pour une onde plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  (le nombre d'onde est donc  $k = \|\vec{k}\|$ ).

**Q 51.** En exprimant cette phase en fonction de  $\vec{r}'$ , montrer que le sillage peut être considéré stationnaire dans le référentiel du bateau si la relation, dite de stationnarité,  $\omega = \vec{U} \cdot \vec{k}$  est vérifiée.

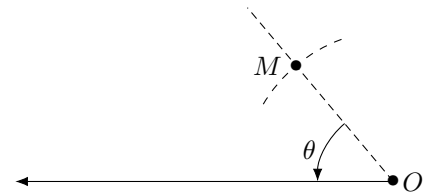
**Q 52.** Montrer que cette relation se met aussi sous la forme  $v_\varphi(k) = U \cos \theta$ , l'angle  $\theta$  étant défini sur la figure 2 : angle entre la direction du déplacement du navire et celle du vecteur  $\vec{k}$ .

**Q 53.** En déduire les deux relations données en (I.1).



**Q 54.** Sur le graphique de la figure 4, réalisé à l'instant  $t$  dans le référentiel où le fluide est immobile, on a représenté un point  $M$  situé dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec la trajectoire du navire sur la surface d'onde ayant été émise en  $O$  à l'instant  $t = 0$ . Reproduire le schéma sur la copie en plaçant avec précision le point  $N$  : position du navire à l'instant  $t$ .

**Q 55.** En déduire l'angle  $\beta$ , sous lequel le navire voit le point  $M$  par rapport à l'axe du navire et depuis celui-ci, en fonction de  $\theta$ .



**Figure 4**

Lorsque le navire avance, de nombreuses pulsations sont émises à chaque instant. Autrement dit, ce sont bien des paquets d'onde qui sont émis par le passage du navire. Ainsi, pour un paquet d'onde de nombre d'onde principal  $k$ , on peut associer un angle  $\alpha(k)$  selon lequel le paquet d'onde sera visible depuis le navire.

**Q 56.** Déterminer la relation entre la vitesse de phase  $v_\varphi$  et la vitesse de groupe  $v_g$ .

**Q 57.** Sur le schéma précédent, représenter la position  $P$  du maximum du paquet d'onde émis à l'instant  $t = 0$  depuis  $O$  et se propageant dans la direction faisant un angle  $\theta$  avec la trajectoire du navire selon la condition de stationnarité. Le point  $P$  est vu sous un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe du navire et depuis celui-ci (figure 2).

**Q 58.** Montrer la relation  $\tan(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} \tan \beta$ .

**Q 59.** En déduire l'expression explicite de  $\alpha$  en fonction de  $\beta$ .

**Q 60.** Montrer, en introduisant  $y = \tan \alpha$  et  $x = \tan \beta$ , que  $\alpha$  atteint un maximum  $\alpha_{\max}$  à déterminer numériquement.

**Q 61.** Expliquer pourquoi le sillage est observé dans la direction  $\alpha_{\max}$ . On pourra s'aider d'une analogie avec un phénomène optique. Comparer avec les résultats cités dans l'article de l'annexe 1.

## Données

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Rayon moyen de la Terre

$$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$$

Accélération de la pesanteur à la latitude  $45^\circ$  à la surface de la Terre

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Masse volumique de l'eau pure à  $10^\circ\text{C}$

$$\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

## Unités hors Système International

| Nom                     | Symbole | Valeur   |
|-------------------------|---------|----------|
| Pied                    | ft      | 0,3048 m |
| Cheval-vapeur (anglais) | h       | 746 W    |

## Formulaire

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{d(\cosh(x))}{dx} = \sinh(x)$$

$$\frac{d(\sinh(x))}{dx} = \cosh(x)$$

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{d(\arctan(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Delta f(x, y, z) = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x, y, z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

# Du neuf dans les sillages

Marc Rabaud (marc.rabaud@u-psud.fr) et Frédéric Moisy  
Laboratoire FAST, CNRS UMR 7608, Université Paris-Sud, 91405 Orsay

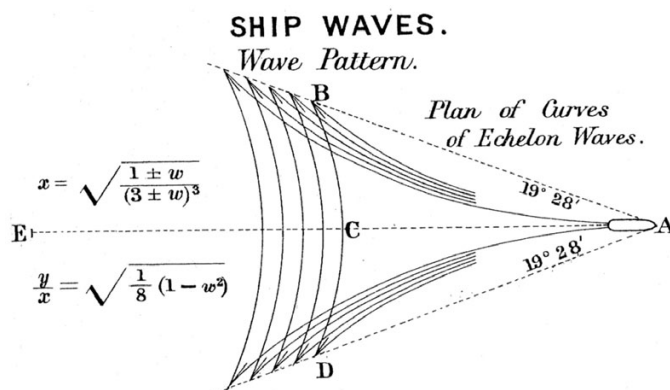
Les vagues observées dans le sillage des bateaux ont été étudiées depuis longtemps, et l'on croyait le phénomène bien compris.

Mais l'étude des bateaux rapides a révélé un sillage plus étroit que prévu par la théorie classique de Kelvin. Ce qui, finalement, peut s'expliquer assez simplement...

Chacun de nous a déjà vu les petites vagues formant un « V » qui accompagnent un canard nageant sur un étang (fig. 1). Un sillage similaire est visible à l'arrière d'un bateau avançant sur eau plate, et plus généralement derrière tout obstacle se déplaçant pas trop lentement à la surface d'un liquide. Au-delà de son aspect esthétique, l'existence de ce sillage a de nombreuses conséquences car les vagues qui le composent transportent de l'énergie loin du bateau. On peut s'en apercevoir à la manière dont un bateau rentrant un peu trop vite dans un port secoue les autres bateaux amarrés. Cette énergie rayonnée correspond au travail d'une force qui freine le bateau, force dite de « traînée de vague ». À haute vitesse, cette force de traînée de vague devient même la contribution dominante à la résistance à l'avancement des navires.

Le premier scientifique à s'être intéressé à cet effet est sans doute William Froude qui, au XIX<sup>e</sup> siècle, initia l'utilisation de

maquettes pour des essais de traction en hydrodynamique navale [1]. C'est toutefois le nom de Kelvin qui est associé aux sillages de vagues car c'est lui qui, en 1887 (il portait alors encore le nom de William Thomson), fut le premier à expliquer la forme du sillage [2]. En développant pour cette occasion la méthode dite de la phase stationnaire, qui s'est avérée depuis très riche dans de nombreuses branches de la physique, il démontra que la crête des ondes en eaux profondes dessine des formes « en trompette », dont les points de rebroussement sont situés sur les bords du « V » (fig. 2). Le résultat le plus surprenant est que le demi-angle au sommet de ce « V » vaut  $\alpha_0 = \arcsin(1/3) = 19,47^\circ$ , et ceci quelles que soient la vitesse  $U$  et la taille  $L$  de l'obstacle en mouvement. Ce très beau résultat, essentiellement géométrique, est devenu un grand classique de la physique des vagues, et il est souvent présenté en cours ou dans les livres d'enseignement pour illustrer les propriétés de dispersion des ondes de gravité (voir encadré 1).



2. Illustration issue de l'article de Lord Kelvin montrant les lignes isophases des vagues d'accompagnement « en chevrons » d'un navire se déplaçant selon ECA [2]. On y distingue les ondes transverses BCD qui se propagent dans la direction du déplacement du bateau, et les ondes divergentes BA et DA qui s'éloignent de la trajectoire du bateau. Les points de rebroussement B et D constituent les bords du sillage en « V », dit de Kelvin. Les équations reportées sur la figure donnent une représentation paramétrique  $(y, x)$  des lignes isophases, où le paramètre  $w$  varie dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .





1. Canard nageant à la surface d'un lac.

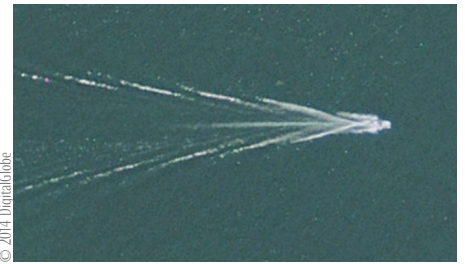
## La théorie de Kelvin apparemment mise en défaut

Pourtant, en réalisant une démonstration de cours avec des étudiants autour d'une piscine, nous avons constaté que les mesures n'étaient clairement pas en accord avec la belle théorie de Kelvin. Plus la vitesse de l'obstacle était grande et plus l'angle du sillage diminuait ! Ce résultat semblait d'ailleurs confirmé par certaines photos de vedettes rapides montrant des sillages étroits.

Nous avons donc voulu mieux analyser ce phénomène. Il y a toutefois deux difficultés à surmonter d'un point de vue expérimental : (i) si l'on travaille en piscine avec des maquettes forcément relativement petites, il y a des effets correctifs dus aux

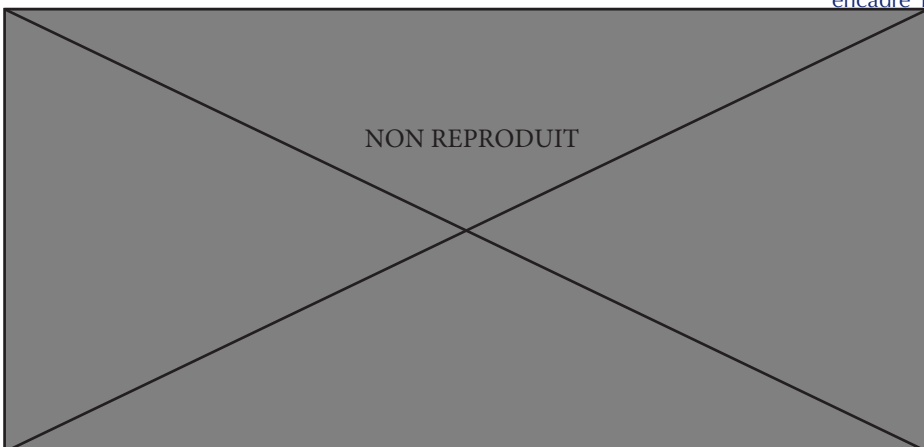
forces capillaires, ce qui vient compliquer la géométrie du sillage [9], et (ii) si l'on travaille à l'échelle 1:1 à partir de photographies de sillages de vrais bateaux, il est souvent difficile de mesurer précisément les angles à cause d'effets de perspective. Nous avons contourné ces difficultés en travaillant à partir d'images aériennes, et donc en incidence presque normale, disponibles sur Internet grâce à Google Earth<sup>®</sup>. En sélectionnant des images au-dessus de lacs ou du littoral pour avoir une bonne résolution, nous avons mesuré des angles de sillages qui varient entre 7 et 20° (fig. 3 et réf. [3]).

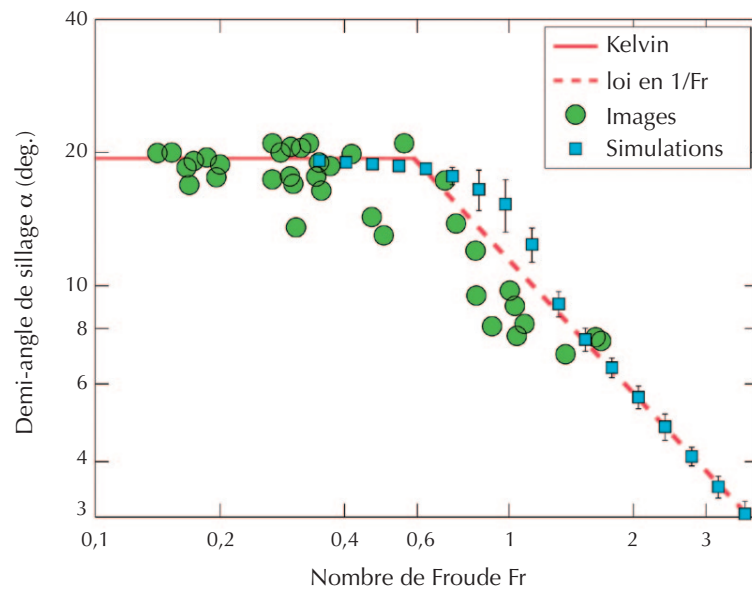
Autre avantage de ces images aériennes, elles sont disponibles avec une calibration spatiale qui permet de mesurer la longueur  $L$  des bateaux d'une part, mais aussi de calculer



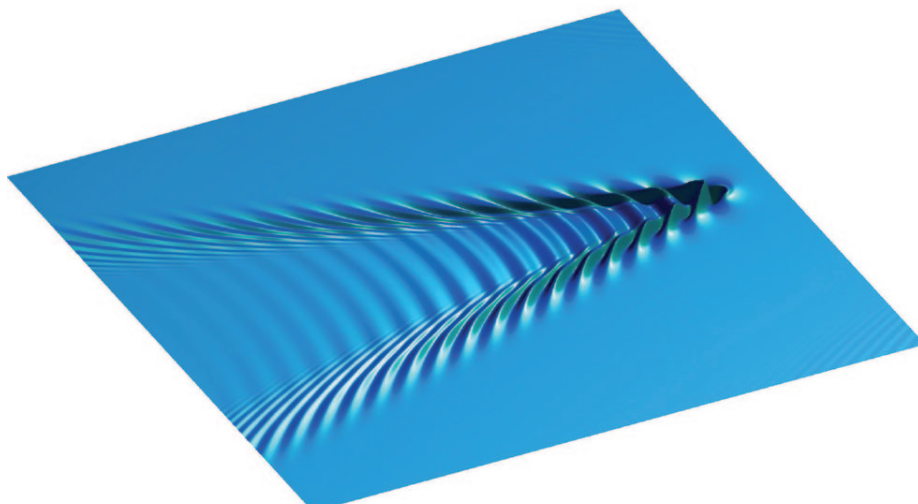
3. Vue aérienne d'un sillage étroit, d'environ 9 degrés, d'une vedette rapide sur le lac Ontario près de Toronto.

leur vitesse  $U$ . En effet, à partir de la mesure de la longueur d'onde visible dans le sillage et de la direction de propagation de ces ondes, la condition de stationnarité (présentée dans l'encadré 2) permet de déterminer la vitesse du bateau. Nous avons alors tracé la valeur des angles de sillages en fonction du nombre de Froude de coque, nombre sans dimension défini par  $Fr = U/(gL)^{1/2}$ , et qui compare la vitesse du bateau à la vitesse des ondes de gravité ayant pour longueur d'onde la longueur du bateau. La figure 4 montre que les résultats se rassemblent assez bien sur une courbe unique. Tant que  $Fr < 0,5$ , les mesures sont en accord avec la prédiction de Kelvin d'un angle constant. Mais au-delà de cette valeur elles montrent une nette décroissance, suivant une loi en  $1/Fr$ . Ces observations ont été confirmées en simulant numériquement l'émission d'ondes de gravité par un objet en mouvement [4], et ont été récemment confirmées analytiquement par des collègues de l'ESPCI [5].

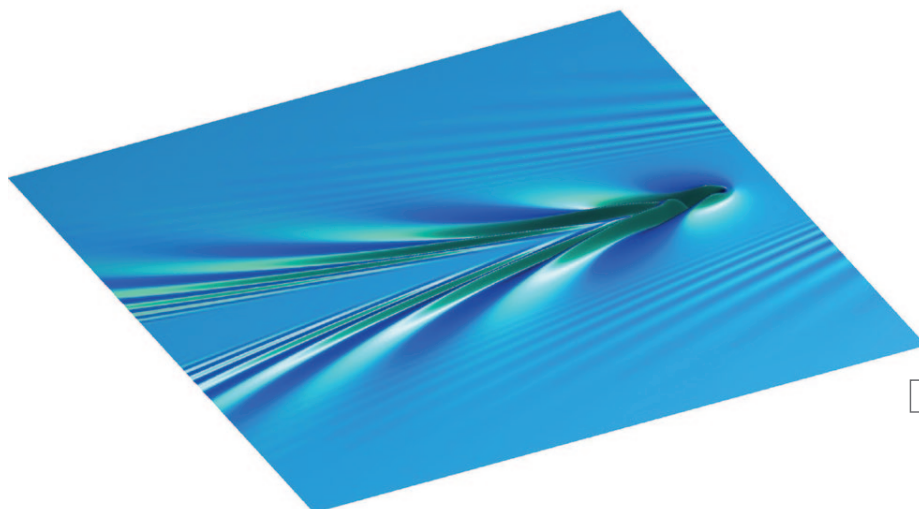




4. Évolution du demi-angle  $\alpha$  du sillage observé en fonction du nombre de Froude  $Fr = U/(gl)^{1/2}$ , montrant une transition entre le régime de Kelvin (angle constant égal à  $19,47^\circ$ ) et le régime en  $1/Fr$  à haute vitesse.



a



b

5. Simulation numérique d'un sillage induit par une perturbation de pression gaussienne se déplaçant à nombre de Froude  $Fr = 0,5$  (a) et  $1,5$  (b).

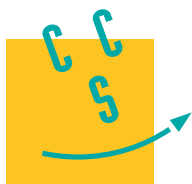
## Annexe 2 : Imagerie satellitaire

Google Earth© achète ses images satellites à de nombreux prestataires, principalement Landsat©. Un autre fournisseur d'images est Spot Images©, propriétaire des satellites d'imagerie SPOT. Ainsi, la résolution n'est pas la même selon l'endroit observé sur le globe et le satellite utilisé. La résolution observée sur Google Earth© va de 15 mètres par pixels à 15 centimètres par pixel. Le satellite d'imagerie commerciale le plus récent est GeoEye 1, qui possède une résolution de 41 centimètres par pixel.

SPOT 6 et SPOT 7 forment une constellation de satellites d'observation de la Terre conçue pour assurer la continuité de la disponibilité des données haute résolution et large champ jusqu'en 2024. L'encadré ci-dessous est la traduction d'un extrait des données techniques fournies par Astrium, constructeur des satellites SPOT.

- Architecture générale : double instrument optique sur l'axe central, un viseur d'étoiles à trois têtes, un gyroscope à fibre optique (FOG) et quatre roues de réaction gyroscopiques (Control Moment Gyroscopes).
- Taille du satellite : approximativement  $1,55 \times 1,75 \times 2,7$  m.
- Caractéristiques spatiales :
  - orbite héliosynchrone à 694 km d'altitude ;
  - période 98,79 min ;
  - dates de lancement
    - ★ SPOT 6, le 9 septembre 2012 (lanceur PSLV indien),
    - ★ SPOT 7, le 30 juin 2014 (lanceur PSLV indien).
- Capacités d'imagerie :
  - résolution des images produites, 1,5 m en panchromatique (0,450–745  $\mu\text{m}$ ) ;
  - angle de vue, rotation de la prise de vue de  $\pm 30^\circ$  en 14 secondes ;
  - mode d'imagerie nominal, bandes de 60 km de large orientées dans l'axe Nord/Sud, jusqu'à 600 km de long ;
  - 5 bandes spectrales d'acquisition simultanées, panchromatique (0,450–745  $\mu\text{m}$ ), bleu (0,450–0,520  $\mu\text{m}$ ), vert (0,530–0,590  $\mu\text{m}$ ), rouge (0,620–0,695  $\mu\text{m}$ ) et proche infra-rouge (0,760–0,890  $\mu\text{m}$ ) ;
  - programmation réactive, 6 plans de programmation par jour par satellite ;
  - capacité d'acquisition,  $3 \times 10^6$  km<sup>2</sup> par jour et par satellite ;
  - mode d'imagerie stéréo possible ;
  - capacité de stockage embarqué, 1 Tbits (SSD) ;
  - débit descendant, 300 Mbits/s dans la bande X (8–12 GHz).
- Caractéristiques des instruments optiques :
  - 2 télescopes optiques Korsh identiques (type Cassegrain) par satellite, comprenant chacun trois miroirs asphériques et deux miroirs de repliement ;
  - miroir principal de diamètre  $D = 200$  mm et nombre d'ouverture (rapport entre la distance focale et le diamètre d'ouverture) de 16 ;
  - capteur panchromatique, matrice CCD 12 bits type TDI (time delay integration) de 7000 pixels de large, taille d'un pixel : 12  $\mu\text{m}$ .

• • • FIN • • •

*Physique dans la salle de bain*

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

**I Arrivée d'eau**

Dans une salle de bain, l'eau est délivrée par deux types de robinets : le mitigeur mécanique pour les lavabos et le mitigeur thermostatique pour la douche ou la baignoire (figure 1).



**Figure 1** Exemples de mitigeurs

Dans le mitigeur mécanique, l'eau froide et l'eau chaude sont mélangées dans des proportions réglables par une position angulaire de la poignée et le débit réglable indépendamment par l'inclinaison de la poignée. L'écoulement est étudié en régime stationnaire et on note  $D_C$  et  $D_F$  les débits massiques respectifs de l'eau chaude (température  $T_C$ ) et de l'eau froide (température  $T_F$ ) à l'entrée dans le mélangeur et  $D_s$  le débit massique de l'eau en sortie (température  $T_s$ ).

On suppose que la capacité thermique massique de l'eau est indépendante de sa température.

**Q 1.** Parmi les quatre valeurs proposées ci-dessous, quel débit  $D_s$  en sortie du mitigeur correspond à un fonctionnement normal ? Argumenter.

a.  $2,0 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$

c.  $2,0 \times 10^2 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$

b.  $2,0 \times 10^1 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$

d.  $2,0 \times 10^3 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$

**Q 2.** Relier  $D_s$  à  $D_F$  et  $D_C$ .

**Q 3.** Pourquoi peut-on faire l'hypothèse que l'eau dans le corps du mélangeur ne reçoit aucune puissance thermique de la part de l'air environnant ?

**Q 4.** Détailler le raisonnement qui aboutit à  $D_s h_s = D_C h_C + D_F h_F$  où  $h_s$ ,  $h_C$  et  $h_F$  sont les enthalpies massiques respectives de l'eau en sortie, chaude et froide.

**Q 5.** En déduire l'expression de  $T_s$  en fonction des deux températures d'entrée et des débits massiques.

La légionellose est une maladie infectieuse due à une bactérie qui se développe dans les réseaux d'eau douce dont la température est comprise entre 25 et 45 °C. À 50 °C, sa croissance est stoppée, mais la bactérie survit ; à 55 °C, le temps de destruction est de plusieurs heures, à 60 °C il est de 32 minutes, à 70 °C de une minute (source : DRASS/DASS). Dans les logements où la production d'eau chaude est individuelle, il est donc recommandé de maintenir l'eau du ballon de stockage à une température de plus de 55 °C et une fois par semaine de produire une eau à 70 °C. La température d'eau chaude à l'arrivée au robinet doit être au moins de 50 °C.

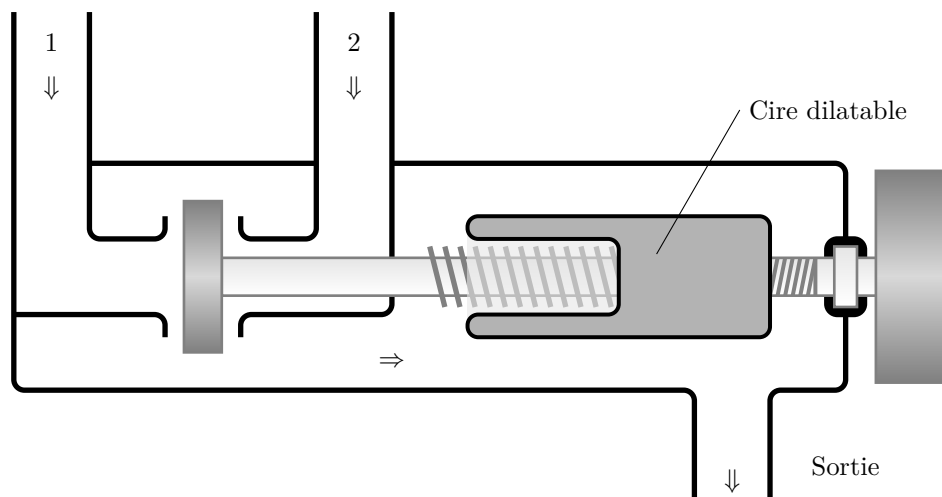
La gravité d'une brûlure est fonction de la température de l'eau et du temps de contact avec la peau. Une brûlure au troisième degré survient lors d'une exposition de la peau d'une seconde à 70 °C, 7 secondes à 60 °C pour l'adulte et 3 secondes pour l'enfant, 8 minutes à 50 °C, pour l'adulte, 60 secondes pour l'enfant. (source : [http://www.porcher.com/normes\\_et\\_reglementation/risque\\_de\\_brulure.html](http://www.porcher.com/normes_et_reglementation/risque_de_brulure.html)).

Un mitigeur mécanique est réglé pour que la température de sortie soit de 42 °C lorsque  $T_C = 50^\circ\text{C}$  et  $T_F = 18^\circ\text{C}$ . La manette est alors abaissée en position robinet fermé. Durant la nuit, l'eau chaude sanitaire est produite à une température de 70 °C.

**Q 6.** Y a-t-il un risque de brûlure à l'ouverture du mitigeur le matin si on lève simplement la manette sans la tourner ni à gauche ni à droite ?

Un mitigeur thermostatique contient un élément dilatable, par exemple une cartouche de cire. Si la température de l'eau chaude augmente brusquement, la régulation de température de l'eau de sortie est alors effectuée sans agir sur le réglage de la manette.

**Q 7.** L'eau chaude arrive-t-elle sur l'entrée 1 ou l'entrée 2 du schéma de la figure 2 ? Justifier.



**Figure 2** Mitigeur thermostatique schématique

## II L'air humide

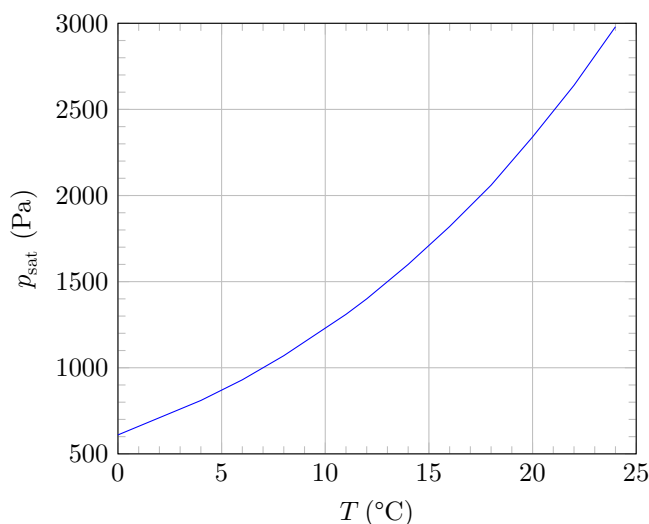
### II.A – Grandeurs caractérisant un air humide

L'air renferme toujours une proportion d'eau sous forme vapeur. On le qualifie d'air humide et on le caractérise par

- son *humidité absolue*  $x = m_v/m_{as}$  où  $m_v$  et  $m_{as}$  sont respectivement les masses de vapeur d'eau et d'air sec dans un volume  $V$  quelconque d'air humide ;
- son *humidité relative*  $HR$  (ou *degré hygrométrique*) à la température  $T$  :  $HR = \frac{p_v(T)}{p_{sat}(T)}$  où  $p_v$  est la pression partielle en vapeur d'eau et  $p_{sat}$  la pression de vapeur saturante dont la dépendance avec la température est donnée par la figure 3.

Dans la suite, l'air humide sera étudié comme un mélange de deux gaz parfaits : l'air sec (indice as) et la vapeur d'eau (indice v). La pression totale  $p$  de l'air humide sera considérée constante et égale à  $p = 1,013$  bar.

On note respectivement  $M_{as}$  et  $M_e$  les masses molaires de l'air sec et de l'eau.



**Figure 3** Pression de vapeur saturante en fonction de la température

**Q 8.** Montrer que  $x = d \frac{p_v}{p - p_v}$  où  $d = M_e/M_{as}$ .

**Q 9.** Calculer la valeur maximale de l'humidité absolue  $x_{sat}$  de l'air humide à la température  $T_0 = 20$  °C.

On considère une chambre hermétiquement fermée de volume  $V = 40\text{m}^3$  occupée par une personne qui se couche à 22 h. La température de la pièce est de  $18^\circ\text{C}$  et l'humidité relative est de 50 %. La chambre n'est pas chauffée et la température au lever à 8 h le lendemain matin est de  $16^\circ\text{C}$ . On trouvera en fin d'énoncé quelques exemples de sources d'eau vapeur, ainsi que leur débit de production.

**Q 10.** Au lever, l'occupant de la chambre constate-t-il une condensation de l'eau ? La réponse doit s'appuyer sur un raisonnement quantitatif.

Le problème de la condensation peut être résolu en aérant les pièces du logement suffisamment et régulièrement. Certaines personnes sont réticentes à aérer lors des journées humides où l'air extérieur est froid et saturé en vapeur d'eau.

Considérons une pièce initialement à la température  $T_i = 20^\circ\text{C}$  et saturée en vapeur d'eau. L'air extérieur est à la température  $T_a = 10^\circ\text{C}$  et est aussi saturé en vapeur d'eau. On renouvelle entièrement l'air de la pièce avec courant d'air.

**Q 11.** Calculer l'humidité relative de l'air de la pièce après aération une fois que l'air est revenu à la température  $T_i = 20^\circ\text{C}$  par contact avec les meubles, le plafond et les parois intérieures de la pièce. Conclure.

## II.B – Étude d'un hygromètre : le psychromètre

Un psychromètre est un instrument comportant deux thermomètres qui permet d'accéder à l'humidité relative de l'air ambiant. Ce dernier circule autour des réservoirs des deux thermomètres par aspiration ou par mouvement des thermomètres pour un psychromètre à fronde (figure 4). Le thermomètre dit « sec » indique la température  $T_1$  de l'air ambiant étudié. Le thermomètre dit « humide » a son réservoir recouvert d'un tissu mouillé et indique la « température humide »  $T_h$ .

L'humidité relative  $HR$  se déduit alors des mesures de  $T_1$  et  $T_h$ .

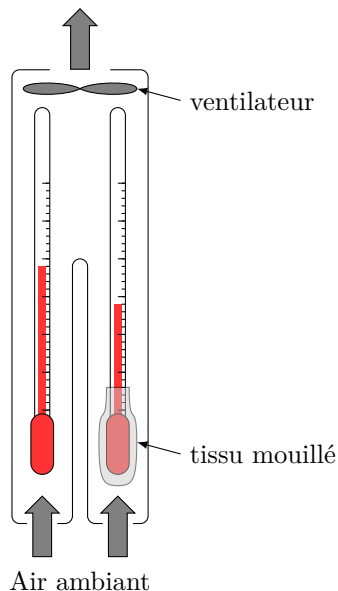
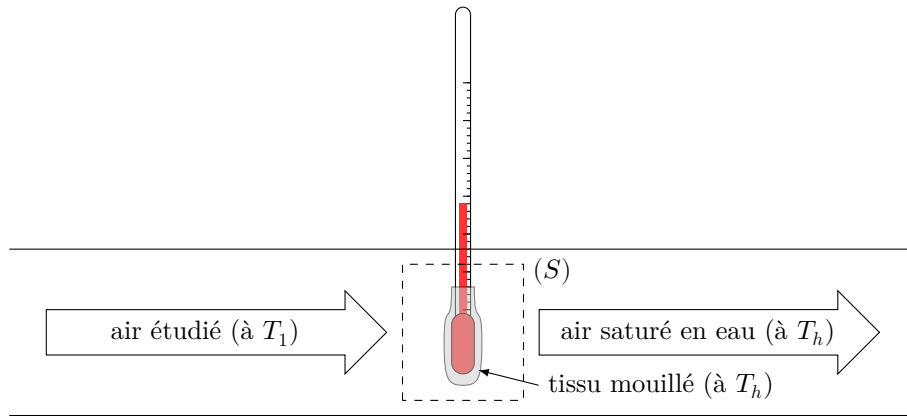


Figure 4 Psychromètres

### II.B.1) Étude du thermomètre humide

La figure 5 schématise le transport de l'air humide sur le thermomètre à bulbe humide. La température de sortie  $T_h$  est déterminée à l'aide d'un bilan thermodynamique appliqué à la surface de contrôle ( $S$ ) représentée sur la figure 5. À l'entrée, la température de l'air vaut  $T_1$  et l'humidité absolue est  $x_1$ . À la sortie, la température est  $T_h$  et l'humidité absolue est  $x_2 = x_{\text{sat}}(T_h)$ . Le débit massique d'air sec dans l'écoulement est noté  $D_{m,\text{as}}$ . La pression est uniforme et constante et vaut  $p = 1,013\text{ bar}$ . On néglige tout transfert thermique à travers la surface de contrôle ( $S$ ).





**Figure 5** Thermomètre à bulbe humide

**Q 12.** À l'aide d'un bilan de masse d'eau réalisé entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  sur le système fermé ( $\mathcal{S}_f$ ), délimité à l'instant  $t$  par la surface de contrôle ( $S$ ), montrer que la masse d'eau évaporée par unité de temps, notée  $\dot{m}_{ev}$ , vérifie  $\dot{m}_{ev} = D_{m,as}(x_{sat}(T_h) - x_1)$ . Il est conseillé de faire un schéma du système ( $\mathcal{S}_f$ ) aux instants  $t$  et  $t + dt$ .

**Q 13.** À l'aide d'un bilan d'enthalpie réalisé sur le système fermé ( $\mathcal{S}_f$ ) entre deux instants  $t$  et  $t + dt$ , montrer que

$$x_1 = \frac{x_{sat}(T_h)L_v(T_h) + c_{p,as}(T_h - T_1)}{L_v(T_h) + c_{p,v}(T_1 - T_h)}$$

où

- $c_{p,as} = 1004 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  est la capacité thermique massique à pression constante de l'air sec ;
- $c_{p,v} = 2010 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  est la capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau ;
- $L_v(T) = 3155 - 2,39T$  (en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  avec  $273 \leq T \leq 323$  en K), est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à la température  $T$ .

**Q 14.** Après comparaison des ordres de grandeur des termes de l'expression de  $x_1$ , montrer que l'humidité absolue de l'air devient

$$x_1 \approx x_{sat}(T_h) - A(T_1 - T_h)$$

où on exprimera  $A$  en fonction des données.

On montre alors que l'humidité relative de l'air étudié est

$$HR = \frac{p_{sat}(T_h)}{p_{sat}(T_1)} \left( 1 - \frac{\gamma}{p_{sat}(T_h)} (T_1 - T_h) \right)$$

où  $\gamma = \frac{c_{p,as}}{L_v(T_h)} \frac{M_{as}}{M_e} p$  est la *constante psychrométrique*.

**Q 15.** *Application numérique* On mesure  $T_1 = 20^\circ \text{C}$  et  $T_h = 15^\circ \text{C}$ . En déduire l'humidité relative  $HR$  de l'air étudié.

**Q 16.** Le diagramme psychrométrique donné figure A du document réponse confirme-t-il cette valeur ? Justifier en annotant cette figure à rendre avec la copie.

### III Miroir antibuée

Certaines pièces d'un logement sont plus exposées à une humidité relative importante voire maximale. C'est le cas des salles de bain où les sources de vapeur d'eau sont multiples. On s'intéresse dans cette partie à la formation de buée sur les parois froides et à un dispositif antibuée placé au dos d'un miroir.

On considère une salle de bain séparée de l'air extérieur de température  $T_e$  par un mur homogène d'épaisseur  $e_1 = 50 \text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_1 = 1,7 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Ce mur a une largeur  $L = 2,4 \text{ m}$  et une hauteur  $H = 2,5 \text{ m}$ .

**Q 17.** La différence de température entre la paroi intérieure et la paroi extérieure du mur est notée  $\delta T$ . Déterminer, en fonction des données, la puissance thermique  $P_{th}$  qui traverse le mur.

**Q 18.** En déduire que la résistance thermique de conduction du mur  $R_{c,1}$  peut s'écrire  $R_{c,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1}$  où  $S_1$  est une surface qui l'on explicitera.



Les transferts thermiques de nature conducto-convective sont régis pas la loi de Newton : la puissance thermique surfacique cédée par une paroi de température  $T_p$  au fluide environnant dont la température, loin de la paroi, vaut  $T_f$  est  $p_s = h(T_p - T_f)$  où  $h$  est le coefficient de transfert thermique conducto-convectif.

À l'interface mur-air intérieur à la salle de bain :  $h_i = 5,0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

À l'interface mur-air extérieur à la salle de bain :  $h_e = 20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

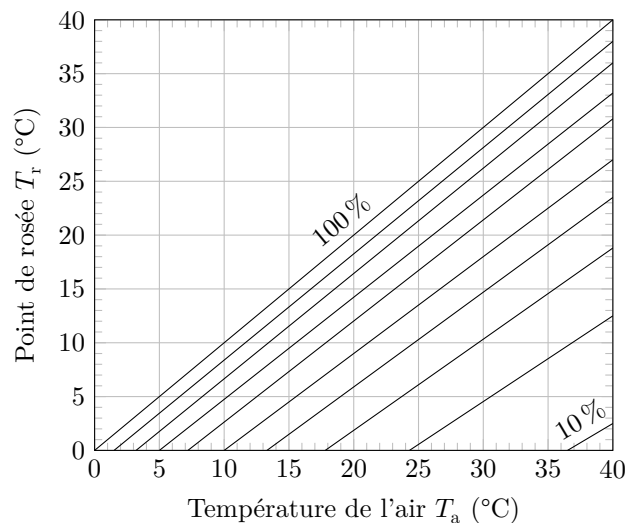
**Q 19.** Expliquer qualitativement pourquoi le coefficient de transfert thermique conducto-convectif entre le mur et l'air est plus grand à l'extérieur qu'à l'intérieur.

**Q 20.** Exprimer les résistances thermiques de nature conducto-convectives à chaque interface en fonction de  $h_e$ ,  $h_i$  et  $S_1$ .

**Q 21.** Montrer, qu'en régime stationnaire, la température de surface de la paroi intérieure du mur de salle de bain s'écrit  $T_{s,i} = T_e + \alpha(T_i - T_e)$ , où l'on exprimera  $\alpha$  en fonction des paramètres du problème.

**Q 22.** *Application numérique* En prenant  $T_i = 20^\circ\text{C}$ , calculer  $T_{s,i}$  pour  $T_e = 5,0^\circ\text{C}$ .

Le point de rosée ou température de rosée est la température la plus basse à laquelle une masse d'air peut être soumise, à pression et humidité données, sans qu'il se produise une formation d'eau liquide par saturation. La figure 6 donne le point de rosée en fonction de la température de l'air pour différents niveaux d'humidité relative.



**Figure 6** Point de rosée pour une humidité relative de 10 à 100 % par pas de 10 %

Un miroir carré de 50 cm de côté, de surface  $S_m$ , de conductivité thermique  $\lambda_2 = 1,0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_2 = 3,0 \text{ mm}$  est collé au mur séparant la salle de bain de l'extérieur. En plus des données fournies en fin d'énoncé, on précise que le volume intérieur de la salle de bain est  $V = 15 \text{ m}^3$  et que l'humidité relative initiale est de 50 %.

**Q 23.** Y a-t-il de la buée sur le miroir avant que l'occupant ne prenne une douche ? On prendra les mêmes valeurs de  $T_i$  et  $T_e$  qu'à la question précédente et on admettra que les coefficients conducto-convectifs mur-air et miroir-air sont identiques.

**Q 24.** À partir de quelle durée de douche de la buée apparaît-elle inévitablement sur le miroir ?

Pour éviter la formation de buée sur le miroir même lorsque l'humidité relative est de 100 %, on peut placer au dos du miroir, un film antibuée adhésif. Ce film est alimenté par la tension du secteur (alternatif, 230 V efficace) et apporte une puissance thermique  $\mathcal{P}_0$  sur la face arrière du miroir.

**Q 25.** La figure 7 propose quatre schémas électriques équivalents au schéma thermique de la situation étudiée où  $T_s$  est la température de la face visible du miroir. Recopier le bon schéma en justifiant le choix. Donner également les expressions des trois résistances thermiques présentes dans le schéma en fonction de  $S_m$ ,  $h_e$ ,  $h_i$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Les coefficients de transfert conducto-convectifs miroir-air et mur-air sont supposés identiques.

**Q 26.** Quelle puissance minimale le film antibuée doit-il apporter pour éviter la formation de buée quelle que soit l'humidité relative ?

Le film antibuée utilisé (environ  $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ ) est composé de 38 bandes noires d'encre conductrices à base de poudre de carbone (figure 8). Il est alimenté par la tension du réseau électrique local, sinusoïdale de valeur efficace 230 V. Trois bandes de cuivre assurent la fermeture du circuit électrique (une bande de longueur 50 cm environ et deux bandes de 25 cm). Un zoom des connexions des fils d'alimentation du film est fourni par la figure 8. Les bandes noire d'encre conductrice sont chacune de longueur  $L = 48 \text{ cm}$ , de largeur  $\ell = 9,5 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $e = 0,10 \text{ mm}$ . Le constructeur annonce une puissance de 50 W.

**Q 27.** Les caractéristiques du film permettent-elle d'éviter la formation de buée sur le miroir ?

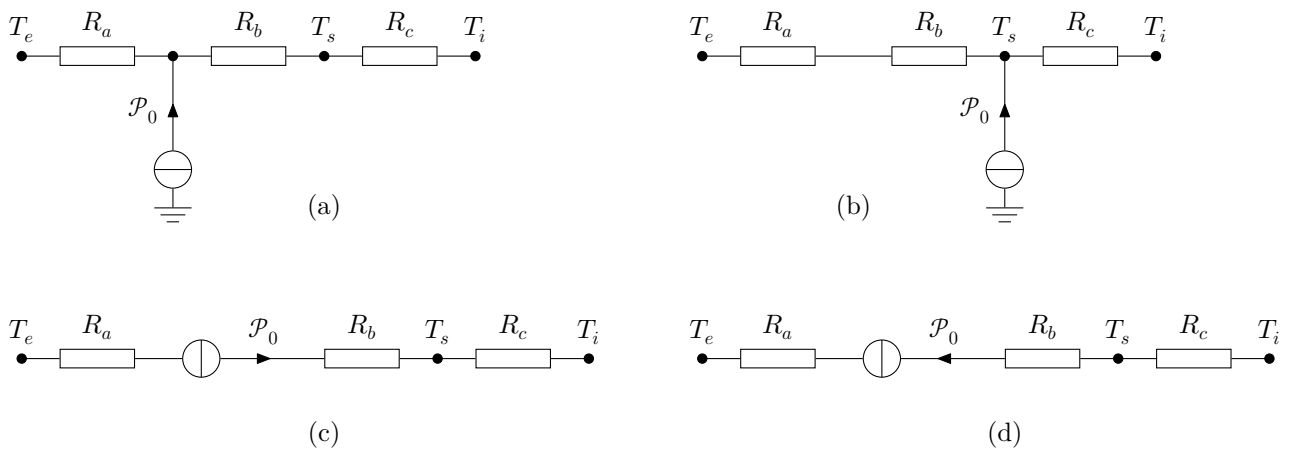


Figure 7

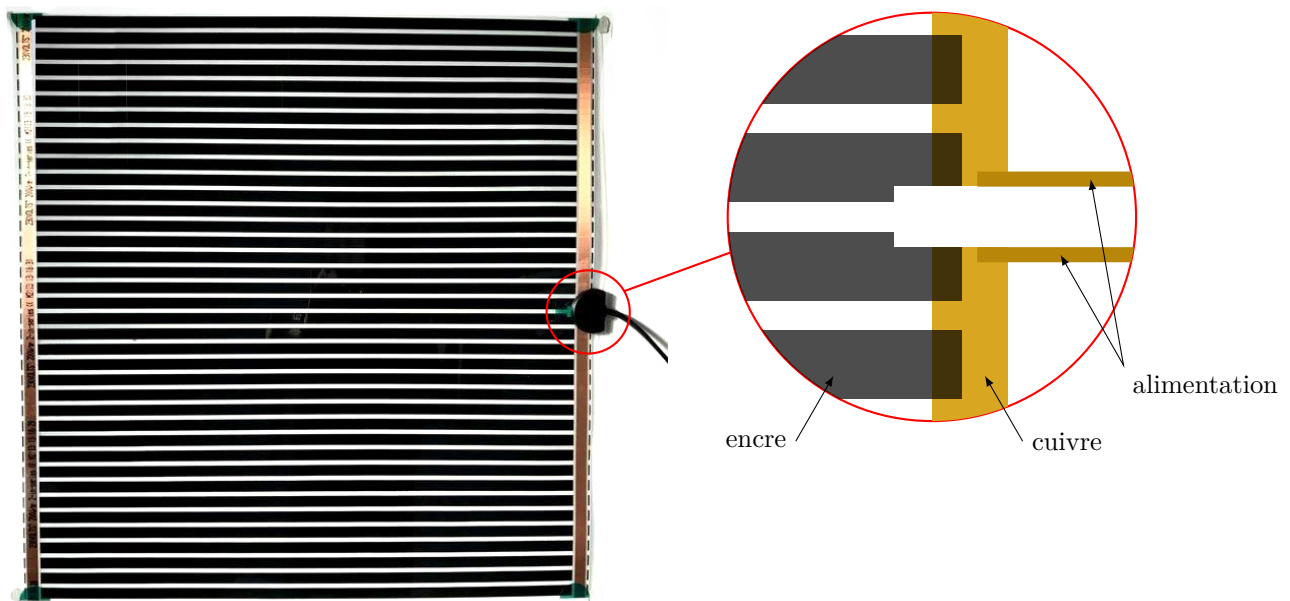


Figure 8 Film antibuée

- Q 28.** Estimer la conductivité électrique de l'encre conductrice et comparer à celle du cuivre.  
**Q 29.** Quel serait l'inconvénient d'utiliser des matériaux meilleurs conducteurs électriques que l'encre, comme du cuivre ?

## IV Station de charge d'une brosse à dents électrique

La figure 9 présente une station de charge par induction d'une brosse à dents électrique. Le modèle testé bénéficie d'un indice de protection IP67 le protégeant des effets de l'immersion jusqu'à un mètre. Il n'est pas démontable, le circuit électrique alimentant la bobine primaire (1) est totalement inclus dans une résine blanche empêchant d'accéder à ses caractéristiques. Les seules mesures possibles sont réalisées aux bornes du bobinage secondaire (2) situé à la base de la brosse à dents.



Figure 9 Station de charge

### IV.A – Conversion alternatif BF-continu

La station de charge est raccordée au réseau électrique local (le « secteur ») basse tension qui délivre une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 230 V à la fréquence 50 Hz. On applique cette tension  $e(t) = E \sin(\omega t)$

à l'entrée d'un pont redresseur à quatre diodes qu'on supposera idéales (figure B du document réponse). Cette sous-partie IV.A propose l'étude d'un circuit électrique pouvant alimenter le bobinage primaire.

**Q 30.** Calculer  $E$ .

**Q 31.** Représenter les quatre diodes  $D_1$  à  $D_4$  sur la figure B du document réponse afin que le signal  $s_1(t)$  soit un redressement double alternance du signal  $e(t)$ .

La figure C du document réponse représente le spectre du signal  $s_1(t)$  auquel il manque sa valeur moyenne.

**Q 32.** Ajouter cette composante moyenne sur le spectre de la figure C en justifiant votre réponse.

**Q 33.** Quelle est la valeur de la fréquence  $f_1$  de la composante fondamentale du signal  $s_1(t)$  ?

Afin d'obtenir une tension quasiment constante, on peut placer une cellule  $LC$  en sortie du pont de diodes (figure B). Le taux d'ondulation du signal de sortie est défini par  $\tau_o = \frac{\Delta s_2}{\langle s_2 \rangle}$  où  $\langle s_2 \rangle$  est la valeur moyenne temporelle de  $s_2(t)$  et  $\Delta s_2$  la tension crête à crête.

**Q 34.** En prenant  $L = 100\text{mH}$ , comment doit-on choisir  $C$  afin que le taux d'ondulation de  $s_2(t)$  soit inférieur à 5 % ?

#### IV.B – Conversion continu-alternatif HF

La tension continue générée précédemment peut être convertie en un signal alternatif de haute fréquence à l'aide d'un onduleur. La structure la plus simple est celle d'un onduleur de tension monophasé « pleine onde » (figure D du document réponse). Les commutateurs commandés  $K_1$  à  $K_4$  sont considérés idéaux et fonctionnent de manière périodique à la fréquence  $f_0 = 1/T_0$ .

**Q 35.** Remplir le tableau de la figure E avec l'état de fonctionnement de chaque commutateur et écrire la valeur de  $u_1(t)$  sur chaque demi-période.

**Q 36.** Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  sur chaque demi-période.

**Q 37.** Déterminer la valeur maximale  $i_{\max}$  de  $i(t)$  en fonction de  $E$ ,  $r$  et du paramètre  $\alpha = \exp\left(-\frac{rT_0}{2L}\right)$ .

**Q 38.** Sur un même graphe, tracer les chronogrammes de la tension  $u_1(t)$  et du courant  $i(t)$  traversant la charge inductive dans le cas où  $L/r = T_0/4$ .

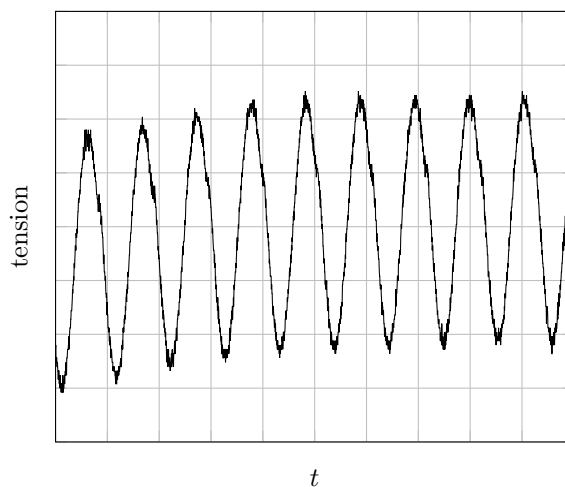
**Q 39.** Comment, en ordre de grandeur, doit-on choisir le rapport  $r/L$  afin d'avoir un courant  $i(t)$  le plus proche possible d'un courant sinusoïdal sans trop perdre en amplitude ?

#### IV.C – Couplage par induction

L'accumulateur de la brosse à dents est de type nickel-hydrure métallique Ni – MH. Ses caractéristiques sont « 1,2 V ; 2000 mA·h ». Pour une meilleure longévité de l'accumulateur, le fabricant préconise un courant de charge de 200 mA.

**Q 40.** Sachant que le rendement de charge est d'environ 70 %, combien de temps dure une charge complète d'un accumulateur initialement totalement déchargé ?

Une bobine test est placée sur la station de charge. Elle est constituée d'un enroulement de 50 spires de fil de cuivre de 0,22 mm de diamètre sur un cylindre de 20 mm de diamètre. On visualise à l'oscilloscope la tension aux bornes de cette bobine (figure 10).



**Figure 10** Enregistrement  
(25  $\mu\text{s}/\text{div}$  et 50 mV/div)

**Q 41.** Déterminer numériquement la fréquence  $f_0$  du signal alternatif généré lors de la conversion continu-alternatif HF ? Pourquoi est-il important que cette fréquence soit plus élevée que celle délivrée par le secteur ?

**Q 42.** Expliquer pourquoi il n'est pas intéressant de travailler à très haute fréquence (au voisinage du MHz par exemple). La conductivité du métal dont est faite la bobine est de l'ordre de  $6 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ .

### Données et formulaire

|                                              |                                                                     |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Perméabilité magnétique du vide              | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$           |
| Permittivité diélectrique du vide            | $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Charge élémentaire                           | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$                               |
| Constante des gaz parfaits                   | $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$          |
| Capacité thermique massique de l'eau liquide | $c_e = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$         |
| Masse molaire de l'air sec                   | $M_{\text{as}} = 29,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                |
| Masse molaire de l'eau                       | $M_e = 18,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                          |

*Sources de l'humidité de l'air dans une pièce habitée (débit massique d'eau vapeur en  $\text{g}\cdot\text{h}^{-1}$ )*

|                                  |             |
|----------------------------------|-------------|
| Cuisson                          | 400 à 800   |
| Lave-vaisselle                   | 200 à 400   |
| Douche                           | 1500 à 3000 |
| Bain                             | 600 à 1200  |
| Plantes                          | 7 à 20      |
| Être humain (selon son activité) | 30 à 200    |

*Épaisseur de peau dans un métal*

L'épaisseur de peau  $\delta$ , définie par la relation ci-dessous, détermine, en première approximation, l'épaisseur de la couche où se concentre le courant dans un conducteur :

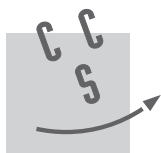
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \sigma \pi f}}$$

où  $\sigma$  désigne la conductivité du métal considéré et  $f$  la fréquence du courant.

---

• • • FIN • • •

---



**Numéro d'inscription**

**Nom**

Prénom

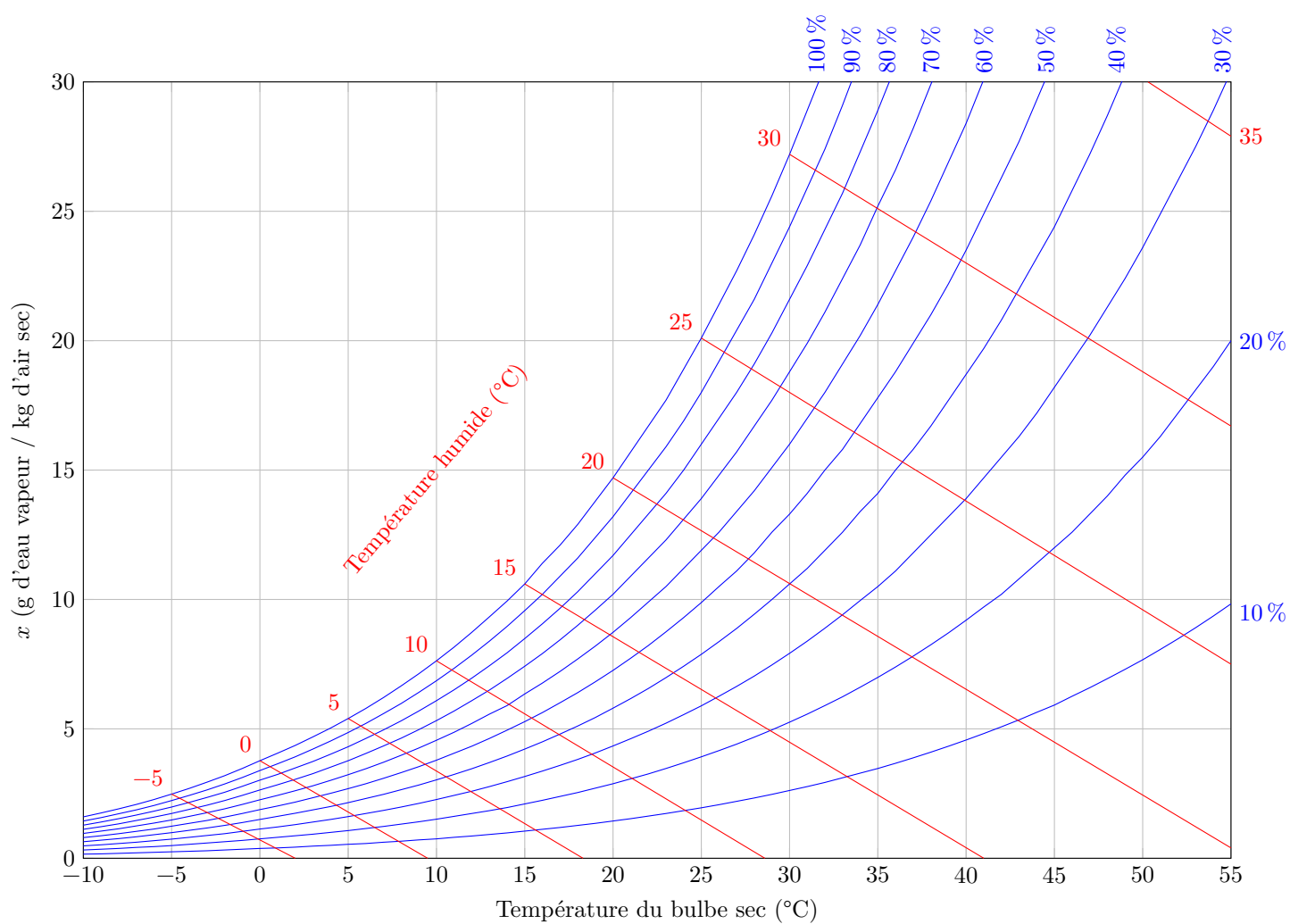
Épreuve : Physique-chimie 1 PSI

**Signature**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

**Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête**

## Feuille



**Figure A** Diagramme psychrométrique

Ne rien écrire

dans la partie barrée

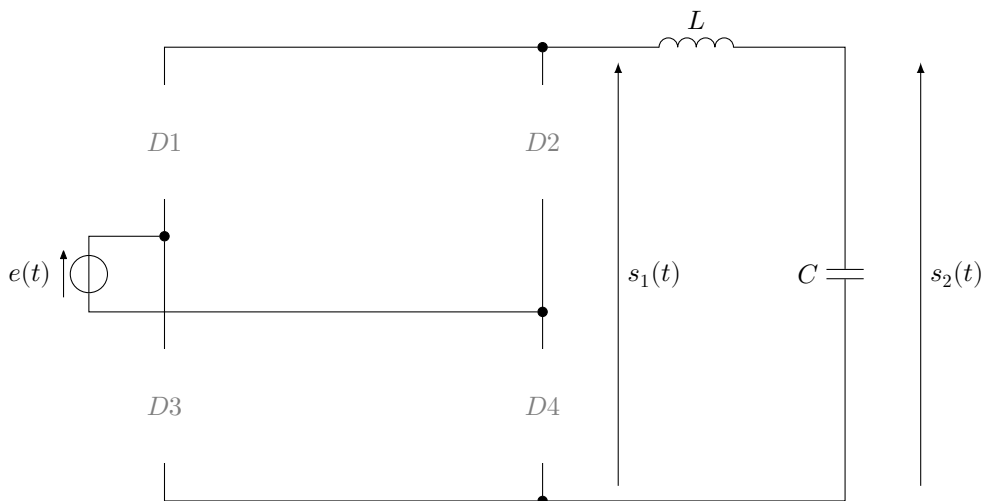


Figure B Redresseur PD2 avec filtrage par cellule LC

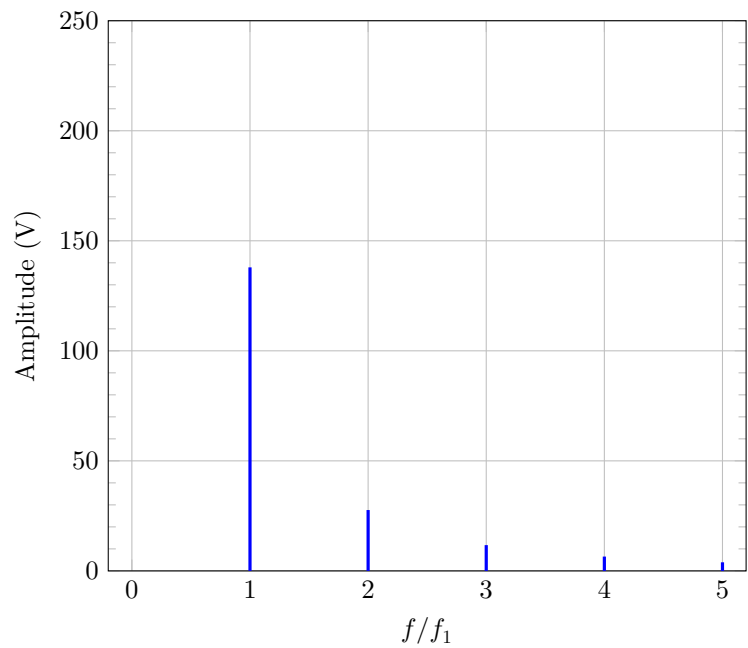
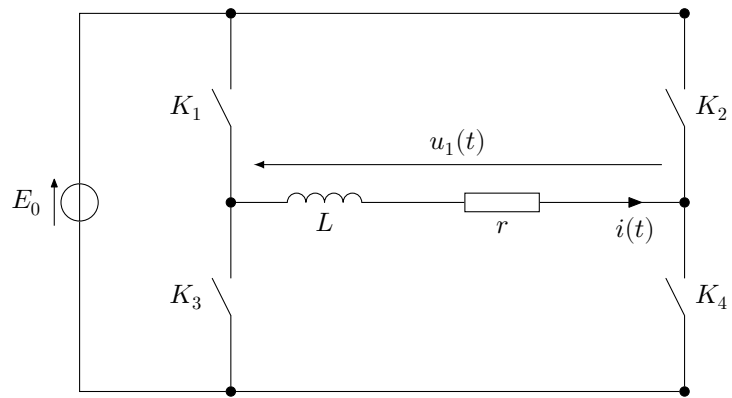


Figure C Spectre d’amplitude du signal  $s_1(t)$  de fréquence  $f_1$

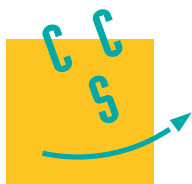


**Figure D** Onduleur pleine onde

|                   | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $u_1(t)$ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $0 < t < T_0/2$   | fermé |       |       |       |          |
| $T_0/2 < t < T_0$ |       |       |       |       |          |

**Figure E**





# SEUL SUR MARS



L'histoire du film *The Martian* (Seul sur Mars) de Ridley Scott, montre comment un homme, Mark Watney, survit seul sur Mars grâce à ses connaissances scientifiques. L'environnement hostile de la planète représente une contrainte de taille pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent pour que des hommes puissent un jour poser le pied sur la planète rouge. La NASA annonce un vol habité pour Mars dans les années 2030, l'hypothèse du film n'est donc pas irréaliste. Même si cette histoire repose sur des travaux scientifiques et des techniques aérospatiales actuelles, on peut se demander si l'histoire est bien réaliste.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Les quatre premières parties du sujet peuvent être liées notamment concernant les applications numériques. Les deux dernières parties sont indépendantes.

Toutes les données nécessaires à la résolution du sujet sont données en fin de sujet.

## I La planète Mars

Mars est la quatrième planète par ordre de distance croissante au Soleil et la deuxième par masse et par taille croissantes sur les huit planètes que compte le système solaire. Dans le référentiel héliocentrique (aussi appelé référentiel de Kepler), supposé galiléen, la trajectoire de Mars est une ellipse contenue dans le plan de l'écliptique.

**Extrait de CNRS *Le journal***

*Question :* Envoyer des humains sur Mars coûterait au moins 100 ou 200 milliards de dollars et ne serait possible que vers 2050, à condition qu'une vraie volonté politique se dégage. Ne vaut-il pas mieux continuer à envoyer des robots ?

*Réponse du planétologue François Forget :* C'est un vieux débat, [...] les robots ne sont pas forcément plus efficaces que les humains. Par exemple, un géologue peut repérer en quelques secondes une pierre intéressante, alors qu'il faudra des jours pour la repérer en manœuvrant un rover depuis la Terre, vu que les signaux radio mettent 5 à 22 minutes entre les deux planètes. Mais il y a une alternative qui me plaît bien : envoyer des humains en orbite martienne sans qu'ils se posent à la surface. Il est en effet très difficile — et donc coûteux — de poser des charges de plus d'une tonne sur Mars. Parce que l'atmosphère y est trop fine pour freiner correctement avec un parachute comme sur Terre, et trop épaisse pour ralentir juste au-dessus de la surface avec de simples rétrofusées comme sur notre Lune. Autre avantage : plus besoin de MAV pour remonter, ni d'habitat en surface. Au final, depuis l'orbite, les astronautes pourraient facilement aller se poser sur les petites lunes Phobos ou Deimos (qui n'ont presque pas de gravité), et surtout piloter en quasi temps réel des robots sophistiqués envoyés sur Mars elle-même. Une telle mission pourrait avoir lieu dès 2035.

09 novembre 2016

- Q 1.** En utilisant l'extrait du *CNRS Le Journal*, proposer un encadrement de la distance de Mars au Soleil. En déduire le demi-grand axe  $a_M$  de l'ellipse correspondant à la trajectoire de Mars.
- Q 2.** Sachant que la période de révolution de Mars est  $T_M = 687$  jours, calculer la valeur de  $a_M$ . Cette valeur est-elle en accord avec les propos rapportés par l'extrait d'article précédent ? Retrouver également une estimation de la masse du Soleil.
- Pour la suite, on prendra  $a_M = 228 \times 10^6$  km.
- Q 3.** Déterminer la valeur du champ de pesanteur sur Mars.

## II Tempête sur Mars

Lors d'une sortie sur Mars, l'écran de contrôle de Mark Watney est superposé à celui de l'action (figure 1). À gauche figurent les données externes et à droite celles concernant le scaphandre. Ainsi la pression extérieure vaut 0,11 psi (pound per square inch) alors que la pression interne est de 4,75 psi. Pour la suite on prendra les valeurs lues sur l'écran de contrôle pour les pressions et températures externes et internes (scaphandre).



**Figure 1** Écran de contrôle de Mark Watney

### II.A – L'atmosphère martienne

- Q 4.** Un bon scientifique pourra s'étonner du pourcentage de dioxygène dans le scaphandre. Quel est le problème ?
- Q 5.** Estimer la masse volumique  $\rho$  de l'atmosphère martienne. Comparer à celle de l'atmosphère de la Terre.
- Q 6.** Tracer l'allure du diagramme  $P(T)$  de l'eau en plaçant en particulier le point triple (611 Pa, 0,01 °C) et le point critique (22 MPa, 374 °C). Préciser la signification physique de ces points.
- Q 7.** Dans quel état se trouve l'eau sur Mars ?
- Q 8.** Au cours d'une tempête martienne, la combinaison de Mark Watney est percée. Donner deux raisons pour lesquelles Mark Watney ne peut pas survivre dans ces conditions. (On supposera que le scaphandre se dépressurise en restant à température constante.)

### II.B – Une tempête martienne peut-elle faire basculer le VAM ?

Les coéquipiers de Mark Watney doivent faire décoller le VAM (Véhicule Ascensionnel Martien, figure 2) pris dans une tempête avant que celui-ci ne bascule et tombe sous la force du vent. Pour étudier le réalisme de la scène, on modélise le VAM (masse estimée : 10 tonnes) par un cylindre de diamètre  $2R = 10$  m et de hauteur  $H = 20$  m.

- Q 9.** Calculer le poids du VAM sur Mars.
- Q 10.** Évaluer la force de traînée s'exerçant sur le VAM pour un vent de  $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  sur Mars (vitesse maximale mesurée). Sur Terre, donner l'ordre de grandeur de la vitesse d'un vent qui produirait une force de cette valeur.
- Q 11.** Dans l'hypothèse où le VAM ne glisse pas, on le suppose « ancré » au point  $O$  (figure 2). Déterminer la vitesse du vent lorsque le VAM commence à se pencher ( $\alpha$  est alors nul) ; on admettra que le coefficient de traînée vaut  $c_D = 0,4$ . Commenter.

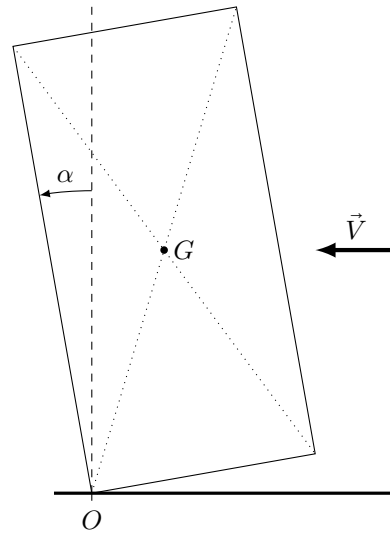
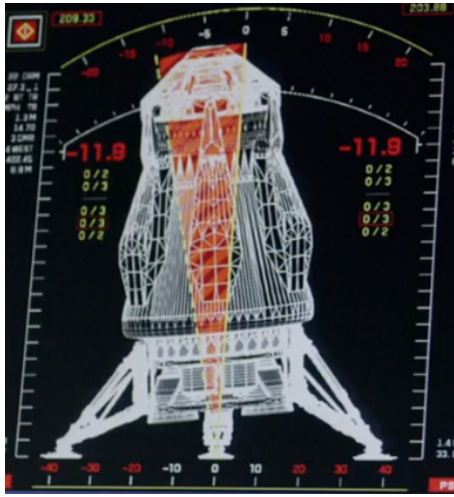


Figure 2 Basculement du VAM

### III Dimensionnement des panneaux solaires

Étant donnés d'importants problèmes logistiques, les ingénieurs martiens envisagent des modules d'habitations cylindriques gonflables. En plus des problèmes liés à la différence de pression entre l'intérieur (à la pression terrestre) et l'extérieur, se pose également le problème du chauffage de ces modules. Dans la suite on considère que le chauffage est assuré par une pompe à chaleur (récepteur ditherme dont la finalité est de fournir de l'énergie à la source chaude) qui maintient une température interne de  $T_i = 20^\circ\text{C}$ . Le module (figure 3) est un cylindre de diamètre  $2R = 2\text{ m}$  et de longueur  $L = 6\text{ m}$  dont l'isolation est assurée par une couche d'épaisseur  $e = 15\text{ cm}$  de dioxyde de carbone. On donne la conductivité thermique du  $\text{CO}_2$  dans les conditions du module  $\lambda = 15\text{ mW}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

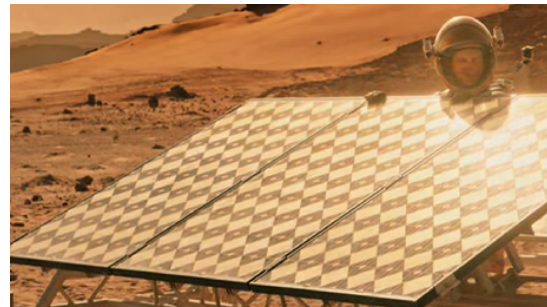


Figure 3 Habitat et panneaux solaires

- Q 12.** Définir et déterminer l'efficacité maximale (efficacité de Carnot) d'une pompe à chaleur, en proposant une démonstration et une application numérique.
- Q 13.** Estimer la résistance thermique du module entre l'intérieur et l'extérieur, en admettant que le flux thermique est uniquement radial. On néglige les flux thermiques à travers les bases du cylindre.
- Q 14.** En admettant que la machine fonctionne avec une efficacité égale à 34 % de l'efficacité théorique de Carnot, calculer la puissance  $\mathcal{P}_M$  à fournir pour maintenir le module à  $T_i$ .
- Q 15.** L'énergie nécessaire pour alimenter le module en énergie provient de panneaux photovoltaïques dont le rendement de conversion est estimé à 20 %. Les panneaux reçoivent du soleil la puissance surfacique  $P_s = 490\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Quelle est la surface de panneaux solaires nécessaire ? Commenter le résultat au regard de la figure 3.

### IV Sauvetage de Mark Watney par le vaisseau Hermès

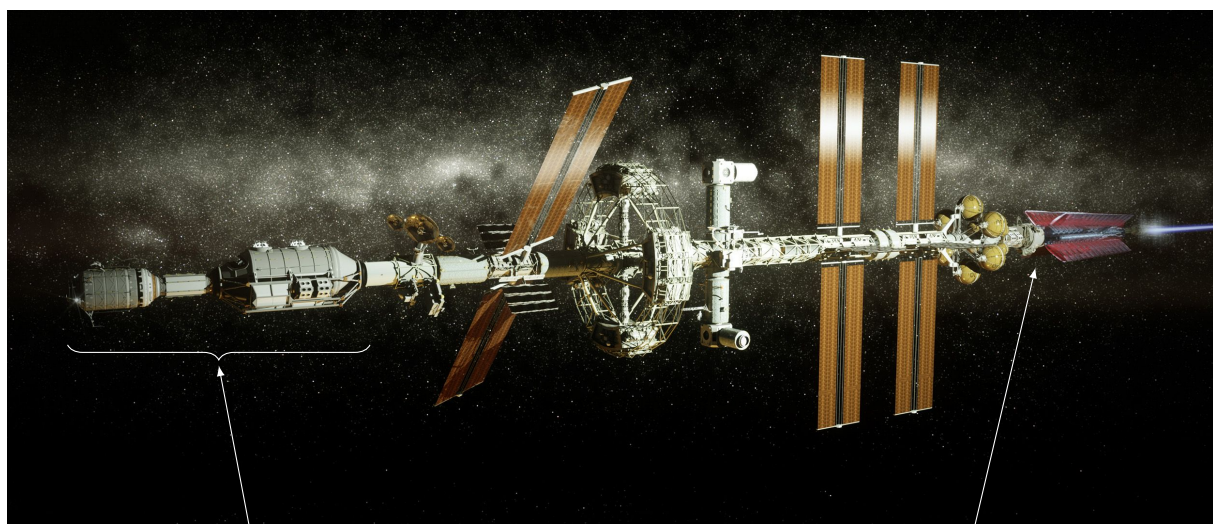
Cette opération consiste à envoyer Mark Watney dans l'espace, grâce à un VAM, et à l'intercepter depuis le vaisseau Hermès « en plein vol », comme représenté figure 5. L'enjeu est donc que L'Hermès et Mark Watney se retrouvent au même endroit, au même moment avec une vitesse relative nulle.

#### IV.A – Trajectoire du vaisseau Hermès

Dans cette sous-partie, on se place dans le référentiel de Kepler.

Le vaisseau Hermès est utilisé pour les trajets Terre-Mars au cours desquels le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil. L'orbite de transfert utilisée est une orbite de transfert de Hohmann : ellipse dont le périhélie est un point de l'orbite de la Terre et l'aphélie un point de l'orbite de Mars (figure 6). On supposera, pour simplifier, que les orbites de la Terre et de Mars sont circulaires de rayons respectifs  $a_T$  et  $a_M$ .

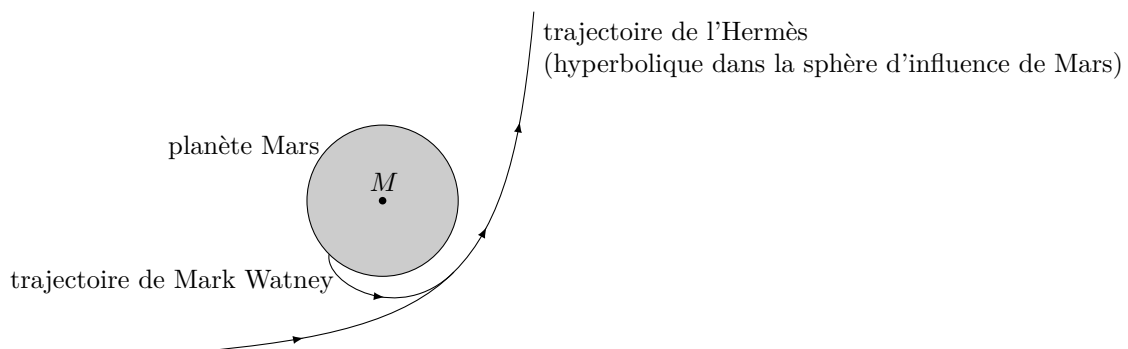




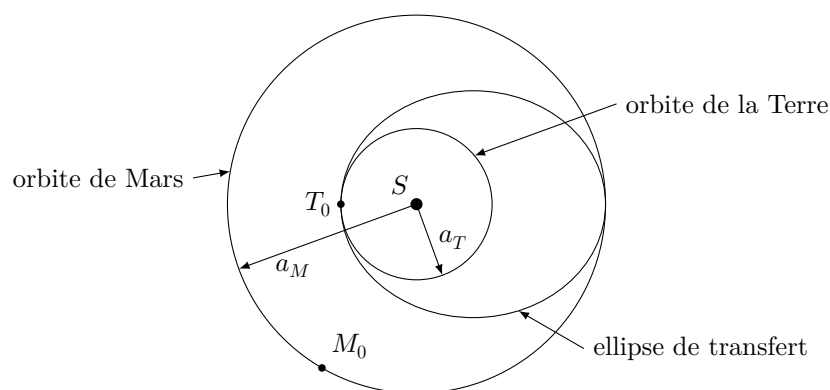
Modules de service

Propulsion nucléaire

**Figure 4** Le vaisseau Hermès



**Figure 5** Principe de la récupération de Mark Watney



**Figure 6**

**Q 16.** Déterminer le demi grand axe  $a$  de l'ellipse de transfert.

On considère le transfert du vaisseau de la Terre vers la planète Mars, les positions initiales de la Terre et de Mars étant notées respectivement  $T_0$  et  $M_0$ .

**Q 17.** Déterminer la durée du transfert. En déduire la position de Mars au moment du lancement sur Terre ( $M_0$ ). En déduire également la position de la Terre au moment de l'arrivée du vaisseau à proximité de Mars (les positions de la Terre et de Mars seront à ce moment là notées respectivement  $T_1$  et  $M_1$ ).

**Q 18.** Montrer qu'un nouveau transfert, à partir de la Terre, ne peut avoir lieu qu'environ 780 jours après le premier lancement (période synodique).

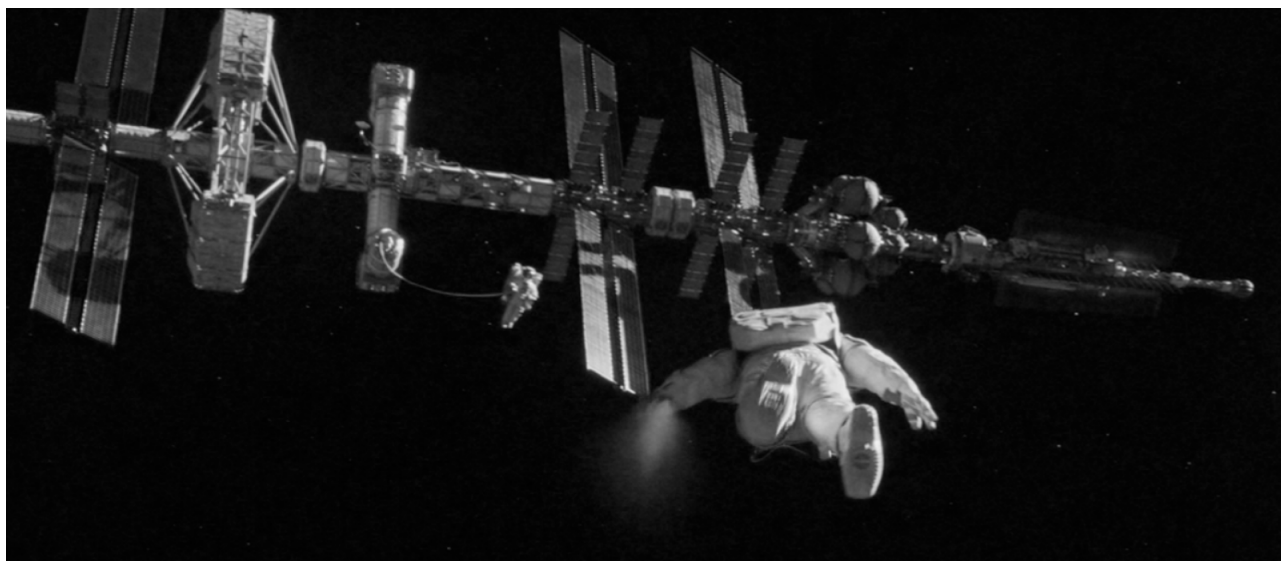
**Q 19.** Une fois le vaisseau arrivé au voisinage de la planète Mars ( $M_1, T_1$ ), combien de temps faut-il attendre pour envisager un transfert d'Hohmann permettant de ramener le vaisseau à proximité de la Terre ? On notera  $T_2$  et  $M_2$  les positions respectives de la Terre et de Mars au début de ce second transfert.

**Q 20.** Représenter les points  $T_0, M_0, T_1, M_1, T_2$  et  $M_2$ , ainsi que les orbites d'aller et de retour, sur un schéma reproduisant la figure 6.

**Q 21.** En déduire qu'une mission aller-retour vers Mars dure au minimum 972 jours. Sachant qu'entre le départ de l'Hermès vers la Terre, suite à la tempête, et son retour sur Mars, il s'est écoulé 549 jours, commenter.

#### IV.B – La récupération de Mark Watney

**Q 22.** Au cours de l'opération de sauvetage, le vaisseau Hermès doit réduire brutalement sa vitesse de  $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pour cela les astronautes ont l'idée de vider brutalement un ou des modules de l'Hermès de son air (modules de service sur la figure 4) et de profiter de la propulsion par réaction qui en découle pour freiner. On admet que la vitesse d'éjection des gaz est de l'ordre de  $500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (ordre de grandeur de la vitesse d'agitation thermique des molécules de l'air de la cabine). Estimer l'ordre de grandeur du volume total des différents modules à vider de façon à freiner correctement le vaisseau Hermès. Commenter.



**Figure 7** Mark Watney se propulsant vers l'Hermès

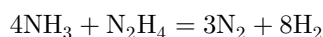
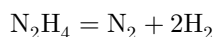
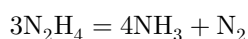
**Q 23.** Au moment du sauvetage, Mark Watney s'aperçoit qu'il est encore trop loin de l'Hermès. Il décide alors de percer sa combinaison (trou de diamètre de l'ordre de  $1 \text{ cm}^2$ ) pour se propulser. De quelle force de poussée dispose-t-il alors ? Commenter votre résultat. Commenter également la photo (figure 7) représentant Mark Watney se propulsant vers l'Hermès.

### V Fabrication d'eau sur Mars

Mark Watney est bien conscient que l'eau est l'une des clefs de sa survie sur Mars. Il n'en manque pas grâce à l'ingéniosité des procédés développés dans le domaine spatial mais il a besoin d'énormes quantités d'eau pour arroser ses plants de pomme de terre et assurer son alimentation en attendant l'aide hypothétique de la Terre. Heureusement, outre sa qualité de botaniste, il a des notions élémentaires de mécanique, de physique et de chimie.

Mark Watney estime avoir besoin de 600 L d'eau, qu'il décide d'obtenir par combustion de dihydrogène par le dioxygène. Il peut obtenir le dihydrogène par décomposition de l'hydrazine et le dioxygène par réduction du  $\text{CO}_2$  en CO à haute température ( $800^\circ\text{C}$ ) selon la réaction  $2\text{CO}_2 \rightarrow \text{O}_2 + 2\text{CO}$  en phase gazeuse.

L'hydrazine dont il souhaite tirer le dihydrogène avant de le « brûler » pour former l'eau est un carburant notamment utilisé dans la conquête spatiale. Les réactions chimiques de décomposition de l'hydrazine en molécules de  $\text{N}_2$  et  $\text{H}_2$ , en présence d'iridium comme catalyseur, sont les suivantes (en phase gazeuse) :



**Q 24.** Proposer des formules de Lewis pour l'hydrazine  $\text{N}_2\text{H}_4$ , l'ammoniac  $\text{NH}_3$  et le diazote  $\text{N}_2$ .

**Q 25.** Déterminer le volume d'hydrazine (densité 1,02) nécessaire pour obtenir les 600 L d'eau liquide voulus par Mark Watney.

**Q 26.** La présence du catalyseur d'iridium modifie-t-elle l'état d'équilibre ?

**Q 27.** L'iridium cristallise dans un réseau cubique à faces centrées avec une densité de 22,5. Représenter cette maille cristalline. Estimer le rayon atomique de l'iridium.

**Q 28.** Calculer la constante thermodynamique de la réaction  $2\text{CO}_2 = \text{O}_2 + 2\text{CO}$  à  $800^\circ\text{C}$  en phase gazeuse. Commenter.

**Q 29.** Comment évolue la réaction  $2\text{CO}_2 = \text{O}_2 + 2\text{CO}$  si on diminue la température ? Justifier.

**Q 30.** Quelle est la température maximale atteinte lors de la combustion du dihydrogène ?

## VI Peut-on cultiver des pommes de terre sur Mars ?

Pour s'alimenter Mark Watney fait pousser des pommes de terre dans le sol martien en utilisant les selles récupérées dans les toilettes de la mission. Les selles contiennent des bactéries nécessaires à une culture. Néanmoins, les sondes Viking ont montré qu'un tel sol, particulièrement oxydant, tue toutes les bactéries, à fortiori celles des selles. Dans cette partie, afin d'étudier l'action oxydante du sol sur les bactéries on utilise la bactérie *E. coli* comme organisme modèle et on modélise le stress oxydant par l'action du peroxyde d'hydrogène  $\text{H}_2\text{O}_2$ .

### VI.A – Métabolisme de la bactérie

Le peroxyde d'hydrogène est un sous-produit du métabolisme des cellules, sa production suit une cinétique d'ordre 0 de constante de vitesse  $k_p = 15 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pour lutter contre le peroxyde d'hydrogène, la bactérie a développé un arsenal de défense dont les principales actrices sont les enzymes alkylhydroperoxydase (notée Ahp) et catalase (notée Cat). Le peroxyde d'hydrogène est également capable de diffuser à travers la paroi de la bactérie. Dans la suite on considère que les concentrations à l'intérieur de la bactérie et à l'extérieur sont uniformes. Le modèle complet a été développé par Uhl et Dukan (PLoS One. 2016 ; 11(8)).

**VI.A.1)** La bactérie est modélisée par une sphère de volume total  $V_i$  de rayon externe  $R$  et d'épaisseur de paroi  $e$ . On note  $\phi$  le flux de peroxyde d'hydrogène (en  $\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}$ ) sortant de la bactérie à travers sa paroi et  $D$  le coefficient de diffusion particulière du peroxyde d'hydrogène dans la paroi.

Dans l'hypothèse d'un régime stationnaire, on définit une résistance particulière  $R_p$  à l'aide de l'expression

$$\phi = \frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e}{R_p}$$

où  $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$  est la concentration en peroxyde d'hydrogène à l'intérieur de la bactérie et  $[\text{H}_2\text{O}_2]_e$  sa concentration dans le milieu extérieur.

**Q 31.** Citer deux autres domaines de la physique utilisant la notion de résistance. Préciser les analogies.

**Q 32.** Exprimer  $R_p$  en fonction de  $e$ ,  $D$  et  $R$ .

**Q 33.** Simplifier cette expression dans l'hypothèse où  $e \ll R$ .

**Q 34.** Proposer une valeur numérique de  $R_p$ .

**Q 35.** Montrer que la loi de cinétique de diffusion à travers la membrane peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = \pm k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

**Q 36.** Quel signe doit-on choisir sachant que  $k_d > 0$  ? Exprimer  $k_d$  en fonction de  $e$ ,  $D$  et  $R$  et proposer une application numérique.

**VI.A.2)** Les enzymes présentes dans la bactérie obéissent à une cinétique, dite michaelienne, où la vitesse de réaction a la forme générale

$$v = -\frac{d[S]}{dt} = \frac{v_{\max}[S]}{[S] + K_M}$$

où  $v_{\max}$  et  $K_M$  (constante de Michaelis) sont des constantes caractéristiques de l'enzyme et  $S$  représente le composé chimique décomposé par l'enzyme.

**Q 37.** Quelle est la dimension de la constante  $K_M$  ? Quel sens concret peut-on donner au paramètre  $K_M$  ?

**VI.A.3)** La dynamique du peroxyde d'hydrogène est donc décrite par le système présenté figure 8.

| Réactions associées à $\text{H}_2\text{O}_2$ | Équations chimiques                                                           | Loi de vitesse                                                                                                   |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Production métabolique                       | $\emptyset \rightarrow \text{H}_2\text{O}_2$                                  | ordre 0                                                                                                          |
| Décomposition par Ahp                        | $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2$ | $v^{\text{Ahp}} = \frac{v_{\max}^{\text{Ahp}}[\text{H}_2\text{O}_2]}{[\text{H}_2\text{O}_2] + K_M^{\text{Ahp}}}$ |
| Décomposition par Cat                        | $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2$ | $v^{\text{Cat}} = \frac{v_{\max}^{\text{Cat}}[\text{H}_2\text{O}_2]}{[\text{H}_2\text{O}_2] + K_M^{\text{Cat}}}$ |
| Diffusion membranaire                        | $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{extérieur}$                           | $v = \pm k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$                                               |

Figure 8

On note  $N$  le nombre de bactéries dans le milieu extérieur. Le volume extérieur est noté  $V_e$ . La densité de bactéries est alors notée  $n = N/V_e$ .

**Q 38.** Préciser les degrés d'oxydation de l'oxygène dans les trois molécules de la réaction  $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2$ . Comment nomme-t-on ce type de réaction en chimie ?

- Q 39.** Calculer la constante thermodynamique de cette réaction de décomposition à 25 °C. Commenter.
- Q 40.** Donner les équations différentielles associées au système dynamique ci-dessus vérifiées par  $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$  et  $[\text{H}_2\text{O}_2]_e$ .
- En condition physiologique, sans stress exogène, on admet que  $[\text{H}_2\text{O}_2] \ll K_M^{\text{Ahp}}$  et  $[\text{H}_2\text{O}_2] \ll K_M^{\text{Cat}}$ . Ces hypothèses seront vérifiées à postériori.
- Q 41.** Déterminer la concentration en peroxyde d'hydrogène à l'équilibre à l'intérieur des cellules.
- Q 42.** Faire l'application numérique, commenter.

### VI.B – Situation de stress oxydant

On considère désormais une situation de stress oxydant produit par l'ajout d'une importante quantité de peroxyde d'hydrogène exogène (c'est-à-dire introduite à l'extérieur de la bactérie) : on suppose que les bactéries se trouvent dans un milieu où la concentration extérieure en peroxyde d'hydrogène vaut initialement  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Tant que la concentration exogène est très élevée, les bactéries sont submergées et par conséquent elles voient leur concentration interne en peroxyde d'hydrogène atteindre quasi instantanément la valeur exogène (la diffusion n'est plus limitante).

- Q 43.** Proposer une approximation à l'équation différentielle vérifiée par  $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$  dans le cas du stress exogène proposé (tant qu'il est important).
- Q 44.** En déduire la quantité (en mole) de peroxyde d'hydrogène décomposé par seconde et par bactérie.
- Q 45.** Combien de temps faudra-t-il à  $n = 10^7$  bactéries par mL pour décomposer la moitié du peroxyde d'hydrogène externe introduit ? Même question pour  $10^9$  bactéries par mL. Commenter.

## Données

### Terre-Mars

|                             | Terre                                    | Mars                                       |
|-----------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Composition de l'atmosphère | $\text{N}_2$ (77 %), $\text{O}_2$ (21 %) | $\text{CO}_2$ (95 %), $\text{N}_2$ (2,7 %) |
| Rayon des planètes (km)     | 6380                                     | 3390                                       |
| Densité globale             | 5,5                                      | 3,9                                        |

Grandeurs thermodynamiques entre 0 °C et 1000 °C (approximation d'Ellingham)

|                                                                                     | $\text{CO}_{2(\text{g})}$ | $\text{O}_{2(\text{g})}$ | $\text{CO}_{(\text{g})}$ | $\text{H}_{2(\text{g})}$ | $\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| Enthalpie standard de formation ( $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )               | -394                      |                          | -111                     |                          | -242                              |
| Entropie standard molaire ( $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )  | 214                       | 237                      | 198                      | 130                      | 189                               |
| Capacité thermique molaire ( $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) | 49,0                      | 34,0                     | 32,0                     | 30,0                     | 37,0                              |

### Au sujet de *E. coli*

|                                                                  | Notation                      | Valeurs                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Production de $\text{H}_2\text{O}_2$                             | $k_p$                         | $15 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$               |
| Constante de Michaelis pour Catalase                             | $K_M^{\text{Cat}}$            | $5,9 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$                     |
| Constante de Michaelis pour Ahp                                  | $K_M^{\text{Ahp}}$            | $1,2 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$                     |
| Vitesse maximale pour Catalase                                   | $v_{\text{max}}^{\text{Cat}}$ | $4,9 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Vitesse maximale pour Ahp                                        | $v_{\text{max}}^{\text{Ahp}}$ | $6,6 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Coefficient de diffusion membranaire pour $\text{H}_2\text{O}_2$ | $D$                           | $2,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$                    |
| Volume d'une bactérie                                            | $V_i$                         | $3,2 \times 10^{-15} \text{ L}$                                          |
| Épaisseur de la paroi                                            | $e$                           | 9 nm                                                                     |

$$E^\circ(\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,77 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2) = 0,69 \text{ V}$$

$$\frac{RT}{F} \ln 10 \approx 0,06 \text{ V}$$



Constante gravitationnelle

Célérité de la lumière

Constante d'Avogadro

Constante des gaz parfaits

Masses molaires ( $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ )Viscosité du  $\text{CO}_2$  (supposée indépendante de la température)

Viscosité de l'air terrestre (à 15 °C)

Distance Terre-Soleil

Température de la surface du Soleil

Rayon du Soleil

Masse du vaisseau Hermès

1 psi = 0,0689 bar

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\mathcal{N}_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{O} = 16$$

$$\eta = 1,07 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\eta_T = 1,79 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$a_T = 1 \text{ u.a.} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$$

$$T_s = 5778 \text{ K}$$

$$R_s = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$$

$$\approx 500 \text{ t}$$

## Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température

| $t$ (°C) | $P_s$ (Pa) | $t$ (°C) | $P_s$ (Pa) | $t$ (°C) | $P_s$ (Pa) | $t$ (°C) | $P_s$ (Pa) |
|----------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|
| -75      | 0,122      | -40      | 12,84      | 0        | 611,15     | 35       | 5626,7     |
| -70      | 0,261      | -35      | 27,71      | 5        | 872,60     | 40       | 7381,4     |
| -65      | 0,540      | -30      | 38,01      | 10       | 1228,1     | 45       | 9589,8     |
| -60      | 1,080      | -25      | 63,29      | 15       | 1705,6     | 50       | 12344      |
| -55      | 2,093      | -20      | 103,26     | 20       | 2338,8     | 55       | 15752      |
| -50      | 3,936      | -15      | 165,30     | 25       | 3169,0     | 60       | 19932      |
| -45      | 7,202      | -10      | 259,90     | 30       | 4245,5     | 65       | 25022      |

d'après CRC Handbook of Chemistry and Physics - 2004

## Coefficient de traînée

Le graphe donné figure 9 représente l'évolution du coefficient de traînée d'un cylindre de diamètre  $D$ , de longueur  $L$ , placé dans un écoulement uniforme d'un fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\mu$ , de vitesse  $V_\infty$ , perpendiculaire à son axe.

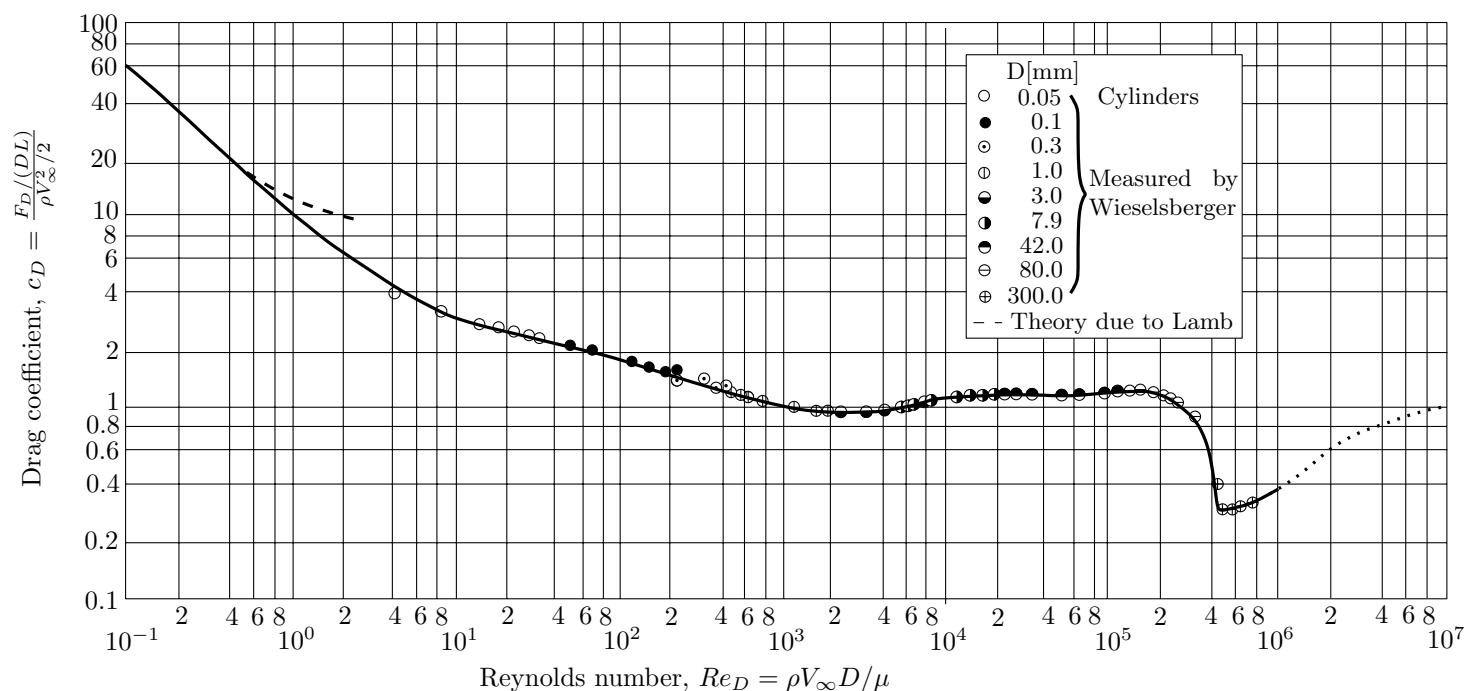
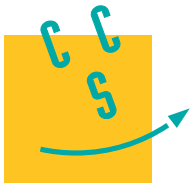


Figure 9 Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds

• • • FIN • • •

**Introduction**

Grâce à des faisceaux laser, les physiciens savent aujourd'hui piéger et contrôler des atomes un à un. La force de van der Waals s'exerçant entre deux atomes de rubidium a ainsi pu être mesurée directement pour la première fois. Ce sujet propose de comprendre les grandes étapes de la mesure de cette force de van der Waals s'exerçant entre deux atomes, placés dans des états de Rydberg.

Un ensemble de valeurs numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé. Il est conseillé de les lire avant de commencer à traiter le sujet.

Les parties de ce sujet sont dépendantes entre elles mais le candidat pourra admettre un résultat pour aborder la partie suivante.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

**I Étude la force de van der Waals**

Lorsque deux atomes présentant un moment dipolaire électrique sont à distance suffisante, ils interagissent entre eux sous forme d'interaction dipôle – dipôle. Cette partie cherche à expliquer le principe de cette interaction.

**I.A –**

**Q 1.** Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique et de son moment dipolaire  $\vec{p}$  (il est conseillé de s'appuyer sur un dessin).

**Q 2.** Donner un exemple de dipôle électrostatique rencontré dans la nature ainsi que l'ordre de grandeur du moment dipolaire de l'exemple choisi.

**I.B –** Le potentiel électrique d'un dipôle électrostatique placé à l'origine  $O$  évalué en un point  $M$  situé à grande distance de  $O$  s'écrit

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{OM}\|^3}.$$

**Q 3.** À quelle condition peut-on considérer que le point  $M$  se trouve à grande distance de  $O$  ?

**Q 4.** Déterminer dans le système de coordonnées sphériques (figure 1) le champ électrique créé par le dipôle en un point  $M$  en fonction des variables  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  et  $\theta$ .

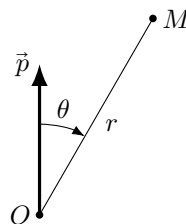


Figure 1

**Q 5.** Tracer schématiquement sans démonstration les lignes de champ électrostatique associées au dipôle.

**I.C – Polarisation d'un atome**

Lorsqu'un atome est soumis à un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{\text{ext}}$  uniforme à l'échelle de l'atome on constate qu'il acquiert alors un moment dipolaire  $\vec{p}_{\text{ind}}$ , dit *moment dipolaire induit* vérifiant

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \alpha\epsilon_0\vec{E}_{\text{ext}} \quad (\text{I.1})$$

où  $\alpha$  s'appelle la polarisabilité de l'atome.

**Q 6.** Justifier qualitativement la relation (I.1) et donner l'unité de  $\alpha$  dans le système international d'unités. Justifier que  $\alpha$  est une grandeur positive.

Pour déterminer un ordre de grandeur de  $\alpha$ , on peut utiliser le modèle de l'atome d'hydrogène proposé en 1904 par le physicien anglais Sir Joseph John Thomson (1856–1940) :

- l'atome est assimilé à une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$  ;
- la charge positive  $e$  de l'atome est répartie uniformément dans le volume intérieur de cette sphère ;
- la sphère est supposée fixe dans un référentiel galiléen propre à l'étude, auquel on associe le repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  ;
- l'électron se déplace librement à l'intérieur de la sphère ;
- on néglige l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électromagnétique.

**Q 7.** Quelle est l'expression de la force ressentie par l'électron en fonction des données du problème et de la position de l'électron ? Commenter.

**Q 8.** On ajoute maintenant un champ extérieur  $\vec{E}_{\text{ext}}$  supposé uniforme sur la dimension de l'atome. En admettant que l'électron reste dans la sphère de rayon  $a$ , déterminer sa position d'équilibre.

**Q 9.** En déduire une expression de  $\alpha$  dans le cadre de ce modèle et proposer un ordre de grandeur.

### I.D – Interactions entre atomes de rubidium

Les atomes de rubidium ( $Z = 37$ ) servant à l'étude des interactions de van der Waals, ne possèdent pas de moment dipolaire propre, tout comme l'atome d'hydrogène étudié précédemment. Néanmoins, ils peuvent posséder des moments dipolaires induits et la force qui existe entre deux atomes, résulte de l'interaction entre ces deux moments dipolaires induits.

**Q 10.** Proposer une explication qualitative de ce phénomène.

Pour modéliser le phénomène, on considère deux dipôles alignés sur un axe  $(Ox)$  et espacés d'une distance  $x = O_1O_2$  (figure 2).



Figure 2

**Q 11.** À partir de l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur, montrer que la force exercée par le premier dipôle sur le second dipôle peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = p_2 \frac{dE_1}{dx} \vec{e}_x$$

où  $E_1$  est la composante selon  $\vec{e}_x$  du champ électrique créé par le dipôle  $p_1$  à l'abscisse  $x$  (au niveau de  $p_2$ ).

**Q 12.** En déduire que cette force peut se mettre sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{K}{x^7} \vec{e}_x$$

où  $K$  est une constante dont on précisera le signe.

**Q 13.** Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Comment pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

**Q 14.** En déduire l'énergie potentielle d'interaction entre les deux dipôles.

On admettra par la suite que dans le cas général l'énergie d'interaction entre dipôles induits se met sous la forme  $E_p = -\frac{A}{r^6}$  où  $A$  est une constante positive.

## II Atomes de Rydberg

### II.A – Atome d'hydrogène

On s'intéresse dans cette sous-partie à l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de Bohr : dans ce modèle, l'électron suit une trajectoire circulaire autour du proton.

On rappelle que le noyau est un proton de charge  $+e$  supposé fixe dans le référentiel galiléen d'étude. L'électron est une particule non-relativiste de masse  $m_e$ , très faible devant celle du proton et de charge  $-e$ . L'électron est soumis à la force électrostatique attractive due au proton. L'énergie de l'atome d'hydrogène correspond à l'énergie mécanique de son électron et elle ne peut varier que lors du processus d'absorption ou d'émission lumineuse.

Bohr fait également l'hypothèse que, parmi tous les mouvements de l'électron que la mécanique classique reconnaît comme possibles, seuls sont stables et réalisés dans la nature ceux qui sont circulaires.

On note  $r$  le rayon de la trajectoire circulaire permise,  $v$  la vitesse sur cette trajectoire et  $h$  la constante de Planck.

**Q 15.** Pourquoi dans ce modèle l'électron admet-il un mouvement circulaire uniforme ?

**Q 16.** Quelle propriété possède le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau ?

**Q 17.** Bohr a posé la condition de quantification du moment cinétique de l'électron qui s'écrit  $L = n\hbar$  où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  est la constante réduite de Planck et  $n$  est un entier strictement positif, appelé nombre quantique principal. Pourquoi le modèle de Bohr est-il qualifié de « semi-quantique » ou « semi-classique » ?

**Q 18.** Montrer que les rayons  $r_n$  des orbites envisageables pour l'électron vérifient  $r_n = n^2 a_0$  et exprimer  $a_0$  (rayon de Bohr) en fonction des données. La valeur numérique de  $a_0$  est indiquée en fin d'énoncé.

**Q 19.** Montrer que les énergies mécaniques  $E_n$  correspondantes s'expriment sous la forme  $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$ , où  $E_I$  sera exprimé en fonction des données. Calculer  $E_I$  en eV.

**Q 20.** Expliquer pourquoi  $E_I$  représente l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

## II.B – État de Rydberg d'un atome hydrogénoïde

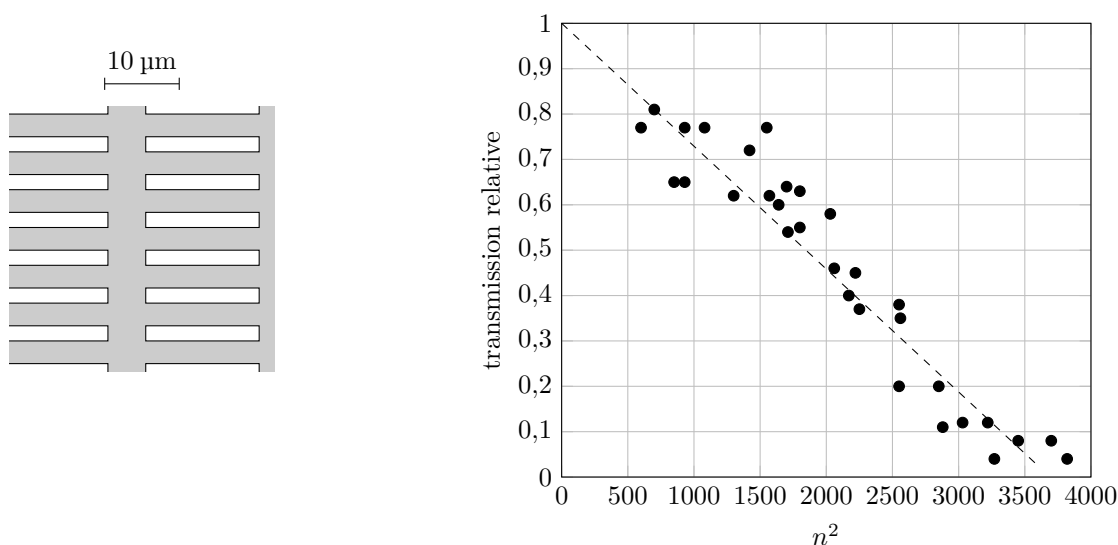
On appelle état de Rydberg de l'hydrogène un état très excité de cet atome, avec un nombre quantique principal  $n \gg 1$ .

**Q 21.** Calculer la valeur numérique du rayon de la trajectoire de l'électron d'un atome d'hydrogène dans un état de Rydberg  $n = 100$ .

**Q 22.** Quelle est la longueur d'onde du photon nécessaire pour placer un atome d'hydrogène dans un état de Rydberg  $n = 100$  ? À quel type de rayonnement électromagnétique cela correspond-il ?

On peut également préparer d'autres espèces atomiques dans un état de Rydberg. Par exemple, dans le cas du sodium (nombre de masse  $A = 23$ , numéro atomique  $Z = 11$ ), on peut placer l'électron de valence dans un état très excité, les 10 électrons de coeur restant au voisinage du noyau.

**Q 23.** Justifier que les niveaux d'énergie de ce système sont voisins des niveaux de Rydberg de l'hydrogène. On envoie des atomes de sodium préparés dans un état de Rydberg à incidence normale sur une plaque métallique percée de fentes de largeur  $d = 2 \mu\text{m}$  (figure 3), en faisant varier le nombre quantique  $n$  des atomes. La mesure de la transmission du réseau de fentes est représentée sur la figure 3.



**Figure 3** Gauche : réseau de fentes de largeur moyenne de  $2 \mu\text{m}$  (dispersion  $\pm 25\%$ ). Droite : transmission relative du réseau de fentes en fonction du carré du nombre quantique (la transmission est prise égale à 1 pour des atomes dans l'état fondamental)

**Q 24.** À l'aide d'un modèle simple, expliquer qualitativement pourquoi la transmission du réseau de fentes diminue quand  $n$  augmente.

**Q 25.** Discuter le résultat obtenu pour la valeur de  $n$  au dessus de laquelle la transmission devient négligeable. Proposer un mécanisme qui permet d'expliquer que la diminution de la transmission avec  $n^2$  est plus rapide que celle que prévoit un modèle simple s'appuyant seulement sur la taille de l'atome prévue par le modèle de Bohr.

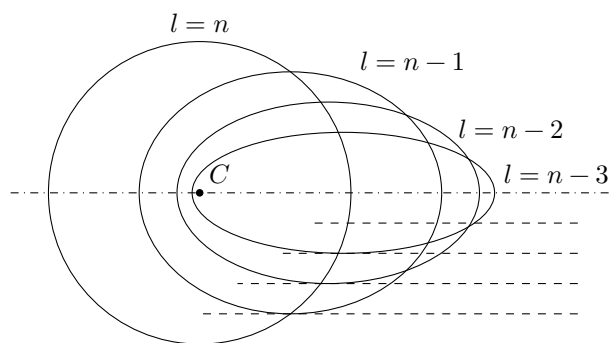
## II.C – Moment dipolaire induit d'un atome de Rydberg

Pour comprendre la polarisabilité des atomes de Rydberg dans un modèle semi-classique, il est possible d'adapter le modèle de Bohr en admettant que la trajectoire d'un électron est elliptique, avec une excentricité qui dépend

de deux nombres quantiques,  $n$  et  $l$ , vérifiant  $n \geq 1$  et  $0 \leq l \leq n$ . Les cinq documents suivants introduisent les caractéristiques principales de ce modèle.

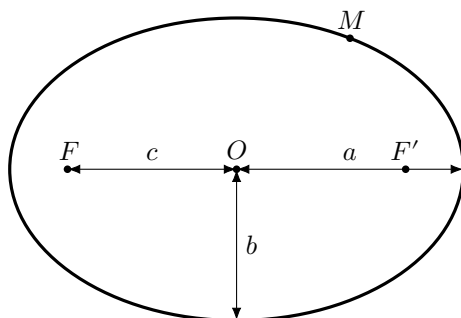
**Q 26.** À la lecture de ces documents, expliquer comment un atome de Rydberg acquiert un moment dipolaire électrique sous l'action d'un champ électrique extérieur et, dans le cas où le nombre quantique  $l$  n'est pas trop faible, donner un ordre de grandeur du moment dipolaire maximal induit.

— **Document 1 : Évolution de la trajectoire en fonction du nombre quantique  $l$**  —  
d'après « *Physique Atomique* », Tome1, B. Cagnac



Ellipses décrites par l'électron autour du noyau pour le même nombre quantique principal  $n$ , en fonction, du nombre quantique secondaire (ou azimutal)  $l$ . On a pris ici  $n = 5$ .

— **Document 2 : Excentricité d'une ellipse** —



$O$  : centre  
 $F$  et  $F'$  : foyers  
 $a$  : demi grand axe  
 $b$  : demi petit axe  
 $c$  : distance centre-foyer  
 $\epsilon = c/a$  : excentricité

Pour tout point de l'ellipse, on a  $MF + MF' = 2a$ . L'excentricité rend compte de l'aplatissement de l'ellipse, plus elle est grande, plus l'ellipse est aplatie. Pour un cercle,  $\epsilon = 0$ . L'excentricité maximale est  $\epsilon = 1$ , l'ellipse est alors réduite au segment de droite joignant ses deux foyers.

— **Document 3 : Dynamique de l'interaction dipôle-dipôle dans un gaz de Rydberg froid** —  
extrait de la thèse de doctorat en physique atomique et moléculaire de Nassim Zahzam (Paris 7, 2005)

Le traitement classique d'une particule de Rydberg dans un champ coulombien comme l'électron de l'atome d'hydrogène, conduit à trouver une trajectoire d'excentricité donnée approximativement par la relation

$$\epsilon \approx \sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{n^2}}$$

où  $n$  est le nombre quantique principal et  $l$  le nombre quantique relatif au moment cinétique orbital.

Les orbites pour  $l$  grand sont alors quasi-circulaires et l'électron de valence voit donc un potentiel coulombien. Par contre, les orbites pour  $l$  petit se rapprochent du foyer de l'ellipse et peuvent donc pénétrer dans le cœur. La barrière centrifuge n'est plus suffisamment grande pour interdire l'accès à cette région. Les perturbations sont donc d'autant plus importantes que  $l$  est petit. On doit donc distinguer les orbites non pénétrantes (grandes valeurs de  $l$ ) et les orbites pénétrantes (petites valeurs de  $l$ ) pour lesquelles la vision hydrogénoïde n'est plus valide.

Pour tenir compte des orbites pénétrantes, une théorie, développée surtout par Seaton, a vu le jour : la méthode du défaut quantique. L'interaction entre le cœur et l'électron de valence est limitée à une partie de l'espace autour du noyau. En dehors de cette région, le potentiel est coulombien et la fonction est par conséquent connue.

Pour des états de Rydberg autres que pour l'atome d'hydrogène, quand la distance  $r$  entre l'électron et le cœur est plus grande que le rayon du cœur  $r_c$ , le potentiel est coulombien. À grandes distances ( $r > r_c$ ), l'électron voit une charge écrantée identique à celle vue par un électron de Rydberg d'un atome d'hydrogène. Par contre, pour  $r < r_c$ , le potentiel est généralement plus profond que dans le cas coulombien. [...]

Pour tenir compte de ce phénomène dans l'expression de l'énergie des états de Rydberg, on introduit le défaut quantique  $\delta_l$ . Le défaut quantique dépend donc principalement du moment cinétique orbital  $l$ . L'énergie des états propres des atomes de Rydberg alcalins s'écrit alors

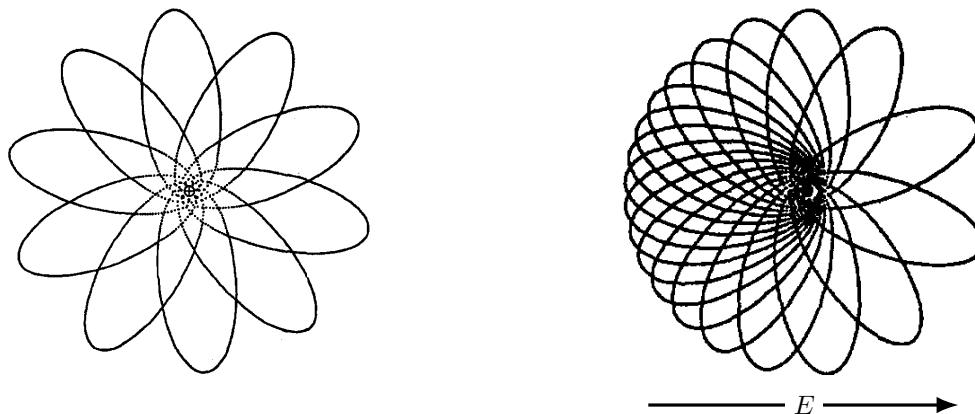
$$E_n = \frac{-E_I}{(n - \delta_l)^2}.$$

---

**Document 4 : Classical view of the properties of Rydberg Atoms**

---

*extrait d'un article de T.P. Hezel et al. publié dans l'American Journal of Physics, volume 60 n°4, avril 1992*



Precession of a nearly Keplerian elliptical orbit of the Rydberg electron about a positively charged nucleus

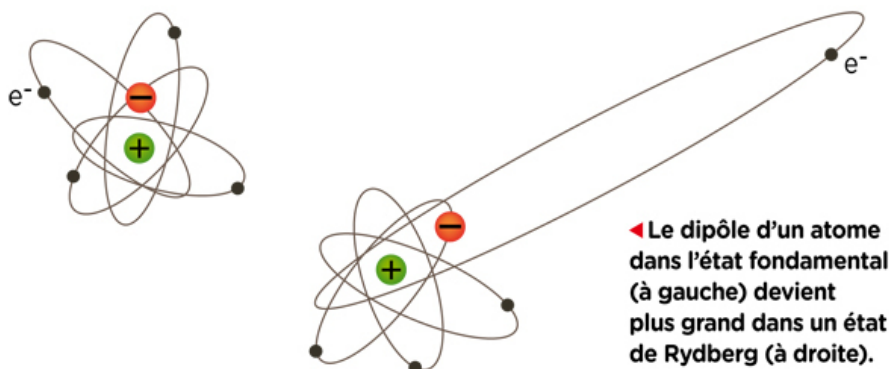
Precession of a nearly Keplerian elliptical orbit of the Rydberg electron about a positively charged nucleus in an electric field  $E = 1000 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$

---

**Document 5 : La force entre deux atomes enfin mesurée**

---

*extrait d'un article de A. Browaeys, publié dans La Recherche n°509, mars 2016*



◀ Le dipôle d'un atome dans l'état fondamental (à gauche) devient plus grand dans un état de Rydberg (à droite).

### III Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de van der Waals à l'aide d'atomes de Rydberg piégés

#### III.A – Interaction d'un atome de rubidium avec un laser

Nous nous intéressons aux interactions d'un atome de rubidium avec une onde électromagnétique dans le modèle de l'électron élastiquement lié.

**Q 27.** On considère que chaque atome est soumis à un champ électrique du type  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ , créé par un laser. On néglige tout phénomène magnétique. À quelle condition peut-on remplacer l'expression précédente du champ auquel est soumis un atome placé à l'origine par la forme  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$  ?

On considère cette condition respectée par la suite.

**Q 28.** Déterminer le champ magnétique de l'onde (en assimilant le milieu au vide). Relier l'intensité de l'onde électromagnétique plane dans le vide (puissance électromagnétique moyenne transportée par unité de surface) à l'amplitude  $E_0$  du champ électrique de l'onde.

L'atome de rubidium ( $Z = 37$ , masse  $M$ ) est modélisé sous sa forme hydrogénoïde si bien que l'on considère que les 36 électrons de cœur restent au voisinage du noyau et que seul l'électron de valence est sensible au champ électrique extérieur et « voit » un noyau de charge  $+e$ .

On admet que l'on peut modéliser le mouvement de cet électron de valence par un oscillateur harmonique amorti dont l'équation du mouvement (charge élastiquement liée) est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{-e}{m_e} E_0 \cos(\omega t).$$

La pulsation  $\omega_0$  est caractéristique de l'atome,  $\gamma$  est le coefficient d'amortissement et  $\Delta = \omega - \omega_0$  est l'écart à la résonance. On prendra  $\gamma = 6,2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ . On suppose que  $\gamma \ll \omega_0$ . On pose la solution en régime sinusoïdal forcé  $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ .

**Q 29.** Exprimer dans ces conditions  $x_0$  et  $\varphi$  en fonction des données.

**Q 30.** Pourquoi l'atome absorbe-t-il de l'énergie à chaque cycle du champ électrique ?

**Q 31.** Déterminer la puissance moyenne absorbée que l'on notera  $\langle P \rangle$ . Représenter graphiquement les variations de  $\langle P \rangle$  en fonction de  $\omega$ .

Lorsque la fréquence du laser est égale à la fréquence propre  $\frac{\omega_0}{2\pi}$ , l'absorption est dite résonante.

**Q 32.** Déterminer, dans le cas résonant, l'expression du déplacement  $x(t)$  et de la vitesse  $v(t)$  de l'électron.

**Q 33.** Déterminer, dans le cas résonant, la valeur moyenne de la force de Lorentz agissant sur l'électron. Préciser le sens de cette force moyenne et exprimer sa valeur en fonction de l'intensité de l'onde électromagnétique.

**Q 34.** Quelle interprétation corpusculaire qualitative peut-on donner à cette force ?

Pour comprendre l'origine de la force exercée par la pince optique sur un atome, nous considérons un atome de petites dimensions par rapport à l'extension spatiale du faisceau laser et à la longueur d'onde de celui-ci, placé en un point de coordonnées  $(r, \theta, z)$  dans le faisceau laser précédent.

**Q 35.** En tenant compte des conditions  $\omega < \omega_0$  et  $|\Delta| \gg \gamma$ , déterminer la polarisabilité  $\alpha$ , définie par la relation (I.1).

**Q 36.** Montrer que l'énergie potentielle moyenne d'interaction de l'atome avec le laser est proportionnelle à l'intensité du faisceau laser  $I(r, z)$  et que le facteur de proportionnalité, que l'on ne demande pas de déterminer explicitement, est négatif.

Dans cette situation hors résonance, la composante selon  $\vec{u}_z$  de la force exercée par l'onde sur l'atome est négligeable.

À l'aide de plusieurs paires de lasers se propageant dans des directions opposées et de fréquences légèrement désaccordées par rapport à la résonance, on peut considérablement ralentir des atomes de rubidium de façon à les amener à une température de l'ordre de 50  $\mu\text{K}$ .

Dans ces conditions, il est possible de manipuler un par un les atomes placés dans un état de Rydberg à l'aide de faisceaux lasers non résonants vérifiant  $\omega < \omega_0$  et  $|\Delta| \gg \gamma$ , qui jouent le rôle de « pinces » (d'où le nom de pinces optiques donné à ce dispositif). Le principe de ces pinces optiques repose sur les inhomogénéités de l'intensité du faisceau laser.

Dans un faisceau laser gaussien de longueur d'onde  $\lambda$  et d'axe  $(Oz)$ , l'intensité dépend de  $r$  (distance à l'axe) et de  $z$  suivant la relation

$$I(r, z) = I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left( -\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)$$

où  $I_0$  est l'intensité maximale du faisceau laser,  $W_0$  est une quantité positive caractéristique du faisceau laser appelée rayon minimal et  $W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{L_R^2}}$ , avec  $L_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$  la longueur de Rayleigh.

**Q 37.** Tracer schématiquement cette intensité en fonction de  $r$ , la distance à l'axe, pour  $z$  fixé.

**Q 38.** Quelle est la signification physique de  $W(z)$  ?

**Q 39.** Tracer la forme du faisceau laser dans un plan contenant l'axe  $(Oz)$ , en identifiant deux zones suivant que  $z \ll L_R$  ou  $z \gg L_R$ .

**Q 40.** Que représente la quantité  $\frac{\lambda}{\pi W_0}$  ? Quelle analogie peut-on faire avec la diffraction obtenue par un trou de dimension  $W_0$  ?

**Q 41.** À quoi correspond la longueur de Rayleigh ?

**Q 42.** Déterminer la position d'équilibre de l'atome dans le faisceau et étudier sa stabilité. Expliquer en quoi le laser agit comme une pince optique sur l'atome.

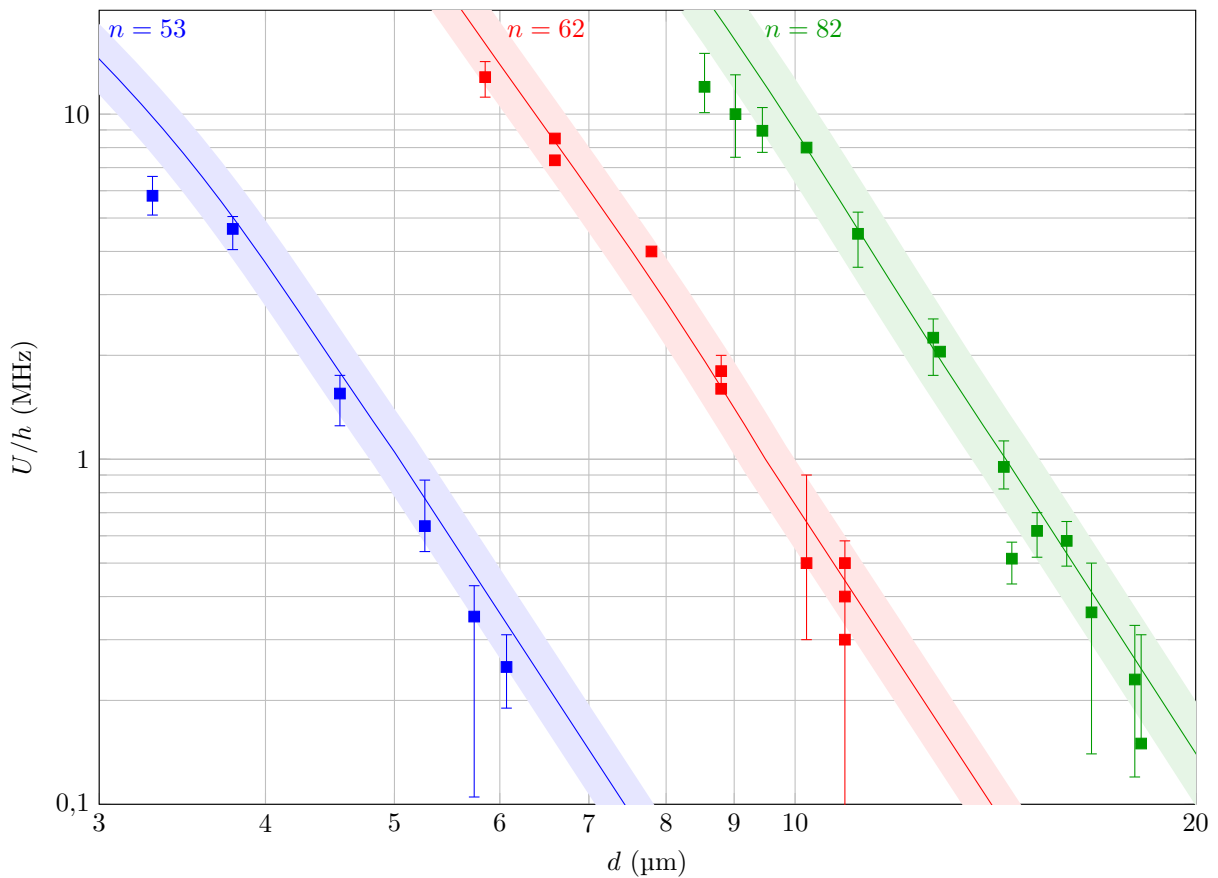
**Q 43.** On focalise le faisceau laser à l'aide d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ , placée en  $z = 0$ . On ne tient pas compte de la diffraction par cette lentille. En s'appuyant sur un schéma, déterminer le diamètre du faisceau dans le plan focal. Faire l'application numérique pour  $f' = W_0$  et  $\lambda = 850 \text{ nm}$ .

**Q 44.** Pourquoi ce dispositif permet-il de sélectionner un seul atome de rubidium placé dans un état de Rydberg ?



### III.B – Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de van der Waals

À l'aide du dispositif précédent, on peut placer des atomes de Rydberg à des distances contrôlables de l'ordre de quelques micromètres. L'énergie potentielle d'interaction de van der Waals peut alors être mesurée (par une méthode non décrite). Le résultat obtenu à l'aide de paires d'atomes de rubidium dans des états de Rydberg identiques est donné sur la figure 4 où  $U$  désigne l'énergie potentielle de van der Waals et  $d$  la distance entre les atomes. L'expérience est réalisée pour des atomes se trouvant dans plusieurs états de Rydberg de nombre quantique principal  $n$  différent.



**Figure 4** Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de van der Waals entre deux atomes de rubidium pour  $n = 53$ ,  $n = 62$  et  $n = 82$ . Les traits continus correspondent aux attendus théoriques, les bandes aux incertitudes à 5 % sur  $d$ . D'après L. Béguin *et al.*, Physical Review Letters, 18 juin 2013.

**Q 45.** Pourquoi est-il nécessaire de se placer à très basse température et à très basse pression pour effectuer ces mesures ?

**Q 46.** Les résultats de la figure 4 sont-ils compatibles avec l'expression de l'énergie potentielle de van der Waals donnée en question 14 ?

**Q 47.** Justifier qualitativement qu'à  $d$  donné l'énergie potentielle d'interaction augmente avec  $n$ . Selon les données expérimentales de la figure 4, l'énergie potentielle dépend-elle de  $n$  selon une simple loi de puissance en  $n^\alpha$  ?

## Données et formulaire

|                                                                                                            |                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Vitesse de la lumière dans le vide                                                                         | $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$                 |
| Perméabilité magnétique du vide                                                                            | $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$          |
| Permittivité diélectrique du vide                                                                          | $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Charge élémentaire                                                                                         | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$                               |
| Constante de Planck                                                                                        | $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$                  |
| Constante de Boltzmann                                                                                     | $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$           |
| Constante d'Avogadro                                                                                       | $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                       |
| Masse de l'électron                                                                                        | $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$                            |
| Rayon de Bohr                                                                                              | $a_0 = 52,92 \text{ pm}$                                            |
| Énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène                                                                | $E_I = 13,60 \text{ eV}$                                            |
| Masse molaire du rubidium                                                                                  | $M_{\text{Rb}} = 85,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                |
| Énergie potentielle d'un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur $\vec{E}$ |                                                                     |

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

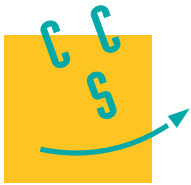
Expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

---

• • • FIN • • •

---



## Films de savon, mousses et son

Les films de savon (ou plus généralement de tensioactif) sont l'objet de recherches actuelles pour différentes raisons. D'un point de vue fondamental, le film plan peut constituer, par exemple, un excellent système modèle pour l'étude de la membrane biologique. D'un point de vue industriel, l'étude des propriétés physiques des mousses de savon, dont le constituant de base est la bulle de savon, a de nombreuses applications (lessives, mousses pétrolières...). Dans le domaine de l'acoustique, il a été montré récemment que les mousses possèdent des propriétés étonnantes : selon la fréquence du son, il existe deux régimes de propagation acoustique non dispersifs. Et dans la zone de transition entre les deux régimes, le son se propage très difficilement, il semble être « bloqué dans la mousse » !

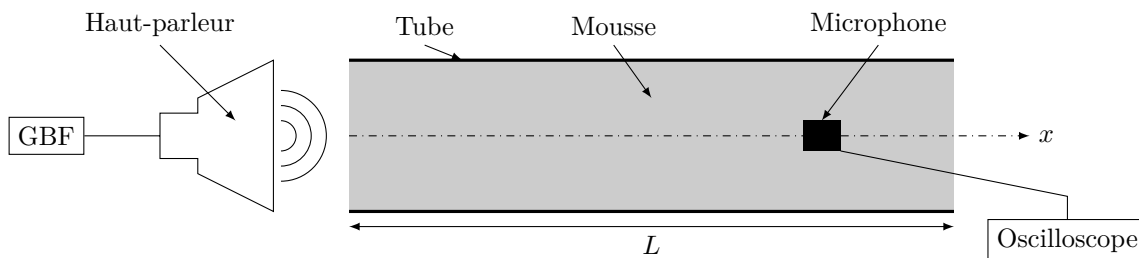
La partie I est consacrée à l'étude d'un dispositif expérimental très simple, permettant une mesure de l'ordre de grandeur de la célérité du son dans la mousse, pour le régime des basses fréquences. La partie II et la partie III sont dédiées à l'étude des films de savon plans. Ces trois parties sont totalement indépendantes.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Des données numériques et un formulaire figurent à la fin du sujet.

### I Acoustique des mousses

Une mousse de savon peut être aisément créée à l'aide d'un « bulleur » (type bulleur d'aquarium) et d'une solution d'eau savonneuse. Pour étudier les propriétés acoustiques de la mousse, on met au point le dispositif expérimental schématisé en figure 1. La mousse est insérée dans un long tube horizontal cylindrique (dit « tube de Kundt »), de longueur  $L = 50$  cm, dont elle occupe tout le volume. À une extrémité du tube, on dispose un haut-parleur qui émet l'onde sonore qui va se propager dans la mousse. Pour capter l'onde sonore, on déplace un microphone, de type microphone électrostatique, le long de l'axe ( $Ox$ ) du tube. Le signal sonore est converti en un signal électrique, que l'on peut observer à l'aide d'un oscilloscope.



**Figure 1** Schéma du dispositif expérimental pour une mesure de la célérité du son dans la mousse

**I.A –** Nous étudions d'abord la propagation d'une onde sonore dans le tube rempli d'air. On considère que le tube est ouvert à ses deux extrémités : côté haut-parleur, où l'on choisit  $x = 0$  et également de l'autre côté en  $x = L$ . On considère que l'évolution de l'air est isentropique au passage de l'onde sonore.

Lorsque l'air est au repos dans le tube, la pression est uniforme et vaut  $P_0$ . En présence de l'onde sonore, une surpression acoustique  $p(x, t)$  est induite et la pression totale vaut  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ . Le champ des vitesses (des particules de fluide) associé à l'onde est  $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x$  et la masse volumique est  $\mu(x, t) = \mu_a + \mu_1(x, t)$  où  $\mu_a$  est la masse volumique de l'air au repos.

On travaille dans l'approximation acoustique :  $p(x, t) \ll P_0$ ,  $v(x, t) \ll c_a$  avec  $c_a$  célérité du son dans l'air et enfin  $\mu_1(x, t) \ll \mu_a$ . On rappelle l'équation de propagation pour la surpression acoustique :  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_a \chi_a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ , où  $\chi_a$  est le coefficient de compressibilité isentropique de l'air défini par  $\chi_a = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$ .

**Q 1.** Donner l'expression littérale de la célérité du son dans l'air,  $c_a$ , en fonction de  $\mu_a$  et  $\chi_a$ .

On note  $\gamma$  le coefficient adiabatique du gaz, rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant.

- Q 2.** Démontrer que, dans l'approximation acoustique,  $\chi_a = \frac{1}{\gamma P_0}$  pour l'air considéré comme un gaz parfait.
- Q 3.** Calculer numériquement  $\chi_a$  et  $c_a$ , avec  $P_0 = 1,01 \times 10^5$  Pa,  $\mu_a = 1,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $\gamma = 1,40$ .
- Q 4.** Calculer  $c_e$  la célérité du son dans l'eau (voir données en fin d'énoncé).

**I.B –** Considérons la propagation d'une onde incidente, progressive, plane, harmonique (OPPH) de pulsation  $\omega$ , de nombre d'onde  $k$ , dans le sens des  $x$  croissants. La surpression acoustique est  $p_i(x, t) = p_{i0} \cos(\omega t - kx)$ , avec  $p_{i0}$  réel strictement positif. Le champ des vitesses est  $\vec{v}_i(x, t) = v_i(x, t)\vec{u}_x$ . Dans la suite, à chaque grandeur physique variant sinusoidalement on pourra associer une grandeur complexe, repérée par un symbole souligné, par exemple  $\underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx))$ . Lorsque l'amplitude et la phase sont à priori inconnues, on choisira une notation du type  $\underline{v}_i(x, t) = \underline{v}_{i0} \exp(j(\omega t - kx))$ , où  $\underline{v}_{i0}$  est à priori un complexe quelconque. Cette onde subit une réflexion dans le plan  $x = L$  et donne naissance à une onde réfléchie, de type OPPH de pulsation  $\omega$ , pour laquelle la surpression acoustique et le champ des vitesses sont notés respectivement  $p_r(x, t)$  et  $\vec{v}_r(x, t) = v_r(x, t)\vec{u}_x$ .

**Q 5.** Donner, sans démonstration, l'expression de  $\underline{v}_i(x, t)$  en fonction de  $x, t, \omega, k, p_{i0}$  et de l'impédance acoustique du milieu (ici l'air), dont on donnera l'expression en fonction de  $\mu_a$  et  $c_a$ .

On admettra dans la suite que la surpression acoustique aux extrémités d'un tuyau ouvert est nulle.

**Q 6.** Déterminer l'expression des coefficients de réflexion en surpression et en vitesse définis respectivement par  $r_p = \underline{p}_r(L, t)/\underline{p}_i(L, t)$  et  $r_v = \underline{v}_r(L, t)/\underline{v}_i(L, t)$ .

**Q 7.** Établir l'expression de  $\underline{p}_r(x, t)$  et de  $\underline{v}_r(x, t)$ , puis celle de  $p_r(x, t)$  et de  $v_r(x, t)$ .

**Q 8.** En déduire l'expression de la surpression acoustique dans le tube  $p(x, t)$ , et celle de la vitesse  $v(x, t)$ . Comment nomme-t-on ce type d'ondes ? Que dire en  $x = L$  ?

**Q 9.** Montrer que, pour les ondes dans le tube,  $k$  ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs, notées  $k_n$ , repérées par un entier  $n$  strictement positif. Chaque valeur de  $n$  correspond à un mode propre ondulatoire particulier.

**Q 10.** Exprimer les longueurs d'ondes  $\lambda_n$  associées au mode d'ordre  $n$  en fonction de  $n$  et  $L$ , ainsi que les fréquences  $f_n$  associées en fonction de  $n, c_a$  et  $L$ .

**Q 11.** Tracer, à un instant  $t$  donné, l'allure de  $p(x, t)$  dans le tube, pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

**I.C –** Le tube est maintenant rempli d'une mousse qui peut être décrite comme un ensemble de bulles d'air, dont la dimension caractéristique est  $R \approx 20 \mu\text{m}$ , séparées par de minces films d'eau savonneuse (d'épaisseur de l'ordre du micromètre). Nous étudions alors la propagation de l'onde sonore dans la mousse. Sous réserve que l'on puisse considérer la mousse comme un milieu continu, on admet que les résultats obtenus précédemment pour l'onde sonore sont valables dans la mousse, en remplaçant simplement  $c_a$  par  $c_m$ , célérité du son dans la mousse. Les propriétés de l'eau savonneuse (masse volumique et coefficient de compressibilité) sont assimilées à celles de l'eau pure.

On règle la fréquence de l'onde sonore émise par le haut-parleur à la valeur  $f = 200$  Hz. En déplaçant le microphone dans la mousse, dans la direction de l'axe ( $Ox$ ), on repère les nœuds de surpression acoustique. Ils correspondent aux positions :  $x_1 = 0,0$  cm,  $x_2 = 9,9$  cm,  $x_3 = 20,0$  cm,  $x_4 = 30,0$  cm,  $x_5 = 39,8$  cm,  $x_6 = 50,0$  cm. La précision sur la mesure est de l'ordre de 2 mm.

**Q 12.** Déduire de ces mesures une estimation de  $c_m$  à cette fréquence. Commenter.

**Q 13.** Quelle condition expérimentale doit-on vérifier pour pouvoir considérer la mousse comme un milieu continu ? Peut-on considérer que c'est le cas (on s'appuiera sur des valeurs numériques) ?

**I.D –** Dans la suite, on considérera la mousse comme un milieu continu, homogène, de masse volumique au repos  $\mu_m$  et de compressibilité isentropique  $\chi_m$ .

Nous souhaitons comparer la célérité estimée à la question 12 à la célérité donnée par la loi de Wood  $c_W = 1/\sqrt{\mu_m \chi_m}$ .

**Q 14.** La fraction volumique de liquide (eau savonneuse de masse volumique assimilée à  $\mu_e$ ) dans la mousse est  $\phi = 0,10$ . Établir l'expression de la masse volumique  $\mu_m$  en fonction de  $\phi, \mu_e$  et  $\mu_a$ . En donner une expression littérale simplifiée en considérant les ordres de grandeur des termes en présence.

**Q 15.** Exprimer  $\chi_m$  en fonction de  $\phi, \chi_e$  (coefficient de compressibilité isentropique de l'eau savonneuse assimilé à celui de l'eau pure) et  $\chi_a$ .

**Q 16.** Montrer, en s'appuyant sur des ordres de grandeur numériques, que l'on peut donner une expression littérale approchée de  $\chi_m$ .

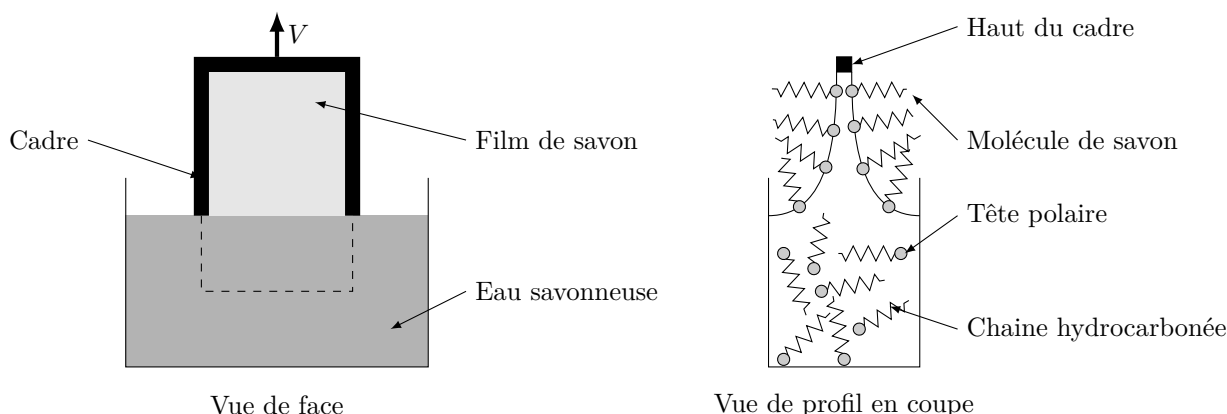
**Q 17.** En déduire que la loi de Wood permet d'exprimer la célérité du son  $c_m$  dans la mousse en fonction de  $\gamma, P_0, \phi$  et  $\mu_e$ .

**Q 18.** Faire l'application numérique pour  $c_m$  et comparer avec la valeur mesurée expérimentalement.

## II Formation et drainage d'un film de savon plan

Dans cette partie, on s'intéresse au film d'eau savonneuse qui sépare les bulles d'air dans une mousse de savon. Dans sa réalisation la plus simple, un tel film de savon peut être obtenu en plongeant un cadre dans de l'eau savonneuse et en le sortant lentement : du liquide est entraîné et reste « accroché » sur le cadre. Dans toute la suite, les films de savons étudiés seront formés sur un cadre plan, vertical.

Dans une telle expérience, en formant le film, on augmente l'aire de l'interface liquide-air, ce qui a un « cout énergétique », car l'interface se comporte comme une membrane élastique. Si on note  $\sigma$  le coefficient de tension superficielle liquide-air, augmenter l'interface d'une aire  $dA$  nécessite d'apporter l'énergie  $\sigma dA$ . C'est là que la présence des molécules de savon dans l'eau se révèle intéressante : ces molécules sont composées d'une partie hydrophile (tête polaire) et d'une partie hydrophobe (chaîne hydrocarbonée) ; elles se placent ainsi spontanément à l'interface air-eau. Elles diminuent l'énergie de l'interface air-eau et la membrane élastique que constitue l'interface est alors plus facile à étirer : le coefficient de tension superficielle de l'eau savonneuse est plus faible que celui de l'eau pure. La figure 2 donne une représentation schématique de la structure du film de savon.



**Figure 2** Film de savon plan formé sur un cadre rectangulaire vertical, tiré du bain d'eau savonneuse à la vitesse  $V$  (les représentations ne sont pas à l'échelle)

### II.A – Quelques résultats préliminaires

Nous abordons tout d'abord, de façon générale, la notion de tension de surface entre deux milieux, ici liquide-air, le liquide étant quelconque (pas forcément de l'eau savonneuse). Le coefficient de tension superficielle est noté  $\sigma$ .

**II.A.1)** Nous considérons le cas d'une bulle d'air, au sein du liquide.

**Q 19.** Expliquer qualitativement pourquoi, en l'absence de gravité, ou lorsque l'on peut négliger la gravité (cas des petites bulles), la bulle doit être sphérique.

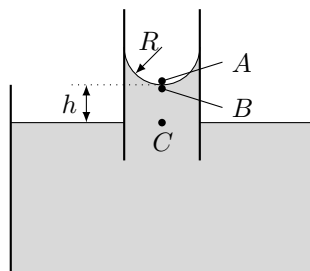
Nous considérons une bulle sphérique de rayon  $R$ . À l'intérieur de la bulle la pression est  $P_i$  et à l'extérieur la pression est  $P_e$ .

On admettra qu'à l'équilibre ces pressions vérifient la relation de Laplace :  $P_i = P_e + \frac{2\sigma}{R}$ .

**Q 20.** Comment s'exprime la relation de Laplace, non plus dans le cas d'une bulle d'air dans le liquide, mais pour une bulle de savon sphérique dans l'air (bulle d'air enserrée par un mince film de liquide) ?

**II.A.2)** Lorsque la gravité n'est plus négligeable, on observe une déformation des systèmes (bulles d'air, bulles de savon, gouttes...). Nous cherchons à déterminer, en considérant une situation expérimentale particulière, une dimension pour laquelle les effets de la gravité et les effets de la tension superficielle sont comparables.

Nous plongeons un tube fin, cylindrique, en verre, dans un becher contenant le liquide de coefficient de tension superficielle  $\sigma$  et de masse volumique  $\rho$ . Par capillarité, le liquide monte dans le tube d'une hauteur  $h$  (figure 3). Le ménisque est supposé être une demi-sphère de rayon  $R$ .



**Figure 3** Montée capillaire du liquide dans un tube fin

**Q 21.** En utilisant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  représentés sur la figure 3, exprimer  $h$  en fonction de  $\sigma$ ,  $R$ ,  $\rho$  et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

- Q 22.** En s'appuyant sur un argument dimensionnel, construire une grandeur homogène à une longueur à partir des grandeurs  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $g$ . Celle longueur, appelée *longueur capillaire*, est notée  $\kappa^{-1}$ .
- Q 23.** Déterminer numériquement  $\kappa^{-1}$  pour l'eau pure.
- Q 24.** En considérant l'exemple traité en question 21, exprimer le rapport  $h/R$  en fonction de  $R$  et de  $\kappa^{-1}$ . À quelle condition sur  $R$  et  $\kappa^{-1}$  l'élévation de l'eau dans le tube est-elle négligeable ?

## II.B – Formation d'un film plan et observations macroscopiques

Nous revenons à l'étude d'un film plan, formé sur un cadre rectangulaire vertical que l'on sort d'un bain d'eau savonneuse, à vitesse constante  $V \approx 1 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**II.B.1)** On définit le nombre capillaire  $C_a$  qui compare les effets de la tension superficielle et des forces visqueuses :  $C_a = \frac{\eta V}{\sigma}$ , où  $\eta$  est la viscosité de l'eau savonneuse et  $V$  la vitesse à laquelle le cadre est sorti du bain d'eau savonneuse.

**Q 25.** Quelle est la dimension de  $C_a$  ?

**Q 26.** En quoi ce nombre est-il pertinent pour l'étude de l'épaisseur d'un film fraîchement formé ?

**Q 27.** À faible nombre capillaire, on propose une expression de l'épaisseur  $e$  du film fraîchement formé :  $e \approx 2\kappa^{-1}C_a^{2/3}$ . Calculer numériquement l'ordre de grandeur de  $e$ . La viscosité de l'eau savonneuse sera prise égale à celle de l'eau.

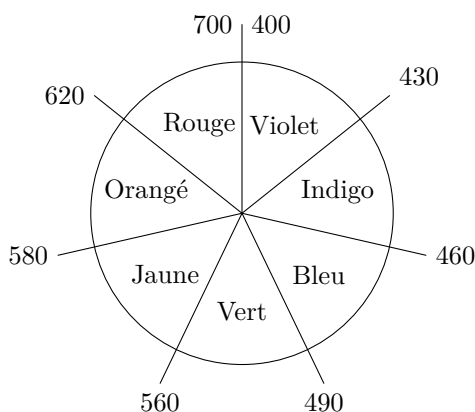
**II.B.2)** Sous l'effet de la gravité, le liquide entraîné dans le film fraîchement formé s'écoule. En 1704, Newton, dans son « *Traité d'optique* », observant des bulles de savon sphériques, est le premier à faire une description macroscopique d'un tel drainage gravitaire (document 1). Le document 2 donne une roue des couleurs

### Document 1

Extrait de la XVII<sup>ème</sup> observation du « *Traité d'Optique* » d'Isaac Newton (1704).

Si en soufflant dans de l'eau qui aura été épaissie avec un peu de savon, on élève une bulle, c'est une observation commune qu'après un certain temps cette bulle paraît teintée d'une grande variété de couleurs. [...] Les différentes couleurs paraissaient dans un ordre très régulier, comme autant d'anneaux concentriques, qui entouraient le haut de la bulle. Et à mesure que l'eau, en s'écoulant continuellement en bas, rendait la bulle plus mince, ces anneaux se dilataient lentement et se répandaient sur toute la bulle, descendant par ordre jusqu'au bas, où ils disparaissaient chacun à son tour. Cependant après que toutes les couleurs eurent paru au haut de la bulle, il se forma dans le centre des anneaux une petite tache noire et ronde [...], laquelle tache se dilatait continuellement jusqu'à ce qu'elle eut acquis plus de la moitié ou des trois quarts d'un pouce en largeur avant que la bulle crevât.

### Document 2 : Roue des couleurs



Chaque couleur est diamétralement opposée à sa couleur complémentaire. Une couleur et sa couleur complémentaire ajoutées ensemble donnent du blanc. Par exemple, la couleur complémentaire de l'orangé est le bleu-indigo. Les longueurs d'onde associées aux rayons de la roue sont données en nanomètre.

Le film vertical, observé par la réflexion d'une lumière blanche éclairant le film en incidence normale, présente sur toute sa surface une succession de franges colorées horizontales. Le phénomène observé résulte des interférences entre les deux premières ondes lumineuses réfléchies par le film de savon. Il convient de noter qu'à l'interface air-eau savonneuse, la réflexion de l'onde s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$  alors qu'elle s'effectue sans déphasage à l'interface eau savonneuse-air.

- Q 28.** Proposer une modélisation simple du problème permettant d'expliquer la présence de franges colorées horizontales.
- Q 29.** Quelle est l'épaisseur du film à l'endroit où l'on observe une bande colorée orangée ? Même question pour une bande colorée rouge (les réponses argumentées doivent aboutir à des valeurs numériques).
- Q 30.** En théorie, dans quel ordre apparaissent les couleurs (de haut en bas) ?

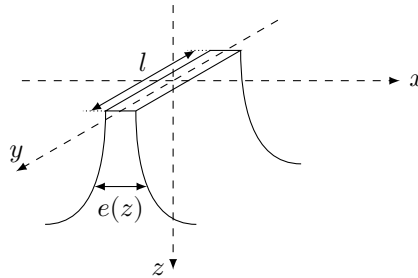
**Q 31.** Si l'on place un écran noir derrière le film plan vertical, on peut voir apparaître les taches noires décrites par Newton. Expliquer et donner une majoration de l'épaisseur du film à l'endroit de ces taches noires.

## II.C – Étude du drainage gravitaire du film

On forme un film plan sur un cadre rectangulaire vertical, dont la largeur est  $l$ . À  $t = 0$ , l'épaisseur du film fraîchement formé est supposée uniforme sur toute la surface du film et est notée  $e_0$  ; elle vérifie  $e_0 \ll l$ . Dans cette sous-partie II.C, on cherche à rendre compte de l'amincissement progressif du film, dû au drainage gravitaire. Nous considérons ici que le seul rôle de la tension superficielle est de rigidifier les interfaces qui limitent le film. Tout se passe comme si le liquide était enserré par deux murs rigides, mais permettant d'assurer l'égalité des pressions de part et d'autre de l'interface.

La masse volumique  $\rho$  de l'eau savonneuse est supposée invariable ; la viscosité est notée  $\eta$ . On note  $(Oz)$  l'axe vertical, orienté par un vecteur  $\vec{u}_z$ , vecteur unitaire vertical descendant. On note  $(Ox)$  l'axe horizontal normal au plan du film de savon. Le point  $O$  est au sommet du film, au milieu du cadre rectangulaire. L'ensemble est représenté sur la figure 4.

**II.C.1)** On suppose le régime stationnaire établi. L'épaisseur du film,  $e(z)$ , est une fonction de  $z$  et en négligeant les effets de bord, on suppose que le vecteur vitesse des particules de fluide est de la forme  $\vec{v} = v_z(x, y, z)\vec{u}_z$ . L'interface film-air est supposée quasi-verticale :  $\frac{de}{dz} \ll 1$ .



**Figure 4** Représentation schématique, non à l'échelle, du film fraîchement formé

**Q 32.** Justifier qu'il est légitime d'écrire que la composante du vecteur vitesse ne dépend que de  $x$  :  $v_z(x)$ .

**Q 33.** Justifier que la pression est à peu près uniforme dans le film.

**Q 34.** Déterminer le profil des vitesses  $v_z(x)$ .

**Q 35.** Montrer que le débit volumique, à travers une section horizontale du film, à la cote  $z$ , dans le sens vertical descendant, est  $d_v = \frac{l\rho g}{12\eta}(e(z))^3$ , avec  $g$  accélération de la pesanteur.

**II.C.2)** Nous considérons maintenant que le film est d'épaisseur variable dans le temps,  $e(z, t)$ , le long de la direction  $(Oz)$ . On admet que l'on peut utiliser le résultat de la question 35 avec une épaisseur dépendant du temps.

**Q 36.** Faire un bilan de matière pour une tranche de film, de hauteur  $dz$  et trouver une équation aux dérivées partielles reliant  $e(z, t)$ ,  $d_v$  et  $l$ . En déduire l'équation aux dérivées partielles régissant l'évolution de  $e(z, t)$ .

Outre une solution de type constante ( $e_0$ , épaisseur initiale du film) on peut rechercher les solutions de l'équation différentielle précédente sous la forme :  $e(z, t) = f(z)h(t)$ , où  $f$  et  $h$  sont des fonctions réelles. La fonction  $f$  recherchée ne s'annule pas, pour  $z > 0$ .

**Q 37.** Expliquer pourquoi une solution avec  $e(z, t)$  uniforme et constant est ici inacceptable.

**Q 38.** Dans le cas où  $e(z, t) = f(z)h(t)$ , montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que  $f$  et  $h$  vérifient  $\frac{\rho g}{4\eta}f(z)\frac{df}{dz} = -\frac{dh}{dt}(h(t))^{-3} = C$ , pour tout  $z$  et tout  $t$ .

Très peu de temps après avoir été formé, le film, d'épaisseur uniforme  $e_0$  à l'instant  $t = 0$ , s'amincit par le haut, du fait de l'écoulement du fluide. Dans la zone amincie, où l'épaisseur est plus petite que l'épaisseur initiale, on admet que l'épaisseur du film peut s'écrire  $e(z, t) = f(z)h(t)$ , où  $f$  et  $h$  vérifient les équations données dans la question 38.

**Q 39.** On donne  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2Ct}}$  pour  $t > 0$ . Montrer que  $e(z, t)$  est alors de la forme  $e(z, t) = \alpha\sqrt{\frac{z}{t}}$  où  $\alpha$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\eta$ ,  $\rho$  et  $g$ .

**Q 40.** À un instant  $t > 0$  donné, montrer que la zone amincie s'étend jusqu'à une valeur limite de  $z$ , notée  $z_l$ , que l'on exprimera en fonction de  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $g$ ,  $t$  et  $e_0$ .

**Q 41.** Tracer l'allure du film de savon vu de profil pour deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , avec  $t_1 < t_2$ , tels qu'à  $t_1$ ,  $z_l$  vaut à peu près  $e_0/10$  et qu'à  $t_2$ ,  $z_l$  vaut  $5e_0$ .

**Q 42.** Comment progresse la zone amincie au cours du temps ? Ce modèle vous paraît-il réaliste dans la phase initiale de l'expérience ( $z_l$  plus petit ou comparable à  $e_0$ ) ?



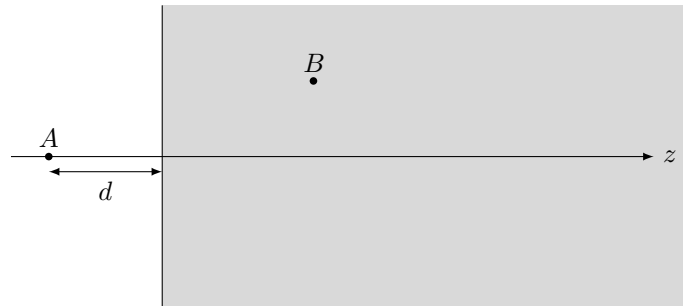
### III Film noir

Au cours du drainage, lorsque l'épaisseur du film devient de l'ordre de 100 nm, d'autres phénomènes que le drainage gravitaire entrent en jeu : le film s'amincit brusquement et va se stabiliser ensuite à une épaisseur bien définie. Il est alors quasi-transparent et est dit « film noir » (si l'on place un écran noir derrière le film, il apparaît noir). Son état résulte de l'équilibre entre différentes interactions : attraction de van der Waals et répulsion d'origine électrostatique. Nous nous proposons d'étudier ces différentes interactions. Dans toute cette partie, l'épaisseur du film est supposée uniforme sur toute sa surface.

**III.A** – Nous nous intéressons d'abord à l'attraction de van der Waals : le demi-espace d'air d'un côté du film est attiré par le demi-espace de l'autre côté, ce qui provoque le brusque amincissement observé.

L'énergie potentielle d'interaction, associée aux forces de van der Waals, entre deux molécules A et B est  $V_{AB} = \frac{-K}{r_{AB}^6}$ , où  $K$  est une constante (que l'on ne cherche pas à connaître) qui dépend de la nature des molécules et du milieu et où  $r_{AB}$  est la distance entre les deux molécules.

**Q 43.** Calculer, par intégration, l'énergie potentielle d'interaction  $E(d)$  entre une molécule A et un demi-espace de molécules B (figure 5), en fonction de  $K$ , de  $d$  la distance de A au demi-espace et de  $n_B$  le nombre de molécules par unité de volume dans le demi-espace.

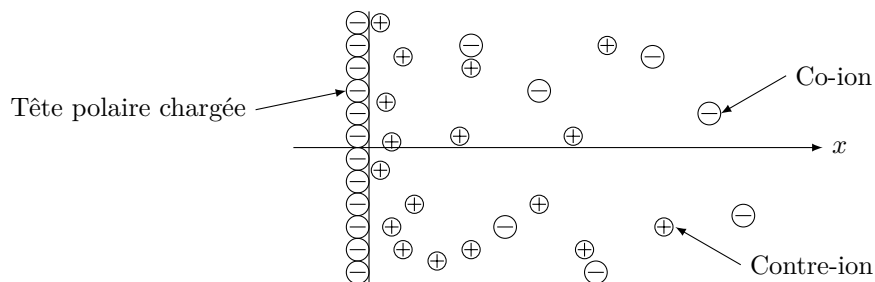


**Figure 5** Molécule A placée à la distance  $d$  d'un demi-espace infini de molécules B

De même, on peut calculer par intégration l'énergie potentielle d'interaction entre deux demi-espaces distants de  $D$ . Entre une aire unité du premier demi-espace et le deuxième demi-espace, on a l'énergie potentielle d'interaction  $U(D) = \frac{-H}{12\pi D^2}$  où  $H$  est la constante de Hamaker qui dépend de la nature des molécules et du milieu séparant les deux demi-espaces. L'ordre de grandeur de  $H$  est ici  $H \approx 1 \times 10^{-20}$  J.

**III.B** – Lorsque le film s'amincit sous l'effet des forces de van der Waals, il y a aussi une répulsion qui apparaît entre les deux interfaces qui limitent le film. En effet, les molécules de savon (molécules tensioactives), sont le plus souvent ioniques : leur dissociation en milieu aqueux laisse à l'interface une tête polaire chargée et un contre-ion (de charge opposée) libéré en solution. Ce sont donc deux parois chargées de même signe qui se rapprochent.

Nous raisonnons dans le cas d'un plan chargé négativement (la tête polaire porte une charge  $-e$ ) et les contre-ions libérés portent la charge  $+e$ . De plus, dans la majorité des situations expérimentales, des sels dissociés (généralement  $[\text{Na}^+ \text{Cl}^-]$ ) sont également présents en solution. Ils portent respectivement la charge  $+e$  (contre-ions) et la charge  $-e$  (co-ions). Chacune des parois chargées est ainsi entourée d'un cortège de contre-ions (provenant du sel ou de la molécule de savon dissociée), attirés par la paroi chargée ; l'ensemble forme une double-couche électrostatique (figure 6). Lorsque le film s'amincit, le recouvrement partiel des deux double-couches électrostatiques (correspondant aux deux parois du film) crée une augmentation de pression et donc une force répulsive au sein du film de savon. Ainsi, nous sommes amenés à étudier la répartition des charges en solution au voisinage d'un plan chargé.



**Figure 6** Représentation schématisée d'une « double-couche » électrostatique modélisant une paroi du film de savon

On note  $c_0$  la concentration particulière (nombre d'ions par unité de volume) en ions provenant du sel ajouté à la solution. L'axe ( $Ox$ ) est toujours normal au plan du film de savon ; le plan de l'interface chargée correspond

à  $x = 0$  (figure 6). On note  $c_+(x)$  et  $c_-(x)$  les concentrations particulières, respectivement en ions positifs et négatifs, dans la solution au voisinage du plan chargé. On note  $\psi(x)$  le potentiel électrostatique dans la solution.

**Q 44.** Rappeler la forme de  $V(r)$ , énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , distantes de  $r$ , dans le vide (on choisit une expression telle que quand  $r \rightarrow \infty$  on a  $V(r) \rightarrow 0$ ).

En solution, cette expression est identique, à condition de remplacer  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ , avec  $\varepsilon_r = 80$ , la permittivité relative de l'eau.

**Q 45.** À partir de quelle distance  $l_B$ , appelée longueur de Bjerrum, l'énergie potentielle  $V(r)$  entre deux charges  $+e$  est-elle comparable à l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$ ?

**Q 46.** Calculer numériquement  $l_B$  dans le cas de l'eau à  $T \approx 3 \times 10^2$  K.

Dans la suite, on pourra utiliser tous les résultats d'électrostatique connus dans le vide, en remplaçant simplement  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ .

**Q 47.** Exprimer l'énergie potentielle  $E_{p+}(x)$  d'un cation, de charge  $+e$  dans le potentiel électrostatique  $\psi(x)$ . Même question pour  $E_{p-}(x)$ , énergie d'un ion de charge  $-e$ .

La concentration particulière en ions en solution est donnée par une loi de Boltzmann :  $c_+(x) = c_0 \exp\left(\frac{-E_{p+}(x)}{k_B T}\right)$

et  $c_-(x) = c_0 \exp\left(\frac{-E_{p-}(x)}{k_B T}\right)$ , où  $T$  est la température en Kelvin.

**Q 48.** Exprimer la densité volumique de charge  $\rho(x)$  en fonction de  $c_+(x)$  et  $c_-(x)$ .

**Q 49.** Montrer que le potentiel  $\psi(x)$  vérifie une équation différentielle de la forme  $\frac{d^2\left(\frac{e\psi}{k_B T}\right)}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh\left(\frac{e\psi}{k_B T}\right)$  et donner l'expression de  $\lambda_D$ , longueur de Debye, en fonction de  $k_B$ ,  $T$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $c_0$  et  $e$ , puis en fonction, entre autres, de  $l_B$ .

**Q 50.** Calculer numériquement  $\lambda_D$  pour une valeur de  $c_0$  correspondant à  $1 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de sel ajouté en solution d'une part et pour  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'autre part.

**Q 51.** Dans le cas des potentiels faibles on peut linéariser l'équation précédente : on utilise le développement  $\sinh x \approx x$ . Donner alors la forme de  $\psi(x)$ . On introduira  $\psi_0$  le potentiel en  $x = 0$ .

**Q 52.** En déduire la forme de  $c_+(x)$  et  $c_-(x)$ . Tracer l'allure des courbes représentant ces fonctions. Interpréter physiquement la longueur de Debye.

**III.C** – Grâce au calcul précédent, on peut montrer que l'énergie potentielle d'interaction,  $W(D)$ , entre les deux plans chargés distants de  $D$  (interfaces limitant le film de savon) suit une loi du type :  $W(D) = W_0 \exp(-D/\lambda_D)$ , où  $W_0$  est une grandeur positive, homogène à une énergie par unité de surface, qui dépend du potentiel de surface  $\psi_0$ .

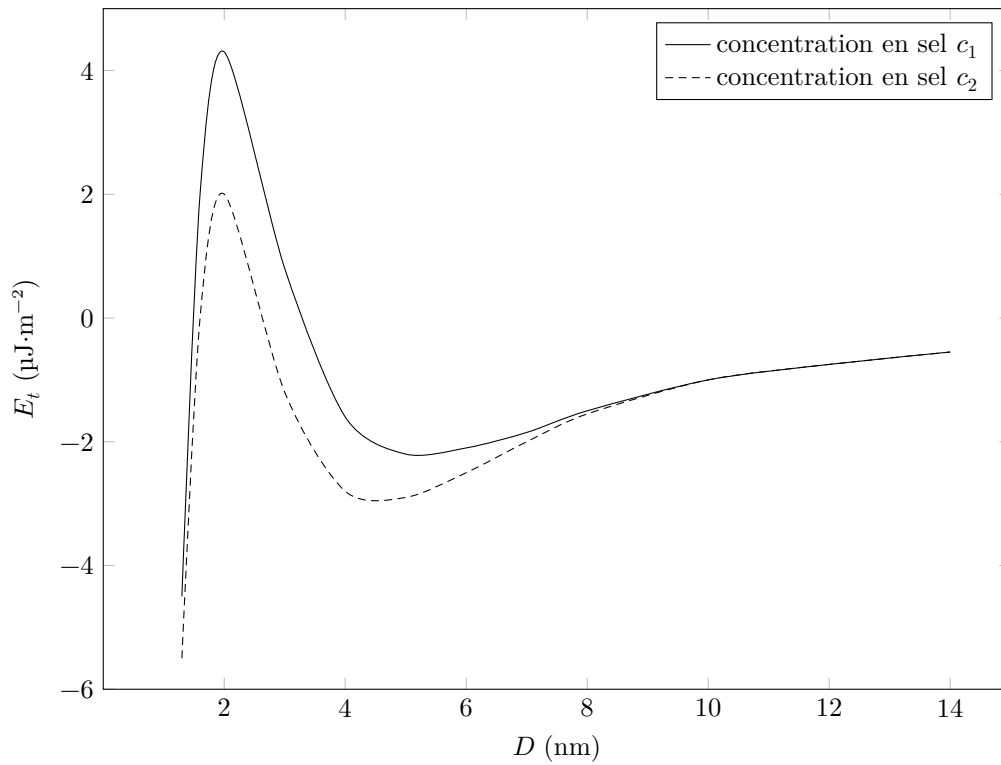
L'énergie potentielle totale d'interaction (par  $\text{m}^2$ ) entre les deux parois du film est alors  $E_t(D) = U(D) + W(D)$ . La figure 7 présente la forme de cette énergie potentielle totale, pour deux situations expérimentales différentes, correspondant à des concentrations en sel ajouté notées respectivement  $c_1$  et  $c_2$ . On a  $c_1 < c_2$ .

**Q 53.** L'énergie potentielle totale représentée en figure 7 vous semble-t-elle réaliste lorsque  $D$  tend vers 0 ? Proposer éventuellement une allure modifiée pour la courbe  $E_t(D)$ , en justifiant votre démarche.

**Q 54.** Expliquer pourquoi, à l'issue du drainage du film, on peut à priori observer deux types de films noirs différents.

Le premier type, d'épaisseur la plus importante est appelé « film noir commun » et le deuxième type, d'épaisseur la plus faible, est appelé « film noir de Newton » ou « second film noir ».

**Q 55.** Une concentration en sel élevée favorise-t-elle la formation d'un film noir commun, ou d'un film de Newton (réponse qualitative attendue) ?



**Figure 7** Allure de l'énergie potentielle totale  $E_t(D)$ , en fonction de  $D$ , pour deux concentrations en sel différentes

### Données

|                                          |                                                                                |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Constante de Planck                      | $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$                             |
| Constante des gaz parfaits               | $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$                    |
| Constante de Boltzmann                   | $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$                      |
| Constante d'Avogadro                     | $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                         |
| Perméabilité magnétique du vide          | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$                      |
| Permittivité diélectrique du vide        | $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$            |
| Constante de la gravitation universelle  | $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Charge élémentaire                       | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$                                          |
| Accélération de la pesanteur             | $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$                                          |
| Masse volumique de l'eau                 | $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$                         |
| Viscosité de l'eau                       | $\eta_e = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$                          |
| Compressibilité isentropique de l'eau    | $\chi_e = 4,9 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$                                 |
| Tension superficielle eau-air            | $\sigma_e = 72 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$                                   |
| Tension superficielle eau savonneuse-air | $\sigma_s = 25 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$                                   |
| Indice optique de l'air                  | $n_0 = 1,0$                                                                    |
| Indice optique de l'eau savonneuse       | $n_s = 1,4$                                                                    |

### Formulaire

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \sin \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

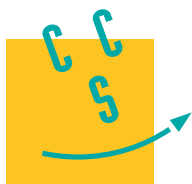
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\text{Équation de Navier-Stokes : } \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}.$$

• • • FIN • • •



## Étude simplifiée du vol d'un Airbus A320

Un formulaire et certaines valeurs numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

### I L'Airbus A320 en vol

#### I.A – Éléments de description d'une aile

On considère un avion de ligne de type Airbus A320. L'avion, de masse  $m = 60\,000$  kg supposée constante, est équipé de deux turboréacteurs (un sous chaque aile) délivrant une poussée totale  $\vec{F}$ . La figure 1 rappelle la signification des termes utiles à la description d'une aile.

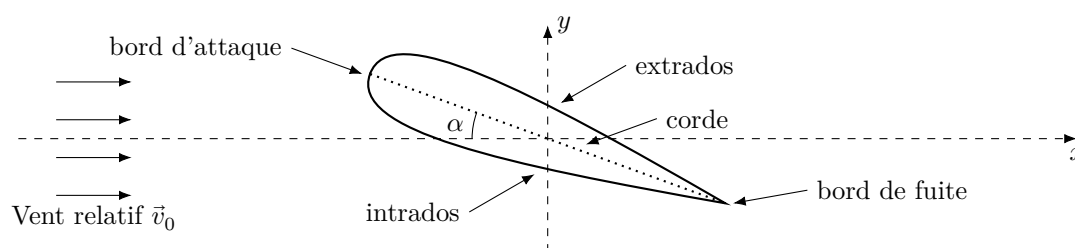


Figure 1

Chaque aile mesure environ 12 mètres de long et sa corde 3 mètres en moyenne. Le profil de chaque aile est supposé symétrique.

On se place dans le référentiel de l'avion  $(O, x, y)$  (figure 1). L'aéronef est dans un flux d'air unidirectionnel et stationnaire, dit vent relatif, de vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  et d'angle d'incidence  $\alpha$  par rapport à l'aile. L'écoulement de l'air est partout supposé incompressible, homogène et stationnaire. Chaque aile subit alors une force de portance d'intensité  $\frac{1}{2} \rho S v_0^2 C_y$  et une force de trainée d'intensité  $\frac{1}{2} \rho S v_0^2 C_x$  où  $\rho$  est la masse volumique de l'air et  $S$  la surface portante de l'aile. La valeur des coefficients  $C_x$  et  $C_y$  varie avec l'angle d'incidence comme indiqué figure 2. Pour l'écoulement autour de l'aile, dans le cadre de ces hypothèses, vitesse  $v$  et pression  $P$  sont liées par la relation de Bernoulli  $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_t = \text{Cte}$ .  $P_t$  est appelé *pression totale*.

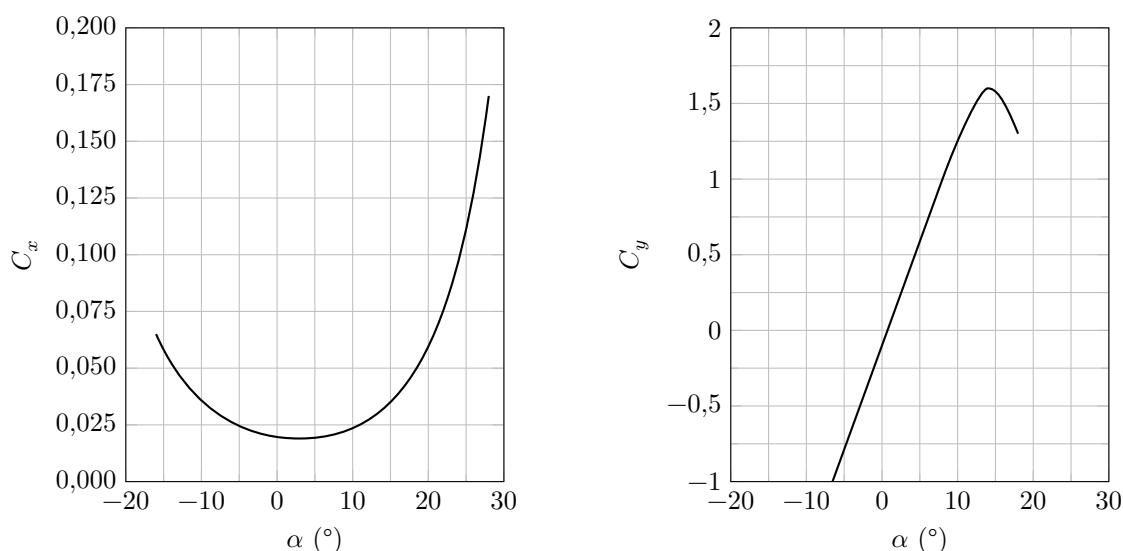


Figure 2

**Q 1.** Recopier sommairement le schéma de la figure 1 en y faisant figurer la résultante aérodynamique  $\vec{R}$  ainsi que ses composantes suivant les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , notées  $\vec{R}_x$  et  $\vec{R}_y$ .

On appelle *angle de calage*, l'angle  $\beta$  que fait la corde des ailes avec l'axe longitudinal du fuselage de l'avion (figure 3). Pour l'avion étudié, il vaut  $3^\circ$ . On appelle *assiette* l'angle que fait l'axe longitudinal de l'avion avec l'horizontale et *pente* l'angle que fait le support de la vitesse du centre de masse de l'avion (sa trajectoire) avec l'horizontale. En vol horizontal (pente nulle) et à assiette nulle, la vitesse du centre de masse de l'avion est dirigée suivant son axe longitudinal. En phase de montée ou de descente, le pilote peut modifier l'assiette à pente constante, modifiant ainsi l'angle d'incidence.

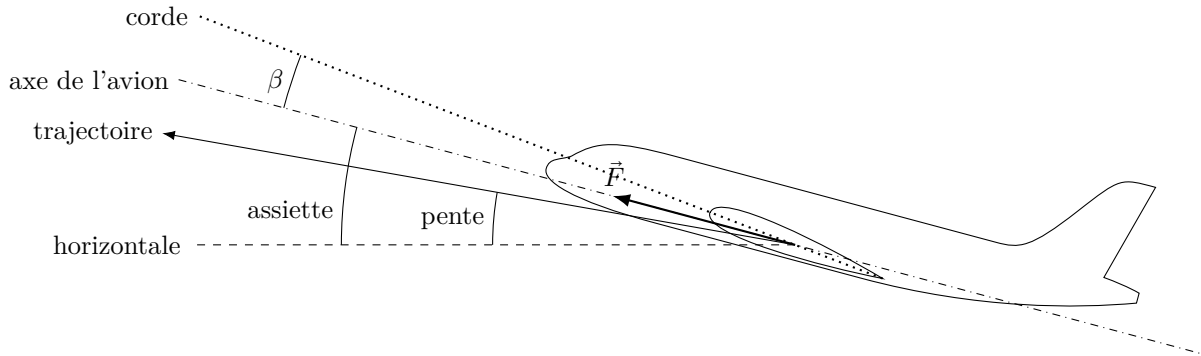


Figure 3

On suppose que le centre de poussée de l'avion correspond à son centre de masse et que la force de poussée totale  $\vec{F}$  produite par les deux turboréacteurs est dirigée selon l'axe longitudinal du fuselage (figure 3). On assimile les coefficients aérodynamiques  $C_x$  et  $C_y$  de l'avion à ceux des ailes. La vitesse du centre de masse de l'avion est considérée constante dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

**Q 2.** On considère l'avion en vol de croisière à pente et assiette nulles (trajectoire confondue avec l'axe de l'avion). Écrire, dans ces conditions, l'équation, dite de sustentation, liant la masse de l'avion  $m$  à  $C_y$  et l'équation, dite de propulsion, liant  $F$  à  $C_x$ .

**Q 3.** Estimer numériquement la vitesse de croisière et la poussée nécessaire à son maintien.

### I.B – Rôle des ailes

En notant  $P_0$  la pression en avant de l'avion,  $P$  la pression en un point de l'aile et  $P_t$  la pression totale en ce même point, on définit le coefficient de pression en ce point par  $K_p = \frac{P - P_0}{P_t - P_0}$ . La figure 4 donne l'allure du coefficient de pression d'une aile d'A320 pour trois valeurs d'angle d'incidence en fonction de la position le long de l'intrados et de l'extrados, 0 représentant le bord d'attaque et 1 le bord de fuite. La courbe en trait continu correspond à l'extrados, les pointillés à l'intrados. À incidence nulle, les courbes pour l'intrados et l'extrados sont confondues.

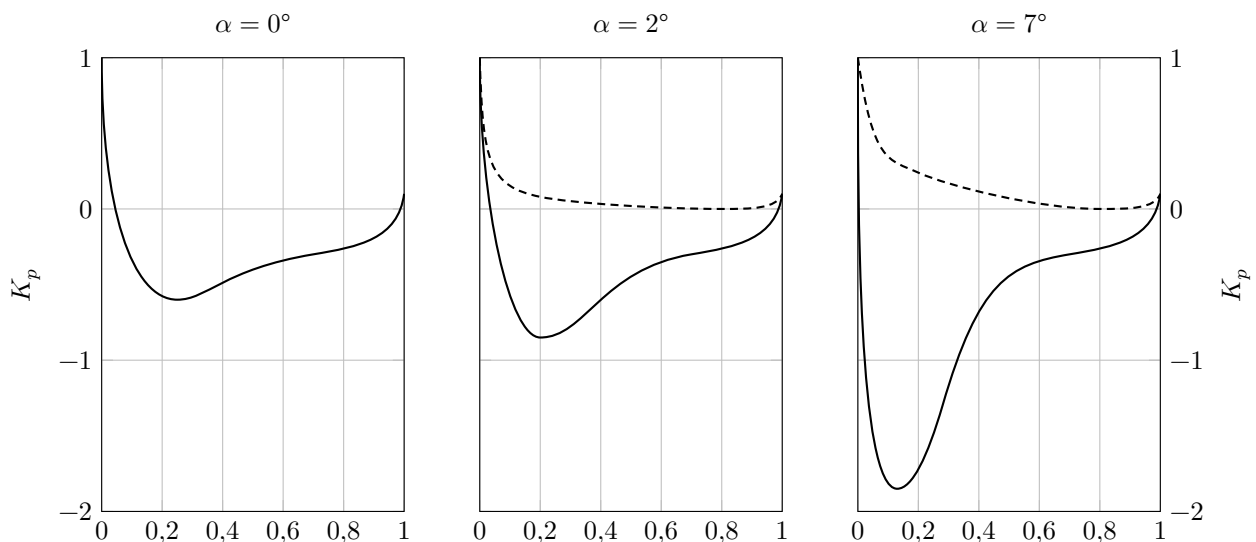


Figure 4

**Q 4.** À l'aide de la figure 4, expliquer l'existence d'une force de portance pour les angles d'incidence non nuls.

**Q 5.** Justifier que cette force de portance est nulle pour un angle d'incidence nul.

**Q 6.** À partir de la figure 2, en considérant que la trajectoire est horizontale et que l'assiette est non nulle, expliquer l'existence d'une vitesse minimale  $v_{\min}$ , dite *vitesse minimale de sustentation*, en-deçà de laquelle la sustentation ne peut plus être assurée. On dit alors que l'avion *décroche*.

- Q 7. Exprimer la vitesse  $v_{\min}$ .
- Q 8. Pour l'aile considérée, estimer la valeur numérique de l'incidence permettant de voler à  $v_{\min}$ .
- Q 9. Estimer la valeur numérique de  $v_{\min}$  pour l'aile considérée.
- Q 10. Pourquoi cette situation risque-t-elle de se présenter en phase d'atterrissage ?

Afin de permettre un atterrissage en sécurité, les ailes d'avion sont équipées de becs sur le bord d'attaque et de volets sur le bord de fuite. Ces éléments mobiles permettent de modifier le profil de l'aile et de faire ainsi varier ses coefficients aérodynamiques et sa surface portante. La figure 5 montre l'influence des becs et des volets sur le  $C_y$  de l'aile.

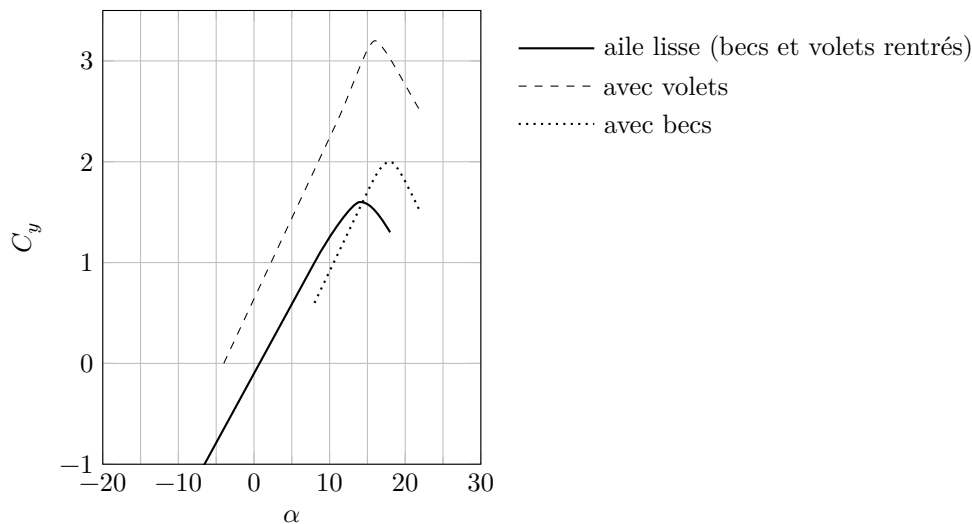


Figure 5

- Q 11. En s'appuyant sur la figure 5 et en sachant que, pour des raisons de sécurité, l'atterrissage doit se faire à  $250 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , discuter qualitativement le rôle des becs et des volets.

### I.C – Le vol plané

Le rendement d'une aile se caractérise par sa finesse, notée  $f$ . Considérons un avion en l'air qui coupe ses moteurs et poursuit en vol plané descendant (sans propulsion) à vitesse constante sur une pente constante avec une assiette non nulle. La finesse de l'avion est définie comme le rapport entre la distance horizontale parcourue avant d'atteindre le sol et la hauteur de chute.

- Q 12. À partir d'un schéma représentant les forces s'exerçant sur l'avion, exprimer la finesse de l'aile en fonction du rapport  $C_y/C_x$ .

La figure 6 présente la *polaire de type Eiffel* de l'aile d'un A320. Il s'agit de la courbe représentant, pour un nombre de Reynolds donné, la valeur de  $C_y$  en fonction de celle de  $C_x$  pour chaque valeur de l'angle d'incidence.

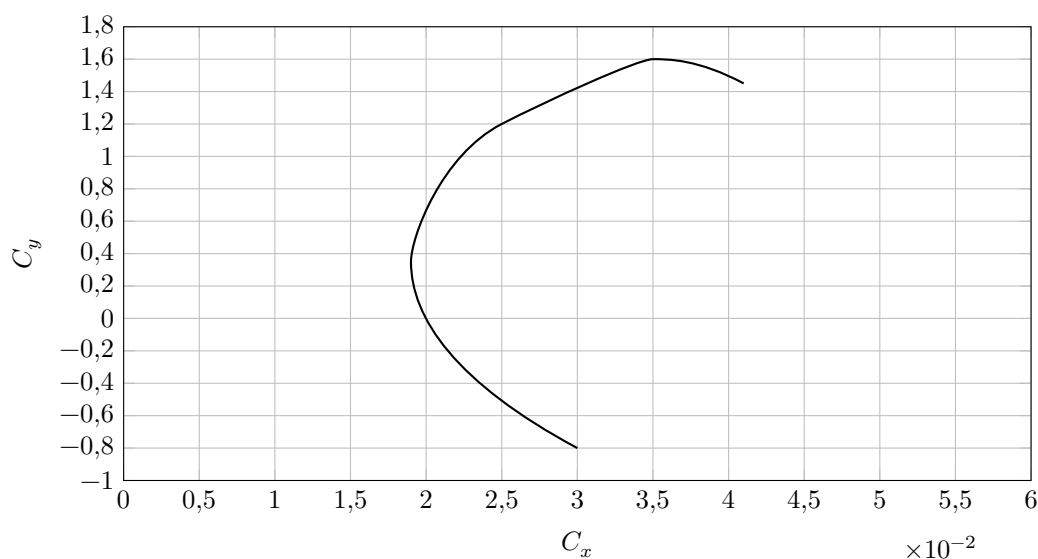


Figure 6

- Q 13. Comment se traduit graphiquement la finesse maximale sur la polaire de type Eiffel ?
- Q 14. En utilisant la figure 6, évaluer numériquement la finesse maximale de l'aile considérée.

**Q 15.** En déduire la distance horizontale maximale que peut parcourir l'avion en vol plané en cas de panne de moteur à 1000 mètres au dessus du sol.

**Q 16.** En réalité, la finesse de l'avion complet (ailes, fuselage, moteurs, empennage, dérive...) est deux fois moins importante que celle de ses ailes. Proposer une explication.

## II Turboréacteur double corps, avec soufflante, à flux séparés

Cette partie étudie, de façon simplifiée, le fonctionnement du turboréacteur double-flux séparés et double-corps du type CFM56 qui équipe l'Airbus A320. Pour cela, on se place dans le cadre d'un test au sol sur un banc d'essai fixe. La figure 7 présente le schéma de principe simplifié du turboréacteur.

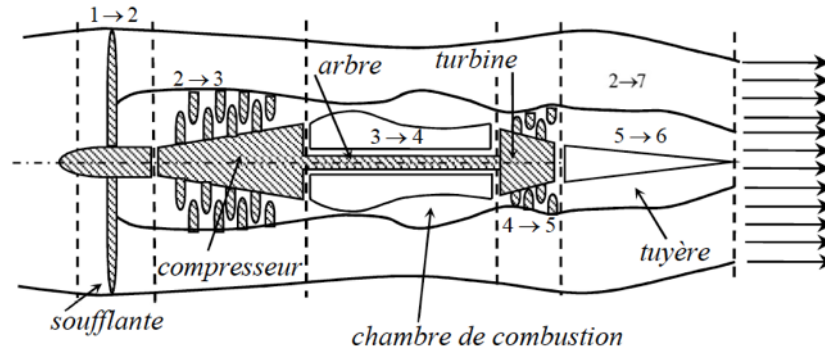


Figure 7

L'air est aspiré (étape  $1 \rightarrow 2$ ) par la soufflante à la température  $T_1 = 288 \text{ K}$  et à la pression  $P_1 = 1 \text{ bar}$ . Il se divise ensuite en deux flux, le flux primaire de débit massique  $D_{m1}$  et le flux secondaire de débit massique  $D_{m2}$ . On note  $\beta = D_{m2}/D_{m1} = 5,7$  le facteur de by-pass (taux de dilution) et  $D_m = D_{m1} + D_{m2}$  le débit massique total. Le flux primaire, dit *flux chaud* du fait de son passage dans la chambre de combustion, décrit dans le corps principal du turboréacteur les étapes suivantes :

- $2 \rightarrow 3$ , compression de  $P_2$  à  $P_3$  par un compresseur axial ;
- $3 \rightarrow 4$ , dans la chambre de combustion où le carburant est injecté, le mélange air-carburant est chauffé par combustion. La flamme est confinée au voisinage des injecteurs alimentés par un débit de kérosène ici négligé devant celui de l'air qui traverse la chambre. La température (température de flamme) s'abaisse ensuite rapidement dans la chambre pour atteindre une valeur compatible avec la tenue des matériaux de la turbine. Les caractéristiques de l'air ne sont pas modifiées par la combustion. On prendra en sortie de la chambre de combustion  $T_4 = 1450 \text{ K}$ . La chambre est supposée isobare ;
- $4 \rightarrow 5$ , détente partielle dans la turbine axiale ;
- $5 \rightarrow 6$ , détente dans la tuyère, de la pression  $P_5$ , à vitesse supposée nulle, jusqu'à la pression ambiante  $P_6 = 1 \text{ bar}$  où une première contribution à la poussée est produite.

Le flux secondaire, dit *flux froid*, s'écoule sans perte de charge autour du corps principal et passe directement dans une tuyère séparée de la première où l'essentiel de la poussée est produite. En sortie de cette tuyère  $P_7 = 1 \text{ bar}$  et la température est notée  $T_7$ .

Les taux de compression de la soufflante et du compresseur sont respectivement donnés par  $P_2/P_1 = 2$  et  $P_3/P_2 = 13$ .

On suppose que le régime est stationnaire et que l'énergie potentielle de pesanteur du fluide est partout négligeable devant les autres grandeurs énergétiques. De même on négligera partout l'énergie cinétique du fluide sauf en sortie des tuyères. Les évolutions dans la tuyère, la turbine et le compresseur sont supposées adiabatiques et réversibles. Le système ne comporte aucune pièce mobile en dehors de la turbine, du compresseur et de la soufflante. Le compresseur, la turbine et la soufflante ont un arbre commun supposé sans perte mécanique. On néglige aussi les pertes mécaniques dans le compresseur et dans la turbine.

**Q 17.** On modélise le kérosène par le décane  $\text{C}_{10}\text{H}_{22}$ . En s'appuyant sur une modélisation qui sera justifiée, exprimer puis évaluer l'élévation maximale de température lors de la combustion d'une mole de décane en présence de la quantité juste suffisante d'air. Les produits obtenus sont du dioxyde de carbone et de l'eau.

Dans le cadre des hypothèses du problème, hormis dans la chambre de combustion, le travail massique utile reçu par le gaz pour une transformation de l'état  $i$  vers l'état  $j$  est donné par

$$w_{i \rightarrow j} = C_{p \text{ mass}}(T_j - T_i) + \frac{1}{2}(c_j^2 - c_i^2)$$

où  $c_i$  est la vitesse du gaz dans l'état  $i$  et  $c_j$  celle du gaz dans l'état  $j$  et où  $C_{p \text{ mass}}$  désigne la capacité thermique massique du gaz.

**Q 18.** Établir l'expression de la pression  $P_j$  en fonction de  $T_i$ ,  $T_j$ ,  $P_i$  et du coefficient isentropique de l'air  $\gamma$ .



- Q 19.** En exploitant le couplage mécanique entre turbine, compresseur et soufflante, établir les expressions littérales et les valeurs numériques des températures  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_5$  et de la pression  $P_5$  en sortie de turbine.
- Q 20.** Établir l'expression littérale et la valeur numérique de  $c_6$ , vitesse du gaz du flux chaud à la sortie de la tuyère.
- Q 21.** Établir également l'expression littérale et la valeur numérique de  $c_7$ , vitesse du gaz du flux froid à la sortie de la tuyère.
- Q 22.** Par un bilan de quantité de mouvement sur une surface de contrôle judicieusement choisie, justifier que les poussées produites par les tuyères relatives aux flux chaud et froid sont respectivement données par :  $F_c = D_{m1}c_6$  et  $F_f = D_{m2}c_7$ .
- Q 23.** Exprimer la poussée  $F$  du turboréacteur complet uniquement en fonction de  $D_m$ , des vitesses d'éjection  $c_6$  et  $c_7$  et du facteur de by-pass.
- Q 24.** En déduire l'expression et la valeur numérique de la poussée par unité de débit massique  $D_m$ , dite *poussée spécifique* du turboréacteur, notée  $F_s$ .
- Q 25.** Quel est le pourcentage de la poussée assurée par le flux chaud ?
- Q 26.** Lors d'un essai au sol sur banc fixe, le turboréacteur délivre une poussée de 20 kN. Quel débit massique  $D_m$  doit alors assurer la soufflante ?
- Q 27.** Ce débit massique permet-il d'obtenir la même valeur de la poussée en vol de croisière ? Justifier qualitativement.

### III NOx et production de gaz à effet de serre

En consommant du kérosène, les moteurs d'avions entraînent le rejet de nombreux polluants parmi lesquels les monoxyde d'azote NO et dioxyde d'azote NO<sub>2</sub>, regroupés sous l'appellation NOx. Ces composés sont responsables d'une augmentation de la production d'ozone O<sub>3</sub>, gaz à effet de serre, dans la basse atmosphère.

Le monoxyde d'azote NO est obtenu par oxydation du diazote N<sub>2</sub> à haute température lors de la phase de combustion, modélisée par l'équation de réaction



**Q 28.** Calculer l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction (III.1). Commenter.

**Q 29.** En se plaçant dans l'approximation d'Ellingham, évaluer la fraction molaire de monoxyde d'azote NO présente à l'équilibre dans de l'air chauffé à 1450 K.

Dans un deuxième temps, il y a production de dioxyde d'azote NO<sub>2</sub> à partir du monoxyde d'azote NO, modélisée par l'équation de réaction



pour laquelle on donne l'expression de l'enthalpie libre standard de réaction dans le cadre de l'approximation d'Ellingham :  $\Delta_r G^\circ(T) = -114,4 + 0,1462 T$  en kJ·mol<sup>-1</sup> pour  $T$  en K.

La figure 8 fournit pour cette réaction les résultats d'une étude cinétique réalisée à 400 K, où  $v$  représente la dérivée temporelle de l'avancement volumique de la réaction. Les concentrations initiales utilisées dans cette étude sont

- expérience 1 (tracé avec ×) :  $[\text{O}_2]_0 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}]_0 = 10 \text{ }\mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}_2]_0 = 0$  ;
- expérience 2 (tracé avec +) :  $[\text{O}_2]_0 = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}]_0 = 10 \text{ }\mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}_2]_0 = 0$ .

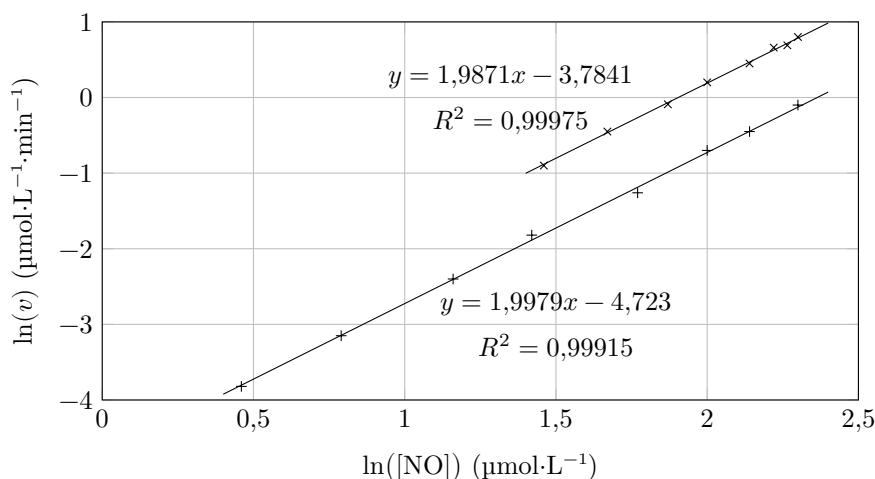
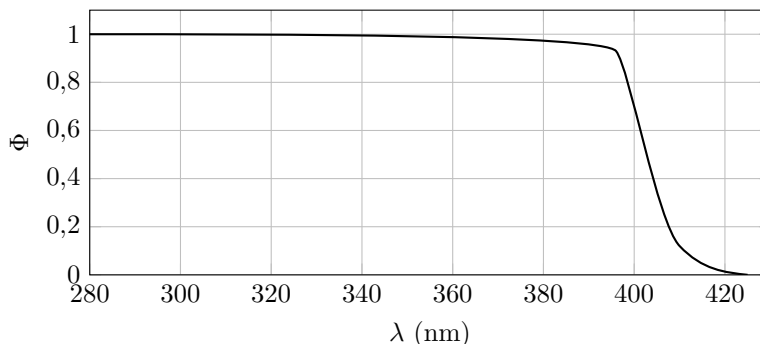


Figure 8

**Q 30.** Commenter le choix de la température retenue pour l'étude cinétique.

**Q 31.** Utiliser les résultats précédents pour proposer une loi de vitesse pour la réaction III.2. Déterminer la valeur numérique de la constante de vitesse à la température considérée. La forme obtenue pour la loi de vitesse était-elle prévisible ?

La production d'ozone initiée par les NO<sub>x</sub> dans la troposphère débute par la photodissociation du dioxyde d'azote NO<sub>2</sub> en NO et O. Il s'agit de la seule source d'atome d'oxygène susceptible de former de l'ozone O<sub>3</sub> par combinaison avec le dioxygène O<sub>2</sub>. La figure 9 donne l'évolution du rendement quantique primaire de dissociation, noté  $\Phi$ , en fonction de la longueur d'onde de la radiation monochromatique incidente. Ce rendement est défini comme la fraction de molécules dissociées par rapport au nombre de photons absorbés.



**Figure 9**

**Q 32.** Proposer un schéma de Lewis pour la molécule de dioxyde d'azote NO<sub>2</sub>.

**Q 33.** Évaluer l'énergie de liaison ON, aussi appelée enthalpie standard de dissociation, dans NO<sub>2</sub>. Commenter la valeur trouvée.

## IV Aluminium et alliage 2024

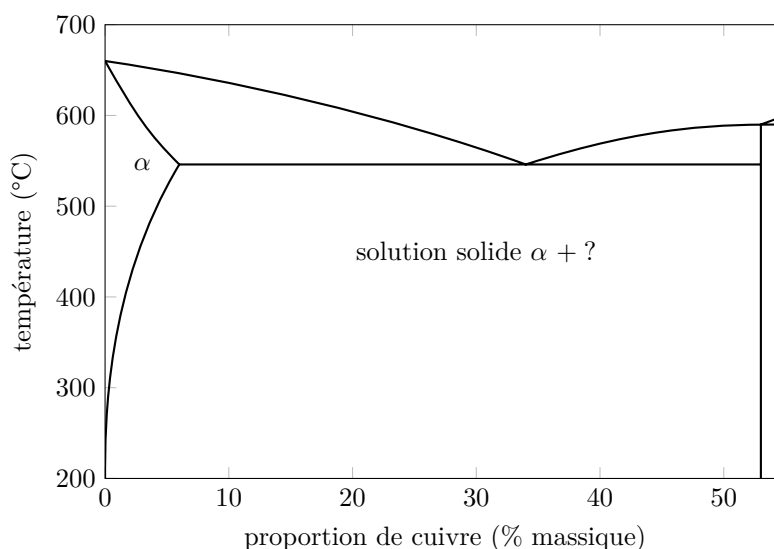
L'aluminium métal Al, de rayon atomique 143 pm, cristallise suivant une structure de type cubique à faces centrées (c.f.c.).

**Q 34.** L'acier possède une densité  $d = 7,8$ . Justifier l'emploi d'alliages d'aluminium plutôt que de l'acier en aéronautique.

La limite d'élasticité de l'aluminium pur (60 à 70 MPa) est nettement insuffisante pour supporter les contraintes imposées en service aéronautique, ce qui impose son utilisation sous forme d'alliages (58 % en masse dans un airbus A320), comme l'alliage 2024 utilisé dans la structure et le revêtement du fuselage des avions, dont on se propose d'étudier quelques caractéristiques.

Dans ce qui suit, l'alliage 2024 sera assimilé à un alliage aluminium-cuivre à 4 % de cuivre en masse.

La figure 10 donne un extrait du diagramme binaire liquide-solide d'un mélange aluminium-cuivre. Les deux métaux présentent une « miscibilité partielle » pour de faibles teneurs en cuivre ; ils forment alors une solution solide  $\alpha$ , mélange intime des deux métaux (domaine de gauche sur le diagramme).



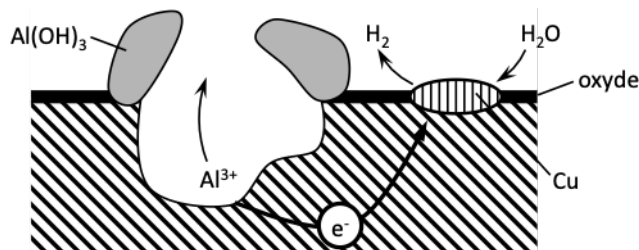
**Figure 10**

**Q 35.** Le diagramme de la figure 10 montre qu'il existe un composé défini. Déterminer sa composition Al<sub>x</sub>Cu, avec  $x$  entier.

**Q 36.** Reproduire très schématiquement ce diagramme binaire en indiquant pour chaque domaine la nature des phases en présence.

**Q 37.** Calculer le pourcentage massique des phases en présence dans l'alliage 2024 à l'équilibre à la température de 300 K.

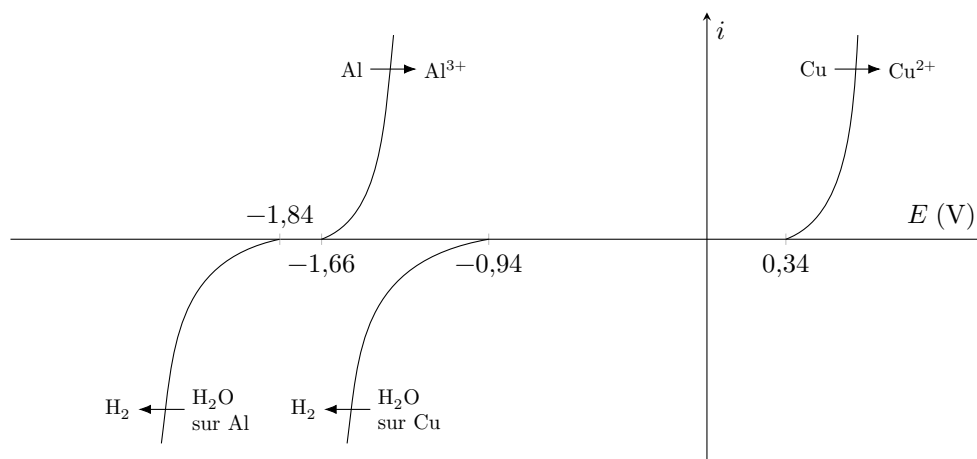
L'alliage 2024 est relativement sensible à la corrosion, en particulier en milieu salin (cas des aéroports situés en bord de mer). La figure 11 présente de façon schématique le processus de corrosion par piqures en milieu marin (pH environ égal à 8).



**Figure 11** Phénomène de corrosion par piqure (d'après *Techniques de l'ingénieur*, Corrosion des alliages d'aluminium, Re-boul M.)

**Q 38.** L'étude de la corrosion de l'alliage passe par le tracé des courbes courant-potentiel pour les métaux concernés (aluminium et cuivre). Donner le schéma de principe du montage à trois électrodes utilisé, en précisant la nature et le rôle des électrodes utilisées et expliquer la nécessité d'utiliser trois électrodes plutôt que deux.

Les courbes courant-potentiel obtenues ont l'allure représentée figure 12.



**Figure 12**

**Q 39.** Écrire la demi-équation électronique associée au couple de l'eau  $H^+/H_2$  en milieu acide, puis en milieu basique.

**Q 40.** Calculer le potentiel standard apparent (à pH = 14) d'oxydoréduction du couple  $H_2O/H_2$  et justifier à posteriori le tracé des courbes courant-potentiel correspondantes.

**Q 41.** Écrire l'équation de réaction modélisant la transformation observée lors du phénomène de corrosion par piqures.

**Q 42.** Après avoir reproduit schématiquement les branches anodique et cathodique impliquées dans le processus, placer le potentiel de corrosion et indiquer comment relever la valeur du courant de corrosion. Justifier l'appellation de pile de corrosion.

En présence d'ions chlorure  $Cl^-$ , les ions aluminium III  $Al^{3+}$  conduisent à la formation quantitative de l'ion  $AlCl_4^-$ . Par ailleurs, la formation de l'ion aluminium III  $Al^{3+}$  en présence d'ion chlorure entraîne une acidification locale du milieu. Le pH en fond de piqure atteint ainsi une valeur inférieure à 3.

**Q 43.** En supposant les surtensions à vide inchangées, positionner de façon qualitative les courbes anodique et cathodique modifiées, en justifiant succinctement le cas échéant la modification effectuée. Commenter.

La figure 13 donne les diagrammes potentiel-pH pour les couples de l'eau et de l'aluminium à la concentration de travail  $c_t = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$  et à 25 °C.

**Q 44.** Établir l'équation de la frontière séparant les domaines de l'ion aluminium  $Al^{3+}$  et de l'hydroxyde d'aluminium solide  $Al(OH)_3$ .

**Q 45.** Expliquer comment le phénomène de corrosion par piqure est susceptible d'être enrayé par la passivation de la cavité créée.

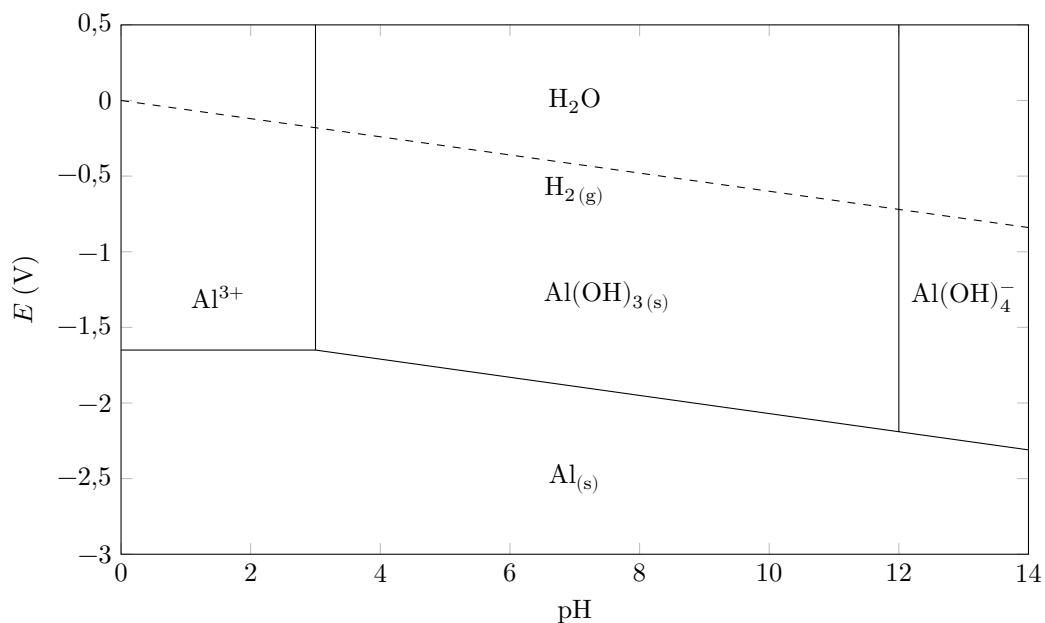


Figure 13

## Données

Sauf indication contraire, les valeurs dépendantes de la température sont fournies à 298 K.

Accélération de la pesanteur terrestre

$$g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Composition de l'air

$\text{N}_2$  : 80 %,  $\text{O}_2$  : 20 %

Masse volumique de l'air sous une pression de 1 bar

$$\rho = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Viscosité dynamique de l'air

$$\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Coefficient isentropique de l'air

$$\gamma = 1,4$$

Capacité thermique massique à pression constante de l'air

$$C_{p \text{ mass}} = 1,0 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante de Planck

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$F = 9,64 \times 10^3 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Énergie de liaison ( $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

$\text{N}-\text{O}$  : 210 ;  $\text{N}=\text{O}$  : 630

Produit de solubilité de  $\text{Al}(\text{OH})_3$

$$\text{p}K_s = 33$$

Produit ionique de  $\text{H}_2\text{O}$

$$\text{p}K_e = 14$$

Potentiels standard redox

$$\text{Al}^{3+}/\text{Al}_{(s)} : -1,66 \text{ V}$$

$$\text{H}^+/\text{H}_{2(g)} : 0,00 \text{ V}$$

$$\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_{(s)} : 0,34 \text{ V}$$

Surtections à vide

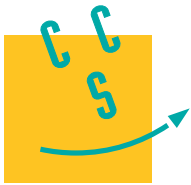
$$\eta_{c0}(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) : -0,1 \text{ V sur Cu, } -1 \text{ V sur Al}$$

## Enthalpies standard de formation, entropies molaires et capacités thermiques à pression constante

|                                                              | $\text{C}_{10}\text{H}_{22(l)}$ | $\text{CO}_{2(g)}$ | $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ | $\text{O}_{2(g)}$ | $\text{N}_{2(g)}$ | $\text{NO}_{(g)}$ |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\Delta_f H^\circ (\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1})$           | -249,7                          | -393,5             | -241,8                     |                   |                   | 90,4              |
| $S_m^\circ (\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$ | 545,8                           | 213,8              | 188,8                      | 205,0             | 191,5             | 210,6             |
| $C_p^\circ (\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$ | 233,1                           | 38,5               | 36,2                       | 29,3              | 28,7              |                   |

## 2020-08-21 11:20:14

• • • FIN • • •

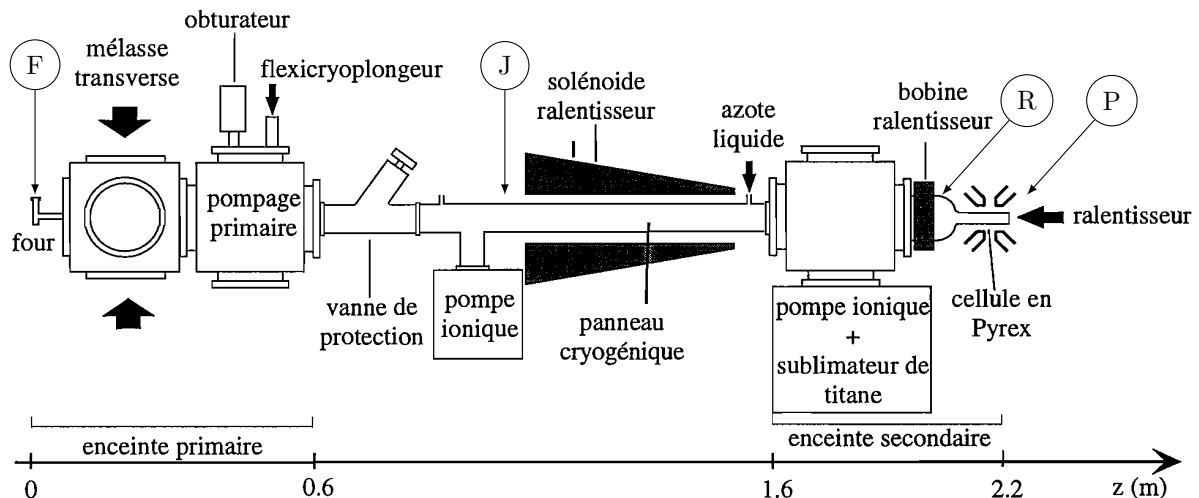
*Odyssée vers la condensation de Bose-Einstein*

Les données numériques utiles sont fournies en fin d'énoncé.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Dans ce problème, composé de quatre parties largement indépendantes, on étudie les différentes étapes qui mènent à la condensation de Bose-Einstein d'un gaz de rubidium 87. Ce phénomène, prédit en 1925 par Albert Einstein et Satyendranath Bose a été observé pour la première fois dans un gaz dilué en 1995, cette réalisation expérimentale a été récompensée en 2001 par le prix Nobel de physique.

Pour réaliser la condensation, l'expérience, dont le schéma est décrit en figure 1, a pour but de faire subir à une vapeur de rubidium des transformations qui modifient à la fois la densité et la température de façon à atteindre la condition de condensation.



Les différents systèmes de pompes permettent d'obtenir un ultra-vide avec une pression résiduelle de l'ordre de  $10^{-13}$  bar ! Les éléments qui entourent la cellule en Pyrex dans laquelle se forme le condensat ne sont pas représentés. Les quatre lettres encadrées correspondent aux lieux des quatre premières étapes de la figure 2 : Four, Jet, Ralentisseur et Piège.

**Figure 1** Dispositif expérimental<sup>1</sup>

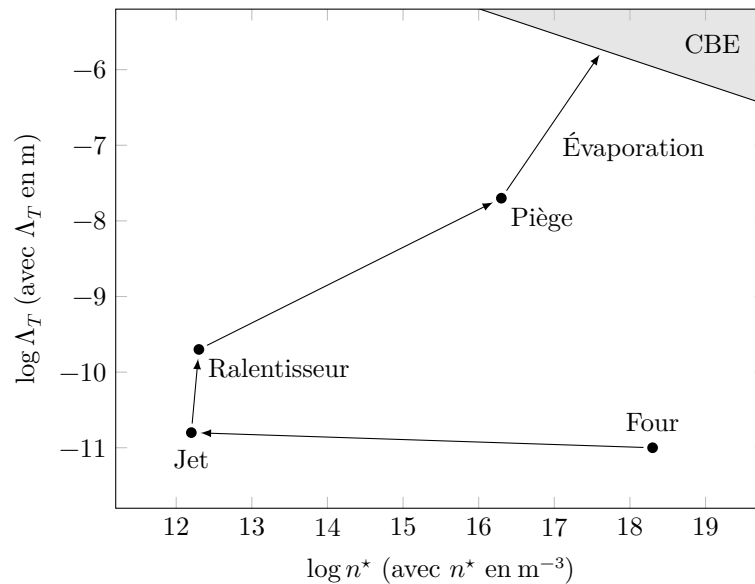
La séquence de transformations subies par la vapeur est représentée sur la figure 2 dans le plan  $(n^*, \Lambda_T)$ , appelé « espace des phases »,  $n^*$  désigne la densité particulaire (nombre d'atomes par unité de volume) et  $\Lambda_T$  la longueur d'onde thermique de de Broglie :

$$\Lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi M k_B T}}$$

où  $M$  est la masse d'un atome,  $h$  la constante de Planck,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue. On appelle « densité dans l'espace des phases » la quantité  $\mathcal{D} = \Lambda_T^3 n^*$ .

Dans tout le sujet, on néglige l'effet du poids.

<sup>1</sup> Sauf indication contraire, les figures sont adaptées de la thèse de Bruno Desruelle réalisée au laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, « Évaporation par radio-fréquences et condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'alcalins en régime de champ fort », Université Paris Sud - Paris XI, 1999.



**Figure 2** Chemin expérimental (simplifié) réalisé dans l'espace des phases pour atteindre la Condensation de Bose-Einstein (CBE)

## I Le critère de condensation

- Q 1.** En utilisant l'analyse dimensionnelle, construire une vitesse  $V_T$  à partir d'une masse  $M$ , d'une température  $T$  et de la constante de Boltzmann  $k_B$ .
- Q 2.** Justifier que le paramètre  $\Lambda_T$  est appelé longueur d'onde thermique de de Broglie.
- Q 3.** La longueur d'onde thermique de de Broglie donne l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la fonction d'onde des atomes de rubidium. Expliquer pourquoi on peut s'attendre à ce que le gaz manifeste des propriétés purement quantiques lorsque la densité dans l'espace des phases est de l'ordre de l'unité.
- Q 4.** Un calcul de physique statistique quantique montre que la condensation de Bose-Einstein commence si la densité dans l'espace des phases atteint la valeur critique  $\mathcal{D}_c = 2,612$ . Calculer la température de condensation pour un gaz dont la densité est  $n^* = 1,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ .

## II Du four à la mélasse transverse

Cette partie vise principalement à déterminer l'ordre de grandeur de la densité dans l'espace des phases lors des premières étapes de l'expérience.

### II.A – Le four

Le four est maintenu à une température de  $130^\circ\text{C}$ . À cette température, la pression de vapeur saturante du rubidium est de l'ordre de  $0,1 \text{ Pa}$ . Les atomes sortent du four par un petit trou et on suppose que cela ne perturbe pas notablement l'équilibre thermodynamique dans le four. On rappelle que la constante des gaz parfaits est égale au produit de la constante d'Avogadro et de la constante de Boltzmann.

- Q 5.** Déterminer l'ordre de grandeur de la norme de la vitesse des atomes qui s'échappent du four.
- Q 6.** Déterminer l'ordre de grandeur de la densité particulière  $n_F^*$  et de la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}_F$  à l'intérieur du four.

### II.B – La mélasse optique transverse

La divergence du jet sortant du four limite le flux de particule parvenant à la cellule. Pour augmenter ce flux, on utilise une « mélasse transverse » constituée de quatre faisceaux lasers qui interagissent avec les atomes. Cette interaction sera précisée dans la prochaine partie. Pour le moment, on admet que l'effet de ces lasers est d'exercer sur les atomes une force de type frottement fluide visqueux  $\vec{F} = -\alpha(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y)$  dans les directions orthogonales à l'axe  $\vec{e}_z$  du jet (c'est pourquoi elle est dite « transverse »). On donne  $\alpha = 3 \times 10^{-21} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

- Q 7.** Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $v_x$ . Identifier une constante de temps  $\tau$  dont on calculera la valeur numérique.
- Q 8.** Sachant que la longueur (selon  $\vec{e}_z$ ) de la zone d'interaction entre les lasers de la mélasse et les atomes est d'environ  $6 \text{ cm}$ , que peut-on dire des vitesses  $v_x$  et  $v_y$  à la sortie de la mélasse ?
- Q 9.** À la sortie de la mélasse transverse, le vecteur densité de courant de particules dans le jet a pour norme  $j = 4 \times 10^{14} \text{ m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ . En déduire l'ordre de grandeur de la densité particulière  $n_j^*$  dans le jet.



### III Le ralentisseur et le piège magnéto-optique

Pour agir sur le mouvement des atomes avec des lasers, on utilise les phénomènes d'absorption et d'émission des photons par les atomes. Le nombre maximal de cycles d'absorption-émission que peut réaliser un atome par seconde est égal à  $\Gamma/2$  où  $\Gamma$  est la « largeur naturelle » de la transition utilisée. Les lasers de la mélasse, du ralentisseur et du piège magnéto-optique ont tous une longueur d'onde dans le vide très proche de  $\lambda_0 = 780 \text{ nm}$ . Pour la transition à 780 nm du rubidium 87, on a  $\Gamma = 3,7 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ .

#### III.A – Interaction entre les atomes et les photons du laser ralentisseur

Le laser ralentisseur est constitué d'un faisceau se propageant suivant  $-\vec{e}_z$ , ce laser va exercer une « pression de radiation » sur les atomes du jet qui se déplacent suivant  $+\vec{e}_z$ .

##### III.A.1) Champ électrique du laser ralentisseur

**Q 10.** Le rayon minimal du faisceau laser est de l'ordre de 3 mm. Justifier que l'onde électromagnétique émise par le laser peut être considérée comme plane sur toute la longueur du ralentisseur.

**Q 11.** Sachant que le laser est polarisé rectilignement selon la direction  $\vec{e}_x$ , écrire l'expression vectorielle du champ électrique en fonction de la pulsation  $\omega$  du laser,  $k$  (norme du vecteur d'onde),  $t$  et  $z$ . On notera  $E_0$  son amplitude.

##### III.A.2) Modèle de l'électron élastiquement lié

Le rubidium est un alcalin, il possède donc un unique électron sur sa couche de valence, nous allons traiter le mouvement de cet électron (de masse  $m_e$  et de charge  $q_e$ ) avec la physique classique (non quantique et non relativiste). On suppose que  $x(t) = N\vec{M} \cdot \vec{e}_x$  (où  $N$  désigne la position du noyau et  $M$  celle de l'électron) obéit à l'équation différentielle suivante dans le champ de l'onde électromagnétique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q_e}{m_e} E_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Dans cette équation,  $\Gamma$  désigne la largeur naturelle de la transition,  $\omega$  la pulsation du laser et  $\omega_0 = \Delta\mathcal{E}_0/\hbar$  où  $\Delta\mathcal{E}_0 = 1,59 \text{ eV}$  représente la différence d'énergie entre les deux niveaux atomiques utilisés.

**Q 12.** Calculer la longueur d'onde du laser lorsque ce dernier vérifie la condition de résonance  $\omega = \omega_0$ . Définir puis calculer le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur harmonique associé à cette transition.

**Q 13.** Déterminer l'expression de l'amplitude  $X(\omega)$  des oscillations de l'électron en régime sinusoïdal établi.

**Q 14.** Déterminer la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_0$  et  $\Gamma$ . Calculer numériquement  $\left| \frac{\omega_r - \omega_0}{\omega_0} \right|$  et conclure.

On admet qu'une expression approchée de l'amplitude  $X$  des oscillations s'écrit

$$X(\omega) \approx \frac{X_{\max}}{\sqrt{\delta^2 + 1}} \quad \text{avec} \quad \delta(\omega) = \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma/2}.$$

**Q 15.** Quelle est la signification de  $X_{\max}$  ?

**Q 16.** Montrer que la puissance moyenne de la force électrique exercée sur l'électron est opposée à la puissance moyenne de la force de frottement :  $F_f = -m_e \Gamma \frac{dx}{dt}$ . En déduire qu'elle peut s'écrire  $P(\delta) = \frac{P_{\max}}{1 + \delta^2}$  et donner l'expression de  $P_{\max}$ .

##### III.A.3) Expression de la force hors résonance

Notons  $\vec{F} = -F(\omega)\vec{e}_z$  la force moyenne exercée par le laser ralentisseur sur un atome. Le nombre de cycles absorption-émission par unité temps est proportionnel à la puissance  $P(\omega)$  absorbée par l'électron de valence, on peut en déduire que  $F(\omega)$  s'écrit sous la forme :

$$F(\delta) = \frac{F_{\max}}{1 + \delta^2} \quad \text{avec} \quad \delta(\omega) = \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma/2} \quad \text{et} \quad \omega = \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \omega_L$$

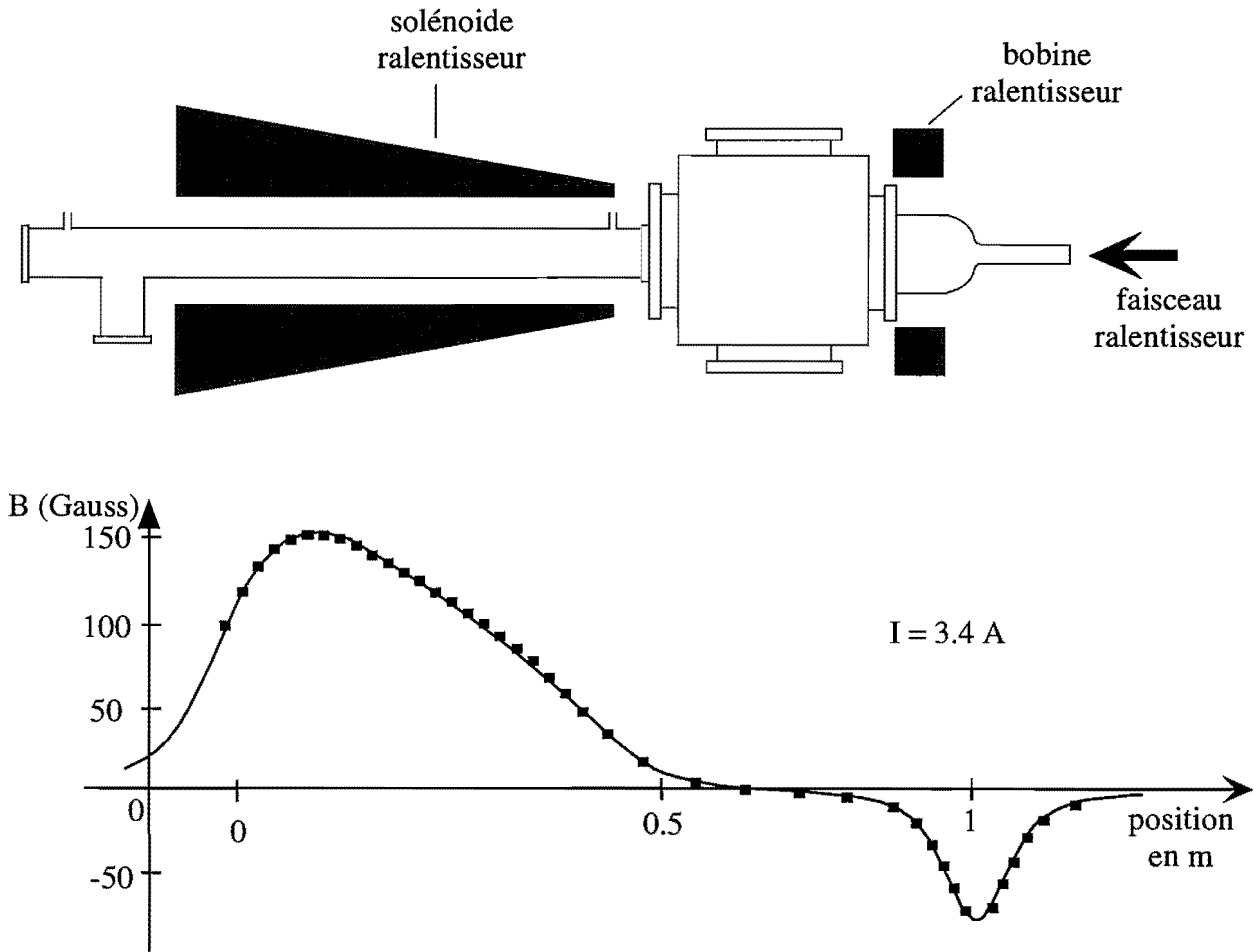
où  $\omega_L$  représente la pulsation du laser dans le référentiel du laboratoire noté  $\mathcal{R}_L$  et  $\omega$  désigne la pulsation du laser dans le référentiel (en translation par rapport à  $\mathcal{R}_L$ ) où l'atome est immobile (la différence entre ces deux pulsations constitue l'effet Doppler).

**Q 17.** Tracer l'allure de  $F$  en fonction de  $\delta$ . On suppose que la condition  $\delta = 0$  est réalisée pour un atome qui sort du four avec une vitesse  $v_z = 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (il interagit donc efficacement avec le faisceau ralentisseur à la sortie du four). Déterminer la vitesse  $v'_z$  pour laquelle la force ne sera plus que  $\frac{1}{5}F_{\max}$  et conclure.

**Q 18.** Pour améliorer la situation, on peut penser à utiliser un laser de fréquence variable. Comment devrait varier cette fréquence au cours du temps ? Quel(s) avantage(s) et inconvénient(s) cette solution peut-elle présenter ?

### III.A.4) Utilisation de l'effet Zeeman

Pour que la condition de résonance (absorption d'un photon par un atome) soit vérifiée en tout point du ralentisseur, on utilise un champ magnétique qui modifie la fréquence de résonance de l'atome par effet Zeeman. Ce champ magnétique est créé par deux enroulements (visibles en noir sur les figures 1 et 3) appelés « solénoïde ralentisseur » et « bobine ralentisseur ».



**Figure 3** Les deux enroulements du ralentisseur (en noir sur le schéma du haut) sont parcourus par un courant  $I = 3,4 \text{ A}$ . La composante  $B_z$  du champ magnétique sur l'axe, exprimée en gauss ( $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ T}$ ) est représentée en fonction de  $z$  (les carrés correspondent aux mesures directes du champ et la courbe en trait plein au champ calculé).

En présence d'un champ magnétique  $\vec{B} = B_z \vec{u}_z$ , la différence d'énergie  $\Delta \mathcal{E}_0 = \hbar \omega_0$  entre les deux niveaux atomiques du rubidium utilisés pour le ralentissement est remplacée par  $\Delta \mathcal{E}(B_z) = \Delta \mathcal{E}_0 + \mu_B B_z$  où  $\mu_B$  désigne le magnéton de Bohr. Ainsi, dans l'expression de  $\delta$ , et donc de la force exercée par le laser ralentisseur,  $\omega_0$  est remplacée par  $\omega_0 + \mu_B B_z / \hbar$ .

**Q 19.** Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle à partir de la masse de l'électron  $m_e$ , de la charge de l'électron  $e$  et de la constante de Planck réduite  $\hbar$ . Citer une expérience célèbre qui a permis de mettre en évidence la quantification du moment magnétique des atomes.

**Q 20.** Calculer la variation de  $B_z$  nécessaire pour immobiliser des atomes dont la vitesse initiale est  $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  avec une force de freinage maximale tout au long de leur mouvement.

**Q 21.** On considère un atome qui possède la vitesse  $v_1 \vec{e}_z$  (avec  $v_1 > 0$ ) lorsqu'il se trouve en  $z_1$  (point d'entrée dans le solénoïde ralentisseur). En supposant qu'en tout point de l'espace cet atome subit une accélération constante  $-a \vec{e}_z$  (avec  $a > 0$ ), déterminer l'expression de sa vitesse  $v_z \vec{e}_z$  en fonction de  $a$ ,  $v_1$ ,  $z_1$  et de la position  $z$  de l'atome dans le ralentisseur.

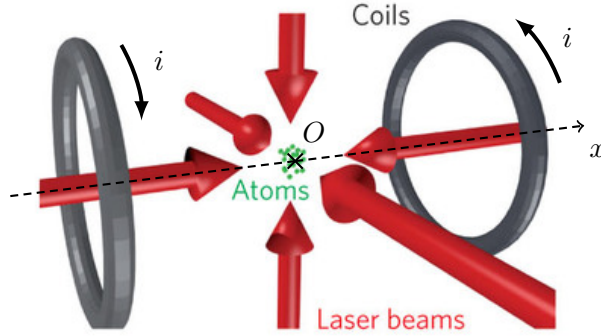
**Q 22.** Montrer que le profil idéal de champ magnétique est tel que  $B_z(z) = b_0 + b_1 \sqrt{1 - \beta(z - z_1)}$ . On donnera les expressions de  $b_1$  et  $\beta$  en fonction de  $a$ ,  $v_1$ ,  $c$ ,  $\mu_B$ ,  $\hbar$  et  $\omega_L$  qui est la pulsation du laser dans le référentiel du laboratoire.

**Q 23.** Déterminer les sens de circulation du courant dans les deux enroulements représentés sur la figure 3 ; ainsi que l'ordre de grandeur du nombre de spires dans chacun de ces deux enroulements. Préciser le(s) hypothèse(s) et approximation(s) réalisée(s).

**Q 24.** Quel peut être l'intérêt d'ajouter la bobine ralentisseur plutôt que de générer la totalité du champ magnétique avec le solénoïde ralentisseur ?

### III.B – Le piège magnéto-optique

À la sortie du ralentisseur, les atomes sont capturés par un piège constitué de trois paires de lasers (formant une mélasse optique 3D) et de deux bobines générant un champ magnétique dont la norme augmente avec la distance au centre.



**Figure 4** Le piège magnéto-optique est constitué de deux bobines (Coils) et de six faisceaux laser possédant des polarisations bien choisies<sup>2</sup>

Pour simplifier, on considère un atome qui se déplace uniquement sur l'axe ( $Ox$ ) avec une vitesse  $v_x$ . On note  $\vec{F}_+$  (respectivement  $\vec{F}_-$ ) la force moyenne exercée par le laser se propageant suivant  $+\vec{e}_x$  (respectivement  $-\vec{e}_x$ ). Comme pour le laser ralentisseur, la force moyenne exercée sur un atome de vitesse  $\vec{v}$  par un faisceau laser se propageant dans la direction  $\vec{e}_i$  (ici  $i$  désigne l'indice  $+$  ou  $-$  avec  $\vec{e}_+ = +\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_- = -\vec{e}_x$ ) est donnée par

$$\vec{F}_i = \frac{F_{\max}}{1 + \delta_i^2} \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad \delta_i = \frac{\omega_i - (\omega_0 + m \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{e}_i)}{\Gamma/2} \quad \text{et} \quad \omega_i = \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_i}{c}\right) \omega_L$$

où  $\omega_L$  représente la pulsation du laser dans le référentiel du laboratoire,  $\omega_i$  désigne la pulsation du laser se propageant suivant  $\vec{e}_i$  « vue » par l'atome et  $m$  est un nombre quantique (positif ou négatif). On ne considère pas les phénomènes d'interférences entre les faisceaux lasers.

#### III.B.1) Force exercée par les lasers en l'absence du champ magnétique

Dans toute cette section III.B.1, on considère que le champ magnétique  $\vec{B}$  est nul. On introduit les deux grandeurs algébriques adimensionnées

$$V = 2 \frac{\omega_L}{\Gamma} \frac{v_x}{c} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{\omega_L - \omega_0}{\Gamma/2}.$$

**Q 25.** Donner les expressions de  $F_+ = \vec{e}_x \cdot \vec{F}_+$  et  $F_- = \vec{e}_x \cdot \vec{F}_-$  en fonction de  $\Delta$ ,  $V$  et  $F_{\max}$ .

**Q 26.** Pour  $\Delta = +1$ , tracer sur un même graphe  $F_+$  et  $F_-$  ainsi que la force totale  $F_x = F_+ + F_-$  en fonction de la vitesse adimensionnée  $V$ . La pulsation  $\omega_L$  du laser doit-elle être choisie plus grande ou plus petite que la pulsation  $\omega_0$  de la transition atomique pour que les lasers ralentissent effectivement les atomes ?

**Q 27.** Montrer que pour  $|V| \ll |\Delta|$ , la force peut se mettre sous la forme  $F_x \approx -\alpha V$  où  $\alpha$  est à exprimer en fonction de  $\Delta$  et de  $F_{\max}$ .

#### III.B.2) Force exercée par les lasers en présence du champ magnétique

On souhaite non seulement arrêter les atomes avec la mélasse 3D, mais également les concentrer au voisinage du point  $O$  afin d'augmenter la densité particulaire. Pour cela on utilise à nouveau un champ magnétique qui modifie l'énergie des niveaux atomiques par effet Zeeman. L'axe ( $Ox$ ) correspond à l'axe commun des deux bobines représentées sur la figure 4. Les courants induits circulent dans des sens opposés et, sur la figure, on a  $i > 0$ .

**Q 28.** Démontrer que sur l'axe ( $Ox$ ), au voisinage de  $x = 0$ , on a  $\vec{B}(x, 0, 0) = -B'x \vec{e}_x$  avec  $B' > 0$ .

**Q 29.** Par quoi faut-il remplacer  $V$  pour que les formules obtenues dans le cas  $\vec{B} = \vec{0}$  soient valables pour  $\vec{B} \neq \vec{0}$  ? En déduire le signe de  $m$  pour que les atomes soient effectivement ramenés vers le point  $O$ .

**Q 30.** Sachant que la densité au centre du piège est  $n_P^* = 2 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$  et que la température est  $T_P = 0,1 \text{ mK}$ , calculer la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}_P$  au centre du piège magnéto-optique.

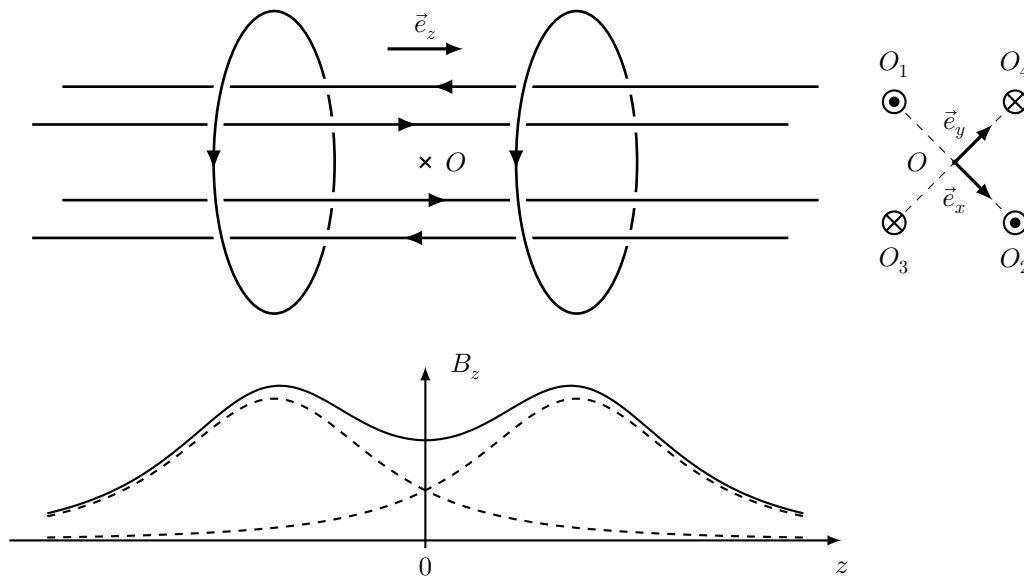
<sup>2</sup> D'après Jérôme Estève, « Trapped by nanostructures », *Nature Nanotechnology*, **8**, 317–318 (2013).

## IV Le refroidissement évaporatif et la condensation de Bose-Einstein

Même si des mécanismes subtils permettaient de refroidir encore un peu le nuage d'atome dans le piège magnéto-optique, il est impossible de descendre en dessous de la « température de recul » qui correspond à l'énergie cinétique possédée par un atome (initialement immobile) après l'absorption d'un photon. Pour parcourir la fin du chemin menant à la condensation, il est donc impératif d'éteindre la lumière. Pour cela, les atomes sont transférés dans un piège purement magnétique. Mais il faut des champs très intenses, de sorte que les courants utilisés pour générer ces champs dépassent largement la centaine d'ampères ; pour évacuer la puissance dissipée par effet Joule, on utilise des fils creux dans lesquels on fait circuler de l'eau sous pression. Et il faut utiliser une nouvelle technique pour refroidir les atomes...

### IV.A – Le piège magnétique

Contrairement au piège magnéto-optique, il faut un champ non nul au centre du piège magnétique si on ne veut pas perdre les atomes. On utilise pour cela un piège de type Ioffé-Pritchard, proposé dans les années 1960 par M. Ioffé pour le confinement des plasmas, il a été repris dans les années 1980 dans le groupe de D. Pritchard pour confiner des atomes neutres. Sa version originale est constituée de quatre fils rectilignes et de deux bobines (figure 5).



**Figure 5** Distribution de courant et champ sur l'axe ( $Oz$ ). En pointillé, le champ créé par chacune des deux spires et leur somme en trait pleins.

#### IV.A.1) Champ quadrupolaire créé par les quatre fils

**Q 31.** Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini d'axe ( $O_1z$ ) parcouru par un courant  $I$  (le courant  $I$  est positif suivant  $+\vec{e}_z$ ).

**Q 32.** On se place dans le plan  $z = 0$ , on considère le fil pour lequel  $O_1$  a pour coordonnées  $x_1 = -D$  (avec  $D > 0$ ) et  $y_1 = 0$  (figure 5). Déterminer l'expression approchée du champ  $\vec{B}_1$  créé par cet unique fil en un point  $M(x, y, 0)$  au voisinage de l'origine  $O$ . On exprimera  $\vec{B}_1$  au premier ordre en  $x' = x/D$  et  $y' = y/D$ , en fonction de  $x', y', B_1 = \frac{2\mu_0 I}{\pi D}$  et des vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

**Q 33.** On considère maintenant deux fils passant respectivement par les points  $O_1(-D, 0, 0)$  et  $O_2(+D, 0, 0)$ , tous deux traversés par des courants  $I$  positifs suivant  $+\vec{e}_z$ . Déterminer l'expression approchée du champ  $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$  au voisinage de l'origine.

**Q 34.** Par des considérations de symétrie (sans calculs), montrer que la seconde paire de fil dans la configuration proposée par Ioffé permet de doubler le champ précédent au voisinage du point  $O$ .

#### IV.A.2) Interaction dipôle-champ

Pour  $z$  assez petit, l'expression du champ créé par les deux bobines circulaires est  $\vec{B}(0, 0, z) = (B_0 + B''(z/z_0)^2)\vec{e}_z$ , avec  $B_0 > 0$  et  $B'' > 0$ . Si on prend en compte ce champ, on montre qu'au voisinage du point  $O$ , la norme du champ magnétique total peut s'écrire

$$B(x, y, z) = B_0 + \left( \frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{B''}{z_0^2} z^2.$$

On a de plus  $\frac{B_1^2}{B_0 D^2} > \frac{B''}{z_0^2}$ .

**Q 35.** Donner l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  d'un atome possédant un moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  plongé dans un champ  $\vec{B}$ .

**Q 36.** Dans cette question, on utilise la physique classique. Un dipôle est placé en un point donné (il ne se déplace pas, mais il peut tourner sur lui-même) ; pour quelle orientation le dipôle se trouve-t-il dans une position d'équilibre stable vis à vis du champ ? On suppose maintenant que ce dipôle peut se déplacer dans l'espace et que, en tout point, il pointe dans la direction correspondant à l'orientation stable vis à vis du champ. Est-il possible de piéger le dipôle avec le champ magnétique dont la norme  $B(x, y, z)$  est donnée ci-dessus ?

**Q 37.** En physique quantique, l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ est quantifiée vis à vis du moment magnétique (mais les énergies peuvent varier continuellement avec la norme du champ magnétique) : les valeurs possibles de l'énergie sont  $\mathcal{E}_{m_F} = -m_F g_F \mu_B B(x, y, z)$  où  $m_F$  est le nombre quantique magnétique qui est un entier (ou un demi-entier) positif ou négatif et où  $g_F$  est un facteur numérique (dit de Landé). Dans certaines conditions, même s'ils se déplacent dans un champ non uniforme, les atomes peuvent rester dans un sous-niveau Zeeman donné, c'est-à-dire que  $m_F$  reste toujours le même. Si le produit  $g_F m_F$  possède le bon signe, on peut donc avoir un potentiel harmonique *anisotrope* qui piège les atomes. Dans ces conditions, donner les expressions de la pulsation  $\omega_z$  des oscillations suivant la direction  $\vec{e}_z$  et de la pulsation  $\omega_r$  suivant les directions orthogonales à  $\vec{e}_z$ .

#### IV.B – Le refroidissement évaporatif

La dernière étape pour arriver à la condensation de Bose-Einstein est le refroidissement évaporatif. L'idée est très simple : on enlève du piège les atomes dont l'énergie est la plus grande de sorte que, pour les atomes restant dans le piège, l'énergie moyenne par atome (et donc la température) diminue. Évidemment, sacrifier ainsi des atomes n'a d'intérêt que si la densité dans l'espace des phases augmente. Avec une onde radio-fréquence (rf) dont la fréquence est correctement ajustée, on change le signe de  $m_F$  pour les atomes dont l'énergie dépasse une certaine valeur, ce qui a pour effet de les placer dans un niveau non-piégeant où ils sont évacués.

On admet que l'énergie moyenne d'un atome dans le piège harmonique est égale à  $3k_B T$  (l'origine de l'énergie est prise nulle au point  $O$ ).

Initialement, on a  $N_0$  atomes dans le piège à la température  $T_0$ . On applique la radio-fréquence pendant une certaine durée, les atomes qui sont ainsi évacués du piège ont une énergie moyenne égale à  $\eta k_B T_0$  par atome (avec  $\eta \approx 7$ ). On coupe la rf, puis on attend que les atomes restant reviennent à l'équilibre thermodynamique, on a alors  $N_1 < N_0$  atomes piégés à la température  $T_1 < T_0$ .

**Q 38.** En utilisant la conservation de l'énergie totale, déterminer une relation entre  $N_0$ ,  $N_1$ ,  $T_0$ ,  $T_1$  et  $\eta$ .

En réalité, on applique la radio-fréquence en continu. Bien que le gaz d'atomes ne soit pas à l'équilibre thermodynamique, on admet que — pour  $\eta$  assez grand — on peut définir une température  $T(t)$  à tout instant. On ajuste la fréquence de la rf de sorte que  $\eta$  reste constant à tout instant. On note  $dN = N(t + dt) - N(t)$  et  $dT = T(t + dt) - T(t)$ .

**Q 39.** Déterminer une relation entre  $\frac{dN}{N}$ ,  $\frac{dT}{T}$  et  $\eta$ .

**Q 40.** Justifier qualitativement que, si le nombre  $N$  d'atomes dans le piège est constant, alors la densité particulière au centre du piège  $n_0^*$  augmente lorsque la température diminue.

Lors du refroidissement évaporatif  $N$  varie et on peut montrer que  $n_0^* = \alpha N T^{-3/2}$  où  $\alpha$  est une constante.

**Q 41.** Déterminer la valeur minimale de  $\eta$  pour laquelle la densité dans l'espace des phases au centre du piège  $\mathcal{D}_0$  augmente au cours l'évaporation.

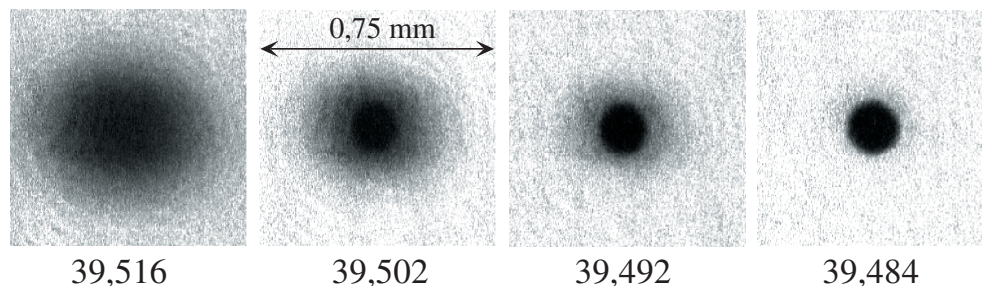
**Q 42.** On note  $N_P$  et  $\mathcal{D}_P$  respectivement le nombre d'atomes et la densité dans l'espace des phases au centre du piège avant l'évaporation. Déterminer  $\mathcal{D}_0(t)$  en fonction de  $\eta$ ,  $\mathcal{D}_P$ ,  $N_P$  et  $N(t)$ . Discuter la limite quand  $\eta \rightarrow \infty$ .

**Q 43.** Au bout d'un certain temps, on obtient  $n_0^* = 5 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$  et  $T = 2 \times 10^{-8} \text{ K}$ , calculer  $\mathcal{D}_0$ .

#### IV.C – Preuve expérimentale de la Condensation de Bose-Einstein

Pendant longtemps, de nombreux physiciens ont pensé que la condensation de Bose-Einstein était un état de la matière théorique qui ne pourrait jamais être réalisé expérimentalement. En 1995, lors de la première réalisation expérimentale, il a fallu que les chercheurs trouvent un argument incontestable pour convaincre la communauté scientifique que ce « Graal de la physique » avait enfin été atteint, cet argument a été l'observation de « l'inversion de l'ellipticité ».

On réalise des images en absorption du nuage d'atomes froids. Pour cela on coupe le piège magnétique (nécessaire pour supprimer les décalages dus à l'effet Zeeman) puis, après un temps de vol  $\tau$ , on envoie un faisceau laser presque résonant sur le nuage et on observe « l'ombre » du nuage sur une caméra CCD (figure 6). En présence d'atomes, l'éclairement détecté en un point de la caméra est réduit d'un facteur qui dépend de la densité du nuage intégrée le long de la direction de propagation du laser.



**Figure 6** Images en absorption du nuage d'atomes froids après un temps de vol de durée  $\tau = 22$  ms. Les quatre images ont une largeur correspondant à 0,75 mm. Le nombre sous l'image correspond à la fréquence finale (en MHz) de la rf utilisée pour l'évaporation. La première image est celle d'un nuage thermique. Sur la troisième image, on voit une double structure : on est en présence d'un condensat de Bose (partie très dense au centre) entouré par un nuage thermique. Sur la dernière image, on a un condensat presque pur.

**Q 44.** Montrer que si le temps de vol  $\tau$  est assez long, l'image obtenue reflète la distribution initiale des vitesses dans le piège. En supposant que  $\tau = 22$  ms est « assez long », déterminer un ordre de grandeur de la température lorsque la fréquence finale de la rf est de 39,516 MHz.

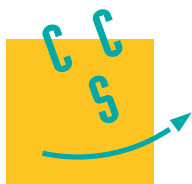
**Q 45.** Rappeler l'inégalité de Heisenberg spatiale en indiquant la signification des différentes grandeurs. Pour le condensat de Bose-Einstein dans le piège harmonique, l'inégalité est en fait une égalité. On rappelle que le piège magnétique est *anisotrope* (on a  $\omega_r > \omega_z$ ). Montrer que pour un condensat de Bose-Einstein, si on compare deux images, l'une avec  $\tau$  assez faible et l'autre avec  $\tau$  assez grand, on a une « inversion de l'ellipticité ». Montrer enfin que cet effet ne peut pas se produire avec un nuage thermique.

### Données

|                                    |                                                 |
|------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Constante de Planck                | $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s                  |
| Constante de Boltzmann             | $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J·K <sup>-1</sup>  |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8$ m·s                      |
| Perméabilité magnétique du vide    | $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6}$ H·m <sup>-1</sup> |
| Charge électrique élémentaire      | $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C                    |
| Magnéton de Bohr                   | $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24}$ A·m <sup>2</sup> |
| Masse d'un atome de rubidium 87    | $M = 1,45 \times 10^{-25}$ kg                   |

• • • FIN • • •





L'épreuve comporte deux parties indépendantes, l'une de chimie, l'autre de physique, mais étudiant toutes deux des phénomènes prenant place dans l'atmosphère terrestre. Chaque partie est accompagnée d'une annexe regroupant plusieurs documents utiles pour la résolution de certaines questions. Ces annexes figurent en fin d'énoncé.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Certaines données utiles sont regroupées en fin d'énoncé.

## I Étude de deux composants de l'atmosphère : le dioxygène et l'ozone

### I.A – Étude structurale de l'oxygène et de l'ozone

I.A.1) Le numéro atomique de l'élément oxygène est  $Z = 8$ .

Q 1. Donner la configuration électronique attendue de l'atome d'oxygène dans son état fondamental. Distinguer et dénombrer les électrons de valence et les électrons de cœur.

Q 2. Indiquer la période de la classification périodique à laquelle cet élément appartient.

I.A.2) L'oxygène existe sous trois isotopes stables de nombres de masse respectifs 16, 17 et 18.

Q 3. Rappeler la définition du terme « isotope » et préciser la composition du noyau de chacun des isotopes de l'oxygène. Justifier que les propriétés chimiques de deux isotopes sont identiques.

Q 4. La masse molaire moyenne de l'oxygène est  $15,9994 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Sachant que l'abondance de l'isotope  $^{17}\text{O}$  est de 0,037 %, déterminer les abondances des isotopes  $^{16}\text{O}$  et  $^{18}\text{O}$  de l'oxygène.

I.A.3)

Q 5. Donner le schéma de Lewis de la molécule de  $\text{O}_2$ .

I.A.4) L'ozone  $\text{O}_3$  est une molécule polaire de moment dipolaire 0,533 D. Le caractère polaire de cette molécule se traduit, dans l'écriture de son modèle de Lewis, par la présence de charges positives et négatives respectivement liées à la présence de lacunes électroniques ou d'électrons non appariés sur au moins deux atomes de cette molécule.

Q 6. Donner le schéma de Lewis de cette molécule si elle était cyclique. Serait-elle alors polaire ?

Q 7. Proposer deux formules de Lewis équivalentes rendant compte des propriétés de la molécule d'ozone. Proposer une description de la géométrie de cette molécule.

### I.B – Dissociation de la molécule de dioxygène

I.B.1) La liaison chimique A—B (simple ou multiple) entre les deux entités A et B (A et B sont des atomes, des molécules, des radicaux libres ou des ions), peut se rompre pour fournir A et B séparément. La réaction de dissociation de liaison est la réaction où le réactif est le composé A—B gazeux, dans son état standard à la température  $T$ , tandis que les produits sont les entités A et B séparées, gazeuses, à la pression standard  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ , à la même température  $T$  :  $\text{A—B}_{(\text{g})} = \text{A}_{(\text{g})} + \text{B}_{(\text{g})}$ .

Par définition, l'enthalpie standard de dissociation de liaison à la température  $T$  est l'enthalpie standard de réaction associée à l'équation bilan précédente. Elle est aussi appelée enthalpie de liaison ou énergie de liaison (par unité de quantité de matière). On la note  $E_{\text{liaison}} = \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A—B})$ .

On peut exprimer l'énergie de liaison d'un corps gazeux diatomique AB en utilisant un cycle passant par un état hypothétique formé des atomes libres A et B gazeux comme décrit figure 1.

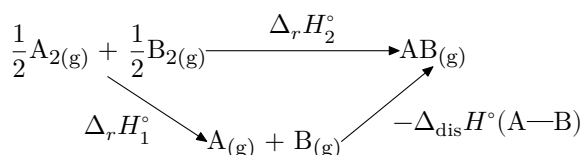
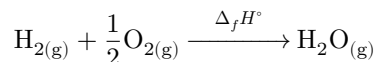


Figure 1



**Q 8.** Exprimer  $\Delta_r H_1^\circ$  en fonction de  $\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A}-\text{A})$  et  $\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{B}-\text{B})$ , puis en déduire l'énergie de liaison de  $AB$  en fonction de  $\Delta_r H_2^\circ$ ,  $\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A}-\text{A})$  et  $\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{B}-\text{B})$ .

On envisage, pour déterminer l'énergie de liaison de  $\text{O}_2$ , la réaction standard de formation de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$  :



**Q 9.** En s'inspirant de ce qui précède, déterminer l'expression de l'énergie de liaison de la molécule de  $\text{O}_2$  à 298 K. Effectuer l'application numérique.

**I.B.2)** Sous l'influence du flux photonique solaire, le dioxygène présent dans les hautes couches de l'atmosphère peut se dissocier pour donner deux oxygènes libres présentant un électron célibataire, notés  $\text{O}^\bullet$ , suivant la réaction  $\text{O}_2 \rightarrow \text{O}^\bullet + \text{O}^\bullet$ . Les oxygènes libres sont extrêmement réactifs, leur devenir sera analysé plus loin. On recherche ici la longueur d'onde limite des photons permettant de briser la liaison entre les deux oxygènes de la molécule de  $\text{O}_2$ .

**Q 10.** Rappeler la relation de Planck-Einstein liant la fréquence  $\nu$  et l'énergie du photon.

**Q 11.** Déduire de la question 9 la longueur d'onde recherchée. Indiquer le domaine du spectre électromagnétique qui lui est associé.

**Q 12.** Comment la dangerosité du rayonnement évolue-t-elle en fonction de la longueur d'onde ? Commenter le résultat de la question 11 en mettant en relation la longueur d'onde trouvée, la dangerosité des rayonnements ionisants et l'impact de la haute atmosphère sur ceux-ci.

### **I.C – La couche d'ozone**

Cette sous-partie constitue un problème peu guidé contenant essentiellement une question qualitative puis une question quantitative s'appuyant sur les deux documents de l'annexe A. Au-delà des réponses aux questions, il convient de vérifier la cohérence des réponses à l'aide des informations données dans les documents ainsi que la validité des hypothèses formulées, quand cela est possible.

Le but de cette sous-partie est de comprendre l'origine de l'existence d'une zone présentant un maximum de la concentration d'ozone vers le milieu de la stratosphère (couche d'ozone).

**Q 13.** Par une approche purement qualitative mais argumentée, tracer l'allure du graphe de  $k_1$  en fonction de l'altitude  $z$ , puis justifier qualitativement l'existence d'un maximum pour  $n_{\text{O}_3}$  à une certaine altitude.

Au prix de quelques approximations dans le modèle de Chapman, on peut établir que

$$I(z) = I_\infty \exp\left(-H n_0 \sigma_{\text{O}_2} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)\right),$$

$I_\infty$  étant une constante,  $H$  une hauteur caractéristique déjà introduite par le document A et  $\sigma_{\text{O}_2}$  la section efficace d'absorption du dioxygène.

**Q 14.** En utilisant les moyens à votre disposition, en particulier numériques, déterminer l'altitude du maximum de la concentration en ozone  $n_{\text{O}_3}$ , ainsi que l'ordre de grandeur de cette concentration maximale.

On donne :  $n_0 = 9,3 \text{ mol}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\sigma_{\text{O}_2} = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $H = 7 \text{ km}$  et  $k_1(50 \text{ km}) = 3 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ .

## **II Modélisation linéaire de l'instabilité de Kelvin Helmholtz**

Dans certaines conditions, il est possible d'observer dans la forme des nuages une structure périodique très semblable à la houle, à une altitude quasi-constante (figure 2). Le phénomène, souvent fugace, est visible en particulier en montagne, comme l'a observé le physicien allemand Von Helmholtz et interprété le physicien anglais Lord Kelvin. On s'intéresse dans ce problème à une modélisation linéaire simplifiée permettant d'expliquer la naissance des oscillations périodiques observées, mais pas l'aspect de vague déferlante lié à des phénomènes non linéaires, non pris en compte ici.

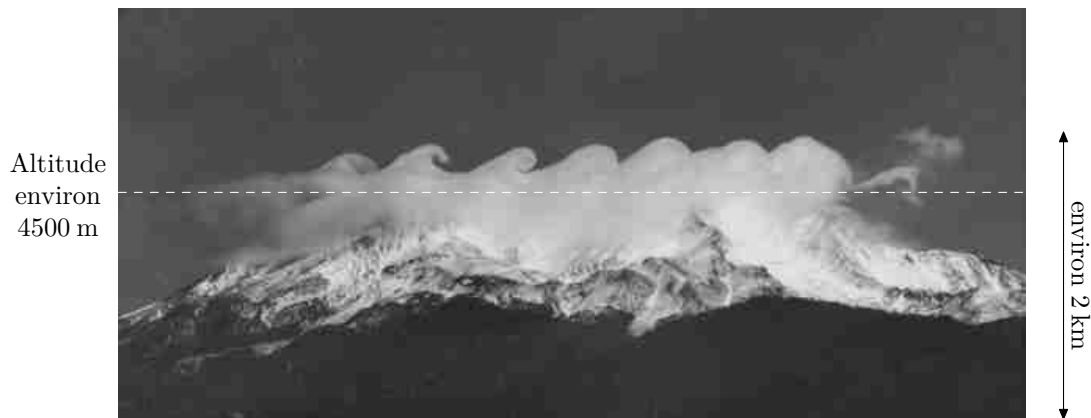
### **II.A – Pression atmosphérique dans la zone concernée**

On étudie dans cette partie la répartition de la pression avec l'altitude. L'axe  $(Oz)$  est pris vertical ascendant. Le problème sera considéré comme invariant suivant les directions horizontales.

On se place dans le cadre d'une atmosphère statique, isotherme à la température  $T = T_0$ , dans laquelle l'air est considéré comme un gaz parfait, de masse molaire  $M$  et de masse volumique  $\rho$ .

**Q 15.** Établir la relation entre la variation élémentaire de pression  $dP$ , la variation élémentaire d'altitude  $dz$ , la masse volumique de l'air  $\rho$  et la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

**Q 16.** En déduire l'expression de la pression locale  $P(z)$  à l'altitude  $z$  en fonction de la pression au sol  $P_0$ , de la masse molaire  $M$  de l'air, de la température  $T_0$ , de la constante des gaz parfaits  $R$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$  considérée comme uniforme à l'échelle considérée.



**Figure 2** Une illustration de l'instabilité de Kelvin Helmholtz au dessus du Mont Shasta en Californie

**Q 17.** On formule l'hypothèse que la pression est quasiment uniforme sur toute la hauteur du nuage de la figure 2. Discuter la validité de cette approximation sachant qu'une variation relative de plus de 10% de la pression n'est pas acceptable. Justifier votre réponse en vous appuyant sur des arguments numériques. On prend  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  et on suppose que la température est  $T_0 = 273 \text{ K}$ .

### II.B – Formation d'un nuage par soulèvement orographique

Cette sous-partie constitue un problème peu guidé contenant essentiellement une question qualitative puis une question quantitative s'appuyant sur les trois documents de l'annexe B. Il convient de décrire clairement la démarche mise en œuvre et la façon dont les documents sont utilisés.

**Q 18.** Expliquer qualitativement le mécanisme de formation d'un nuage par soulèvement orographique et proposer un modèle en explicitant et justifiant les hypothèses formulées.

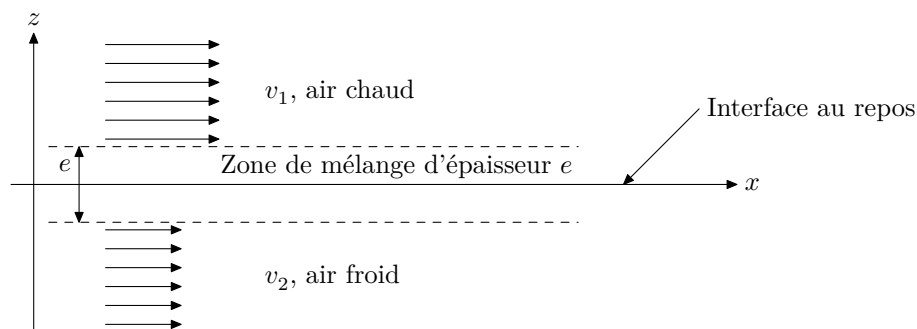
**Q 19.** Estimer l'altitude moyenne de formation de ce nuage si l'air au niveau du sol a un rapport de mélange  $r = 0,8 \text{ g}\cdot\text{kg}^{-1}$  et une température de  $10^\circ\text{C}$ . Ce résultat vous paraît-il en accord avec ce qui est observé en figure 2 ?

### II.C – Modélisation de l'écoulement

Une analyse des données de sondes atmosphériques révèle que le phénomène illustré sur la figure 2 n'est observé que lorsque :

- deux couches d'air de densités différentes se superposent dans l'atmosphère stable suite à un phénomène d'inversion de température. La couche la plus chaude est alors au dessus de la plus froide, ce qui est un phénomène classique en montagne ;
- que l'une des couches se déplace horizontalement par rapport à l'autre. La vitesse est différente pour les deux couches induisant ainsi une vitesse relative non nulle entre elles dans une zone autour de l'interface appelée couche (ou zone) de mélange.

On suppose qu'au repos l'interface entre les deux fluides est horizontale et, dans un modèle à deux dimensions, confondue avec l'axe  $(Ox)$ . On note avec l'indice 1 les grandeurs relatives à l'écoulement de l'air chaud au dessus de la zone de mélange et avec l'indice 2 celles relatives à l'écoulement d'air froid au dessous de cette zone. La vitesse du fluide est partout dirigée suivant l'axe  $(Ox)$  et donnée par rapport à l'interface au repos. En dehors de la zone de mélange, le profil de vitesse est supposé uniforme dans les deux couches avec  $v_2 < v_1$  et le gradient de vitesse est localisé dans la couche de mélange d'épaisseur  $e$  centrée sur l'interface située en  $z = 0$ , comme l'illustre la figure 3.



**Figure 3** Modélisation avec zone de mélange

**II.C.1)** L'interface est pour l'instant au repos dans sa configuration initiale. On considère dans chacune des couches, en dehors de la zone de mélange, un tube de courant de section droite  $S$  orthogonale à  $(Ox)$ .

L'écoulement y est supposé stationnaire, homogène et incompressible. Les grandeurs caractéristiques y sont uniformes sur une même section (écoulement unidimensionnel). On note  $\rho_1$  la masse volumique du fluide chaud et  $\rho_2$  celle du fluide froid.

**Q 20.** Que peut-on alors dire des débits massiques  $D_{m1}$  et  $D_{m2}$ , ainsi que des débits volumiques  $D_{v1}$  et  $D_{v2}$  dans chacune des couches en dehors de la zone de mélange ?

**Q 21.** On se place dans le cas particulier où  $D_{m1} = D_{m2}$  dans les deux tubes de courant de même section. Justifier que  $v_2 < v_1$ . On pourra si nécessaire utiliser la forme de la variation empirique de la masse volumique de l'air avec la température :  $\rho = A + B/T$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives.

**Q 22.** On considère un écoulement visqueux unidirectionnel selon  $(Ox)$  faisant état d'un gradient de vitesse suivant  $(Oz)$ . Rappeler, pour un fluide newtonien, de viscosité dynamique  $\eta$ , l'expression de la force surfacique de viscosité à l'ordonnée  $z$ , de la partie inférieure sur la partie supérieure, qui fait intervenir la composante  $v_x(z)$  du profil de vitesse.

**Q 23.** Les relevés météorologiques du jour où la photo de la figure 2 à été prise indiquent un vent moyen de  $40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Proposer une estimation du nombre de Reynolds dans un tube de courant, en dehors de la zone de mélange, sachant que sa dimension transversale moyenne est de l'ordre du kilomètre. Le modèle de profil uniforme de vitesse proposé pour cet écoulement vous paraît-il cohérent ?

## II.C.2)

**Q 24.** Énoncer la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène.

**Q 25.** On se propose de démontrer la relation précédente en effectuant, au choix, un bilan d'énergie mécanique ou cinétique. Définir et décrire avec soin une surface de contrôle  $\Sigma$  et un système fermé  $\Sigma^*$  appropriés pour réaliser ce bilan. Traduire ce dernier compte tenu des hypothèses effectuées en soulignant le rôle de chacune d'elles.

**II.C.3)** On modélise, en coordonnées cartésiennes, la zone de mélange entre les deux écoulements par un champ de vitesse de la forme  $\vec{u} = \left(\langle v \rangle + \gamma \frac{z}{e}\right) \vec{e}_x$ . On a ainsi pour l'ensemble de l'écoulement :

$$\vec{u} = \begin{cases} v_1 \vec{e}_x & \text{pour } z \geq e/2 \\ \left(\langle v \rangle + \gamma \frac{z}{e}\right) \vec{e}_x & \text{pour } |z| \leq e/2 \\ v_2 \vec{e}_x & \text{pour } z \leq -e/2 \end{cases}$$

L'axe  $(Oz)$  est ascendant et a pour origine le milieu de la zone de gradient de vitesse.

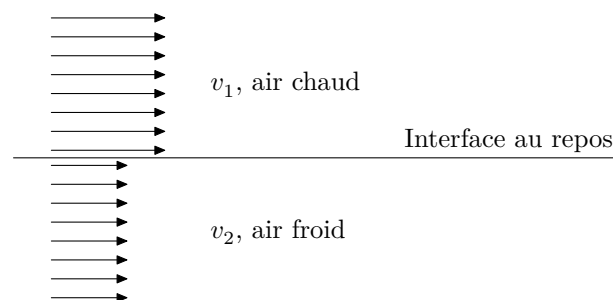
**Q 26.** Exprimer  $\langle v \rangle$  et  $\gamma$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$  pour assurer la continuité du champ des vitesses en  $z = \pm \frac{e}{2}$ .

**Q 27.** Tracer l'allure des lignes de champ de vitesse et du profil de vitesse dans le plan  $(xOz)$ .

**Q 28.** Ce profil de vitesse est-il partout compatible avec la modélisation d'un écoulement incompressible et homogène ? Avec celle d'un écoulement parfait ?

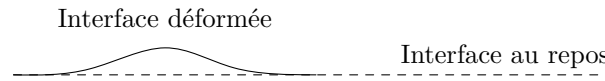
**II.C.4)** Dans ces questions de synthèse, il est demandé aux candidats de faire référence aux questions précédentes qui justifient les arguments utilisés.

On modélise le problème par une discontinuité de vitesse à l'interface (cas limite du gradient de vitesse lorsque  $e$  tend vers zéro) comme l'illustre la figure 4. On suppose que les particules de fluides évoluent sans décoller de l'interface faiblement perturbée et que les fluides chaud et froid ne se mélangent pas au cours de l'écoulement.



**Figure 4** Modélisation par discontinuité de vitesse à l'interface

Supposons qu'une petite déformation verticale de l'interface apparaisse localement (figure 5), due par exemple à une petite irrégularité dans les mouvements de la masse d'air. On suppose que cette situation se traduit localement par une diminution de la section offerte à l'écoulement au dessus de l'interface déformée et une augmentation au dessous. Partout autour de l'interface faiblement déformée, l'écoulement est encore supposé parfait, stationnaire, incompressible et homogène.



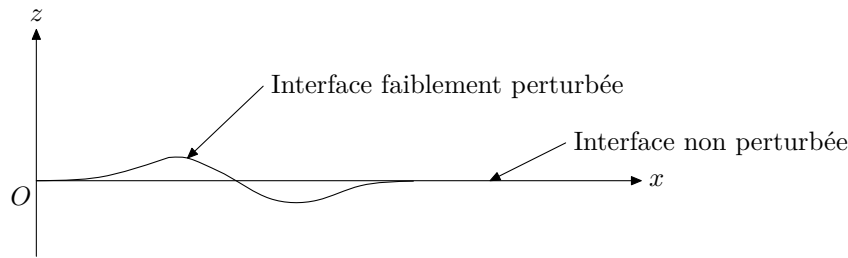
**Figure 5** Déformation de l'interface

**Q 29.** On considère que les masses d'air froid et d'air chaud ne s'interpénètrent pas lors de leur déplacement relatif. Que dire de la vitesse du fluide au niveau d'une bosse de déformation puis au niveau d'un creux de déformation ? Comment la position relative des lignes de courant évolue-t-elle au dessus et au dessous de l'interface ainsi déformée ? Tracer sommairement l'allure de ces lignes de courant.

**Q 30.** Montrer qu'alors un gradient de pression apparaît entre les deux couches de part et d'autre de l'interface. Quelle en est la conséquence sur la déformation initiale ? Est-elle amplifiée ou au contraire réduite ?

## II.D – Condition d'instabilité de l'interface et onde de surface

On se place dans le cadre du modèle de discontinuité de vitesse à l'interface étudié dans la sous-partie II.C. La viscosité et les effets de la pesanteur sont négligés. On suppose que, sous l'influence d'une faible perturbation de hauteur de l'interface initialement plane, le champ de vitesse et de pression sont eux aussi faiblement perturbés et que l'interface évolue vers la configuration présentée figure 6.



**Figure 6**

On cherche ici les conditions de croissance d'une faible perturbation donnant lieu à l'instabilité de l'interface. La vitesse de base dans l'écoulement non perturbé, l'interface étant alors confondue avec  $(Ox)$ , est définie par  $\vec{v}_b = v_b(z)\vec{e}_x$  où  $v_b(z) = \begin{cases} v_1\vec{e}_x & \text{si } z > 0 \\ v_2\vec{e}_x & \text{si } z < 0 \end{cases}$ ,  $v_1$  et  $v_2$  étant deux constantes réelles telles que  $v_2 < v_1$ .

Sous l'effet de la faible perturbation de hauteur locale de l'interface, on envisage une faible perturbation de vitesse  $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x\vec{e}_x + \varepsilon_z\vec{e}_z$  de sorte que la vitesse de l'écoulement perturbé s'écrit  $\vec{v}_p = v_b(z)\vec{e}_x + \vec{\varepsilon}$ . On définit, pour un écoulement bidimensionnel dans le plan  $(xOz)$ , la fonction courant  $\Psi(x, z, t)$  dont on admet, à tout instant, l'uniformité le long de chaque ligne de courant.

**II.D.1)** Dans le cadre du modèle adopté ici, l'étude de la propagation de la perturbation de l'interface nous conduit à l'idée de lui associer une fonction courant sous la forme d'une onde, donnée en notation complexe par

$$\underline{\Psi}(x, z, t) = \Phi(z) \exp(i(kx - \omega t)),$$

où la fonction réelle  $\Phi$ , fonction de  $z$  uniquement, est l'amplitude et  $i^2 = -1$ . Les paramètres  $k$  et  $\omega$  sont des constantes : le premier est la norme, supposée strictement positive, du vecteur d'onde et le second est une pulsation complexe telle que  $\omega = \omega_{re} + i\omega_{im}$ , où  $\omega_{re} = \text{Re}(\omega)$  et  $\omega_{im} = \text{Im}(\omega)$ , Re et Im désignant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

On admet, dans les conditions simplificatrices de notre modèle, que les variations spatio-temporelles de la fonction  $\underline{\Psi}$  sont gérées par une équation différentielle qui, après simplification, prend la forme

$$(v_b - \underline{c}) \left( \frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial z^2} - k^2 \underline{\Psi} \right) - \left( \frac{dv_b}{dz} \right) \underline{\Psi} = 0,$$

dite équation de Rayleigh, où  $\underline{c} = \omega/k$  est une grandeur complexe homogène à une vitesse, supposée différente de  $v_b$ .

**Q 31.** Discuter l'intérêt d'introduire la fonction courant dans l'étude sachant qu'il est possible (par une méthode numérique par exemple) de tracer les courbes iso-valeurs de  $\Psi(x, z, t)$  à chaque instant dans le plan  $(xOz)$ . Quel serait l'analogue des lignes de niveau d'une carte topographique pour la fonction courant sur une telle carte ?

**Q 32.** Montrer que les amplitudes des fonctions courants dans les deux écoulements perturbés au dessus et au dessous de l'interface satisfont deux équations de la forme

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dz^2} - k^2 \Phi_i = 0,$$

avec l'indice  $i = 1, 2$  et où on rappelle que  $k$  est strictement positive.

**Q 33.** On admet que chaque fonction  $\Phi_i(z)$  reste bornée, y compris à l'infini, et tend vers une constante  $A_i$  au niveau du plan  $z = 0$ . Déterminer  $\Phi_1(z)$  et  $\Phi_2(z)$  en fonction de  $k$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $z$ . On ne cherchera pas à expliciter  $A_1$  et  $A_2$ , ni dans cette question, ni dans la suite du problème.

La prise en compte des conditions aux limites à l'interface conduit au système algébrique homogène suivant :

$$\begin{cases} (v_1 - \underline{c})A_2 - (v_2 - \underline{c})A_1 = 0, \\ (v_2 - \underline{c})A_2 + (v_1 - \underline{c})A_1 = 0. \end{cases}$$

**Q 34.** Montrer, en résolvant ce système, que la quantité  $\underline{c}$  peut s'exprimer sous la forme

$$\underline{c}^\pm = \text{Re}(\underline{c}) + i \text{Im}(\underline{c}) = \langle V \rangle \pm i \frac{\Gamma}{2}$$

où les exposants  $+$  et  $-$  sont relatifs à deux modes différents de propagation, appelés branches de propagation, de célérités complexes respectives  $\underline{c}^+$  et  $\underline{c}^-$ . Expliciter  $\langle V \rangle$  et  $\Gamma$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ .

**Q 35.** En déduire la relation de dispersion liant  $\omega$ ,  $k$ ,  $\langle V \rangle$  et  $\Gamma$  pour chacune des branches de propagation.  $\Gamma$  est appelé intensité de cisaillement. On prendra  $\Gamma > 0$ .

**Q 36.** En explicitant l'expression de  $\Psi(x, z, t) = \text{Re}(\underline{\Psi}(x, z, t))$ , montrer que la vitesse de phase de l'onde a pour expression  $v_\varphi = \text{Re}(\underline{c}) = \frac{\omega_{\text{re}}}{k}$ . L'exprimer en fonction de  $\langle V \rangle$ .

**Q 37.** Préciser, pour chaque branche, le sens de propagation de l'onde. Indiquer si l'onde est plane et s'il y a dispersion.

**II.D.2)** Compte tenu de la forme de la fonction courant  $\Psi(x, z, t) = \text{Re}(\underline{\Psi}(x, z, t))$ , on définit le taux de croissance d'un mode perturbé par  $\sigma = |\text{Im}(\underline{\omega})| = |\omega_{\text{im}}|$ .

**Q 38.** Montrer que la fonction courant peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \Psi(x, z > 0, t) = A_1 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) F(x, t) \exp(\pm \sigma t) & \text{pour } z > 0 \\ \Psi(x, z < 0, t) = A_2 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) F(x, t) \exp(\pm \sigma t) & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

où  $\delta$  et  $\sigma$  seront explicités en fonction de  $k$  et  $\Gamma$ . Préciser également l'expression de  $F(x, t)$ .

**Q 39.** Indiquer, en justifiant, la branche de la relation de dispersion à retenir pour qu'une instabilité puisse se développer. Comment cette instabilité évolue-t-elle avec l'intensité de cisaillement  $\Gamma$  ?

**Q 40.** Donner alors une expression définitive de la fonction courant réelle  $\Psi(x, z, t)$  en fonction de  $z$ ,  $x$ ,  $t$ ,  $k$ ,  $\sigma$ ,  $\langle V \rangle$  et  $A_1$  ou  $A_2$  pour  $z > 0$  et pour  $z < 0$ .

**Q 41.** On s'intéresse dans cette question au profil de la fonction courant en fonction de  $z$ , à  $x$  fixé. Représenter ce profil à un instant  $t$  quelconque et positionner judicieusement sur le tracé la grandeur  $\delta$  dont on donnera une interprétation physique. Expliquer soigneusement l'évolution de ce profil au cours du temps.

**Q 42.** On s'intéresse dans cette question au profil de la fonction courant en fonction de  $x$ , à  $z$  fixé. Représenter ce profil à un instant  $t$  quelconque puis expliquer soigneusement l'évolution de celui-ci avec le temps.

**II.D.3)** En réalité, la différence de vitesse entre les deux couches forcée par l'inversion de température est fortement renforcée par l'influence du relief, ce qui conduit à prendre  $\Gamma \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . On suppose que tous les repères géographiques de la photo de la figure 2 sont dans le plan de l'image et sont ainsi relatifs à la même échelle.

**Q 43.** Proposer une démarche permettant d'accéder, à l'aide de cette figure, au temps caractéristique  $\tau$  du développement de l'instabilité. En donner une estimation numérique. Ce résultat est-il cohérent avec le caractère « souvent fugace » du phénomène mentionné dans l'introduction de cette partie II ?

# Annexe A

## Document A1 — Structure de l'atmosphère

*D'après wikipedia*

L'atmosphère est divisée en plusieurs couches d'importance variable : leurs limites ont été fixées selon les discontinuités dans les variations de la température, en fonction de l'altitude. De bas en haut, on rencontre

- la troposphère : l'épaisseur de cette couche varie entre 13 et 16 km à l'équateur, mais entre 7 et 8 km aux pôles. Elle contient 80 à 90 % de la masse totale de l'air et la quasi-totalité de la vapeur d'eau. C'est la couche où se produisent les phénomènes météorologiques (nuages, pluies, etc.) et les mouvements atmosphériques horizontaux et verticaux (convection thermique, vents) ;
- la stratosphère : de 8-15 km d'altitude à 50 km d'altitude ; elle abrite une bonne partie de la couche d'ozone ;
- la mésosphère : de 50 km d'altitude à 80 km d'altitude ;
- la thermosphère : de 80 km d'altitude à 350-800 km d'altitude ;
- l'exosphère : de 350-800 km d'altitude à 50 000 km d'altitude.

## Document A2 — Couche d'ozone

*D'après wikipedia*

La couche d'ozone ou ozonosphère désigne la partie de la stratosphère contenant une quantité relativement importante d'ozone (concentration de l'ordre de un pour cent mille). Son existence est démontrée en 1913 par les physiciens français Henri Buisson et Charles Fabry grâce à son interféromètre optique. Cet ozone est produit par l'action des rayons ultra-violet (UV) du rayonnement solaire, sur les molécules de dioxygène à haute altitude.

Sydney Chapman propose le mécanisme cinétique de formation suivant en 1930

- Réaction 1 :  $\text{O}_2 \xrightarrow{k_1} \text{O}^\bullet + \text{O}^\bullet$ , constante de vitesse  $k_1$
- Réaction 2 :  $\text{O}^\bullet + \text{O}_2 \xrightarrow{k_2} \text{O}_3$ , constante de vitesse  $k_2 = 5 \times 10^6 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
- Réaction 3 :  $\text{O}_3 \xrightarrow{k_3} \text{O}_2 + \text{O}^\bullet$ , constante de vitesse  $k_3 = 1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$
- Réaction 4 :  $\text{O}_3 + \text{O}^\bullet \xrightarrow{k_4} 2\text{O}_2$ , constante de vitesse  $k_4 = 9 \times 10^4 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

L'exploitation de ce modèle en régime stationnaire permet d'établir la relation suivante entre la concentration en dioxygène  $n_{\text{O}_2}$  et en ozone  $n_{\text{O}_3}$  :

$$n_{\text{O}_3} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3 k_4}} n_{\text{O}_2}.$$

Compte tenu du mécanisme de la première réaction (photolyse), la constante de vitesse  $k_1(z)$  est proportionnelle à l'intensité  $I(z)$  de la partie ultra-violette du rayonnement venant du Soleil à l'altitude  $z$ . Cette intensité  $I(z)$  du rayonnement diminue au fur et à mesure que celui-ci traverse des couches gazeuses contenant  $\text{O}_2$ , et ce d'autant plus que la concentration en  $\text{O}_2$  est importante (on considère que seul  $\text{O}_2$  peut absorber le rayonnement ultra-violet). Au niveau du sol,  $I(0)$  est quasiment nul.

On peut considérer enfin que le profil de concentration en  $\text{O}_2$ ,  $n_{\text{O}_2}(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  (avec  $n_0 = 9,3 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $H = 7 \text{ km}$ ), n'est pas modifié par la production d'ozone, ce qui fait qu'à partir du sommet de la stratosphère la concentration en  $\text{O}_2$  est quasiment nulle.

## Annexe B

### Document B1 — Quelques notions et données météorologiques

*D'après : Météofrance, « Notions de météorologie »*

La vapeur d'eau est un gaz absolument transparent et invisible. L'air ambiant est en moyenne composé d'azote (78 %) et d'oxygène (21 %) et d'autres gaz à hauteur de 1 %. La proportion de vapeur d'eau dans l'air ambiant varie de 0,1 % à tout au plus 5 %.

L'humidité relative de l'air, qui s'exprime en %, est définie à partir du rapport de la pression partielle de vapeur d'eau contenue dans l'air sur la pression de vapeur saturante de l'eau à la température  $T$  considérée :  $100 \frac{P_{\text{vap}}}{P_s(T)}$  où  $P_{\text{vap}}$  est la pression partielle de vapeur d'eau dans l'air et  $P_s(T)$  la pression de vapeur saturante de l'eau à la même température  $T$ .

100 % correspond à un air saturé en vapeur d'eau, 0 % à un air parfaitement sec ne contenant pas du tout de vapeur d'eau (cette valeur d'humidité relative n'est jamais atteinte dans la nature, pas même dans les déserts).

La pression de vapeur saturante est une fonction croissante de  $T$ .

L'humidité de l'air diminue lorsque la température diminue et, dans une moindre mesure, lorsque la pression diminue.

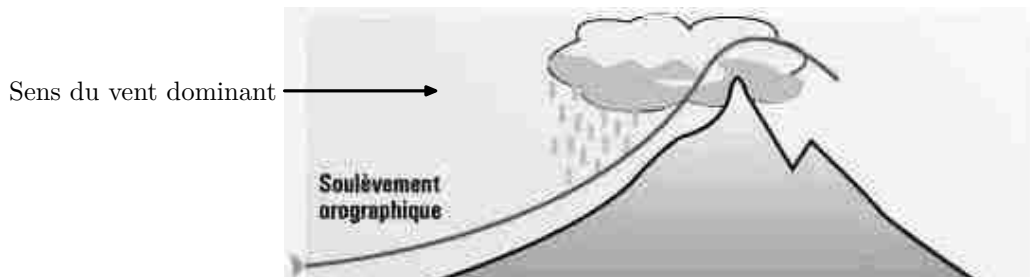
On définit le rapport de mélange  $r$  comme le rapport de la masse de vapeur d'eau contenue dans une masse d'air humide de volume donné sur la masse d'air sec contenu dans ce même volume. Il s'exprime usuellement en gramme de vapeur d'eau par kilogramme d'air sec ( $\text{g} \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

### Document B2 — Refroidissement orographique

*D'après : <http://www.meteo45.com>*

Dans le mécanisme de refroidissement dit par soulèvement orographique, le relief montagneux oblige la masse d'air à s'élever rapidement sur sa face au vent. La masse d'air s'élevant, sa température s'abaisse et peut atteindre le seuil de saturation. Un nuage se forme alors sur le versant au vent suivant le mécanisme schématisé ci-dessous.

Soulèvement  $\Rightarrow$  Détente rapide (compte tenu du temps caractéristique des échanges thermiques)  $\Rightarrow$  Refroidissement



### Document B3 — Émagramme

*D'après : <http://www.meteosudest.org/Christophe/radiosondage/explication.php>*

Le diagramme présenté figure 7, appelé émagramme, reporte sur un diagramme altitude-température ou pression-température les lignes iso-rapport de mélange et les gradients thermiques adiabatiques de l'air (variation de la température de l'air avec l'altitude).

Un émagramme est un véritable diagramme thermodynamique du fait qu'il est construit avec les variables de pression et de température. Ainsi sur un émagramme, on trouve différentes courbes représentant chacune un paramètre.

#### À quoi correspond un émagramme et à quoi cela sert-il ?

Deux fois par jour, les centres météo (cela concerne tous les centres météo mondiaux) lancent des ballons dans l'atmosphère emportant tout une série de capteurs (vent, température, humidité, etc.) et recueillent ces informations. De là, on reporte sur ces fameux graphiques la température, la température du point de rosée, et on peut alors déduire le profil vertical de l'atmosphère qui est une information capitale pour connaître l'état de l'atmosphère et son devenir.

Par la suite, nous allons employer le terme de particule. Cela est une vision un peu restrictive d'une masse d'air mais cela facilite la compréhension. Une masse d'air est constituée d'une multitude de particules ayant les mêmes caractéristiques mais pour connaître son devenir, on isole un petit élément fluide de cette masse d'air sans en changer ses paramètres de base.

- Les lignes isothermes (ligne d'égale température) représentent les transformations isothermes, elles sont généralement cotées de degré en degré et l'échelle est linéaire.
- Les isobares sont décroissantes lorsqu'on s'élève et l'échelle n'est pas constante, elle est logarithmique.



- Les adiabatiques sèches : elles représentent les transformations adiabatiques des particules d'air sec. Leur allure est due au fait qu'elles font apparaître le refroidissement lié aux détentes adiabatiques (adiabatique sèche veut dire pas d'eau liquide dans la masse d'air et non air sec).
- Les adiabatiques humides : le principe est le même que les adiabatiques sèches mais on considère que l'air est saturé (adiabatique humide veut dire présence d'eau liquide dans la masse d'air soulevée).
- Lignes d'égal rapport de mélange de saturation : c'est la masse maximale de vapeur d'eau qu'il est possible d'associer à l'unité de masse d'air sec dans cette particule.

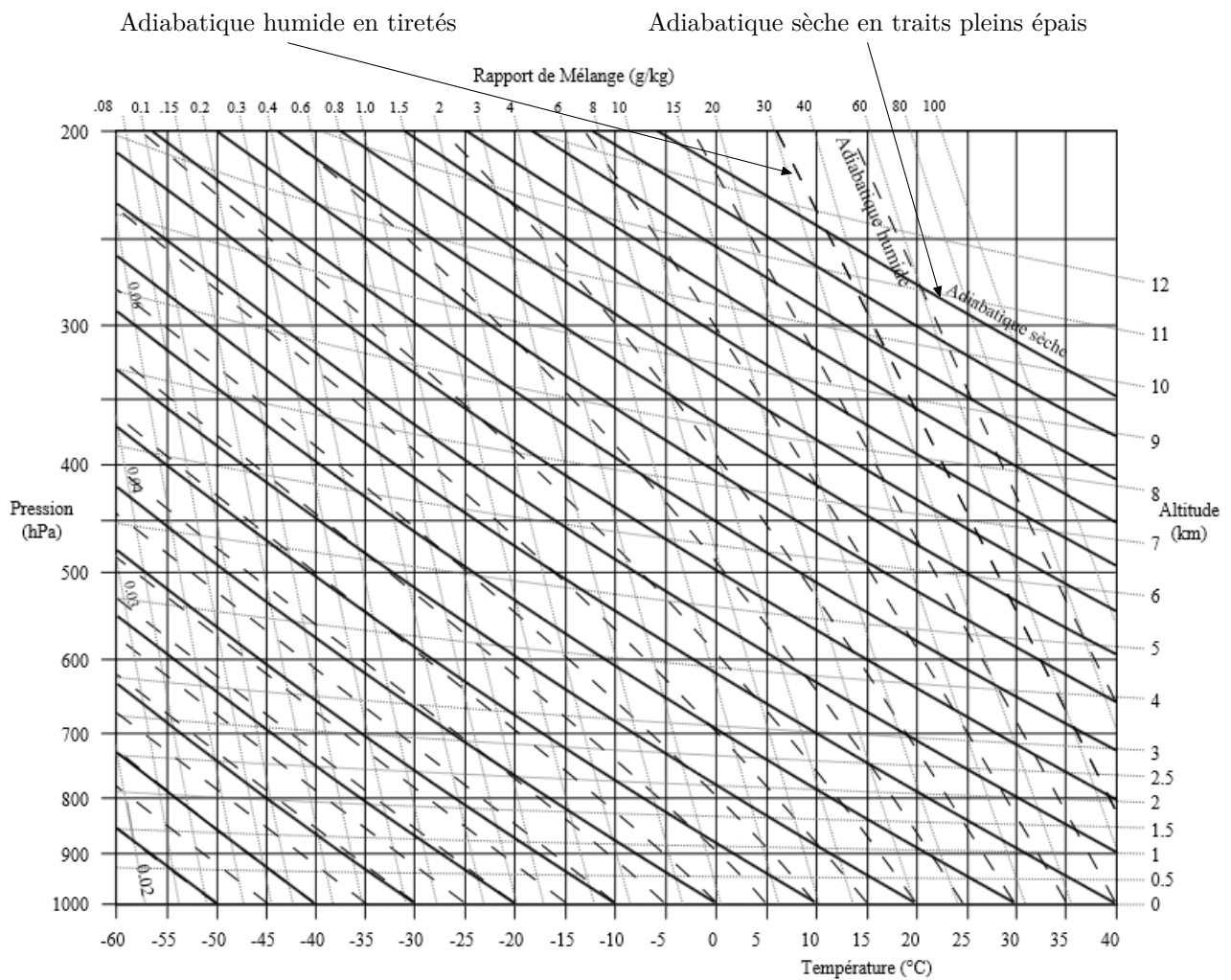
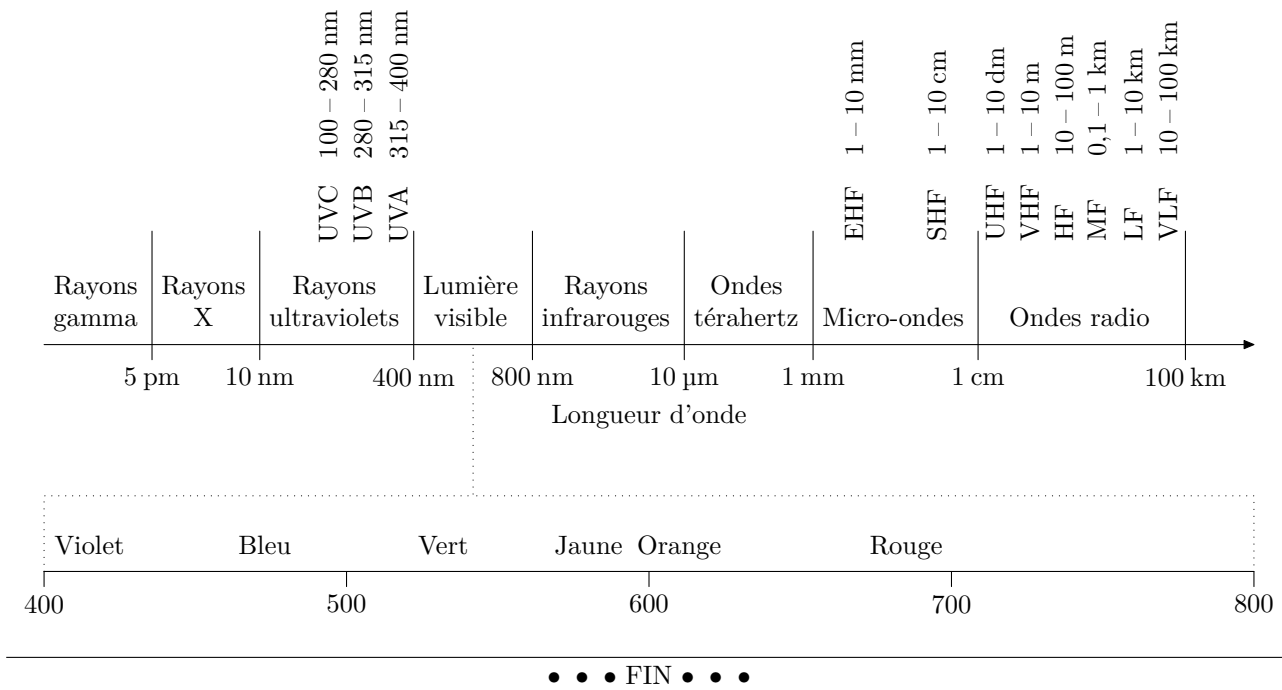


Figure 7 Émagramme

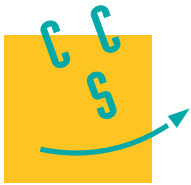
# Données

|                                                                                        |                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Masse molaire de $^{16}\text{O}$                                                       | $15,99491 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                                        |
| Masse molaire de $^{17}\text{O}$                                                       | $16,99914 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                                        |
| Masse molaire de $^{18}\text{O}$                                                       | $17,99916 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                                        |
| Masse molaire de l'air                                                                 | $M_a = 29,0 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$                                      |
| Masse volumique de l'air (à $0^\circ\text{C}$ et pression normale)                     | $\rho_a = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$                                                     |
| Viscosité dynamique de l'air                                                           | $\eta_a = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$                                           |
| Viscosité cinématique de l'air                                                         | $\nu_a = 1,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$                                      |
| Enthalpie standard de formation de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$ à $298 \text{ K}$ | $\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}) = -243 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$       |
| Enthalpie standard de dissociation de $\text{O}-\text{H}$ à $298 \text{ K}$            | $\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O}-\text{H}) = 463 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$           |
| Enthalpie standard de dissociation de $\text{H}-\text{H}$ à $298 \text{ K}$            | $\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{H}-\text{H}) = 435 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$           |
| Célérité de la lumière dans le vide                                                    | $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \simeq 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Constante de Planck                                                                    | $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$                                              |
| Constante d'Avogadro                                                                   | $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                                                   |
| Constante des gaz parfaits                                                             | $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$                                      |
| Un debye                                                                               | $1 \text{ D} = 3,33 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$                                     |

## Spectre des ondes électromagnétiques



• • • FIN • • •



## *Stockage d'énergie par pompage thermique (procédé SEPT)*

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

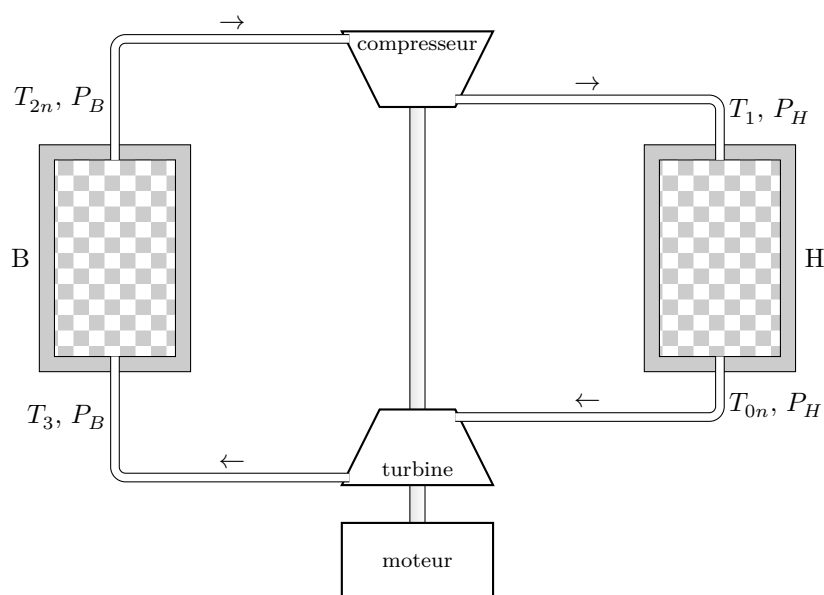
Dans le contexte actuel, la problématique de la gestion des ressources énergétiques est devenue un enjeu économique majeur. Il est particulièrement important de disposer de moyens de stockage d'énergie qui permettent une meilleure utilisation des sources d'énergie maîtrisables comme les centrales thermiques, mais aussi des sources intermittentes comme les éoliennes ou les centrales solaires. Dans ce contexte et devant les défis posés par la protection de l'environnement, les moyens de stockage existants risquent de devenir insuffisants pour intégrer davantage d'énergies intermittentes dans la production électrique. Cette limitation explique un intérêt récent pour les technologies de stockage.

Ce sujet concerne un nouveau procédé de stockage d'énergie à échelle industrielle, le procédé SEPT (Stockage d'Électricité par Pompage Thermique), breveté en 2007. L'énergie est stockée en modifiant, à l'aide d'une machine thermique, la température de deux échangeurs de grande taille appelés régénérateurs. La machine peut fonctionner en pompe à chaleur ou en moteur thermique.

### I Analyse thermodynamique du procédé SEPT

La machine est constituée de deux turbomachines, pouvant fonctionner en compresseur ou en turbine et assurant la circulation d'un gaz caloporteur (de l'argon) entre deux enceintes. Les enceintes contiennent un solide divisé (céramique réfractaire, galets de basalte...) qui échange de l'énergie thermique avec le gaz caloporteur. La machine comprend également un convertisseur électromécanique réversible pouvant fonctionner en moteur ou en générateur. On passe de la phase de stockage à celle de déstockage en changeant le sens de circulation du fluide caloporteur (figures 1 et 2).

En mode stockage d'énergie (figure 1), le cycle fonctionne en pompe à chaleur, consommant de l'énergie d'origine électrique pour transférer de l'énergie thermique depuis une enceinte basse pression B vers une enceinte haute pression H. Ces enceintes sont des régénérateurs (échangeurs thermiques gaz-solide), au travers desquels passe le gaz caloporteur, entraîné par une paire de turbomachines reliées à un moteur électrique.



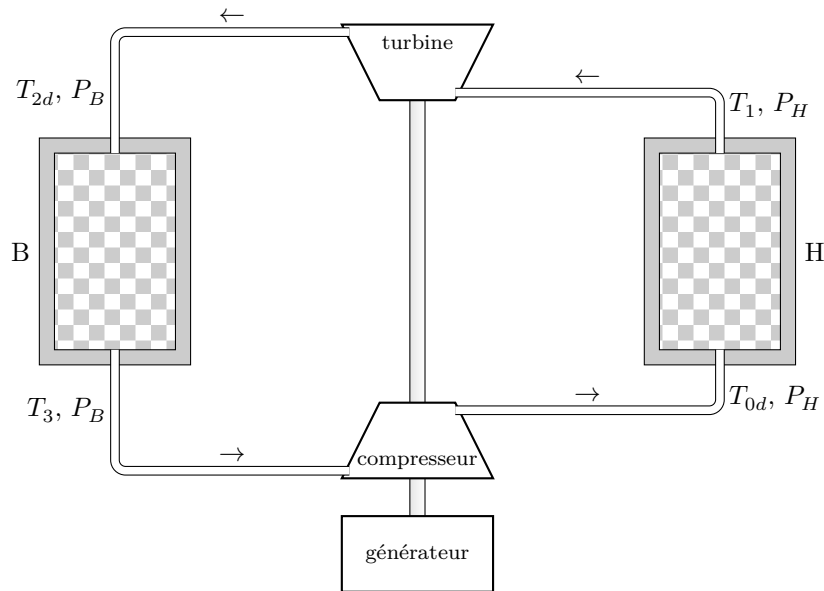
**Figure 1** Fonctionnement en mode stockage d'énergie

### I.A – Schématisation simplifiée du procédé

On schématise le dispositif de façon très simplifiée en considérant que les enceintes basse et haute pression sont des sources de chaleur, de températures respectives  $T_B$  et  $T_H$  uniformes et constantes, avec  $T_H > T_B$ . Le cycle des transformations subies par le gaz caloporteur est alors un cycle ditherme.

**Q 1.** En phase de stockage, la machine fonctionne comme une pompe à chaleur. Définir le coefficient de performance d'une telle machine et déterminer sa valeur maximale, en précisant à quelles conditions cette valeur maximale est atteinte (théorème de Carnot).

**Q 2.** En phase de déstockage (figure 2), la machine fonctionne comme un moteur thermique. Définir l'efficacité de ce moteur et déterminer sa valeur maximale en précisant dans quelles conditions cette valeur maximale est atteinte.



**Figure 2** Fonctionnement en mode production d'énergie

**Q 3.** Montrer que, dans les conditions de validité du théorème de Carnot, l'énergie stockée peut être intégralement récupérée.

**Q 4.** Dans un diagramme  $(T, s)$ , représenter les cycles de Carnot pour les phases de stockage et de déstockage.

### I.B – Étude de la phase de stockage

On s'intéresse désormais à une modélisation plus réaliste de la machine dans laquelle on tient compte des inhomogénéités de température dans les enceintes. Celles-ci sont tellement grandes que l'on peut considérer que leur température est indépendante du temps.

Le gaz pénètre dans l'enceinte H à la température  $T_1 = 1273$  K et en sort à la température  $T_{0n} = 293$  K. Après décompression dans la turbine, il pénètre dans l'enceinte B à la température  $T_3 = 203$  K et en sort à la température  $T_{2n} = 773$  K.

Les irréversibilités dues aux turbomachines ont un impact important sur le rendement du stockage. Le gaz neutre utilisé est de l'argon assimilé à un gaz parfait, de coefficient isentropique  $\gamma = 1,67$ , de masse molaire  $40,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  et de capacité thermique massique  $c_p$ . Il décrit un cycle de Brayton constitué d'une évolution isobare dans chaque enceinte (B et H) reliées par deux transformations adiabatiques lorsque le gaz traverse le compresseur et la turbine (figure 3).

**Q 5.** Reproduire schématiquement le cycle isentropique de la figure 3 en identifiant les éléments traversés par le fluide dans chaque étape du cycle.

On note  $w_c$  le travail massique réellement échangé par le fluide avec les parties mobiles du compresseur et  $w_{cis}$  le travail idéal correspondant en supposant la compression isentropique. De même, on note  $w_t$  le travail massique réellement échangé par le fluide avec les parties mobiles de la turbine et  $w_{tis}$  ce travail idéal dans les conditions isentropiques. On définit le rendement par rapport à l'isentropique du compresseur et de la turbine par

$$\eta_{cs} = \frac{w_{cis}}{w_c} \quad \text{et} \quad \eta_{ts} = \frac{w_t}{w_{tis}}.$$

**Q 6.** Comparer  $T_1$ , la température réelle en sortie de compresseur et  $T_{1is}$  cette température dans les conditions isentropiques. Justifier.

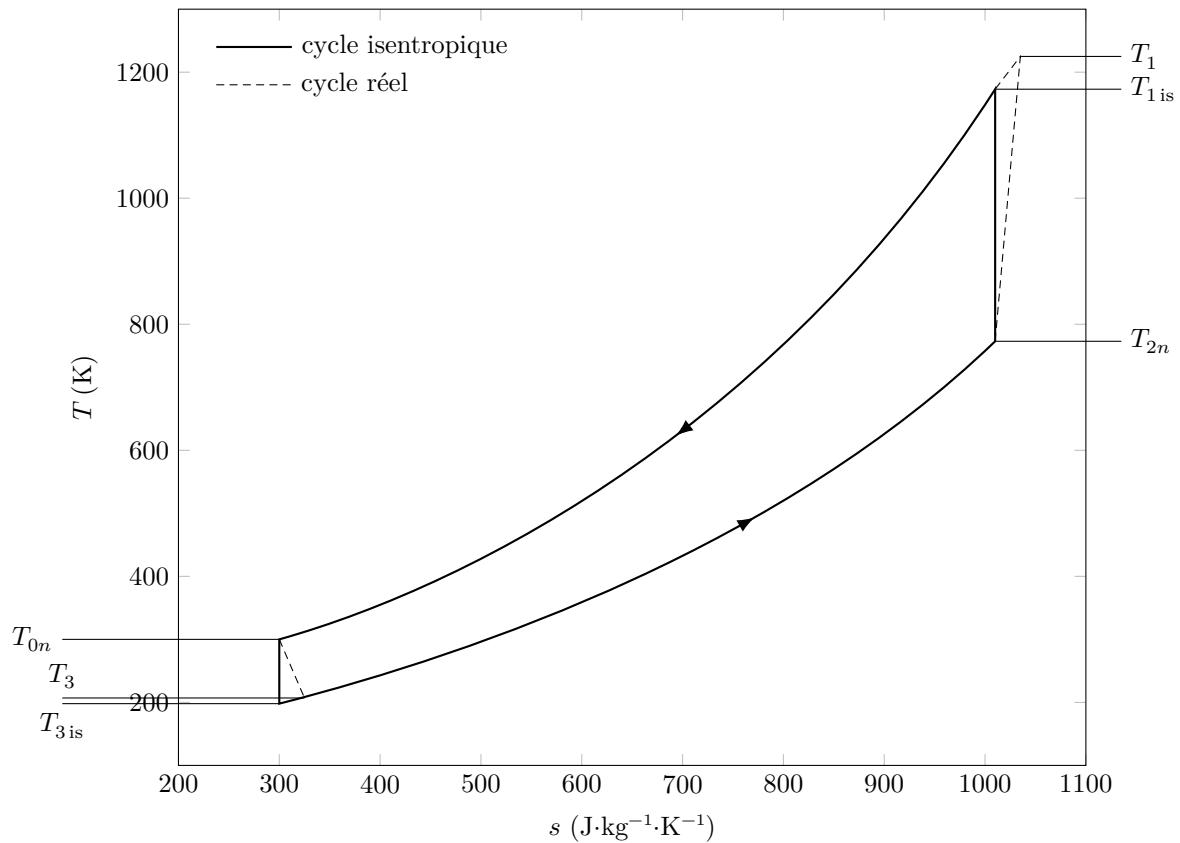


Figure 3

**Q 7.** On note  $h_{et}$ ,  $h_{st}$ ,  $h_{ec}$  et  $h_{sc}$  les enthalpies massiques réelles du fluide en entrée et sortie de la turbine et du compresseur et  $h_{stis}$  et  $h_{scis}$  les enthalpies massiques du fluide en sortie de la turbine et du compresseur en supposant les conditions isentropiques. Montrer que

$$\eta_{cs} = \frac{h_{scis} - h_{ec}}{h_{sc} - h_{ec}} \quad \text{et} \quad \eta_{ts} = \frac{h_{et} - h_{st}}{h_{et} - h_{stis}}.$$

L'objectif de la suite de cette partie est de montrer la nécessité de deux paires de turbomachines (celles en stockage ne peuvent pas être utilisées en déstockage) et de déterminer le rendement théorique du procédé SEPT.

On note  $\Psi = \left( \frac{P_H}{P_B} \right)^{1-1/\gamma}$ .

**Q 8.** En utilisant les rendements par rapport à l'isentropique des deux turbomachines lors du stockage, exprimer les températures  $T_1$  et  $T_3$  en fonction de  $T_{0n}$ ,  $T_{2n}$ ,  $\Psi$ ,  $\eta_{cs}$  et  $\eta_{ts}$ .

On définit l'énergie massique  $e_s$  mise en jeu lors du stockage par  $e_s = c_p((T_1 - T_{2n}) + (T_3 - T_{0n}))$ .

**Q 9.** Justifier cette expression.

**Q 10.** Exprimer  $e_s$  en fonction de  $T_{0n}$ ,  $T_{2n}$ ,  $c_p$ ,  $\Psi$ ,  $\eta_{cs}$  et  $\eta_{ts}$ .

**Q 11.** Calculer la valeur numérique de  $e_s$  avec  $T_{0n} = 293 \text{ K}$ ,  $T_{2n} = 773 \text{ K}$ ,  $\eta_{cs} = \eta_{ts} = 0,96$  et  $\Psi = 1,55$ .

### I.C – Positionnement du procédé SEPT par rapport aux autres modes de stockage

Parmi les autres modes de stockage d'énergie, on peut citer l'hydraulique gravitaire, l'air comprimé électrique (procédé CAES), les batteries, le stockage magnétique d'énergie (procédé SMES) ou encore le stockage d'hydrogène (utilisable par exemple dans les piles à combustibles). La figure 4 positionne ces divers modes de stockage en termes de puissance et de capacité énergétique.

**Q 12.** Comparer le procédé SEPT aux autres méthodes de stockage d'énergies présentées dans la figure 4.

**Q 13.** Déterminer un ordre de grandeur du débit massique d'argon dans une installation SEPT typique.

La porosité  $\varepsilon$ , dont l'influence sur le stockage sera étudiée ultérieurement, correspond au rapport du volume occupé par le fluide sur le volume total de l'enceinte. Le projet SETHER de l'agence nationale de la recherche prévoit la réalisation d'un prototype d'installation SEPT pour laquelle le volume total des enceintes de 10 mètres de hauteur serait  $V_e = 20\,000 \text{ m}^3$ .

**Q 14.** En prenant pour masse volumique de l'argon  $\rho_{Ar} = 1,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et une porosité  $\varepsilon = 40\%$ , déterminer la masse totale d'argon dans cette installation, en négligeant la masse d'argon contenue dans les canalisations qui relient les enceintes entre elles.

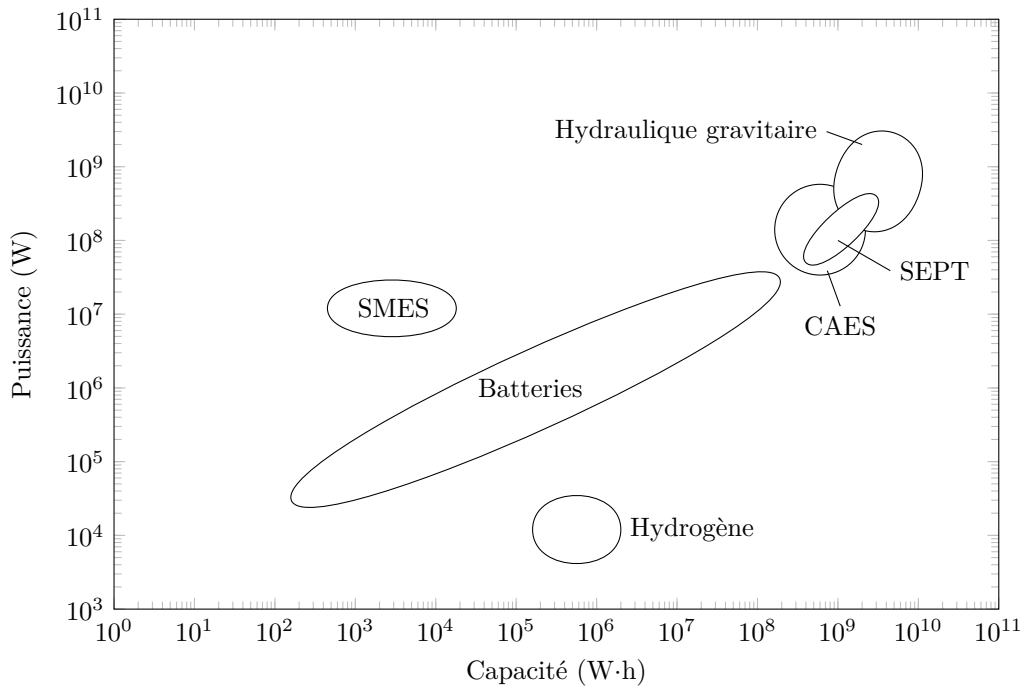


Figure 4

**Q 15.** Déterminer un ordre de grandeur de l'énergie massique que peut stocker une batterie automobile d'une masse de 10 kg et d'une capacité de 50 A·h sous 12 V (figure 5) et comparer à l'énergie massique stockée par une installation SEPT typique. La masse volumique du solide emplissant (incomplètement) les enceintes sera prise égale à  $2,5 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .



Figure 5

#### I.D – Étude de la phase de déstockage

La figure 6 présente les deux cycles de stockage et de déstockage. Les débits massiques d'argon sont supposés identiques lors des deux phases.

En déstockage, le gaz circule dans le sens opposé de celui du stockage, ce qui était une compression de  $T_{2n}$  à  $T_1$  lors du stockage devient une détente de  $T_1$  à  $T_{2d}$ .

**Q 16.** Montrer que

$$T_{0d} = T_{0n} \left( 1 + \frac{\Psi - 1}{\eta_{cd}} \right) \left( 1 + \frac{\eta_{ts}(1 - \Psi)}{\Psi} \right)$$

$$T_{2d} = T_{2n} \left( 1 + \frac{\Psi - 1}{\eta_{cs}} \right) \left( 1 + \frac{\eta_{td}(1 - \Psi)}{\Psi} \right)$$

où  $\eta_{cd}$  et  $\eta_{td}$  sont les rendements par rapport à l'isentropique du compresseur et de la turbine pendant la phase de déstockage.

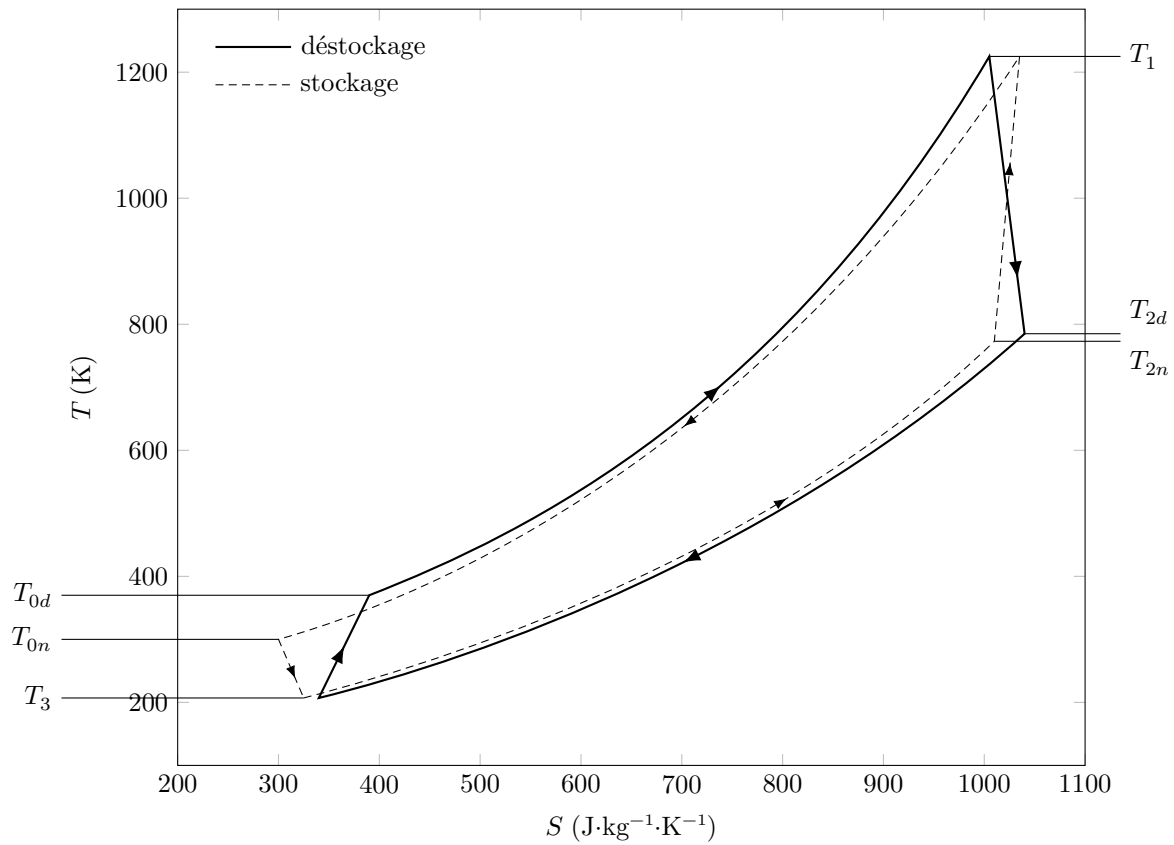
**Q 17.** Montrer que  $T_{0d} \geq T_{0n}$  et que  $T_{2d} \geq T_{2n}$ .

**Q 18.** Dans quels cas aurait-on toujours  $T_{0d} = T_{0n}$  et  $T_{2d} = T_{2n}$  ? Cela est-il réaliste ?

**Q 19.** À chaque cycle de déstockage, la température du gaz à la sortie des enceintes doit augmenter, ce qui chauffe le matériau des enceintes. Proposer une solution pour évacuer l'excédent d'énergie en ramenant le gaz à sa température nominale.

Industriellement, afin de simplifier l'évacuation de l'excédent d'énergie, on impose généralement  $T_{2d} = T_{2n}$ .

**Q 20.** Montrer qu'il y a nécessité d'avoir un rapport de pression isentropique en stockage  $\Psi$  différent de celui en déstockage  $\Psi_d$  et donc d'utiliser deux paires de turbomachines (compresseur et turbine) différentes.

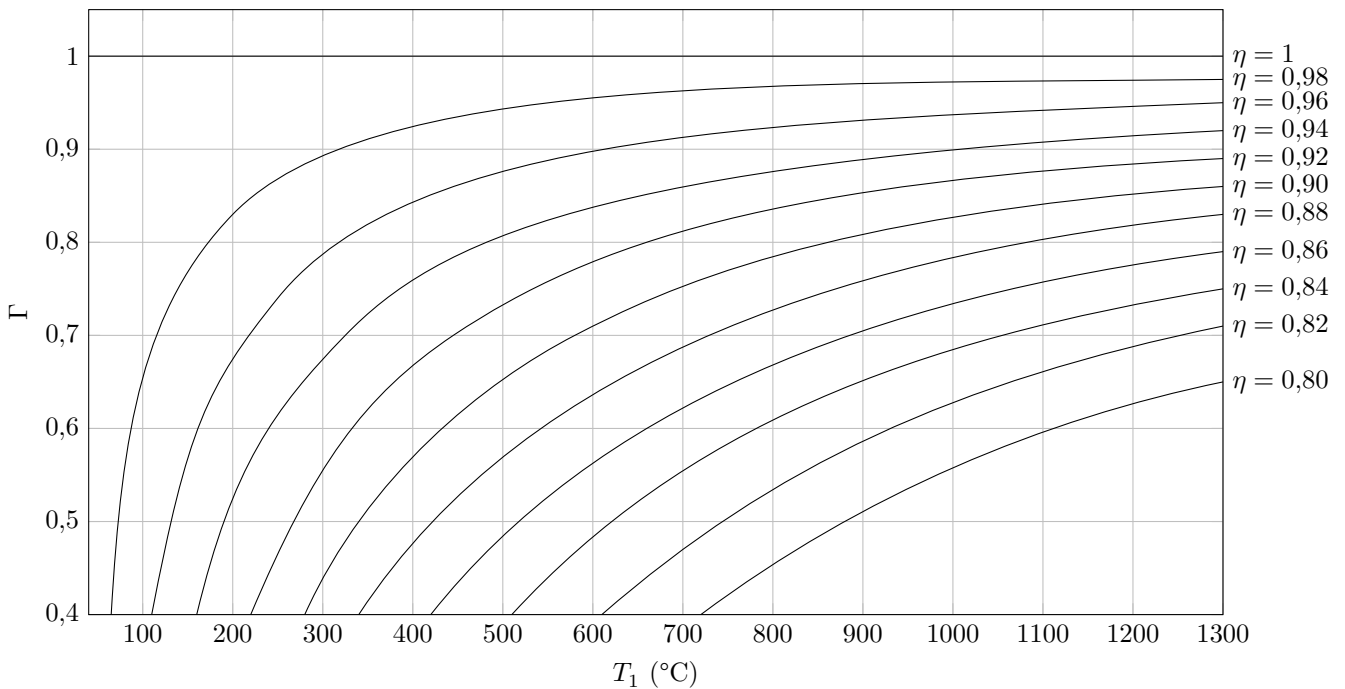


**Figure 6**

- Q 21.** Exprimer  $\Psi_d$  en fonction des rendements  $\eta_{cs}$  et  $\eta_{td}$  et de  $\Psi$ . Vérifier le résultat obtenu sur un cas limite.
- Q 22.** Comparer les rapports de pression au déstockage et au stockage.
- Q 23.** Par la même méthode qu'à la question 10, exprimer  $e_d$ , énergie massique mise en jeu lors du déstockage.

Le rendement théorique du procédé SEPT est défini par  $\Gamma = \frac{-e_d}{e_s}$ .

La température  $T_1$  étant limitée par la température maximum que peut supporter la turbomachine pour laquelle le fluide évolue entre  $T_1$  et  $T_2$ , il est intéressant d'étudier le rendement théorique en fonction de celle-ci. La figure 7 représente les tracés du rendement théorique du procédé SEPT en fonction de  $T_1$  pour différentes valeurs de  $\eta$ , rendement isentropique supposé égal pour les quatre machines et pour  $T_{0n} = 300$  K et  $\Psi = 1,55$ .



**Figure 7**



**Q 24.** À quelles conditions peut-on obtenir un rendement théorique de 90 % en supposant que la turbomachine chaude ne peut pas dépasser 1000 °C ?

**Q 25.** Montrer que le choix des turbomachines nécessite un compromis entre rendement isentropique et résistance aux températures élevées.

**Q 26.** Le rendement théorique étudié précédemment correspond à la limite supérieure du rendement réel puisqu'il ne prend en compte que les pertes liées aux irréversibilités des turbomachines. Citer d'autres facteurs susceptibles d'expliquer la différence entre le rendement réel et le rendement théorique.

## II Analyse de quelques caractéristiques des régénérateurs

Le régénérateur est un dispositif de stockage d'énergie thermique et son fonctionnement comprend deux périodes. Pendant la période « chaude », le gaz chaud circule et se refroidit au contact des parois solides ce qui correspond à un stockage de chaleur. Pendant la période « froide », le gaz froid circule et se réchauffe ce qui permet la récupération de la chaleur stockée.

### II.A – Influence de la porosité du milieu

La porosité  $\varepsilon$  est le rapport du volume occupé par le fluide sur le volume total de l'enceinte solide. On peut montrer que l'efficacité du stockage thermique augmente avec la porosité du régénérateur jusqu'à une valeur de porosité de l'ordre de 50 % qui correspond à un optimum.

On s'intéresse à un régénérateur solide à milieu granulaire que nous modéliserons de manière simplifiée comme un empilement de sphères identiques. On considère deux modes d'empilement : cubique et cubique à faces centrées (figure 8).

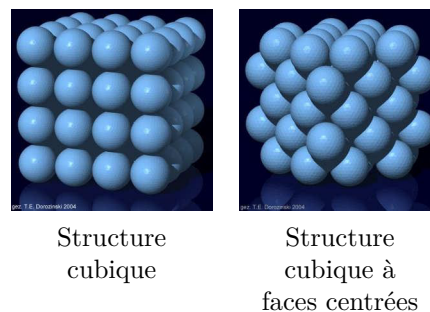


Figure 8

**Q 27.** Exprimer puis calculer la porosité théorique de chaque structure. Pourquoi dit-on que l'empilement cubique à faces centrées est un empilement compact ?

**Q 28.** Quel mode d'empilement serait le mieux adapté au remplissage d'un régénérateur ?

En réalité, lorsque les sphères sont empilées dans l'enceinte sans précautions particulières, il n'apparaît aucune périodicité, l'empilement est aléatoire et la porosité est comprise entre 0,36 et 0,40.

### II.B – Influence d'autres paramètres

#### II.B.1) Fronts thermiques et influence du coefficients d'échange

La partie I a étudié le régime établi de l'installation, mais celle-ci a besoin d'un certain nombre de cycles de stockage et de déstockage « transitoires » avant d'atteindre un régime périodique stabilisé (figure 10).

En effet, en mode stockage, l'enceinte  $H$ , initialement à la température uniforme  $T_0$ , est alimentée en gaz chaud à  $T_1$  par le haut et se réchauffe progressivement du haut vers le bas. Une zone de transition existe, se traduisant par une variation progressive de  $T_1$  à  $T_0$ . Cette zone est appelée « front thermique » (figure 9).

Un modèle développé par T.E.W. Schumann permet d'obtenir les profils de température à l'intérieur de l'enceinte. Les courbes de la figure 11 donnent les températures du fluide et du solide granulaire en fonction de  $z$ , position verticale dans l'enceinte, à différents instants et pour deux valeurs du coefficient conducto-convectif  $h$  entre ces deux milieux.

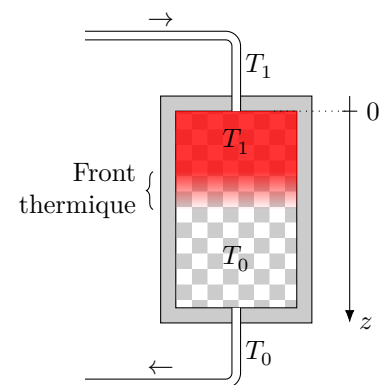


Figure 9

**Q 29.** D'après les courbes de la figure 11, comment varie la différence de température entre le fluide et le solide avec  $h$  ? Commenter.

**Q 30.** Expliquer, à l'aide de la figure 11, qu'un coefficient d'échange  $h$  plus élevé permet d'arrêter le stockage plus tard et donc de stocker d'avantage d'énergie dans le régénérateur.

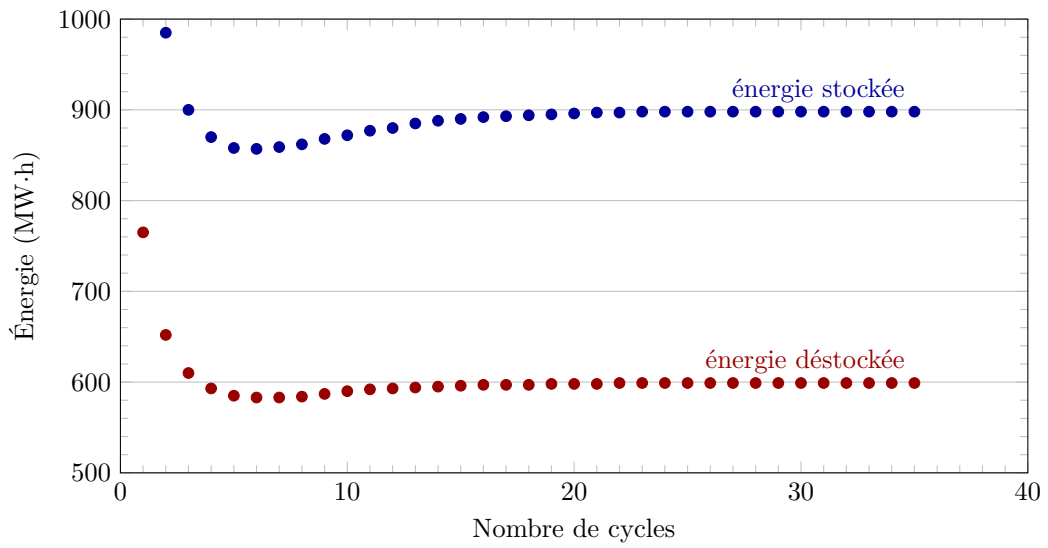


Figure 10

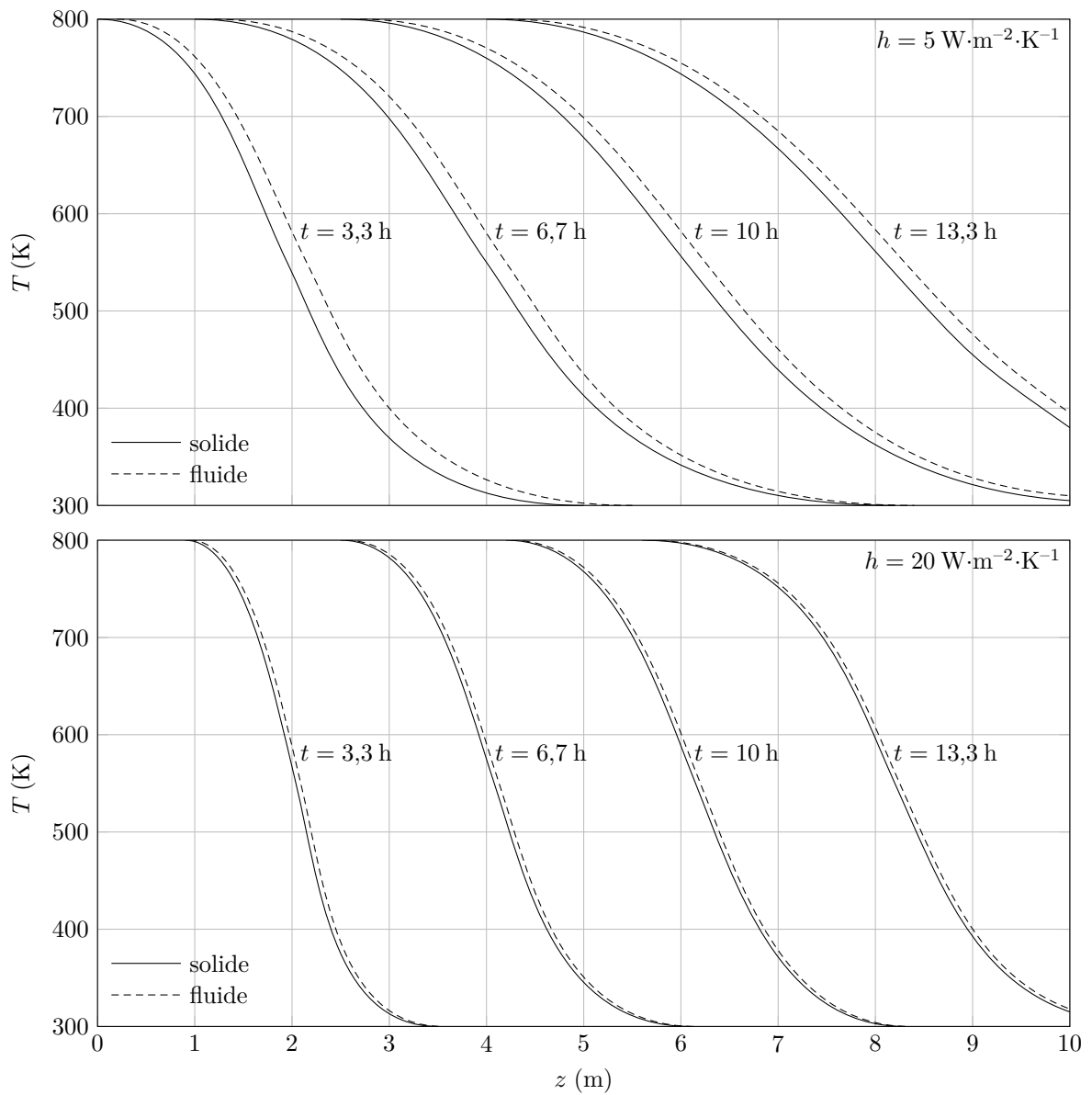
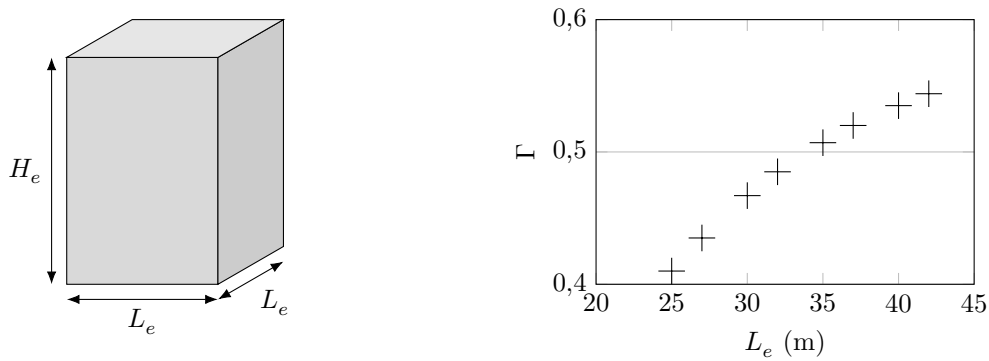


Figure 11

**Q 31.** Rappeler à quelles conditions un échange thermique entre un fluide (de température  $T_f$ ) et un solide (de température  $T_s$ ) peut être considéré réversible. Quelle devrait être la valeur de  $h$  pour que l'entropie créée lors du transfert gaz-solide soit nulle ?

### II.B.2) Influence de la largeur des enceintes

On considère pour cette question une enceinte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée, de largeur  $L_e$  et de hauteur  $H_e$ . La figure 12 présente l'évolution du rendement de l'installation en fonction de la largeur des enceintes.

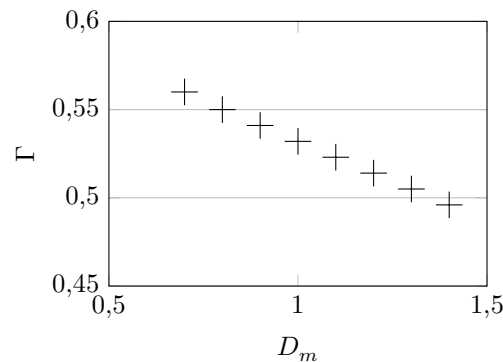


**Figure 12** Rendement avec enceinte parallélépipédique

**Q 32.** Expliquer l'évolution du rendement en fonction de  $L_e$ .

### II.B.3) Influence du débit massique de gaz

La figure 13 présente l'évolution du rendement d'une installation SEPT en fonction du débit massique du gaz.

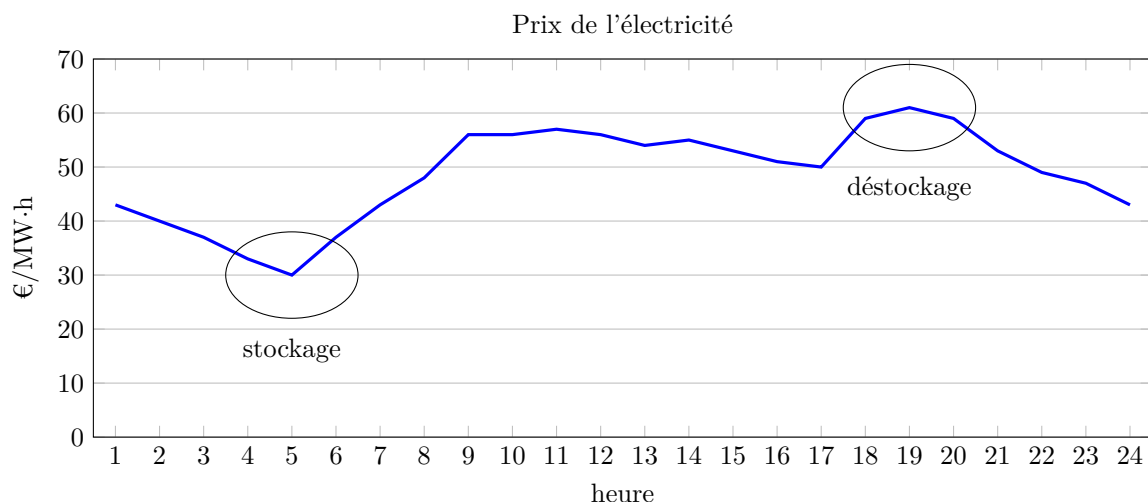


**Figure 13** Rendement en fonction du débit du fluide

**Q 33.** Expliquer l'évolution du rendement avec le débit du gaz.

### II.C – Évolution thermique des enceintes pendant les pauses

Une installation SEPT devra quotidiennement stocker et déstocker de l'énergie à des moments de la journée bien précis déterminés par l'évolution journalière du coût de l'énergie électrique (figure 14).



**Figure 14** Phases quotidiennes de stockage et déstockage dans une installation SEPT

Entre ces périodes, le système est à l'arrêt pendant quelques heures et on observe une diffusion thermique axiale (selon  $Oz$ ) qu'on se propose d'évaluer afin de déterminer s'il est nécessaire de la prendre en compte dans l'efficacité globale du procédé.

On considère l'enceinte de la figure 12 de largeur  $L_e = 10$  m, pendant une période d'arrêt de durée  $\Delta t = 24$  h. Les matériaux réfractaires sont de porosité  $\varepsilon = 44\%$ , de conductivité thermique  $\lambda = 0,03 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et affichent un gradient thermique uniforme  $\frac{dT}{dz} = 200 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Q 34.** Évaluer un ordre de grandeur de l'énergie thermique diffusée axialement et la comparer à l'énergie interne de cette enceinte  $U = 1,7 \times 10^{12}$  J. Conclure.

### II.D – Notions sur les modèles de conductivité effective d'un milieu poreux

L'étude précédente nécessite une connaissance de la conductivité thermique  $\lambda$  du milieu poreux. La conductivité thermique d'un tel système, dite conductivité thermique effective, intègre logiquement dans sa définition, les paramètres primaires que sont les conductivités thermiques intrinsèques des particules solides  $\lambda_s$  et du gaz  $\lambda_g$  ( $\lambda_s > \lambda_g$ ) ainsi que le rapport volumique entre ces deux phases, représenté par la porosité  $\varepsilon$ .

Quel que soit le modèle utilisé pour calculer la conductivité thermique effective d'un milieu granulaire, celle-ci est toujours comprise entre deux valeurs extrêmes,  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ . Une situation limite correspond à un milieu où le vecteur densité de flux de chaleur est perpendiculaire aux strates (modèle série, figure 15). L'autre situation limite correspond à une disposition des strates parallèle à la direction de la densité du flux de chaleur (modèle parallèle, figure 15).

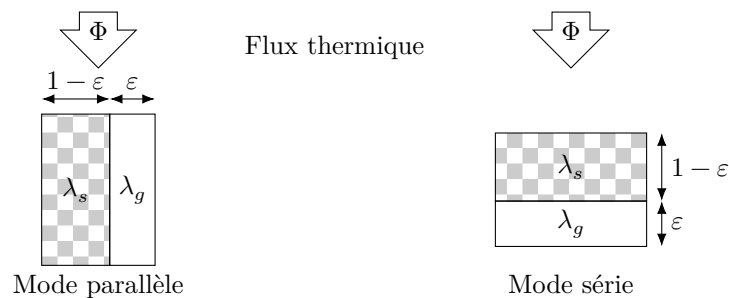


Figure 15

**Q 35.** Exprimer les conductivités dans les deux situations limites en fonction de  $\varepsilon$ ,  $\lambda_s$  et  $\lambda_g$ . Valider les expressions obtenues en considérant des cas limites.

**Q 36.** Montrer que l'une de ces deux expressions limites est toujours supérieure à l'autre. Déterminer  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ .

On donne, pour l'argon  $\lambda_g = 0,018 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et pour le sable utilisé  $\varepsilon = 0,47$  et  $\lambda_s = 0,40 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

**Q 37.** Calculer les valeurs numériques de  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ .

### II.E – Mesure de la conductivité thermique effective du milieu granulaire utilisé pour les enceintes du procédé S.E.P.T.

On place un fil métallique, de rayon  $r_0$  au centre d'un bloc du matériau à étudier (sable et argon) de façon à ce qu'il le traverse verticalement. Le fil est relié à une alimentation électrique qui lui fournit un échelon de courant. On relève au cours du temps la variation de la résistance électrique du fil, ce qui permet de déterminer sa température.

On modélise ce dispositif par un fil de longueur infini plongé dans un espace totalement rempli du matériau à étudier. L'ensemble est initialement à la température uniforme  $T_0$ . À partir du temps  $t = 0$ , on applique l'échelon de courant et le fil produit un flux thermique constant par unité de longueur  $\varphi_L$ . On suppose que les transferts thermiques s'effectuent seulement par conduction. Le matériau est incompressible, de masse volumique constante  $\rho$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de capacité thermique massique  $c_p$ .

On admet que la répartition de température dans le matériau présente une symétrie cylindrique autour du fil électrique. On se place donc en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  en prenant le fil comme axe, autrement dit,  $r = 0$  correspond au centre du fil.

**Q 38.** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $T(r, t)$ , la température du matériau en fonction du temps.

On pourra introduire la diffusivité thermique du matériau définie par  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ .

**Q 39.** À un instant  $t$  donné, quelle est, en ordre de grandeur, la longueur caractéristique de variation de la température avec  $r$  ?

La résolution de l'équation précédente nécessite d'exprimer la condition limite sur la surface du fil chaud en  $r = r_0$ .

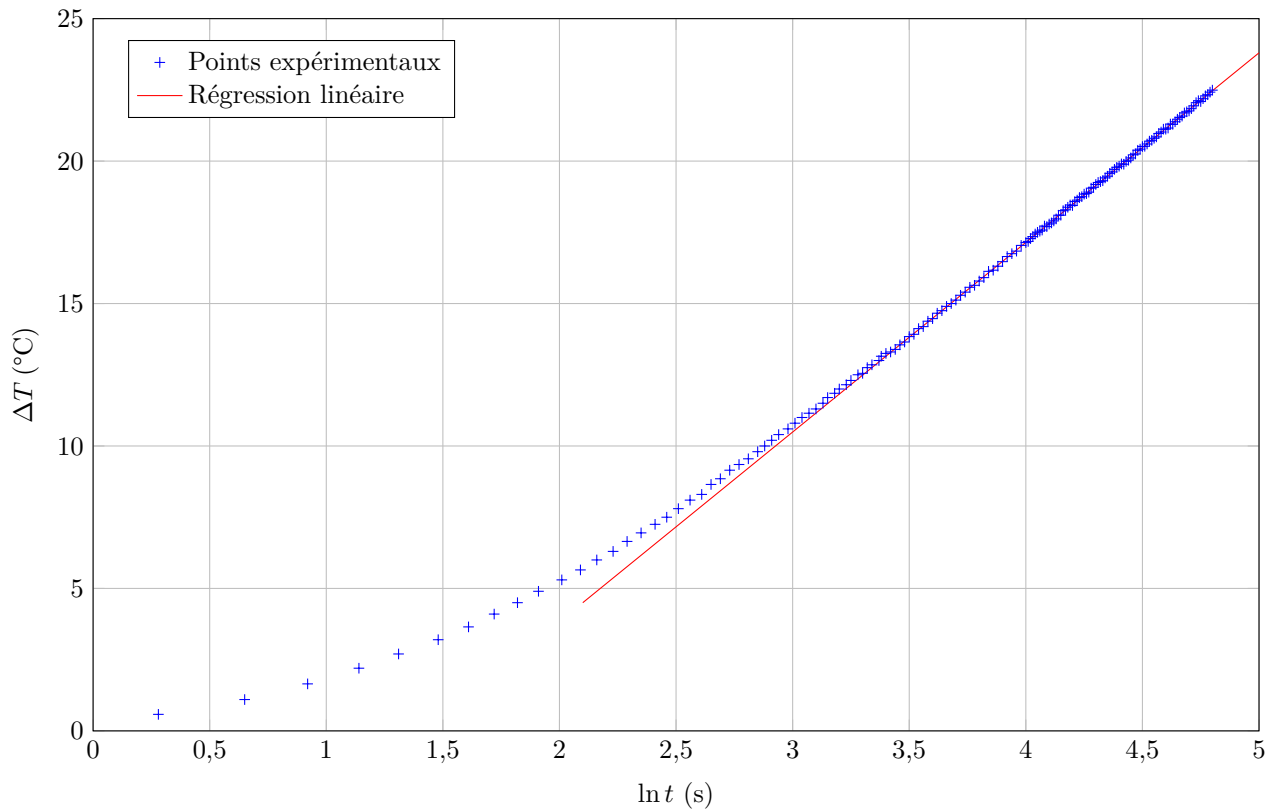
**Q 40.** Exprimer  $\frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $r_0$  et  $\varphi_L$ .

Compte tenu de cette condition limite et si on néglige le rayon du fil devant la longueur caractéristique de variation de la température avec  $r$ , la solution de l'équation de la question 38 s'écrit

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} E\left(\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \quad \text{avec} \quad E(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Pour des valeurs de  $x$  petites devant 1, on peut utiliser l'approximation  $E(x) = -\gamma - \ln(x)$  où  $\gamma$  est une constante.

**Q 41.** Donner une expression approchée de  $T(r_0, t)$  aux temps longs en précisant l'échelle de temps pertinente. La figure 16 présente le relevé expérimental de  $\Delta T = T(r_0, t) - T_0$  en fonction du temps pour les enceintes d'un procédé SEPT.



**Figure 16**

**Q 42.** Montrer que ces mesures sont en accord avec les résultats théoriques précédents.

**Q 43.** Estimer un ordre de grandeur de la conductivité thermique effective du régénérateur étudié sachant que le fil utilisé a une longueur  $l = 20$  cm et qu'il émet un flux thermique total  $\varphi = 0,64$  W.

**Q 44.** Commenter le résultat.

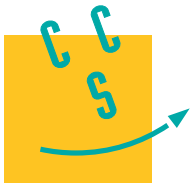
### Données

|                            |                                                                                 |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| Constante d'Avogadro       | $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                          |
| Constante de Boltzmann     | $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$                        |
| Constante des gaz parfaits | $R = k_B \mathcal{N}_A = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ |

Opérateur laplacien en coordonnées cylindriques

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

• • • FIN • • •



## Océans, atmosphère et communications

Ce sujet aborde l'étude de quelques problèmes de physique de l'océan et de l'atmosphère, appliqués notamment aux télécommunications (acoustique sous-marine et radio). La première partie est consacrée à l'étude des mouvements individuels ou collectifs des particules chargées dans l'atmosphère et à l'origine des siffleurs ionosphériques. Elle est complètement indépendante de la seconde partie qui étudie les ondes acoustiques sous-marines et certaines de leurs applications.

Le sujet comporte une annexe, présentant deux documents, des valeurs numériques et un formulaire.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Dans tout le sujet, le repère euclidien  $(Oxyz)$  est associé aux vecteurs  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  formant une base orthonormée et directe. Les grandeurs complexes sont soulignées  $(\underline{z}, \underline{E})$  sauf  $i$  (tel que  $i^2 = -1$  et  $\text{Im}(i) = 1$ ).

### I Particules chargées dans l'atmosphère

L'atmosphère terrestre comporte de nombreuses particules chargées. Certaines d'entre elles parviennent à haute énergie dans la haute atmosphère avant d'être guidées par le champ magnétique terrestre. Leur freinage à l'arrivée s'accompagne de phénomènes optiques spectaculaires, observables près des pôles magnétiques terrestres vers lesquelles ces particules sont guidées.

D'autres particules chargées, moins énergétiques, dues à l'ionisation partielle des gaz de la haute atmosphère, influencent la propagation des ondes qui sont guidées entre la surface des océans et la haute ionosphère. C'est en particulier le cas des siffleurs ionosphériques, ondes radio fortement dispersées, générées par des sources naturelles, qui interagissent aisément avec les récepteurs radio en produisant un bruit caractéristique de sifflement, d'où leur nom. Ils ont été observés durant la première guerre mondiale puis clairement identifiés dès 1919.

#### I.A – Particule chargée en mouvement dans un champ magnétique

On étudie d'abord le mouvement d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  sous la seule influence d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v}_0 = v_\perp \vec{e}_x + v_\parallel \vec{e}_z$ .

**Q 1.** Établir les équations différentielles vérifiées par les composantes  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  et  $v_z(t)$  de la vitesse  $\vec{v}(t)$  de la particule. Que peut-on dire de  $v_z(t)$  et de  $\vec{v}^2(t)$  ?

On s'intéresse seulement au mouvement projeté dans un plan perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  ; la vitesse associée est notée  $\vec{w}(t)$ .

**Q 2.** Déterminer l'équation vérifiée par  $\vec{w}$ .

**Q 3.** Montrer que le mouvement de la particule chargée ainsi projeté est circulaire, de rayon  $\rho_c$  à déterminer, parcouru à vitesse angulaire constante  $\Omega_c$  (algébrique) et déterminer  $\Omega_c$ .

**Q 4.** Rappeler l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre (par exemple en France) et calculer  $\Omega_c$  respectivement pour des électrons et pour des protons.

#### I.B – Particule chargée en mouvement dans des champs électrique et magnétique croisés

On étudie maintenant le mouvement de la particule de charge  $q$  et de masse  $m$  sous l'influence d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  et d'un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v}_0 = \vec{v}_\perp$  où  $\vec{v}_\perp \cdot \vec{e}_z = 0$ .

**Q 5.** Établir les équations différentielles vérifiées par les composantes  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  et  $v_z(t)$  de la vitesse  $\vec{v}(t)$  de la particule.

**Q 6.** Montrer qu'il en existe une seule solution constante dans le plan  $(Oxy)$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ , appelée *vitesse de dérive*  $\vec{V}_d$  (par définition  $\vec{V}_d \cdot \vec{e}_z = 0$ ) et exprimer  $\vec{V}_d$  en fonction de  $E_1$  et de  $B_0$ .

On pose  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_d$ .

**Q 7.** Quelles sont les équations différentielles vérifiées par  $\vec{u}(t)$  ? En déduire la trajectoire de la particule chargée.

### I.C – Les siffleurs ionosphériques

Cette sous-partie est consacrée à l'étude des mouvements collectifs des particules ionisées de l'atmosphère sous l'action d'une onde électromagnétique qui s'y propage et à leur influence sur la propagation de cette onde, du fait de la présence du champ magnétostatique terrestre.

On considère maintenant le cas de nombreux électrons, de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ , en densité volumique  $n^*$ , en mouvement dans les champs croisés  $\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x$  et  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On néglige toute interaction entre ces électrons et on suppose que leur mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  ; il est caractérisé par une densité volumique de courant  $\vec{j}$ .

On pose  $\omega_p^2 = \frac{n^* e^2}{m \epsilon_0}$ .

**Q 8.** Montrer que, sauf à une échelle d'espace très réduite à préciser, on peut écrire  $\vec{j} \simeq \gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1$ . Exprimer  $\gamma$  en fonction seulement de la permittivité du vide  $\epsilon_0$ , de  $\omega_p$  et de la pulsation  $\Omega_c$  définie à la question 2.

L'étude complète des mouvements des électrons du plasma ionosphérique exige la considération préalable de quelques ordres de grandeur. On s'intéresse dans la suite au cas où les ondes qui se propagent dans l'atmosphère sont du type VLF, de fréquence inférieure à 10 kHz.

**Q 9.** Les particules étudiées sont des électrons du plasma ionosphérique ( $n^* \sim 10^{10} \text{ m}^{-3}$ ) et on prendra  $B_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ . Calculer numériquement  $\Omega_c$ ,  $\omega_p$  et  $\omega_p^2/\Omega_c$  et comparer aux pulsations  $\omega$  associées aux ondes radio VLF. Conclure.

On étudie une onde électromagnétique plane et progressive, polarisée rectilignement, se propageant dans le vide, transportant la puissance moyenne par unité de surface (ou intensité)  $I_0$ .

**Q 10.** Exprimer les intensités maximales  $E_1$  et  $B_1$  des champs électrique et magnétique de l'onde en fonction de  $I_0$  et de constantes fondamentales. À quelle condition, portant sur  $I_0$ , peut-on affirmer que  $B_1 \ll B_0$ , où  $B_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$  ? Commenter.

L'ensemble de l'étude ci-dessus montre que, sous certaines hypothèses très restrictives (mais que l'on supposera réalisées dans ce qui suit), la propagation d'une onde électromagnétique plane, progressive dans le plasma ionosphérique, avec un vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{e}_z$  colinéaire au champ magnétostatique terrestre  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ , est caractérisée par la loi exprimant la densité volumique de courant  $\vec{j} = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}$ .

Le champ électromagnétique de l'onde sera écrit  $\vec{E} = \vec{E}_1 \exp(i(kz - \omega t))$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_1 \exp(i(kz - \omega t))$  en notation complexe.

**Q 11.** Rappeler, en notation complexe, les équations de Maxwell. Montrer que le milieu est nécessairement électriquement neutre et que l'onde est nécessairement transverse électromagnétique.

**Q 12.** En isolant, par exemple, le champ électrique  $\vec{E}_1$ , montrer que celui-ci n'est jamais polarisé rectilignement puis établir la relation  $c^2 k^2 = \frac{\omega_p^2 \omega}{\Omega_c}$  associée à cette onde. Le milieu est-il transparent ? Est-il dispersif ?

**Q 13.** L'onde se propage dans les conditions décrites ci-dessus à partir d'un point origine. Comparer les vitesses de propagation des composantes de haute et basse fréquence. Pourquoi une telle onde porte-t-elle le nom de *siffleur* ? Un enregistrement d'un tel signal est décrit en annexe. Estimer la distance parcourue dans l'ionosphère par une telle onde entre le point d'émission et celui de réception.

## II Ondes acoustiques sous-marines

Le développement des communications à grande distance à partir du début du  $xx^e$  siècle a dû tenir compte d'une caractéristique fondamentale de notre planète : la grande majorité de sa surface est constituée d'eau salée, bonne conductrice de l'électricité (donc inapte à la propagation des ondes électromagnétiques sur de grandes distances) mais aussi support de propagation rapide des ondes acoustiques. Ces propriétés sont mises à profit, en particulier dans le domaine des ultrasons, pour la réalisation de systèmes de communication, de détection et de mesure : les sonars. Des animaux marins utilisent aussi les ondes acoustiques pour la communication ou l'écholocation.

### II.A – Ondes acoustiques dans l'eau

On rappelle l'équation de Navier-Stokes décrivant les évolutions spatiales, dans le référentiel  $(Oxyz)$  supposé galiléen, et temporelles du champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  d'un fluide de masse volumique  $\rho(\vec{r}, t)$ , soumis à la pression  $P(\vec{r}, t)$ , dans le cadre d'un modèle newtonien des forces de cisaillement, avec la viscosité dynamique  $\eta$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \cdot \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

La propagation des ondes acoustiques dans l'eau sera étudiée dans le modèle ci-après :

- l'écoulement est supposé parfait, sauf pour l'étude des atténuations menée aux questions 21 et 22 ;
- le champ de pesanteur est uniforme,  $\vec{g} = g \vec{e}_z$  ( $g > 0$ ,  $(Oz)$  est vertical descendant) ;



- les variations de pression par rapport à la pression statique  $P_s(z)$  (en l'absence d'onde) sont faibles, on notera  $P(\vec{r}, t) = P_s(z) + p_a(\vec{r}, t)$ , où  $|p_a| \ll P_0$  avec  $P_0$  la pression atmosphérique de surface ;
- la vitesse d'écoulement associée au passage de l'onde vérifie  $|\vec{v}| \ll c_a$ , où  $c_a$  est la célérité de la propagation de l'onde acoustique ;
- la compressibilité  $\chi$  de l'eau est supposée constante, de sorte que la masse volumique évolue instantanément comme la surpression acoustique  $p_a$  :  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(1 + \chi p_a(\vec{r}, t))$ , où  $|\chi p_a| \ll 1$  ;
- enfin, la longueur d'onde  $\lambda_a$  des ondes acoustiques vérifie la relation  $g\lambda_a \ll c_a^2$ .

**Q 14.** Montrer qu'il existe une autre relation reliant  $\rho$  à  $\vec{v}$  et en préciser la signification physique.

**Q 15.** Établir deux équations aux dérivées partielles, linéarisées pour les grandeurs  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  et  $p_a(\vec{r}, t)$ .

**Q 16.** En déduire l'équation de propagation de la surpression acoustique  $p_a$ . Exprimer  $c_a$  en fonction de  $\rho_0$  et  $\chi$ .

**Q 17.** Que devient cette équation dans le cas d'une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$  ?

Dans ce qui suit, on s'intéresse à une onde acoustique plane et progressive, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans la direction de l'axe  $\vec{e}_X$  ; il ne s'agit pas nécessairement de la direction  $\vec{e}_x$  du trièdre  $(Oxyz)$ .

**Q 18.** Déterminer la forme générale de  $p_a(X, t)$  et montrer que  $\vec{v}(X, t) = Z_a p_a(X, t) \vec{e}_X$  où on exprimera l'impédance acoustique  $Z_a$  en fonction de  $\rho_0$  et de  $c_a$ .

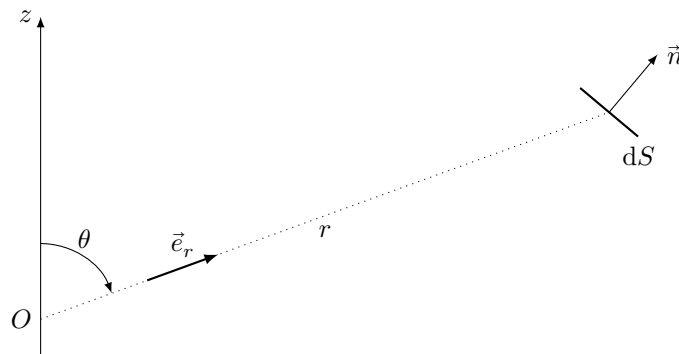
On cherche maintenant une solution de l'équation de propagation présentant la symétrie de révolution autour d'une source ponctuelle  $O$ . La surpression acoustique  $p_a$  et la vitesse  $\vec{v}$  de l'eau en un point  $M$  s'expriment alors en fonction de  $r = OM$  et de  $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$ . Dans le cas d'une onde sphérique divergente sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , la surpression acoustique est donnée par  $p_a = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$  (à un choix d'origine des temps près) où  $A$  est une constante.

**Q 19.** À quelle condition peut-on toujours écrire  $\vec{v} = Z_a p_a \vec{e}_r$  ? Comment s'appelle cette approximation ?

*On se place dans ce cas dans la suite.*

Lors de leur propagation, les ondes acoustiques sous-marines transportent une certaine puissance  $\mathcal{P}$ . Ce transport sera étudié à grande distance de la source de l'onde. On étudie donc ici une onde acoustique sphérique émise depuis le point  $O$  et caractérisée, en coordonnées sphériques, par la pression  $P(\vec{r}, t) = P_s(z) + p_a(r, t)$  avec  $p_a(r, t) = \text{Re}(\underline{p}_a)$  où  $\underline{p}_a(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(kr - \omega t))$  et par la vitesse  $\vec{v}(r, t) = \text{Re}(\underline{v}_a) \vec{e}_r$  où  $\underline{v}_a = \frac{p_a}{\rho_0 c_a}$ .

Un capteur d'aire  $dS$  est disposé à la distance  $r$  de  $O$ . On note  $\vec{n}$  la normale à la surface du capteur et  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  (figure 1). On admet que le capteur ne perturbe pas l'onde acoustique, c'est-à-dire que sa surface se déplace à la même vitesse  $\vec{v}$  que celle imposée dans l'eau par l'onde.



**Figure 1** Puissance acoustique reçue par un capteur

**Q 20.** Montrer que la puissance moyenne par unité de surface du capteur exercée par les forces de pression sur le capteur s'écrit  $\frac{d\mathcal{P}}{dS} = I_a \vec{n} \cdot \vec{e}_r$  et exprimer l'intensité acoustique  $I_a$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $c_a$  et de  $|\underline{p}_a|^2$ .

On étudie en général l'atténuation de l'intensité acoustique dans une échelle logarithmique (en décibels), sous la forme  $P = 10 \log \left( \frac{I_a(r_0)}{I_a(r)} \right)$  où on note  $\log(x)$  le logarithme décimal de  $x$ . Les phénomènes d'atténuation sont alors décrits par le coefficient  $\alpha$  tel que  $P = 20 \log \frac{r}{r_0} + \alpha(r - r_0)$  ; on prend en compte ces phénomènes dans les seules questions 21 et 22. On peut aussi rendre compte de ces phénomènes d'amortissement en écrivant la surpression acoustique, en notation complexe, sous la forme  $\underline{p}_a(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(\underline{k}r - \omega t))$ , où  $\underline{k} = k' + ik''$  est complexe et  $k' > 0$ .

**Q 21.** Montrer que  $\alpha$  est simplement relié à la partie imaginaire  $k''$  de  $\underline{k}$ .

Une contribution notable aux phénomènes d'atténuation est due à la viscosité dynamique  $\eta$  de l'eau de mer. On admet que, pour une atténuation assez faible, les parties réelle et imaginaire de  $\underline{k}$  sont données par

$$k' = \frac{\omega}{c_a} \quad \text{et} \quad k'' = -\frac{k'^2 \eta}{2\rho_0 c_a}$$

**Q 22.** Dans l'eau de mer, avec  $c_a \simeq 1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , calculer  $k''$  et la distance caractéristique d'atténuation due aux phénomènes visqueux pour les fréquences 3 kHz et 30 kHz.

## II.B – Rayons acoustiques

On considère ici la propagation sans dispersion ni atténuation d'ondes acoustiques quasi-planes, sinusoïdales de pulsation  $\omega$ , dont la surpression  $p_a$  est régie par l'équation de propagation (généralisation de l'équation de d'Alembert)

$$\Delta p_a = -\frac{\omega^2}{c_a^2(\vec{r})} p_a = -n^2(\vec{r}) \frac{\omega^2}{c_{a0}^2} p_a$$

où  $c_{a0}$  est la célérité de la propagation à une altitude de référence (qui ne sera pas nécessairement celle de la surface) et  $n(\vec{r})$  désigne l'indice acoustique du milieu en un point  $\vec{r}$ . Cet indice variant assez lentement, on cherche une solution approchée de cette équation sous la forme  $\underline{p}_a(\vec{r}, t) = B \exp(i(k_0 \mathcal{L}(\vec{r}) - \omega t))$ , où  $k_0 = \omega/c_{a0}$  et  $\mathcal{L}(\vec{r})$  est la fonction *chemin acoustique* depuis l'émetteur de l'onde ;  $B$  est une constante.

**Q 23.** Quelle est la dimension de la grandeur  $\mathcal{L}(\vec{r})$  ? Quel est son analogue optique ?

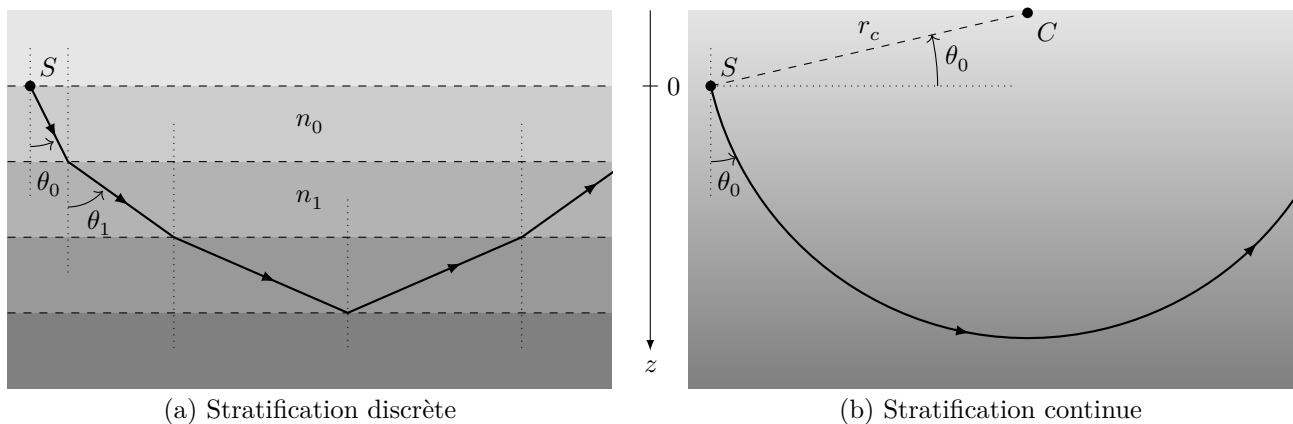
On admet que  $\mathcal{L}(\vec{r})$  vérifie l'équation aux dérivées partielles  $(\text{grad } \mathcal{L})^2 + \frac{i}{k_0} \Delta \mathcal{L} = n^2(\vec{r})$ .

**Q 24.** Montrer que, si la longueur d'onde acoustique est assez faible (préciser), alors  $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L} = n(\vec{r}) \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire. Quel est le phénomène physique négligé par cette approximation ?

**Q 25.** On appelle *rayon acoustique* la courbe localement tangente au vecteur  $\vec{u}$ . Comparer la direction de ces rayons avec les surfaces d'égal chemin acoustique. Comment s'appelle le résultat établi ici ?

Il est possible de montrer, dans le cadre de l'approximation faite à la question 24, que la puissance acoustique se propage sans atténuation le long de rayons acoustiques qui vérifient les mêmes lois que les rayons lumineux de l'optique géométrique.

On étudie une onde acoustique émise depuis la source ponctuelle  $S$  sous l'incidence  $\theta_0$ . On choisit l'origine des profondeurs en  $S$  ; ainsi à la profondeur de  $S$ ,  $z = 0$ , la célérité de l'onde acoustique est  $c_{a0}$  et  $n(z = 0) = n_0 = 1$ . Dans un modèle de stratification discrète (figure 2a), la trajectoire de l'onde acoustique est une succession de rayons acoustiques rectilignes, contenus dans un même plan vertical ( $Sxz$ ), avec par exemple  $n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$ .



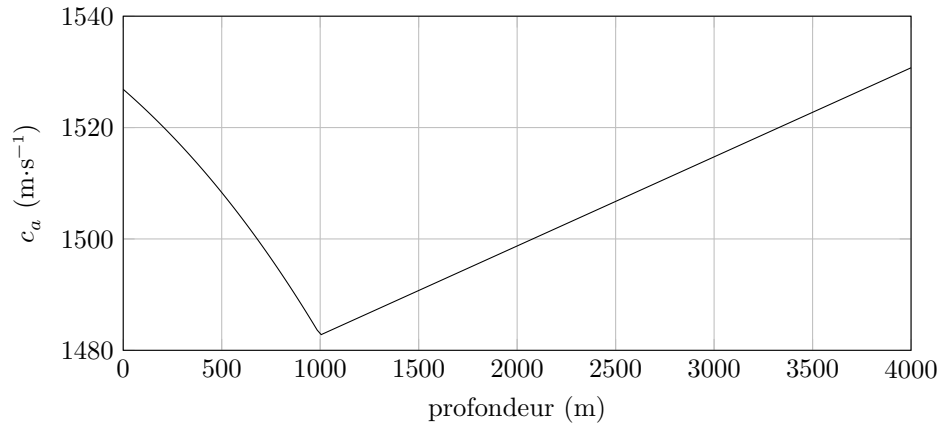
**Figure 2** Trajectoire des ondes acoustiques dans un milieu stratifié verticalement

Dans le cas d'une stratification continue (figure 2b), il s'agit d'une courbe ( $\mathcal{C}$ ) contenue dans le même plan. On se placera dans tout ce qui suit dans le cadre de lois de stratification linéaires, avec  $c_a(z) = c_{a0}(1 + \Omega z)$  où  $\Omega$  est une constante réelle.

**Q 26.** Dans le cas du schéma de la figure 2b, donner et justifier le signe du coefficient  $\Omega$ . Quel est le nom du phénomène qui explique la remontée finale du rayon acoustique vers la surface ?

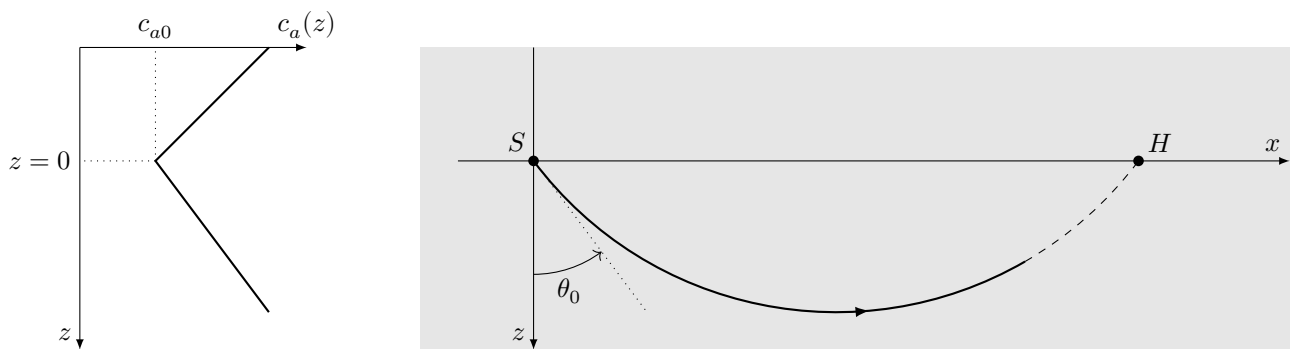
**Q 27.** En s'aidant d'un argument géométrique, vérifier que ( $\mathcal{C}$ ) est un cercle de rayon  $r_c$  avec  $r_c |\Omega \sin \theta_0| = 1$ . Dans les océans profonds, la combinaison des effets de la pression et de la température produit un profil de vitesse du son particulier. En effet, la célérité des ondes acoustiques  $c_a$  dans l'eau de mer dépend de la pression statique (fonction affine de la profondeur), de la température et de la salinité (proportion massique des sels dissous). On considère généralement que la température de l'eau de mer varie linéairement entre la surface

et une profondeur  $z_0$  à partir de laquelle elle se stabilise à 4 °C. Ainsi, dans l'Océan Atlantique au large des Bermudes, on obtient typiquement le profil de vitesse présenté figure 3. Un tel profil crée un canal appelé SOFAR (Sound Fixing and Ranging) dans lequel peuvent se propager des ondes acoustiques bien particulières (figure 4).



**Figure 3** Célérité des ondes acoustiques dans l'eau en fonction de la profondeur

Un rayon acoustique est émis depuis le point  $S$  situé à la cote  $z = 0$  correspondant au minimum  $c_{a0}$  de célérité des ondes acoustiques. Ce rayon est émis vers le bas sous l'angle  $\theta_0$  ; dans cette zone,  $z > 0$  et  $c_a(z) = c_{a0}(1 + \Omega_0 z)$  avec  $\Omega_0 > 0$ . Le rayon acoustique parcourt donc une portion de cercle jusqu'à revenir à la cote  $z = 0$ . À partir de  $H$ , le rayon acoustique arrive dans la partie  $z < 0$  de l'océan, avec un gradient de vitesse inversé : pour  $z < 0$ ,  $c_a(z) = c_{a0}(1 + \Omega_1 z)$  avec  $\Omega_1 < 0$ .



**Figure 4** Profil de vitesse et canal SOFAR

**Q 28.** Reproduire le schéma de propagation en indiquant la forme ultérieure du rayon acoustique. Quel en est l'analogue optique ?

**Q 29.** Calculer la durée  $\delta t_0$  de la propagation sur le trajet acoustique  $SH$ , en fonction de  $\Omega_0$ ,  $c_{a0}$  et  $\theta_0$ .

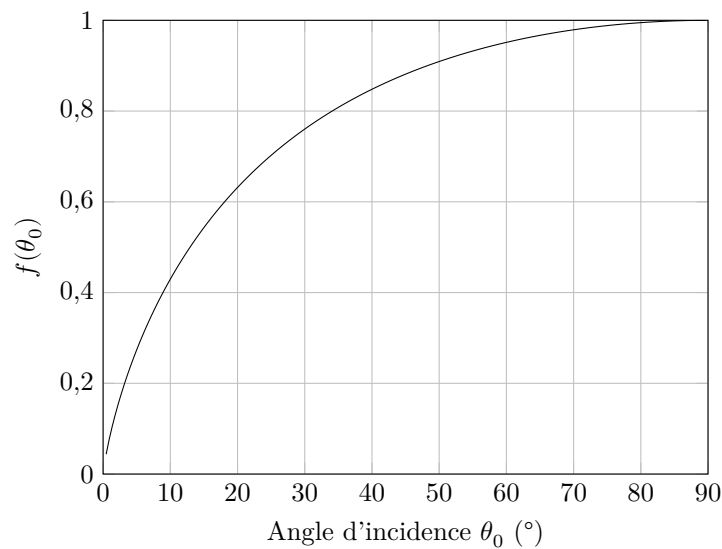
On pourra utiliser l'expression de la primitive  $\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)$ .

**Q 30.** L'onde acoustique se propage, de part et d'autre de l'axe ( $Sx$ ), sur une grande longueur  $\Delta x$  pendant la durée  $\Delta t$ . Montrer que  $\Delta t = \frac{\Delta x}{c_{a0}} f(\theta_0)$  où on a posé  $f(\theta_0) = -\tan \theta_0 \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)$ .

**Q 31.** La figure 5 donne l'aspect de la courbe représentative de  $f(\theta_0)$ . Commenter la limite de  $f(\theta_0)$  pour  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ .

**Q 32.** Expliquer physiquement le signe de  $f(\theta_0) - 1$ .

**Q 33.** Certaines baleines émettent un chant complexe qui peut être entendu à grande distance (voir annexe). En proposant un angle d'ouverture  $\theta_0$  raisonnable pour l'émission du chant, proposer une estimation de la distance jusqu'à laquelle ce chant est distinctement audible pour une autre baleine de la même espèce, située à la même profondeur.

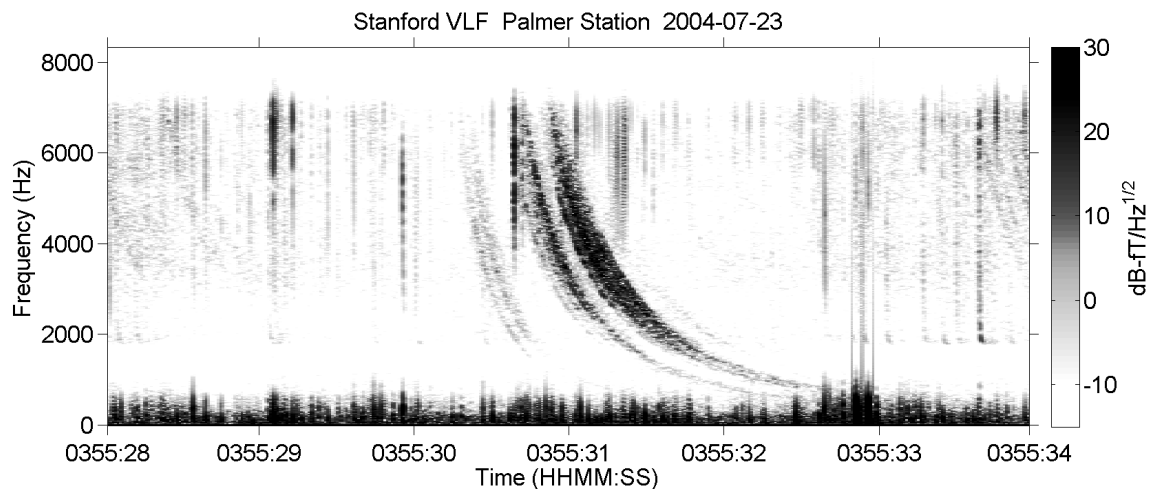


**Figure 5** Tracé de  $f(\theta_0)$

## Annexe

### Spectrogramme d'un siffleur

Palmer Station est une station de recherche scientifique américaine située sur l'île Anvers, au nord du continent antarctique. L'enregistrement (figure 6) réalisé le 23 juillet 2004 par le récepteur VLF de Palmer Station montre le spectrogramme d'un signal siffleur.



**Figure 6** Spectrogramme VLF d'une onde siffleur

L'abscisse désigne l'instant de réception du signal, l'ordonnée la fréquence du signal reçu. L'intensité reçue pour chaque couple (instant, fréquence) est indiquée sur le diagramme en niveaux de gris (l'échelle figure à droite du diagramme, les intensités minimales sont en blanc et les intensités maximales en noir).

### Le chant des baleines à bosse

Deux groupes de baleines, les baleines à bosse et les baleines bleues de l'Océan Indien, sont connues pour émettre des sons répétitifs à différentes fréquences, ce que l'on appelle le « chant des baleines ». Philip Clapham (1996), biologiste marin américain, décrivait ce son comme « le plus complexe du règne animal ».

Les baleines à bosse (*Megaptera novaeangliae*) mâles ne s'exercent à ce chant qu'au cours de la saison des amours et il est possible que ces sons aient un impact sur la sélection sexuelle des partenaires. Cependant, nous n'avons pas tellement d'informations, en dépit des travaux sur le sujet et l'étude de cette hypothèse est sujette à de nombreuses recherches actuelles.

Les chercheurs Roger Payne et Scott McVay ont les premiers analysé ces chants en 1971. Ces sons suivent une structure hiérarchique très distincte. L'unité de base (parfois appelée *note*) est un son continu de fréquence variable, entre 20 Hz et 10 kHz, qui dure de une à quelques secondes. L'être humain est capable de percevoir les sons dans la gamme 20 Hz – 20 kHz, ce qui fait qu'ils nous sont parfaitement audibles sans équipement. La variation de fréquence au cours d'une note peut être une modulation de fréquence : vers l'aigu, vers le grave, sans changement de puissance ; ou une modulation d'amplitude : plus fort, moins fort ou au même volume sonore. Ce qui fait un total de 9 unités sonores.

Une suite de 4 à 6 unités forme une sous-phrase et dure environ 10 secondes. Au moins deux sous-phrases forment une phrase. Une baleine répète généralement une même phrase pendant 2 à 4 minutes, ce que l'on appelle un *thème*. Une suite de thèmes forme un chant. Les baleines peuvent répéter ce chant — qui dure environ 20 minutes — pendant des heures, voire des jours entiers.

*D'après Wikipedia*

## Données utiles

### Constantes fondamentales

|                                     |                                                                 |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Célérité de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}$                   |
| Permittivité diélectrique du vide   | $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Perméabilité magnétique du vide     | $\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$      |
| Charge élémentaire                  | $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$                            |
| Masse de l'électron                 | $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$                         |
| Masse du proton                     | $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$                         |

### Données numériques

|                                                 |                                                                                  |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Accélération de la pesanteur terrestre          | $g = 9,80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$                                           |
| Rayon terrestre                                 | $R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$                                               |
| Viscosité dynamique de l'eau à 4 °C             | $\eta = 1,52 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$                             |
| Masse volumique de l'eau liquide (à 4 °C)       | $\rho_{\text{H}_2\text{O}}^\ell = 1,00 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ |
| Densité de l'eau océanique (près de la surface) | $d_o = 1,025$                                                                    |
| Pression océanique de surface                   | $P_0 = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$                         |
| Température océanique de surface                | $t_0 = 15 \text{ °C} = 288 \text{ K}$                                            |

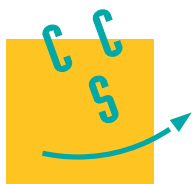
### Formulaire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \text{div}(f \vec{A}) &= f \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \\ \Delta f &= \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \\ \Delta \vec{A} &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}\end{aligned}$$

---

• • • FIN • • •

---



## *Une révolution tranquille du système international d'unités*

La révision du système international d'unités (SI) a été adoptée par la Convention Générale des Poids et Mesures (CGPM) en novembre 2018 et les nouvelles définitions ont pris effet à compter du 20 mai 2019, date anniversaire de la signature de la Convention du Mètre.

Le SI est un système d'unités cohérent qui est utilisé dans tous les aspects de la vie, que ce soit le commerce international, la production industrielle, la santé, la sécurité, la protection de l'environnement ou les sciences fondamentales. Il doit être pérenne, uniforme et accessible. Cet idéal d'universalité porté par le SI se retrouve dans sa devise « À tous les temps, à tous les peuples ».

Les nouvelles définitions des unités du SI sont établies à partir d'un ensemble de sept constantes de la physique. Deux expériences ou effets sont abordés : la balance de Kibble ou balance du watt (partie I) et la thermométrie acoustique dans un résonateur (partie II).

Des données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Ce sujet s'inspire du dossier sur le nouveau système international d'unités tiré de *Reflets de la Physique* n°62, 2019, pp. 11–31.

## **I Redéfinition du kilogramme**

### *I.A – Prototype international du kilogramme*

Avant 2019, le kilogramme était défini comme « la masse du prototype international du kilogramme ». C'était un artefact en platine iridié, conservé par le bureau international des poids et mesures au pavillon de Breteuil. La dernière comparaison avec la moyenne de ses copies en 2014 a confirmé une différence de 35  $\mu\text{g}$ .

**Q 1.** Quelle différence de masse cela fait-il en valeur relative ? Quelles peuvent être les causes de ces différences ?

**Q 2.** Quels peuvent être les inconvénients d'un artefact ?

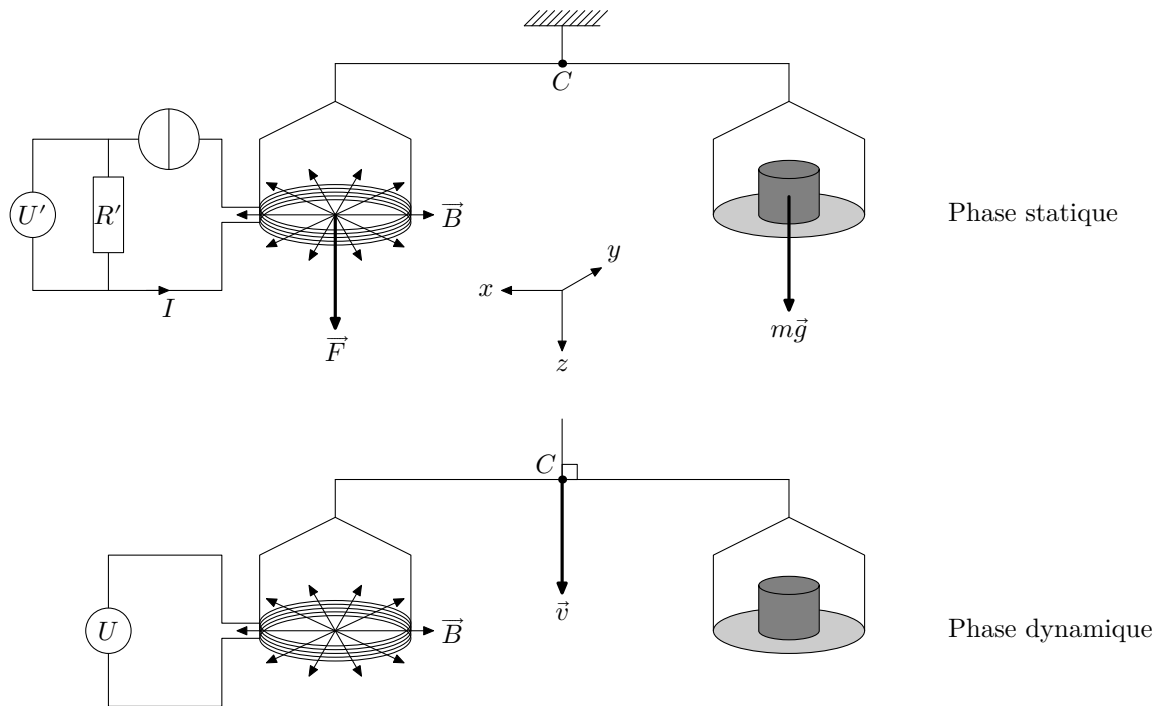
### *I.B – Principe de la balance de Kibble*

La balance de Kibble est l'un des deux dispositifs qui ont permis, avant 2019, de mesurer la constante de Planck à partir du prototype international du kilogramme. À présent, elle permet d'étalonner des artefacts. L'artefact de masse  $m$  est placé sur l'un des plateaux. On suppose la balance parfaitement équilibrée (fléau horizontal) en l'absence de masse  $m$ . Son principe de fonctionnement est donné figure 1. On supposera que la balance est symétrique par rapport au plan  $(xCz)$ .

#### **I.B.1) Phase statique**

La bobine comporte  $N$  spires horizontales, circulaires et concentriques. Elle est placée dans l'entrefer d'un aimant. Dans la zone des spires, le champ magnétique est horizontal, radial sortant par rapport à leur axe de révolution  $(Oz)$  et de valeur  $B$  uniforme. L'axe  $(Oz)$  est vertical, orienté vers le bas. Soit  $l$  la longueur totale du fil des spires.

**Q 3.** Indiquer sur un schéma simplifié l'orientation du courant permettant l'équilibrage de la balance une fois la masse  $m$  posée comme sur la figure 1. Déterminer la force qui agit sur la bobine.



**Figure 1** Principe de la balance de Kibble. En phase statique, le courant  $I$  est imposé par une source idéale de courant réglable. En phase dynamique, le fléau est bloqué dans la position horizontale et déplacé avec sa suspension à la vitesse  $\vec{v}$

**Q 4.** On règle l'intensité du courant dans la bobine à une valeur  $I$  pour équilibrer la balance en présence de la masse  $m$  posée. Établir l'expression de  $m$  en fonction de  $I$ ,  $g$ ,  $B$ , et  $l$ .

**Q 5.** La bobine comporte 600 spires réparties sur un cylindre de diamètre moyen égal à 260 mm. On prendra  $B = 1,0 \text{ T}$  et  $|I| = 10 \text{ mA}$ . Calculer  $m$ .

En réalité, la masse  $m$  est placée du même côté du fléau que la bobine. Une tare de masse  $M$  est déposée sur le plateau à l'opposé de la bobine pour équilibrer la balance en l'absence de masse  $m$  et de courant  $I$ . En pratique, après avoir équilibré la balance avec la tare de masse  $M$ , on ajoute une masse  $m'$  sur le même plateau que la tare et on équilibre l'ensemble avec un courant  $I_1$ . On ajoute ensuite la masse  $m$  du côté de la bobine et on équilibre avec un courant  $I_2$ .

**Q 6.** Établir la relation qui remplace celle de la question 4. Quels sont les intérêts de cette nouvelle opération ?

**Q 7.** Si on prend  $m' = m/2$ , quelle relation a-t-on entre les intensités ?

### I.B.2) Phase dynamique

Dans la phase dynamique, le fléau est bloqué dans la position horizontale et déplacé avec sa suspension à la vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_z$ . On suppose que  $v$  est une constante positive.

On admet qu'alors, la bobine est le siège d'une force électromotrice  $E$  induite par son mouvement dans le champ électromagnétique :

$$E = -Blv.$$

**Q 8.** Montrer que, dans ces conditions, on peut écrire  $EI + mgv = 0$ . Pourquoi parle-t-on également de « balance du watt » à la place de balance de Kibble ?

**Q 9.** Détailler un protocole expérimental simple, basé sur la mesure de la fréquence de défilement de franges devant un capteur CCD, qui permet de mesurer  $v$  par interférométrie. Dans le cas d'un laser Nd-YAG dont la longueur d'onde vaut  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ , calculer la vitesse qui correspond à une fréquence de défilement de  $f_d = 3,76 \text{ kHz}$  pour le dispositif choisi.

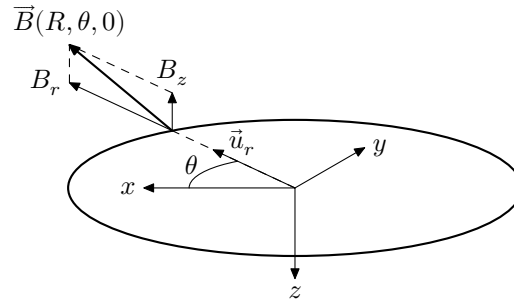
**Q 10.** Calculer la force électromotrice  $E$  attendue.

### I.B.3) Effet d'une dilatation

Pour simplifier, nous supposons que, dans le dispositif précédent, la bobine ne comporte qu'une seule spire horizontale, circulaire de rayon  $R$ . Nous allons étudier l'effet d'une augmentation  $dR \ll R$  du rayon de la spire, toutes choses égales par ailleurs. En particulier, on suppose que la spire reste circulaire et horizontale.



Une perturbation du système peut faire apparaître une composante axiale du champ magnétique. On note  $B_r$  et  $B_z$  les valeurs des composantes radiale et axiale du champ magnétique :  $\vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$  (figure 2). On note par ailleurs  $\vec{F}(R, z) = F_z(R, z)\vec{u}_z$  la force sur la spire de rayon  $R$  situé dans le plan de cote  $z$ .



**Figure 2** Système de coordonnées cylindriques, spire de rayon  $R$  située dans le plan  $z = 0$

- Q 11.** Qu'est-ce qui pourrait provoquer l'augmentation du rayon de la spire ?
- Q 12.** Dans la phase statique, calculer l'expression de  $\frac{\partial F_z(R, z)}{\partial R}$  en fonction notamment de  $\frac{\partial(RB_r(R, z))}{\partial R}$ .
- Q 13.** Donner une propriété fondamentale du champ magnétique et rappeler l'équation locale qui traduit cette propriété. En déduire une nouvelle expression pour  $\frac{\partial F_z(R, z)}{\partial R}$  en fonction notamment de  $\frac{\partial B_z(R, z)}{\partial z}$ .  
Montrer que

$$\frac{R}{F_z(R, z)} \frac{\partial F_z(R, z)}{\partial R} = - \frac{R}{B_r(R, z)} \frac{\partial B_z(R, z)}{\partial z}$$

- Q 14.** Comment peut-on à partir de 2 spires identiques planes, créer un champ magnétique radial sortant dans un plan ? Faire un schéma du dispositif en supposant que ce plan est le plan  $z = 0$ . Dessiner les lignes de champ en faisant une coupe du dispositif dans le plan  $(xOz)$ .
- Q 15.** Donner les caractéristiques de  $\vec{B}$  dans le plan  $z = 0$ . Quel est le signe de  $\frac{\partial B_z}{\partial z}(r, z = 0)$  au voisinage de  $r = 0$  et pour  $r \rightarrow \infty$  ?
- Q 16.** Tracer approximativement la courbe de  $F(R, z = 0)$  en fonction de  $R$ . Montrer qu'il existe une valeur de  $R$ , qu'on appellera  $R_{\text{opt}}$ , autour de laquelle  $F(R, z = 0)$  dépend peu de  $R$ .
- Q 17.** Dédurre de la question 16 une façon permettant de minimiser les problèmes posés par la dilatation de la spire.

### I.C – Mise en pratique de la nouvelle définition du kilogramme

En tirant parti d'effets quantiques, il est possible d'accéder à des valeurs de résistance et de tension avec une précision extrême. Il est désormais possible de mesurer des tensions avec une précision relative de  $10^{-9}$  et les résistances peuvent s'exprimer au moyen de la constante de Planck :  $R' = \frac{h}{\zeta e^2}$  où  $\zeta \in \mathbb{R}$  se mesure, également, avec une précision relative de  $10^{-9}$ .

- Q 18.** Établir la relation simple entre la constante de Planck et la masse  $m$  dans l'expérience de la balance de Kibble en faisant intervenir  $v$ ,  $g$  et d'autres grandeurs mesurables.
- Q 19.** Si les mesures de  $v$  et  $g$  sont effectuées avec une précision relative de  $10^{-8}$ , quelle précision relative a-t-on sur une mesure du kilogramme en théorie ?
- Q 20.** À partir de l'unité de  $h$ , expliquer pourquoi fixer définitivement la valeur de la constante de Planck permet de redéfinir le kilogramme.

## II Redéfinition du kelvin

### II.A – Rapide historique

- Q 21.** Rappeler la définition du degré Celsius et du kelvin en vigueur jusqu'en 2018. À combien de kelvins correspond  $0^\circ\text{C}$  ?
- Q 22.** Avant la réforme de 2018, la référence de température était un artéfact, une cellule au point triple de l'eau (figure 3). Quelles pouvaient être les sources d'incertitude dans cette expérience ?



**Figure 3** Cellule point triple de l'eau

### **II.B – Méthode de la thermométrie acoustique à gaz**

La méthode de la thermométrie acoustique à gaz est celle qui a donné les résultats les plus précis pour la mesure de la constante de Boltzmann avant 2018.

**Q 23.** Rappeler le lien entre la constante des gaz parfaits  $R$  et la constante de Boltzmann  $k_B$ .

Nous allons étudier la propagation des ondes sonores dans un gaz. Dans un premier temps on se limite au cas d'une propagation unidimensionnelle suivant l'axe  $(Ox)$ . L'écoulement est supposé parfait et l'influence de la pesanteur est négligée. Au repos, les champs de masse volumique  $\mu_0$  et de pression  $p_0$  sont uniformes et le champ des vitesses est nul. On note  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$  les écarts à ces valeurs de repos. On appelle  $\chi_S$  le coefficient de compressibilité isentropique. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

**Q 24.** Rappeler la signification de cette approximation.

**Q 25.** Donner l'équation d'Euler et la linéariser.

**Q 26.** Rappeler l'équation de conservation de la masse et la linéariser.

**Q 27.** À partir de la définition de  $\chi_S$ , obtenir une relation entre  $\mu_1$  et  $p_1$ .

**Q 28.** Établir l'équation de propagation pour la surpression  $p_1$ . Comment s'exprime la célérité  $c_s$  des ondes sonores ?

**Q 29.** En supposant que le gaz est parfait et que le coefficient adiabatique  $\gamma$  est constant, établir la nouvelle expression de la célérité  $c_s$  en fonction de  $T$ . Faire l'application numérique pour de l'air à  $T = 300$  K.

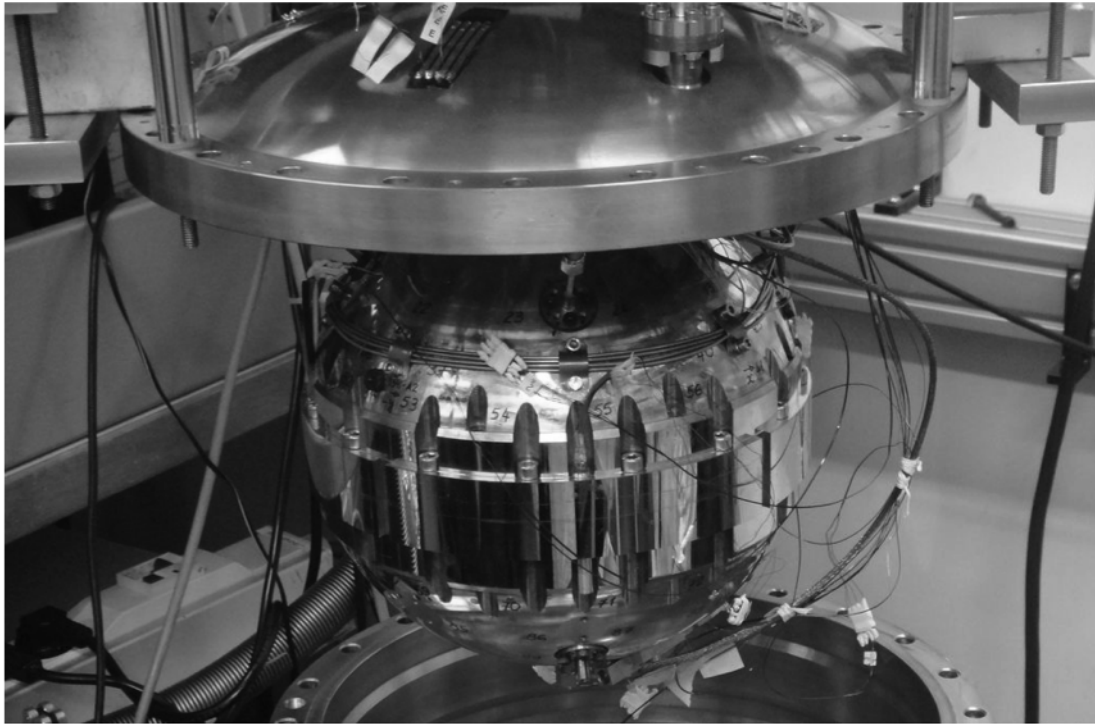
Pour mesurer  $c_s$ , on peut utiliser les modes propres d'une sphère creuse et une mesure précise du rayon  $r_s$  de cette sphère. C'est le dispositif mis en œuvre au LNE (figure 4).

**Q 30.** Au LNE, le gaz utilisé est un gaz rare tel que l'hélium ou l'argon. Calculer la valeur numérique de  $c_s$  pour l'hélium à la température du point triple de l'eau.

**Q 31.** Comment peut-on déduire de la mesure de  $c_s$  et de la relation établie à la question 29, une valeur pour la constante de Boltzmann ?

**Q 32.** On cherche à résoudre l'équation de propagation pour la surpression  $p_1$  dans le cas de la sphère. Que devient cette équation dans le cas général ?

**Q 33.** Montrer que, en l'absence de dépendance angulaire, les fonctions solutions  $r p_1(r, t)$  peuvent se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de deux termes. Donner la signification physique de chacun des termes.



**Figure 4** Résonateur quasi sphérique utilisé par l'équipe du LNE-CNAM (Laboratoire National de métrologie et d'Essais - Conservatoire National des Arts et Métiers) pour mesurer la constante de Boltzmann par thermométrie acoustique. Le résonateur, de volume intérieur  $D \approx 3,1$  L, est rempli de gaz rare (hélium ou argon) et placé dans un cryostat pour maintenir sa température constante.

**Q 34.** Pourquoi peut-on se limiter à l'étude des solutions de la forme, en notation complexe,

$$p_1(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(\omega t - kr)) + \frac{B}{r} \exp(i(\omega t + kr)),$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  et  $k$  sont des constantes ?

**Q 35.** En déduire le champ des vitesses correspondant, en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $r$ .

**Q 36.** Vers quoi tend le débit volumique à travers une sphère de rayon  $r$  quand  $r$  tend vers 0 ? Que peut-on en déduire ?

**Q 37.** Établir l'équation vérifiée par les modes propres.

**Q 38.** Montrer qu'il y a une fréquence de résonance  $f_n$  par intervalle  $\left[2n \frac{c_s}{4r_s}, (2n+1) \frac{c_s}{4r_s}\right]$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r_s$  le rayon de la sphère. Pour  $n \gg 1$ , exprimer de façon approchée  $f_n$ .

**Q 39.** Calculer approximativement la fréquence du mode fondamental pour la sphère du LNE.

## II.C – Mise en pratique de la nouvelle définition du kelvin

**Q 40.** Citer quelques sources d'incertitude de la méthode utilisée au LNE.

**Q 41.** En fait, il y a cinq sources principales d'incertitude et leurs valeurs relatives respectives sont pratiquement toutes égales. Expliquer pourquoi la thermométrie acoustique des gaz a atteint une limite qu'il sera très difficile de dépasser.

Cette mesure a permis de connaître la constante de Boltzmann avec une précision relative de l'ordre de  $4,8 \times 10^{-7}$  dans l'ancien SI.

**Q 42.** À partir de l'unité de  $k_B$ , expliquer pourquoi fixer définitivement la valeur de la constante de Boltzmann, permet de redéfinir le kelvin.

**Q 43.** Les valeurs de  $h$ ,  $e$ ,  $k_B$  et  $N_A$  étant fixées, rassembler dans un tableau les grandeurs qui sont à présent mesurables, alors qu'elles étaient fixées par convention avant la réforme du SI de 2018.

# Données et formulaire

## Valeurs numériques

|                                                                                                  |                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Charge électrique élémentaire                                                                    | $e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$                     |
| Constante de Planck                                                                              | $h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$        |
| Constante de Boltzmann                                                                           | $k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Constante d'Avogadro                                                                             | $N_A \approx 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$             |
| Célérité de la lumière dans le vide                                                              | $c \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$       |
| Fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé | $\Delta\nu_{\text{Cs}} \approx 9,19 \times 10^9 \text{ Hz}$    |
| Masse de l'électron                                                                              | $m_e \approx 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$                  |
| Accélération de la pesanteur à Paris                                                             | $g \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$                   |
| Température du point triple de l'eau                                                             | $T \approx 273,16 \text{ K}$                                   |
| Masse molaire de l'hélium                                                                        | $M_{\text{He}} \approx 4,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$      |
| Masse molaire de l'azote                                                                         | $M_{\text{N}} \approx 14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$        |
| Masse molaire de l'oxygène                                                                       | $M_{\text{O}} \approx 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$        |

## Formulaire

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

*En coordonnées cylindriques*

$$\text{div } \vec{a}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{a}(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

*En coordonnées sphériques*

$$\Delta f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

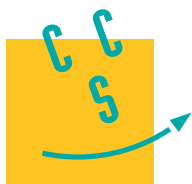
## Définition de la seconde

On pose  $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}$ , ce qui permet de définir la seconde qui correspond donc à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé.

---

• • • FIN • • •

---



## Conception technique d'une éolienne

Ce problème étudie les contraintes techniques liées à la conception des éoliennes, en accordant — sauf en partie I — une attention particulière aux éoliennes dites de Darrieus de type H (Figure 1b).



a) Éoliennes à  
axe horizontal



b) Éolienne Darrieus de type H

**Figure 1** Différents types d'éoliennes

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données numériques et un formulaire figurent dans le document réponse. Des documents utiles sont regroupés en fin d'énoncé.

### I Enjeux énergétiques

Il est déconseillé de consacrer plus de 20 minutes à la résolution de cette partie pour laquelle on s'appuiera sur les documents 1 à 5 en fin d'énoncé.

Pour diminuer les émissions de  $\text{CO}_2$  engendrées par le transport routier, il est envisagé, à terme, de remplacer par des véhicules électriques l'ensemble des véhicules à moteur thermique utilisés par les particuliers.

**Q 1.** Calculer le supplément de consommation énergétique annuelle que cette conversion au tout électrique occasionnerait. Cela demanderait-il de créer de nouvelles unités de production d'électricité ?

Le passage au tout électrique ne conduit à une diminution significative des émissions de  $\text{CO}_2$  que dans la mesure où l'énergie électrique est produite avec un bilan carbone très faible. L'utilisation d'énergie éolienne est, de ce point de vue, une possibilité à étudier en gardant à l'esprit certains ordres de grandeurs évalués dans la question suivante.

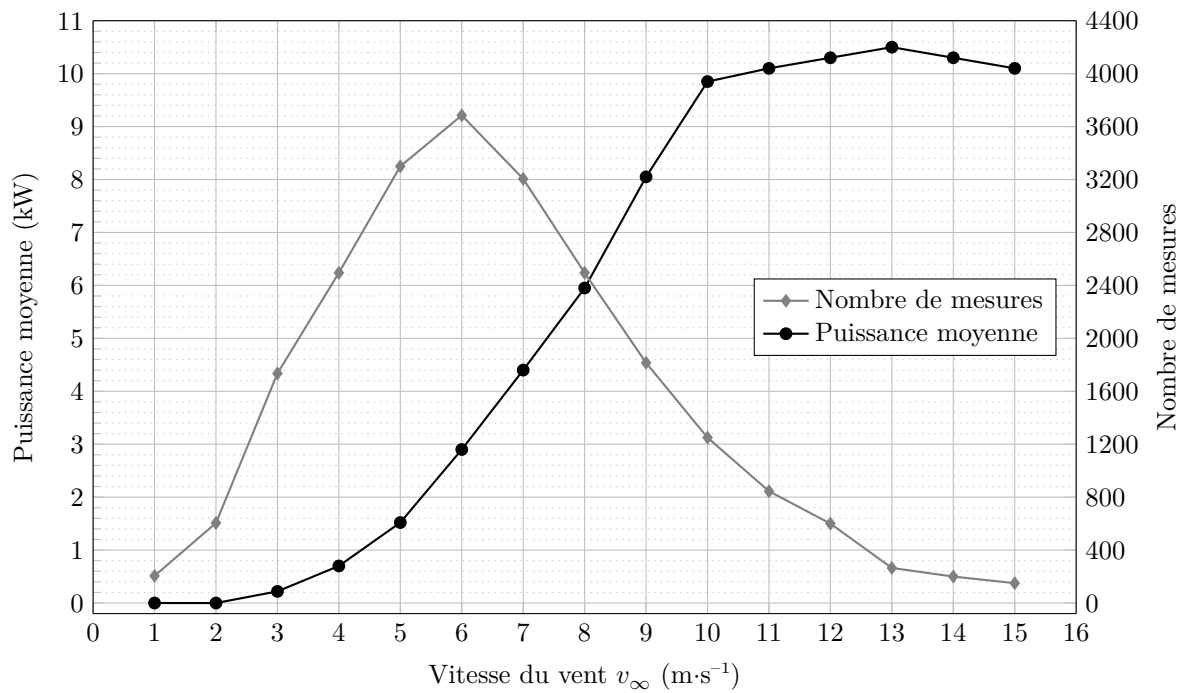
**Q 2.** Quantifier la puissance de crête nécessaire à la recharge de tous les véhicules électriques. Estimer la surface d'un champ éolien permettant d'assurer cette production d'électricité. Commenter.

### II Conversion énergie éolienne en énergie mécanique — éolienne type Darrieus

On considère une éolienne à axe vertical, type Darrieus H, FAIRWIND 10 kW, implantée sur un site d'essais dans l'Aude. Celle-ci a fait l'objet d'une étude de contrôle et a donc été instrumentée pour relever :

- la production de l'éolienne sur une période de 6 mois,
- la vitesse du vent à proximité de l'éolienne.

Les mesures effectuées sont reportés sur la figure 2 et synthétisées dans le tableau 1.



**Figure 2** Mesures de contrôle sur site de l'éolienne FAIRWIND 10 kW.

| Vitesse du vent (m·s <sup>-1</sup> ) | Puissance moyenne (W) | Nombre de mesures | % du temps |
|--------------------------------------|-----------------------|-------------------|------------|
| 1 à 5                                | 867                   | 8350              | 37 %       |
| 6 à 10                               | 5320                  | 12460             | 54 %       |
| 11 à 15                              | 10236                 | 2060              | 9 %        |

**Tableau 1** Synthèse des mesures de contrôle sur site de l'éolienne FAIRWIND 10 kW.

**Q 3.** Quelle est l'énergie produite par cette éolienne sur une année ? Justifier votre raisonnement. Quelle est la puissance moyenne produite sur une année.

On s'intéresse à la conversion de l'énergie éolienne en énergie mécanique sur cet exemple simple d'éolienne Darrieus. Pour ce type d'éolienne, les pales sont verticales. La surface qu'elles décrivent lors de leur rotation est un cylindre, appelé « cylindre éolien », de rayon  $R$  et de hauteur  $L$ .

L'étude suivante porte sur une éolienne à trois pales identiques.

L'éolienne est soumise à un vent constant de vitesse  $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{e}_x$ . Après un régime transitoire, les pales tournent à la vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta} > 0$  constante autour de l'axe  $Oz$ . Dans toute la suite de l'étude, le régime est supposé permanent.



Éolienne Fairwind 10 kW

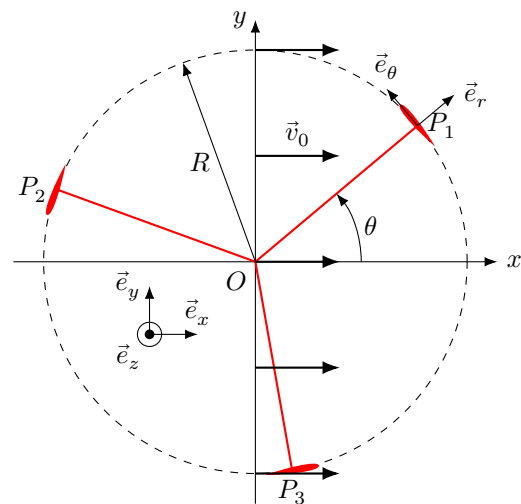


Schéma vu de dessus

**Figure 3** Paramétrage de l'éolienne type Darrieus H

On définit de plus (figure 3) :

- le centre de poussée  $P_i$  où s'appliquent les forces subies par la pale numéro  $i$  ;
- le référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{u}_z)$  associé au sol auquel est ancré le mât de l'éolienne ;
- le référentiel  $\mathcal{R}_1 = (P_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{u}_z)$  associé à la pale n°1.
- la vitesse du vent *au niveau de l'éolienne* dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  est supposée uniforme et vaut  $\vec{v}_0$  avec  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = (1-a)v_\infty \vec{e}_x$  où  $a$  est appelé facteur d'interférence entre le vent et l'éolienne ;
- la vitesse de  $P_1$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  est notée  $\vec{u}$  ;
- la vitesse apparente du vent dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$  au voisinage de  $P_1$  est notée  $\vec{w}$  et est donnée par  $\vec{w} = \vec{v}_0 - \vec{u}$ .

On définit le coefficient de vitesse de l'éolienne (TSR pour Tip Speed Ratio en anglais) comme  $\lambda = \frac{R\omega}{v_\infty}$ . Pour l'étude suivante, on prendra  $\lambda = 2,4$ ,  $a = 0,37$  et  $v_\infty = 6,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Nous étudions dans un premier temps la pale n°1.

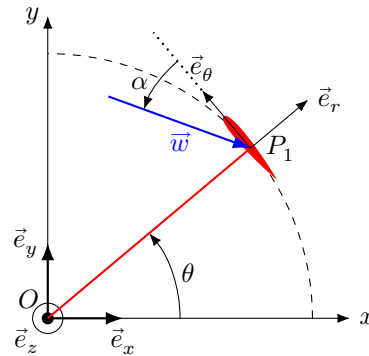
**Q 4.** Représenter sur la figure A du document réponse, pour chaque position de la pale, les vecteurs  $\vec{v}_0$ ,  $-\vec{u}$  et  $\vec{w}$ .

**Q 5.** Montrer que la norme de  $\vec{w}$  s'exprime par

$$w = v_0 \sqrt{1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2}$$

avec  $\lambda_0 = \lambda/(1-a)$ .

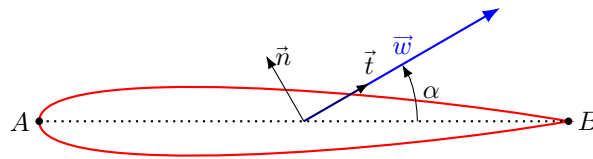
On note  $\alpha$  l'angle d'attaque, l'angle entre l'opposé de la direction du vent et de la direction tangente à la pale, tel que  $\alpha = (\vec{e}_\theta, -\vec{w})$ . La vitesse relative du vent définit l'angle d'attaque (figure 4).



**Figure 4** Définition de l'angle d'attaque  $\alpha$

**Q 6.** Montrer que  $\tan \alpha = \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \lambda_0}$ .

**Q 7.** De façon qualitative, tracer  $\alpha$  en fonction de  $\theta$ . Obtenir numériquement l'intervalle des variations de  $\alpha$ . Chaque pale a un profil d'aile symétrique de type NACA 0012.



**Figure 5** Définition de la corde  $AB = \ell$  (en pointillés), de  $\vec{n}$  et de  $\vec{t}$  pour le profil NACA 0012.

La résultante des forces exercées par le vent sur la pale est notée  $\vec{F}$  et se décompose en une force de traînée  $\vec{F}_D$  (*Drag*) dans la direction de l'écoulement et une force de portance  $\vec{F}_L$  (*Lift*) dans la direction perpendiculaire à l'écoulement :

$$\vec{F} = \vec{F}_L + \vec{F}_D.$$

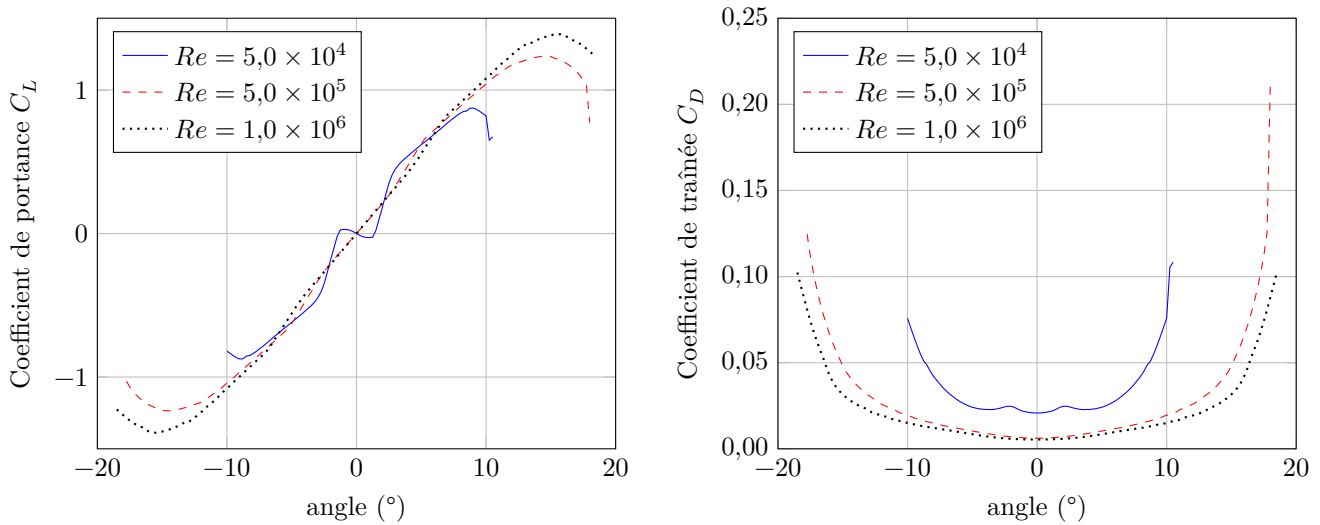
Les coefficients aérodynamiques de portance  $C_L$  et de traînée  $C_D$  sont définis par

$$\begin{cases} \vec{F}_L = \frac{1}{2} C_L \rho S w^2 \vec{n} \\ \vec{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho S w^2 \vec{t} \end{cases}$$



où  $\vec{t}$  est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de la vitesse relative du vent  $\vec{w}$  et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à  $\vec{t}$  dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$ , orienté vers l'extérieur de l'éolienne. On note  $\rho_{\text{air}}$  la masse volumique de l'air et  $S$  est la surface alaire de l'aile, c'est-à-dire la projection de l'aile sur le plan contenant la corde.

Les coefficients aérodynamiques dépendent de l'angle d'attaque. Les courbes donnant  $C_L(\alpha)$  et  $C_D(\alpha)$  sont données figure 6 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ . Pour une aile, on précise que la distance caractéristique intervenant dans le nombre de Reynolds est la corde  $\ell$ .



**Figure 6** Coefficients de portance (*Lift*) et de traînée (*Drag*) en fonction de l'angle d'attaque exprimé en degrés pour trois valeurs du nombre de Reynolds

**Q 8.** Justifier que, dans le cas des pales de l'éolienne et pour la valeur de  $\lambda_0$  considérée, on peut écrire en première approximation que  $C_L(\alpha) \approx k\alpha$  et  $C_D \ll C_L$ . Estimer  $k$ .

Sauf mention contraire, on prendra dans la suite  $C_D = 0$  et  $C_L(\alpha) = k\alpha$ .

**Q 9.** Exprimer la force  $\vec{F}_1$  exercée par le vent sur la pale n°1 dans la base ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ). Commenter l'effet de chacune des composantes sur la rotation de l'éolienne.

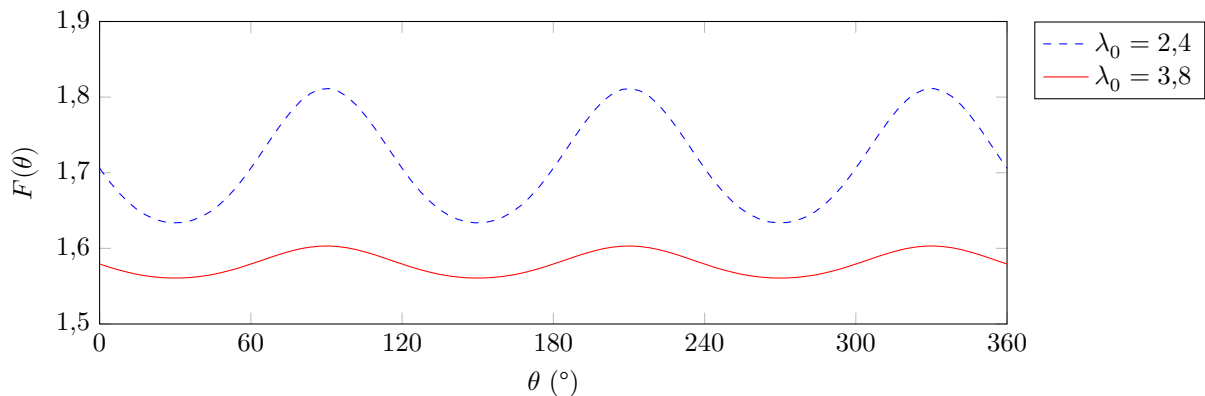
**Q 10.** Exprimer  $\mathcal{M}_{z,1}$ , moment de la force  $\vec{F}_1$  par rapport à l'axe  $Oz$  et montrer que

$$\mathcal{M}_{z,1} = \kappa f(\theta)$$

où  $f(\theta) = (1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2) \frac{\cos^2 \theta}{(\lambda_0 + \sin \theta)^2}$ . En déduire  $\kappa$ .

**Q 11.** Exprimer le couple  $\Gamma_z$  engendré par les trois pales sur le rotor de l'éolienne.

Le tracé de la courbe  $F(\theta) = \sum_{n=0}^2 f\left(\theta + n\frac{2\pi}{3}\right)$  est fourni figure 7.



**Figure 7** Tracé de  $F(\theta) = \sum_{n=0}^2 f\left(\theta + n\frac{2\pi}{3}\right)$

**Q 12.** La puissance moyenne du couple est  $\mathcal{P} = \langle \Gamma_z \rangle \omega$ . En déduire la puissance moyenne transférée au rotor dans ce modèle. En donner une estimation numérique dans le cas considéré jusqu'ici. Donner un exemple concret d'objet ou d'installation électrique susceptible d'être alimenté par cette éolienne.

Donnée :  $k = 6,3 \text{ rad}^{-1}$ .

**Q 13.** Définir puis déterminer le débit d'énergie cinétique  $D_{E_c}$  traversant le cylindre éolien si l'éolienne était absente.

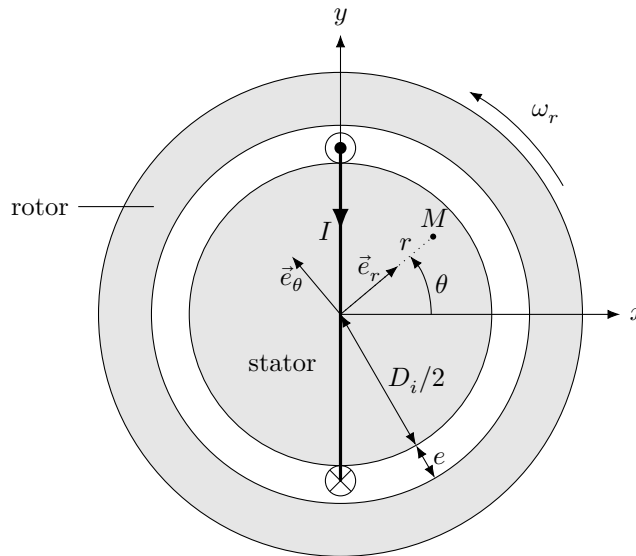
**Q 14.** Définir le coefficient de puissance  $\eta$  de l'éolienne qui représente le rendement moyen de l'éolienne en énergie. L'exprimer en fonction de  $k$ ,  $\lambda$ ,  $a$  et des données géométriques de l'éolienne. Faire l'application numérique. Commenter.

**Q 15.** Quelle sera(seront) la(les) fréquence(s) des composantes sinusoïdales du couple ? Donner leurs valeurs dans la plage de fonctionnement nominale, pour  $v_\infty$  allant de 0 à  $16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ?

**Q 16.** Montrer que la puissance de la force de traînée sur un tour est négative. Discuter de l'influence de  $C_D$  sur la puissance moyenne que peut fournir une éolienne.

### III Générateur

On étudie la production d'énergie électrique par l'éolienne au moyen d'un générateur utilisant des aimants permanents. Il est constitué d'un stator intérieur cylindrique de diamètre  $D_i$  et de longueur  $L_r$  selon  $\vec{e}_z$ . Le rotor a un diamètre intérieur noté  $D_i + 2e$ , avec  $e \ll D_i$  l'entrefer du dispositif et est maintenu en rotation autour de l'axe  $\vec{e}_z$  par une liaison pivot, sa position angulaire étant notée  $\theta_r$ .



**Figure 8** Rotor et stator du générateur (un courant d'intensité  $I$  parcourt l'enroulement autour du stator)

Le rotor et le stator sont constitués d'un matériau ferromagnétique doux de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  supposée infinie.

**III.A –** On admet que la longueur axiale  $L_r$  est suffisamment grande pour que le champ magnétique dans l'entrefer soit indépendant de la coordonnée  $z$ . On admet également qu'il y est toujours radial, dirigé selon  $\vec{e}_r$ .

On enroule autour du stator un câble parcouru par un courant électrique d'intensité  $I > 0$  comme représenté sur la Figure 8. On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques. Comme l'entrefer est très fin, ( $e \ll D_i$ ), on peut considérer que la norme du champ magnétique y est indépendante de  $r$ .

**Q 17.** Montrer que le champ magnétique dans l'entrefer a pour intensité :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2e} \quad (\text{III.1})$$

et préciser son sens en fonction de l'angle  $\theta$ .

**Q 18.** On enroule autour du stator une deuxième spire parcourue par le même courant  $I$ , dans un plan de vecteur normal orienté selon  $\vec{e}_y$ . Tracer la courbe représentative du champ magnétique total  $B(\theta) = \vec{B} \cdot \vec{e}_r$  dans l'entrefer en fonction de  $\theta$ .

On enroule maintenant un grand nombre de spires dans différents plans et on admet qu'une répartition adéquate permet d'obtenir un champ magnétique statorique dans l'entrefer qui varie sinusoïdalement avec l'angle  $\theta$  selon

$$\vec{B}_s(I) = B_0(I) \cos(\theta) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad B_0(I) = \frac{N \mu_0 I}{2e} \quad (\text{III.2})$$

où  $N$  est le nombre effectif de tours de l'enroulement.

Cette expression sera valable dans toute la suite.

**Q 19.** Dans cette question uniquement, l'enroulement statorique fournit une puissance électrique constante de 5,0 kW sous une tension de 230 V et on a  $N = 21$ . Calculer la valeur de l'intensité du courant  $I$  et en déduire l'intensité maximale du champ magnétique dans l'entrefer pour  $e = 2$  mm.

**III.B –** On utilise désormais deux enroulements statoriques similaires mais produisant chacun un maximum de leur champ magnétique dans une direction différente. Ces enroulements sont respectivement parcourus par des courants d'intensité  $I_1$  et  $I_2$  et créent des champs magnétiques respectifs  $\vec{B}_{s1}$  et  $\vec{B}_{s2}$  donnés par

$$\vec{B}_{s1}(I_1) = B_0(I_1) \cos(\theta) \vec{e}_r \quad \vec{B}_{s2}(I_2) = B_0(I_2) \cos(\theta - \pi/2) \vec{e}_r$$

où  $B_0$  est défini dans l'expression (III.2). Les courants  $I_1$  et  $I_2$  ont même amplitude  $I_s$  et varient sinusoïdalement à la pulsation  $\omega_s$  :  $I_1 = I_s \cos(\omega_s t)$ ,  $I_2 = I_s \cos(\omega_s t - \phi_2)$ .

**Q 20.** Comment peut-on réaliser l'enroulement créant le champ  $\vec{B}_{s2}$  si l'on connaît celui qui crée le champ  $\vec{B}_{s1}$  ?

**Q 21.** Déterminer la valeur de  $\phi_2$  permettant de réaliser un champ dit « tournant » tel que :

$$\vec{B}_s = B_t \cos(\theta - \omega_s t) \vec{e}_r$$

et préciser l'expression de  $B_t$  en fonction, entre autres, de  $I_s$ .

On note  $\phi_s = \omega_s t$  la direction dans laquelle pointe le maximum du champ magnétique tournant.

**III.C –** Le rotor produit, au moyen d'aimants permanents, un champ magnétique dans l'entrefer qu'on considérera lui aussi radial, uniforme sur l'épaisseur de l'entrefer, variant sinusoïdalement avec la position, et solidaire du rotor. On note  $\vec{B}_r$  son expression

$$\vec{B}_r = B_r \cos(\theta - \phi_r) \vec{e}_r,$$

avec  $B_r$  une constante positive et  $\phi_r$  l'angle dont a tourné le rotor.

Le courant dans les enroulements statoriques est désormais induit par le mouvement du rotor. On rappelle que  $\phi_r$  (resp.  $\phi_s$ ) désigne la direction dans laquelle la composante radiale du champ magnétique du rotor (resp. du champ magnétique tournant statorique) est maximale.

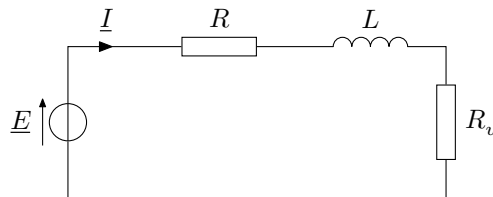
**Q 22.** Déterminer l'expression de l'énergie magnétique totale dans l'entrefer, notée  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$ , en fonction, entre autres, de  $B_r$ ,  $\phi_s$ ,  $\phi_r$  et de  $I_s$ .

**Q 23.** En déduire l'expression du couple exercé sur le rotor, donné par  $\Gamma = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{d\phi_r}$ .

On suppose dans toute la suite qu'un régime sinusoïdal est établi dans lequel le rotor tourne à la pulsation  $\omega_r$  constante et l'intensité du courant statorique oscille à la même pulsation  $\omega_s = \omega_r$  avec une amplitude  $I_s$ . On note  $\delta = \phi_r - \phi_s = \text{cste}$  qu'on suppose positif.

**Q 24.** Calculer la valeur maximale possible de la valeur absolue du couple pour  $I_s = 22$  A et  $B_r = 1,2$  T.

**III.D –** On peut modéliser chacun des enroulements statoriques par le même circuit électrique, représenté sur la figure 9. La résistance  $R$  et l'autoinductance  $L$  sont celles de l'enroulement statorique, la force électromotrice  $E$  est celle produite par le mouvement du rotor. La résistance  $R_u$  représente celle du dipôle alimenté par le générateur. On prendra  $R = 1 \Omega$  et  $L = 20$  mH.



**Figure 9** Schéma électrique d'un enroulement statorique

On donne les expressions des forces électromotrices instantanées des enroulements parcourus par les courants  $I_1$  et  $I_2$  définis au III.B, qu'on note respectivement  $E_1$  et  $E_2$ ,

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \omega_r \sin(\phi_r) \\ E_2 = -\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \omega_r \cos(\phi_r) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

**Q 25.** Justifier qualitativement les expressions précédentes.

**Q 26.** Déterminer, en notation complexe, les expressions des amplitudes complexes des intensités  $I_1$  et  $I_2$ .

- Q 27.** En déduire l'expression du champ magnétique statorique puis celle du couple exercé sur le rotor.
- Q 28.** Calculer la valeur du couple mécanique exercé par l'écoulement de l'air sur l'éolienne pour fournir une puissance moyenne de 5 kW à la charge de résistance  $R_u$  sous une tension efficace de 230 V à la fréquence de 50 Hz.
- L'utilisation d'un grand nombre d'aimants régulièrement répartis sur le rotor crée désormais un champ magnétique

$$\vec{B}_r = B_r \cos(p\theta - \phi_r) \vec{e}_r.$$

- Q 29.** Déterminer la valeur de la pulsation  $\omega_r$  de rotation du rotor pour laquelle la fréquence fondamentale du courant électrique produit en régime sinusoïdal établi est 50 Hz pour  $p = 12$ .

## IV Aimants des rotors

Les aimants des rotors des éoliennes sont majoritairement des aimants au néodyme, c'est-à-dire des aimants permanents composés d'un alliage de néodyme, de fer et de bore ( $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ).

### IV.A – Extraction du néodyme

Les terres rares, notamment le néodyme, ont des propriétés magnétiques exceptionnelles leur permettant, en alliage avec d'autres métaux, la miniaturisation d'aimants très performants, utilisés notamment dans les éoliennes, la téléphonie ou encore l'électroménager.

À l'état naturel, les terres rares ne sont jamais présentes sous forme métallique mais sous forme d'oxyde dans des composés minéraux.

Le néodyme est extrait d'un minerai appelé la monazite. Ce minerai contient des terres rares comme le lanthane (La), le cérium (Ce), le néodyme (Nd) ou le praséodyme (Pr) sous forme d'oxyde. La monazite extraite de la mine de Mount Weld en Australie contient entre 60 et 70 % (en masse) d'oxydes de terre rare. Le tableau 2 fournit la proportion de chaque oxyde parmi l'ensemble des oxydes de terre rare contenus dans ce minerai.

|                         |                         |                            |                         |                         |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\text{La}_2\text{O}_3$ | $\text{CeO}_3$          | $\text{Pr}_6\text{O}_{11}$ | $\text{Nd}_2\text{O}_3$ | $\text{Sm}_2\text{O}_3$ | $\text{Eu}_2\text{O}_3$ | $\text{Gd}_2\text{O}_3$ | $\text{Tb}_4\text{O}_7$ |
| 26 %                    | 51 %                    | 4 %                        | 15 %                    | 1,8 %                   | 0,4 %                   | 1,0 %                   | 0,1 %                   |
| $\text{Dy}_2\text{O}_3$ | $\text{Ho}_2\text{O}_3$ | $\text{Er}_2\text{O}_3$    | $\text{Tm}_2\text{O}_3$ | $\text{Yb}_2\text{O}_3$ | $\text{Lu}_2\text{O}_3$ | $\text{Y}_2\text{O}_3$  | Total                   |
| 0,2 %                   | 0,1 %                   | 0,2 %                      | < 0,1 %                 | 0,1 %                   | < 0,1 %                 | < 0,1 %                 | 60 – 70 %               |

**Tableau 2** Composition massique des oxydes de terre rare contenus dans la monazite en provenance de la mine de Mount Weld (d'après *Techniques de l'ingénieur J6630v2*)

- Q 30.** Quelle masse de néodyme est contenue dans une tonne de monazite provenant de la mine australienne de Mount Weld ?

### IV.B – Corrosion des aimants

La présence du fer dans les aimants au néodyme les rend sujet à la corrosion. La corrosion atmosphérique des métaux est similaire à la corrosion humide. Elle résulte de l'action du dioxygène de l'air, et éventuellement de l'eau (condensation de l'humidité, pluie, projections) sur les métaux. Dans le cas du fer, il peut y avoir formation d'oxydes de fer (rouille) ou encore de cations fer (II) ou fer (III).

Le diagramme potentiel-pH de la figure B du document réponse représente le diagramme du fer superposé à celui de l'eau.

L'étude suivante se place systématiquement en milieu aqueux acidifié, pour une concentration des espèces solubles  $C = 1 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ; les pressions partielles des espèces gazeuses sont prises égales à  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ . L'aimant est assimilé en première approximation à du fer solide.

- Q 31.** Donner le nombre d'oxydation du fer et de ses dérivées. Préciser sur la figure B du document réponse, les domaines de corrosion, de passivation et d'immunité à la corrosion du fer.

- Q 32.** Le fer solide est susceptible de réagir avec l'eau ou le dioxygène dissous dans l'eau. Écrire les équations bilan de ces deux réactions en milieu acide, en choisissant un coefficient stoechiométrique égal à 1 pour Fe(s). Calculer les constantes d'équilibre  $K^\circ$  correspondantes et commenter.

La corrosion est particulièrement active dans les zones qui présentent une hétérogénéité de surface (rayure, contrainte, défaut), une hétérogénéité de composition (alliages, impuretés, soudures), ou encore une hétérogénéité de la concentration du milieu. Une quelconque de ces hétérogénéités provoque ce qu'on appelle une corrosion différentielle : l'oxydation et la réduction se produisent en deux zones différentes, le métal assurant la circulation des électrons.

La corrosion est étudiée au niveau d'une goutte d'eau oxygénée sur le métal (figure C du document réponse). Les couples mis en jeu dans la corrosion du fer sont :  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  et  $\text{O}_2/\text{OH}^-$  (correspondant au couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  en milieu basique).

**Q 33.** Écrire les demi-équations électroniques correspondant à ces deux couples en considérant le dioxygène dissous en milieu aqueux. En déduire l'équation bilan liée au phénomène de corrosion du fer. Sur le schéma de la figure C, repérer la zone correspondant à la réduction et celle correspondant à l'oxydation. Identifier alors l'anode et la cathode et indiquer sur le schéma le déplacement des électrons dans le métal et le déplacement des ions dans l'eau.

L'association de l'anode et de la cathode constitue une micropile en court-circuit. Le déplacement des ions dans l'eau vient fermer le circuit électrique.

*Données :* pH de l'eau atmosphérique : 7,0. Surtension cathodique du dioxygène sur une électrode de fer :  $\eta_C(\text{O}_2) = -0,5 \text{ V}$ ,  $[\text{Fe}^{2+}] = 1 \times 10^{-6} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . Il n'y a pas de surtension pour le couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  sur une électrode de fer.

**Q 34.** En supposant que l'allure des courbes est symétrique, proposer des courbes intensité-potential  $i = f(E)$  permettant d'interpréter ce phénomène de corrosion. Estimer le potentiel mixte  $E_C$ , appelé potentiel de corrosion, de cette micro-pile.

**Q 35.** Sachant que plus la résistance interne du système électrochimique est grande et plus les pentes des courbes  $i = f(E)$  sont faibles, comparer la cinétique de la corrosion des aimants d'une éolienne marine et d'une éolienne terrestre.

#### IV.C – Protection des aimants

Le dépôt industriel de nickel métallique sur les aimants par électrolyse est très utilisé industriellement. Ce procédé consiste à immerger l'aimant, constitué principalement de fer, dans une solution de sulfate de nickel, la pièce en fer étant placée à la cathode. Pour éviter le dépôt d'hydroxyde de nickel, la solution est acidifiée. L'anode est constituée d'un métal inerte.

On réalise le nickelage d'un aimant de rotor de surface totale  $S_r$  sous un courant  $I$  pour un potentiel de cathode  $E_C$ . L'opération a lieu pendant une durée  $\Delta t$  de façon à ce que le nickel recouvre uniformément l'aimant sur une épaisseur  $h$ . Le bain permet de maintenir une concentration en nickel à  $C_0$ , à pH fixé.

*Données :*  $E_C = -0,50 \text{ V}$ ,  $S_r = 6,3 \text{ dm}^2$ ,  $I = 4,0 \text{ A}$ ,  $h = 50 \mu\text{m}$ ,  $C_0 = 1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ , pH = 4,5.

**Q 36.** Quelle est la durée  $\Delta t$  de cette opération de nickelage ?

En réalité, tout le courant ne sert pas à produire du nickel solide.

La surtension  $\eta_{\text{Ni}}$  (en V) au niveau de la cathode est liée à la densité de courant  $j_{\text{Ni}}$  (en  $\text{A}\cdot\text{dm}^{-2}$ ) par la relation

$$\eta_{\text{Ni}} = -0,15 \log(|j_{\text{Ni}}|) - 0,30.$$

**Q 37.** Calculer l'épaisseur de nickel réellement déposée à la surface de l'aimant. Quelle autre demi-réaction a pu se produire en parallèle de la réduction de  $\text{Ni}^{2+}$  conduisant à la baisse du rendement ?

**Q 38.** Si la couche de nickel présentait une fissure, tel que le fer se retrouvait en contact avec l'eau, le fer serait-il encore protégé ? À l'aide de courbes  $i = f(E)$ , comparer avec la protection par une couche de zinc.

## Documents utiles

### Document 1

Le tableau ci-dessous concerne les voitures particulières en circulation en France métropolitaine pendant l'année 2017.

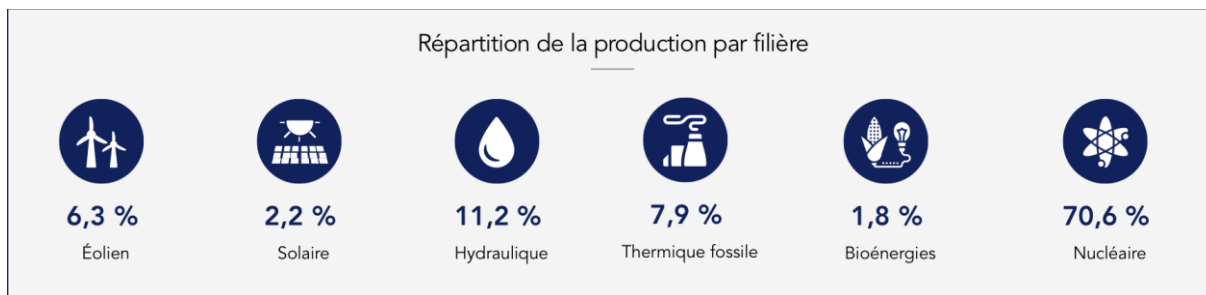
|                          | <i>Essence</i> | <i>Diesel</i> |
|--------------------------|----------------|---------------|
| Nombre                   | 12,7 millions  | 19,8 millions |
| Kilométrage annuel moyen | 8935 km        | 15 910 km     |
| Consommation moyenne     | 7,3 L/100 km   | 6,1 L/100 km  |

Avec 43,8 Mtep consommées en 2016, le secteur des transports représente une part croissante de la consommation d'énergie finale de la France : 31 % en 2015 contre 27 % en 1990 et 15 % en 1970. Le transport routier représente à lui seul plus de 80 % des consommations finales en énergie du secteur des transports, largement devant le transport aérien (15 %) et ferroviaire ( $\sim 2$  %) et la navigation intérieure (0,4 %). Les consommations du secteur routier proviennent principalement des voitures particulières (62 %), les véhicules utilitaires légers et les camions ne représentant respectivement que 20 % et 14 % des consommations finales d'énergie des transports routiers.

ADEME, *Climat Air et Énergie – Chiffres clés*, édition 2018

## Document 2

La production totale d'électricité en France s'établit à 537,7 TW·h sur l'année 2019, répartie comme indiqué dans le schéma ci-dessous :

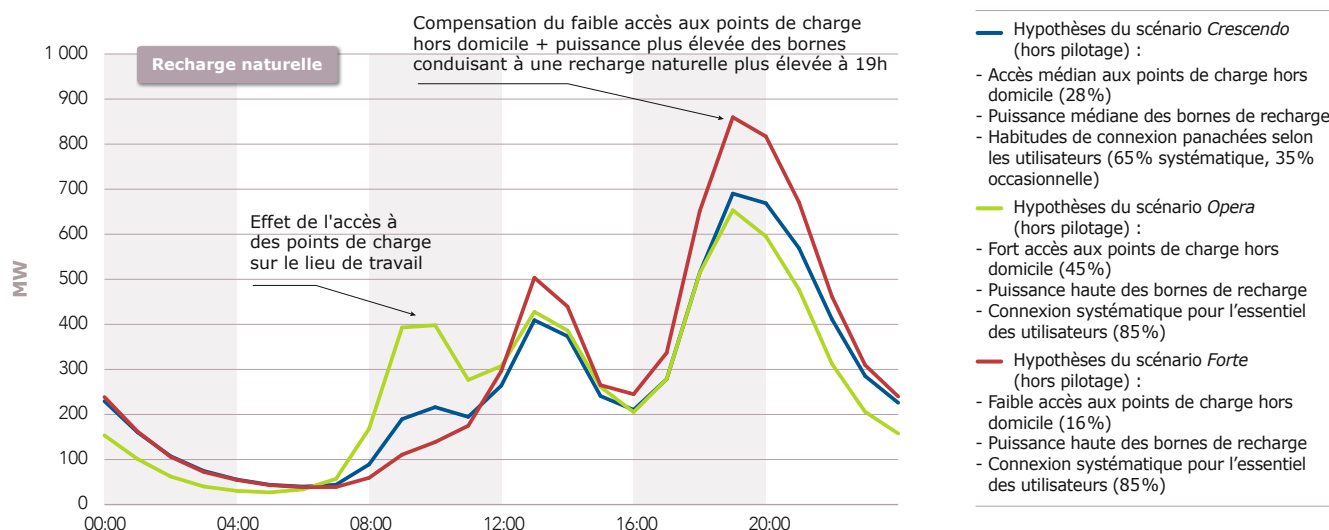


Les pertes représentent principalement l'énergie dissipée par effet Joule lors du transport sur le réseau haute et très haute tension. Elles dépendent essentiellement de la consommation, du plan de production et des échanges transfrontaliers. Les taux de pertes sur le réseau de transport sont compris entre 2 et 3,5 % de la consommation, suivant les saisons et les heures de la journée. En moyenne, en 2019, le taux s'établit à 2,22 %, ce qui représente environ 11 TW·h.

RTE, *Bilan électrique 2019*

## Document 3

RTE a étudié l'impact de différents scénarios de développement de l'électromobilité sur le système électrique français. La figure ci-dessous présente la courbe de charge type pour un jour ouvré moyen pour un million de véhicules électriques dans différents scénarios considérés (dans leurs variantes sans pilotage).



RTE, *Enjeux du développement de l'électromobilité pour le système électrique*, mai 2019

## Document 4

Le secteur de l'énergie éolienne en France a pris progressivement de l'importance : en 2019, sa part dans la production nette d'électricité du pays atteint 6,3 % et le taux de couverture moyen de la consommation par la production d'origine éolienne a été de 7,2 % contre 5,9 % en 2018.

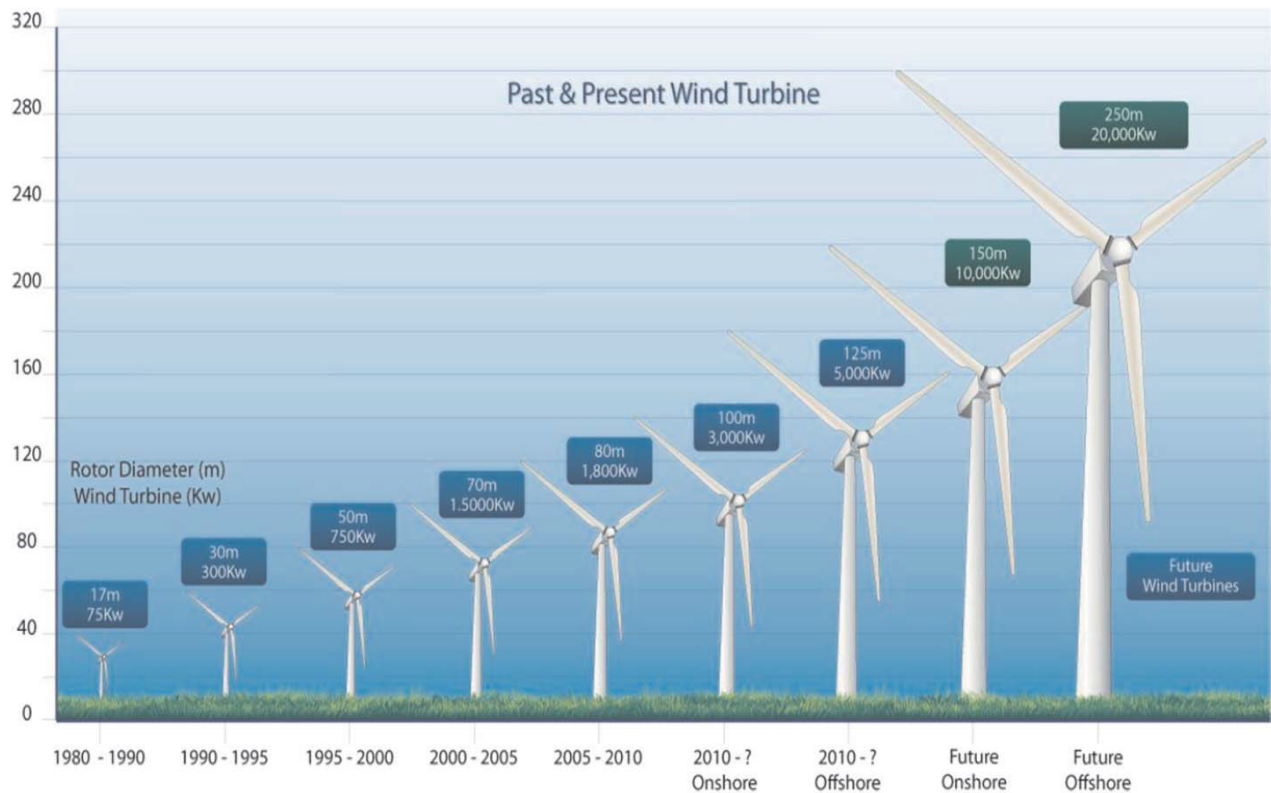
En 2018, avec près de 8 000 éoliennes terrestres sur 1 380 parcs, la France était au quatrième rang européen pour la production d'électricité éolienne, loin derrière l'Allemagne, le Royaume-Uni et l'Espagne, et au septième rang mondial.

Les éoliennes fonctionnent environ 80 % du temps mais avec une puissance très variable, située entre 0 et (théoriquement) 100 % ; par exemple, en 2019, la puissance éolienne maximale s'est élevée à 13 330 MW le 19 décembre, avec un facteur de charge de 83,8 % ; mais la puissance moyenne mensuelle observée est restée entre 2207 MW en août et 6288 MW en décembre, alors que la puissance installée atteignait 16 494 MW fin 2019 ; le taux d'utilisation (facteur de charge) de cette puissance (puissance moyenne/puissance nominale) a été en moyenne de 24,7 % en 2019, en augmentation (22,8 % en 2018) ; sa moyenne a varié de 13,9 % en août à 39,5 % en décembre, et sa valeur maximale de 52,3 % en juillet à 83,8 % en décembre.

Dans la plupart des parcs éoliens à axe horizontal, un espacement d'environ 6 à 10 fois le diamètre du rotor est souvent respecté. Cependant, pour les grands parcs éoliens, des distances d'environ 15 diamètres de rotor devraient être plus économiques, compte tenu des coûts typiques des éoliennes et des terrains.

Wikipedia (*Énergie éolienne en France, Wind turbine*)

Croissance des éoliennes commerciales. L'ordonnée correspond à la hauteur du mât. L'inscription au dessus de chaque éolienne donne le diamètre du rotor et sa puissance nominale.



Silvio Simani, Overview of Modelling and Advanced Control Strategies for Wind Turbine Systems  
*Energies*, 2015, 8, p.13396

• • • FIN • • •





|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

Signature

[illegible][illegible]

Épreuve : Physique-chimie 2 PSI

## Feville

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

 / 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

The diagram shows a circular ring with four red elliptical segments. A dashed circle of radius  $R$  is centered at origin  $O$ . A red line segment from  $O$  to the top-right segment is at an angle  $\theta$  from the  $x$ -axis. A coordinate system  $(x, y)$  is shown with unit vectors  $\vec{e}_x$  and  $\vec{e}_y$ . A velocity vector  $\vec{v}_0$  points to the right.

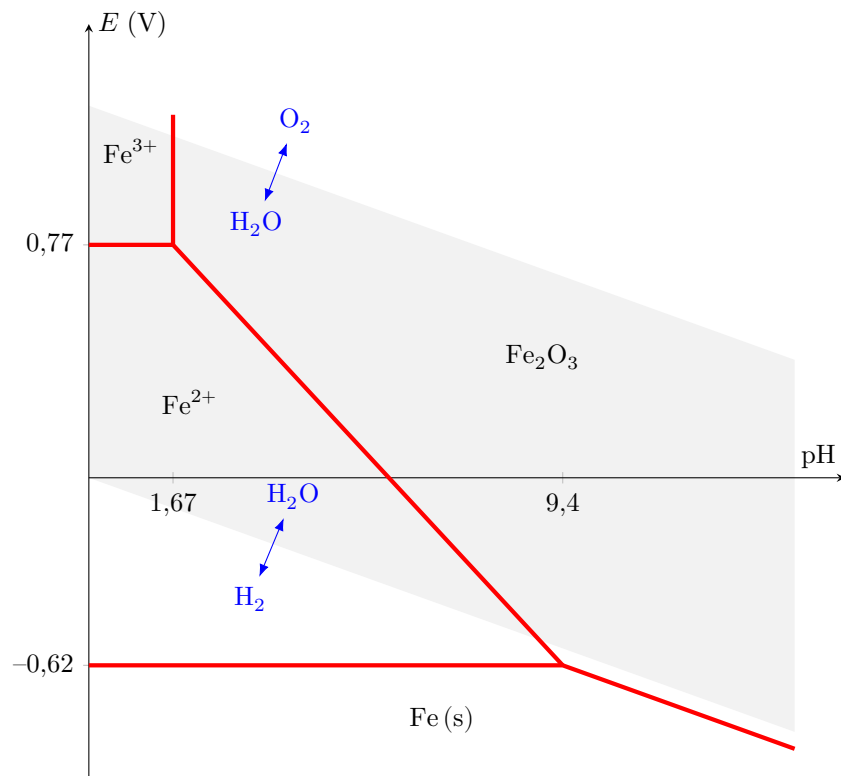
**Figure A** Figure à compléter avec les vitesses  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$

Ne rien écrire

dans la partie barrée

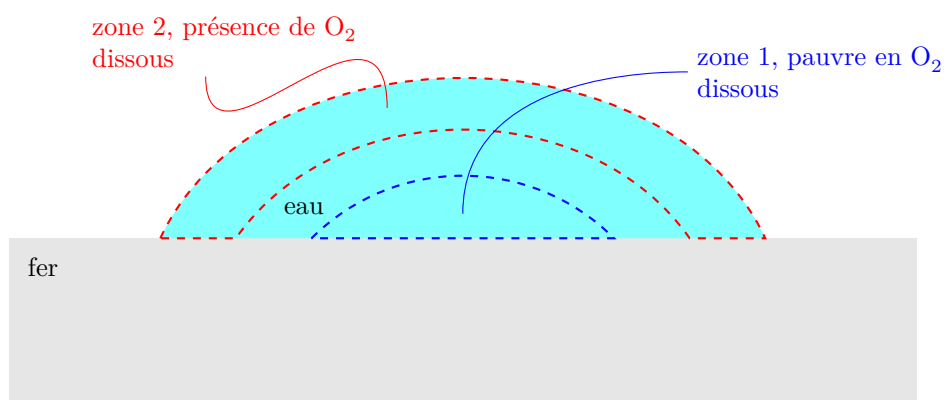
P035-DR/2021-02-08 09:45:15

## Question 31



**Figure B** Diagramme E-pH du fer à la concentration  $C = 1 \times 10^{-6} \text{ mol.l}^{-1}$

### Question 33



**Figure C** Corrosion différentielle du fer dans une goutte d'eau.

## Données et formulaire

### Données numériques

|                                          |                                                                   |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Masse volumique de l'air                 | $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$            |
| Viscosité dynamique de l'air             | $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$               |
| Masse volumique du nickel                | $\rho_{\text{Ni}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ |
| Constante de Faraday                     | $\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$    |
| Produit ionique de l'eau à 298 K         | $K_e = 10^{-14}$                                                  |
| Constante de Nernst à 298 K              | $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln(10) = 0,06 \text{ V}$                 |
| Tonne équivalent pétrole                 | 1 tep = 42 GJ                                                     |
| Surface de la France métropolitaine      | $S_F = 550\,000 \text{ km}^2$                                     |
| Préfixe du système international d'unité | T (tétra) = $10^{12}$                                             |

### Caractéristiques de l'éolienne Darrieus H

|                   |                         |
|-------------------|-------------------------|
| Rayon             | $R = 4,0 \text{ m}$     |
| Corde             | $\ell = 0,45 \text{ m}$ |
| Hauteur des pales | $L = 8,0 \text{ m}$     |
| Nombre de pales   | $N = 3$                 |

### Caractéristiques du générateur

|                 |                        |
|-----------------|------------------------|
| Diamètre        | $D_i = 530 \text{ mm}$ |
| Entrefer        | $e = 2 \text{ mm}$     |
| Longueur axiale | $L_r = 300 \text{ mm}$ |

### Potentels standard à 298 K

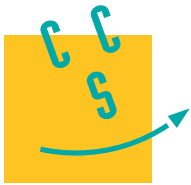
|                       | $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$ | $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$ | $\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}$ | $\text{H}^+/\text{H}_2$ | $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ | $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $E^\circ \text{ (V)}$ | -0,76                      | -0,44                      | -0,25                      | 0,00                    | 0,77                            | 1,23                            |

### Extrait du tableau périodique des éléments

|                                                           |      |      |      |      |       |
|-----------------------------------------------------------|------|------|------|------|-------|
| Numéro atomique                                           | 1    | 6    | 8    | 28   | 60    |
| Symbole                                                   | H    | C    | O    | Ni   | Nd    |
| Masse molaire atomique ( $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) | 1,01 | 12,0 | 16,0 | 58,7 | 144,2 |

### Formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \sin a - \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$



## *Différents aspects de l'écoulement dans une lame de savon*

L'étude d'écoulements tourbillonnaires plans, dits aussi bi-dimensionnels, s'applique dans de nombreux domaines, dont les écoulements géophysiques. Parmi ceux-ci, une thématique particulièrement riche est celle des écoulements tourbillonnaires océaniques et atmosphériques de fluide (eau ou air) sur des distances horizontales grandes devant l'épaisseur de la couche de fluide concernée. L'image satellite de la figure 1 présente une allée tourbillonnaire dans le sillage des îles du Cap Vert (image NASA).

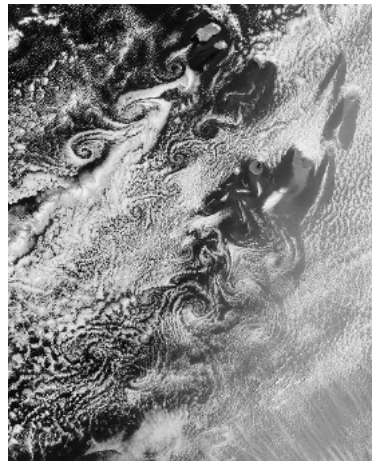


Figure 1

Sous certaines conditions, ces écoulements peuvent être modélisés par l'étude des écoulements tourbillonnaires plans dans une lame de savon. Ce sujet propose d'aborder quelques aspects de ces écoulements.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données et relations utiles sont disponibles dans le document réponse.

### **I Interféromètre de Michelson et épaisseur d'une lame de savon**

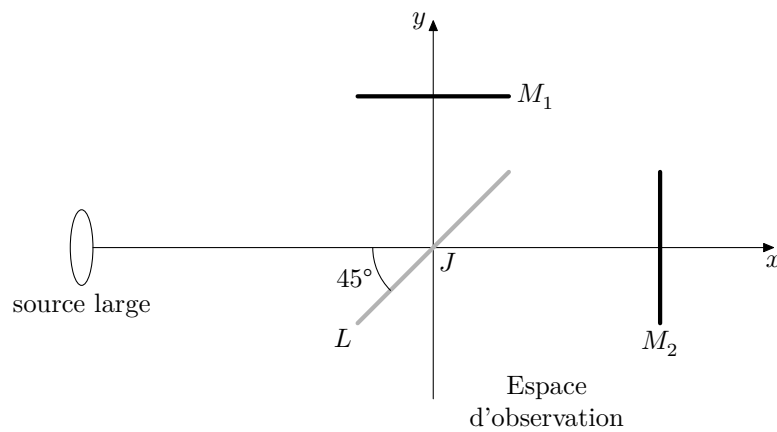
Le but de cette partie est de quantifier, par l'étude de la figure d'interférence à la surface d'une lame de savon, l'écart que présente celle-ci à un écoulement rigoureusement plan. On procédera par analogie avec la figure d'interférence obtenue à l'aide d'un interféromètre Michelson réglé en coin d'air.

**I.A –** On considère un interféromètre de Michelson dans lequel l'ensemble {lame séparatrice + compensatrice} est assimilé à une unique lame semi-réfléchissante d'épaisseur négligeable. On la note par la suite lame séparatrice ( $L$ ).

L'interféromètre, éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  est réglé comme schématisé sur la figure 2 : les deux bras sont dissymétriques du fait de la position relative des miroirs :  $M_1$  est parallèle à  $(J, x)$  et  $M_2$  est parallèle à  $(J, y)$  mais ils ne sont pas à égale distance de  $J$ . On considère que les deux ondes qui émergent de l'interféromètre vers l'espace d'observation ont le même éclairement  $I_0$ .

**Q 1.** Sur la figure A du document réponse, à rendre avec la copie, tracer avec soin les deux rayons issus du rayon incident qui émergent de l'interféromètre dans l'espace d'observation. Sur le même schéma, dans l'espace réservé à cet effet, montrer graphiquement que l'on peut considérer que ces deux rayons sont issus d'une « lame d'air » d'épaisseur  $e$  que l'on représentera. On supposera que l'indice de l'air est égal à 1.

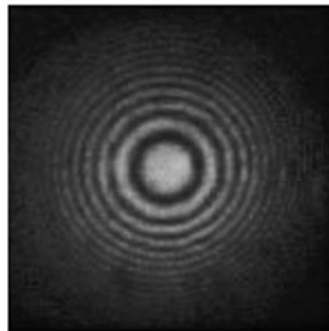
**Q 2.** Établir la différence de marche introduite par le système en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  sur cette lame et de son épaisseur  $e$ .



**Figure 2** Schéma de l'interféromètre éclairé par une source large

**Q 3.** Où est localisée la figure d'interférence ? Comment l'observer dans de bonnes conditions si l'on dispose d'un jeu complet de lentilles convergentes de distances focales comprises entre 20 cm et 1 m ? Un schéma clair de la situation expérimentale correspondante est attendu.

**Q 4.** Montrer que la figure d'interférence est formée d'anneaux d'égale inclinaison (justifier ce terme). On observe sur l'écran la figure d'interférence présentée figure 3.



**Figure 3** Figure d'interférence : anneaux d'égale inclinaison

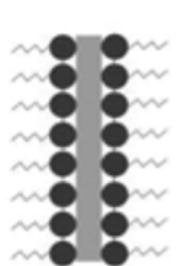
On souhaite maintenant régler l'appareil au contact optique.

**Q 5.** Décrire l'opération : faut-il tourner ou translater un miroir ? Comment savoir dans quel sens ? Décrire l'évolution de la figure d'interférence au cours de l'opération. Quel est l'aspect de l'éclairement sur l'écran une fois ce réglage réalisé ?

**Q 6.** Partant de cette situation on incline un des miroirs d'un petit angle  $\alpha$  pour former un coin d'air. On éclaire le système en incidence quasi-normale de telle sorte que l'on observe des franges d'interférences rectilignes parallèles entre elles. Où sont-elles localisées ? Préciser les conditions de leur observation.

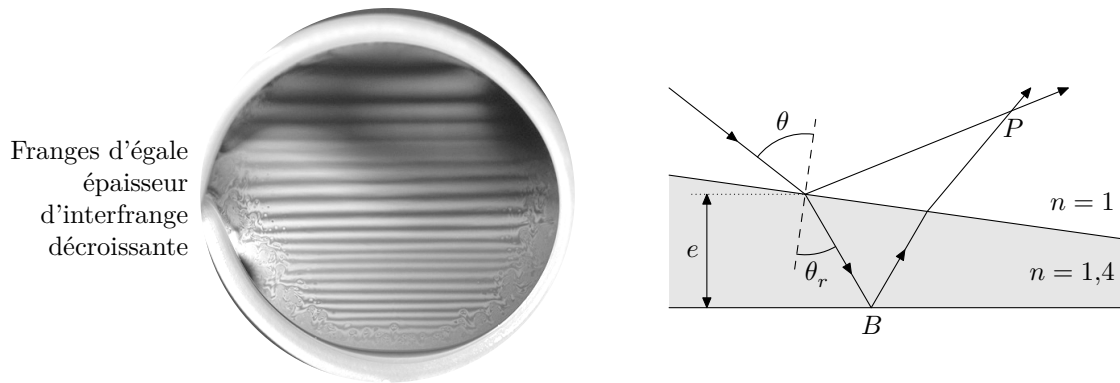
**Q 7.** On admet que la différence de marche introduite par le coin d'air en un point  $M$  de la surface de localisation situé à une distance  $x$  de l'arête commune des deux miroirs est  $\delta(M) \approx \pm 2n\alpha x$  avec  $n = 1$ . Déterminer l'interfrange  $i$  sur la surface de localisation, en fonction de  $\alpha$  et  $\lambda_0$ . Comment évolue la figure d'interférence si l'angle  $\alpha$  varie ?

**I.B –** Une lame de savon est constituée d'une mince couche d'eau entourée de part et d'autre par une couche de savon. Cette configuration est due aux tensio-actifs contenus dans le savon. Ces molécules sont constituées de deux parties distinctes : une tête hydrophile, généralement ionique, et une queue hydrophobe, généralement constituée d'une chaîne carbonée (figure 4).



**Figure 4**

Cette propriété amène ainsi les tensio-actifs à se concentrer et à se fixer les uns aux autres aux interfaces entre l'eau et l'air. En éclairage monochromatique, cette lame fait apparaître des franges d'interférence (figure 5), dont l'interfrange diminue vers le bas de la lame. Ces franges sont liées à un phénomène d'interférence se produisant sur une couche mince. On suppose ici que l'indice de cette fine couche est  $n \approx 1,4$ . L'épaisseur de cette couche est variable de haut en bas sans dépasser une épaisseur maximum d'environ  $1\text{ }\mu\text{m}$ . La masse volumique et la viscosité du liquide savonneux sont pris égaux à ceux de l'eau.

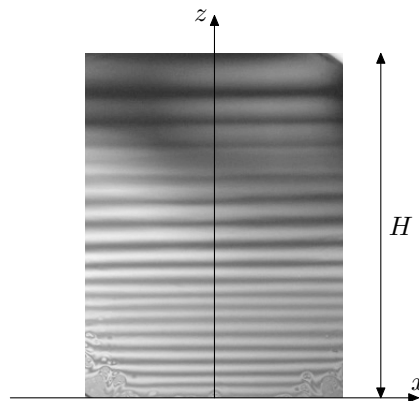


**Figure 5** Interférences sur le film (à gauche) et modélisation des rayons lumineux (à droite)

Le trajet d'un rayon lumineux arrivant sous incidence  $\theta$  sur une lame d'indice  $n$  et d'épaisseur locale  $e$ , doit tenir compte du phénomène de réfraction à l'intérieur de la lame. On note  $\theta_r$  l'angle de réfraction et  $\theta$  l'angle d'incidence. Une division d'amplitude se produit sur la face avant, suivie d'une réflexion sur la face arrière, produisant deux rayons réfléchis par la lame qui interfèrent au point  $P$ . On admet que la réflexion sur un milieu plus réfringent s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$ .

**Q 8.** Justifier qu'en incidence quasi-normale, le déphasage entre les deux ondes qui interfèrent peut s'écrire  $\Delta\phi = 2\frac{\pi}{\lambda_0} \left( 2ne + \frac{\lambda_0}{2} \right)$ .

En l'absence de perturbation extérieures (telles que celles qui seront abordées par la suite) la lame n'est le siège que de son écoulement gravitaire (du haut vers le bas sous l'effet de la gravité). Dans le cadre d'un modèle simplifié, dit d'interface sans interaction, la pression  $P$  au sein du fluide en écoulement gravitaire entre l'interface de tensioactifs est supposée uniforme. Le phénomène de drainage des tensioactifs est alors négligé. L'axe  $(Oz)$  sera pris vertical ascendant. La figure 6 présente la figure d'interférence observée sur un film de savon, ainsi que les notations introduites.



**Figure 6** Vue de face de la lame de savon

On note  $H = 5,0\text{ cm}$  la hauteur de la lame de savon. On note  $e(z, t)$  l'épaisseur de la lame, dans la direction  $(Oy)$ , à l'altitude  $z$  et à l'instant  $t$ . Du fait de l'écoulement de drainage gravitaire, cette épaisseur varie au cours du temps à  $z$  fixé et à  $t$  fixé elle augmente vers le bas.

**Q 9.** Compte tenu de la topographie des franges observées sur la figure 6, discuter qualitativement l'écart du profil de la lame à une portion de coin d'angle constant, induit par son drainage gravitaire.

Afin d'interpréter ces différences, une modélisation de mécanique des fluides, non détaillée ici, aboutit à l'expression suivante pour l'épaisseur  $e$  de la lame en fonction de  $z$  et du temps :

$$e(z, t) = \sqrt{\frac{2\eta(H - z)}{\rho g t}}.$$

**Q 10.** Discuter qualitativement la validité de cette expression en regard de la figure 6.



Pour aller plus loin dans la caractérisation de la variation de l'épaisseur de la lame, on se propose d'effectuer une approche semi-empirique de la loi de variation de l'épaisseur de la lame. On se place à  $t$  fixé et on suppose une loi de puissance semi-empirique de la forme

$$e(z, t) = K(H - z)^\beta$$

où  $\beta$  et  $K$  sont des constantes. On relève pour cela expérimentalement la position des premières franges brillantes. Le tableau 1 présente les résultats obtenus en indiquant la position  $z$  de ces franges, pour un éclairage monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 600$  nm et un film de savon d'indice optique  $n = 1,4$ .

| Numéro de la frange brillante | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Position $z$ (cm)             | 4,5 | 4,1 | 3,7 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,6 |

Tableau 1

**Q 11.** Compte tenu de ces valeurs numériques, analyser graphiquement, à l'aide du support fourni en figure B du document réponse, si cette loi semi-empirique est conforme aux observations. Si c'est le cas, donner la valeur numérique de  $\beta$ .

## II Caractéristiques des écoulements bi-dimensionnels

On se place à présent dans le cadre d'un écoulement bi-dimensionnel. On note  $v$  la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du fluide en écoulement par rapport au référentiel du laboratoire. L'écoulement est supposé incompressible.

Ce champ de vitesse satisfait à l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \overrightarrow{\Delta}(\vec{v})$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $\eta$  la viscosité dynamique.

En utilisant l'analyse vectorielle on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \overrightarrow{\Delta}(\vec{v}).$$

**Q 12.** Préciser le sens physique associé aux deux termes  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  et  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  formant la dérivée particulaire  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  de la vitesse.

**Q 13.** Préciser le sens physique associé aux trois termes au second membre de l'équation de Navier-Stokes.

**Q 14.** On note  $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$  la vorticité dans l'écoulement. Montrer, en négligeant les effets de la viscosité ainsi que la résultante des forces volumiques autres que celles de pression, que  $\vec{\Omega}$  satisfait à une équation d'évolution de la forme

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \left( \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{\Omega} \right) = (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}.$$

Lorsqu'on tient compte des effets de la viscosité, un terme supplémentaire,  $\nu_c \overrightarrow{\Delta}(\vec{\Omega})$  apparait au second membre de l'équation d'évolution, où  $\nu_c = \frac{\eta}{\rho}$  est la viscosité cinématique du fluide. Comme nous le verrons par la suite

ce terme visqueux est lié à la diffusion de vorticité. Dans un écoulement tri-dimensionnel, le terme  $(\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  au second membre de cette équation est dit terme d'étirement de vortex (ou vortex stretching).

**Q 15.** Justifier que l'on peut considérer l'écoulement dans la lame de savon comme bidimensionnel. Montrer que, dans cette hypothèse, le terme d'étirement de vortex est nul.

## III Couche limite oscillante et écoulement redressé

Dans l'étude de l'érosion côtière, on constate que le mouvement périodique de la houle produit, au voisinage du fond marin constitué de sédiments, des tourbillons stationnaires. Ceux-ci déstabilisent ces sédiments et les mettent en suspension avant de les transporter. On s'intéresse ici à la génération d'un ensemble de tourbillons stationnaires symétriques dans une lame de savon verticale excitée par une onde sonore. Celle-ci est purement sinusoïdale, à basse fréquence, et générée par un haut-parleur placé à l'extrémité d'un tube au bout duquel se trouve la lame de savon. L'écoulement induit de légères variations locales de l'épaisseur, agissant ainsi sur l'état interférentiel local, ce qui permet de le visualiser (figure 7).



**Figure 7** Photographie de la figure d'interférence (à gauche) et représentation schématisée associée du mouvement du cylindre (grisé) et des tourbillons générés (à droite)

Dans un souci de simplification, on peut modéliser l'effet de l'onde sonore par les petites oscillations horizontales d'un cylindre de diamètre  $d$ . Ces oscillations sont sinusoïdales de même pulsation  $\omega$  que l'onde sonore. On note  $a$  l'amplitude des oscillations et on suppose que  $a \ll d$ . On constate l'apparition d'un écoulement induit stationnaire, dit écoulement redressé, composé de paires de tourbillons stationnaires dans les quatre cadrans. On remarque que ces tourbillons s'étendent sur des dimensions caractéristiques grandes devant celle du diamètre du cylindre. Le fluide se rapproche de la surface du cylindre dans l'axe d'oscillation et fuit sa surface dans la direction orthogonale à l'oscillation. Le champ de pression acoustique étant sinusoïdal et donc à valeur moyenne temporelle nulle, il paraît assez peu intuitif qu'il puisse générer un écoulement stationnaire (à valeur moyenne non nulle). L'objectif de cette partie est de lever cet apparent paradoxe.

### III.A – Diffusion de la vorticité dans une couche limite oscillante au voisinage d'une plaque plane et infinie, analogie électromagnétique

Cette sous-partie est consacrée à l'étude de la diffusion de la vorticité dans la couche limite par une analogie électromagnétique basée sur la diffusion du champ électrique dans un conducteur. Considérons une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation  $\omega$  à laquelle est attachée le champ électrique  $\vec{E}(z, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kz))\vec{e}_x$  en notations complexes. Celui-ci se propage suivant l'axe ( $Oz$ ), dans le sens des  $z$  croissants, dans un milieu conducteur illimité localement neutre, homogène et isotrope occupant le demi-espace  $z > 0$ . On note  $n$  la densité particulaire en électrons libres dont la masse est notée  $m$  et la charge  $-e$ . On se place dans un domaine de fréquence où l'on peut considérer que la conductivité du milieu est réelle ; elle est notée  $\sigma_0$ .

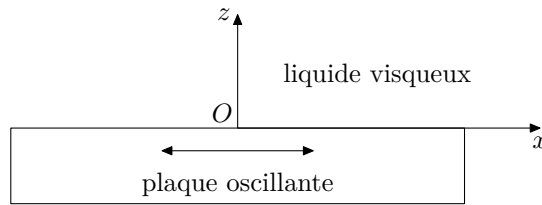
**Q 16.**  crire, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires, la loi d'Ohm locale dans le conducteur ainsi que les quatre équations de Maxwell dans le conducteur. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le métal, dite équation de diffusion du champ.

**Q 17.** Déterminer la relation de dispersion dans le conducteur. En déduire le vecteur d'onde complexe  $\underline{k}$  en fonction de l'épaisseur de peau  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$ .

**Q 18.** Exprimer le champ  $E(z, t)$  en notation réelle dans le conducteur et tracer son allure en fonction de  $z$     $t$  fixé. Expliquer, en s'appuyant sur ce tracé, ce qu'est l'effet de peau en donnant une interprétation concrète à l'épaisseur de peau.

**Q 19.** Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une portion de métal de section  $S$  dans le plan ( $Oxy$ ) et d'extension infinie selon ( $Oz$ ) dans le sens des  $z$  croissants. La fréquence de l'onde étant fixée, que devient l'épaisseur de peau, lorsque la conductivité  $\sigma_0$  tend vers l'infini ? Dans cette limite, que peut-on dire des champs et des charges dans le conducteur ?

Considérons à présent dans un fluide initialement au repos une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan ( $Oxy$ ). Un fluide visqueux incompressible de viscosité  $\eta$  est au contact de cette plaque sur une grande épaisseur, tout se passe alors comme si le fluide occupait le demi-espace  $z > 0$ . La plaque oscille à la pulsation  $\omega$ , sa vitesse étant de la forme  $V_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$  (figure 8). On néglige la pesanteur. Compte tenu des invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque, on admet que le champ de vitesse dans le fluide ne dépend que du temps et de la cote  $z$ , soit  $\vec{v} = v(z, t)\vec{e}_x$  et  $P = P(z)$ .



**Figure 8** Schéma de la plaque oscillante

**Q 20.** Montrer que le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$  est nul pour ce problème.

**Q 21.** En déduire alors que la pression dans le fluide est constante et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

où  $\nu_c = \frac{\eta}{\rho}$  est la viscosité cinématique du fluide.

**Q 22.** On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme  $\vec{v} = \underline{f}(z)e^{i\omega t}\vec{e}_z$ . Donner la forme générale de  $\underline{f}(z)$ , en introduisant la quantité  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu_c}{\omega}}$ .

**Q 23.** En étudiant le comportement aux limites du fluide, donner l'expression du champ de vitesse réel dans le fluide et commenter.

**Q 24.** Proposer une analogie avec la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur traitée précédemment et analyser en particulier le cas limite  $\delta \rightarrow 0$ . Compléter pour cela le tableau fourni en figure C du document réponse en justifiant ces résultats.

**Q 25.** Justifier ainsi que le terme  $\eta\overrightarrow{\Delta}(\vec{v})$  de l'équation de Navier-Stokes soit qualifié de terme diffusif.

**Q 26.** Déterminer le champ de vecteurs vorticité  $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}$ . Que peut-on dire de  $\vec{\Omega}$  en dehors de la couche limite d'épaisseur de l'ordre de grandeur de  $\delta$  au-dessus de la plaque ?

On admettra pour la suite la portée générale de ce résultat.

### III.B – Cas d'un cylindre oscillant à basse fréquence

On s'intéresse dans cette partie au cas du cylindre oscillant introduit sur la figure 7. Dans le cas présent d'un solide oscillant, de géométrie différente de la plaque plane et infinie précédemment traitée, il nous faut vérifier que le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$  est encore négligeable dans l'équation de Navier-Stokes.

**Q 27.** Justifier, en vous appuyant sur la figure 7, que l'expérience modélisant l'action de l'onde sonore basse fréquence sur la lame de savon correspond à une situation pour laquelle  $\delta \gg d$ .

**Q 28.** Exprimer la pulsation limite  $\omega_{\text{lim}}$  au-delà de laquelle cette condition n'est plus vérifiée.

**Q 29.** Donner l'expression du nombre de Reynolds en fonction de la masse volumique  $\rho$ , de la viscosité  $\eta$ , de la dimension caractéristique  $L$  et de la vitesse  $v$  de l'écoulement. Montrer par une analyse en ordre de grandeur

que le nombre de Reynolds de l'écoulement est le rapport  $R_e = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta\overrightarrow{\Delta}(\vec{v})\|}$ . Proposer ainsi une interprétation physique du nombre de Reynolds.

**Q 30.** Donner une estimation de la vitesse permettant de s'assurer que l'écoulement est à bas  $R_e$  (pour lequel  $R_e \ll 1$ ).

Cette condition est supposée vérifiée dans le cadre de l'expérience décrite ici.

**Q 31.** Justifier alors que l'équation de Navier-Stokes s'écrit sous la forme

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta\overrightarrow{\Delta}(\vec{v}).$$

**Q 32.** Exprimer en ordre de grandeur la vitesse  $v$  de l'écoulement induit par les oscillations du cylindre en fonction de leur amplitude  $a$  et de leur pulsation  $\omega$ .

**Q 33.** Montrer, par une étude d'ordres de grandeur, que l'équation de Navier-Stokes s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{\text{grad}} P \approx \eta\overrightarrow{\Delta}(\vec{v}).$$

**Q 34.** Le caractère périodique du mouvement du cylindre traduit la variation purement sinusoïdale de pression acoustique générée par le haut-parleur. En passant en valeur moyenne temporelle (notée  $\langle \cdot \rangle$ ) sur l'équation précédente, le caractère stationnaire de l'écoulement induit autour du cylindre (c'est-à-dire les tourbillons stationnaires observés) est-il explicable ? Est-il possible de rendre compte des observations sans tenir compte du terme convectif non linéaire ?

Pour résoudre le problème, on peut rechercher la solution de l'équation de Navier-Stokes par approximation successive en menant une méthode dite perturbative. La vitesse solution de l'équation linéaire obtenue à la question 33, dans laquelle le terme convectif non linéaire a été négligé, est ici notée  $\vec{v}_p$  ( $p$  pour écoulement principal). Cette vitesse doit être à présent corrigée par une petite perturbation stationnaire  $\vec{v}_s$  apportée par la prise en compte du terme convectif non linéaire dans l'équation précédente. C'est cette correction qui est responsable des tourbillons stationnaires observés. Il convient de montrer que cette correction est bien « petite » et stationnaire (et donc non nulle en valeur moyenne temporelle).

La méthode communément utilisée est la suivante : la vitesse totale de l'écoulement est notée  $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_s$ . On utilise cette forme de la vitesse corrigée dans l'équation de la dynamique du fluide, qui à présent tient compte du terme non linéaire pour écrire  $\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} \approx -\text{grad} P + \eta \Delta(\vec{v})$ .

**Q 35.** Déterminer l'ordre de grandeur de chacun des termes de l'équation en fonction des vitesses  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_s$  et de la dimension caractéristique  $d$ .

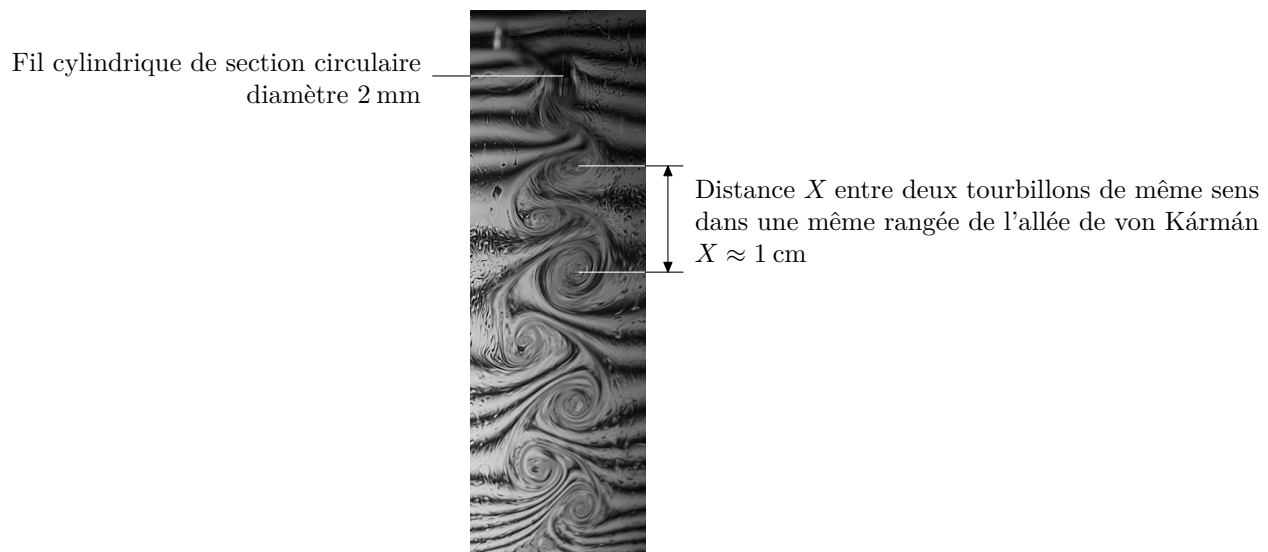
**Q 36.** En se limitant au premier ordre en  $v_s$ , justifier que la vitesse stationnaire  $v_s$  est de l'ordre de grandeur de  $\frac{\rho d}{\eta} \langle \|\vec{v}_p\|^2 \rangle$ .

**Q 37.** Peut-on légitimement supposer que  $\vec{v}_s$  est une « petite » perturbation de l'écoulement principal ?

**Q 38.** Conclure pour expliquer le caractère stationnaire de l'écoulement induit par les oscillations périodiques du cylindre. Pourquoi parle-t-on, par analogie, d'écoulement redressé ?

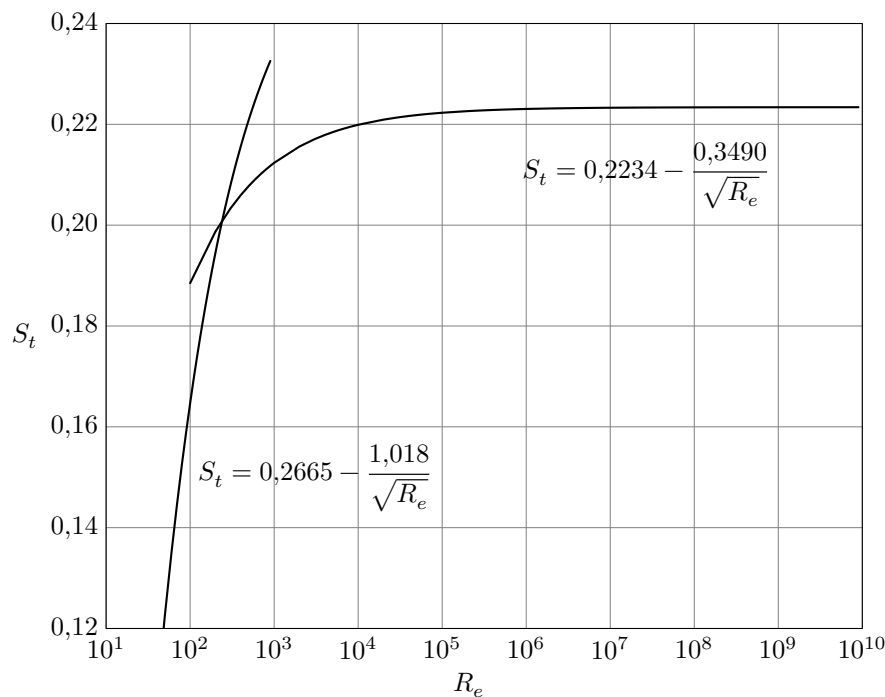
## IV Étude d'une allée de von Kármán dans une lame de savon

Pour obtenir une allée de von Kármán on réalise l'expérience suivante où l'on place une tige de section cylindrique orthogonalement au plan d'une lame de savon. Cette lame est de grande dimension verticale et supposée au repos loin de la tige. La tige est déplacée à une vitesse  $v_\infty$ , telle que  $v_\infty \approx 2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , supposée constante et orientée selon la verticale ascendante. Le déplacement du cylindre ainsi que l'écoulement est filmé avec une caméra rapide. Le diamètre du fil est de 2 mm. On constate alors l'apparition d'une allée tourbillonnaire, organisée en deux rangées de tourbillons émis périodiquement avec une fréquence  $f$ . Ces tourbillons, de même sens de rotation, forment l'allée de von Kármán, visible sur la photographie de la figure 9. On estime que la vitesse moyenne d'avancement dans l'écoulement des tourbillons ayant quitté l'obstacle est égale à la moitié de celle de la tige, soit  $v_t \approx \frac{1}{2} v_\infty$  (c'est la vitesse à laquelle sont advectés les tourbillons par l'écoulement). On admet que la masse volumique et la viscosité de l'eau savonneuse sont les mêmes que celles de l'eau pure.



**Figure 9** Allée de von Kármán dans une lame de savon (image de Guillaume Durey)

Pour un écoulement instationnaire de vitesse  $v_\infty$  et de dimension caractéristique  $L$ , faisant intervenir un phénomène temporellement variable de fréquence  $f$ , on définit le nombre sans dimension, dit nombre de Strouhal,  $S_t = \frac{fL}{v_\infty}$  : il s'agit de la fréquence du phénomène adimensionnée par les grandeurs  $v_\infty$  et  $L$ .  $S_t$  est fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  comme le montre la figure 10. Lorsqu'on place un cylindre dans un écoulement plan, une allée de von Kármán apparaît dans le sillage de l'obstacle à partir d'une valeur de  $R_e$  de l'ordre de 40. La valeur de  $S_t$  associée prend, suivant la valeur de  $R_e$  de l'écoulement, des valeurs comprises entre 0,1 et 0,2 environ. De telles allées tourbillonnaires se manifestent à de nombreuses échelles, avec des valeurs de  $R_e$  allant de quelques dizaines pour des écoulements en laboratoire jusqu'à plusieurs milliards pour les écoulements atmosphériques.



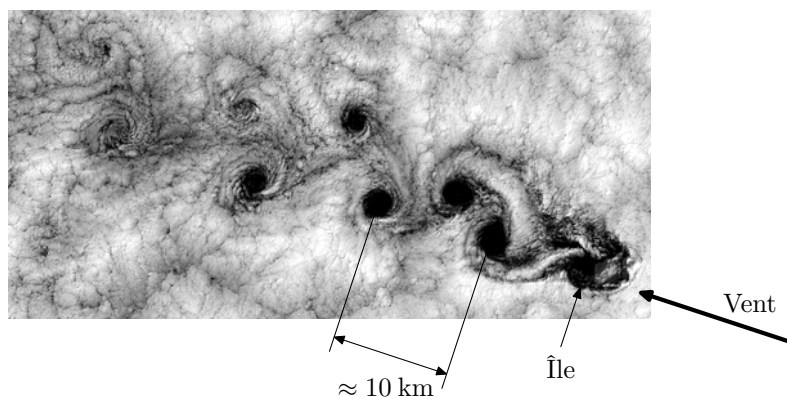
**Figure 10** Variation du nombre de Strouhal  $S_t$  avec le nombre de Reynolds  $R_e$  (d'après Williamson et Brown)

Pour une valeur de  $R_e < 2 \times 10^2$ , le nombre de Strouhal peut être estimé en utilisant l'expression  $S_t = 0,2665 - \frac{1,018}{\sqrt{R_e}}$ . Pour une valeur de  $R_e > 2 \times 10^2$ , le nombre de Strouhal peut être estimé en utilisant  $S_t = 0,2234 - \frac{0,3490}{\sqrt{R_e}}$ .

**Q 39.** Montrer que le nombre de Strouhal peut être interprété comme le rapport de deux temps caractéristiques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  dont le sens physique sera explicité.

**Q 40.** Compte tenu des données fournies et des résultats de l'expérience, peut-on considérer que le modèle développé rend compte quantitativement des observations expérimentales ?

La figure 11 présente une photo satellite d'une allée de von Kármán dans le sillage d'une petite île de l'archipel Juan Fernandez au large du Chili. On observe la couverture nuageuse entraînée dans l'écoulement plan du vent dominant et le développement de tourbillons symétriques organisés en une allée de von Kármán dans le sillage de l'île. La vitesse du vent est de  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , la distance entre deux tourbillons de même sens est estimée à environ 10 km.



**Figure 11** Allées de von Kármán dans le sillage d'une île de l'archipel Juan Fernandez (image NASA)

**Q 41.** En utilisant une modélisation adaptée et détaillée, proposer une estimation de la largeur de l'île que vous confronterez avec l'échelle donnée sur l'image.

• • • FIN • • •



|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

Signature

[illegible][illegible]

Épreuve : Physique 1 PC

## Feville

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

### Question 1

Lame d'air équivalente

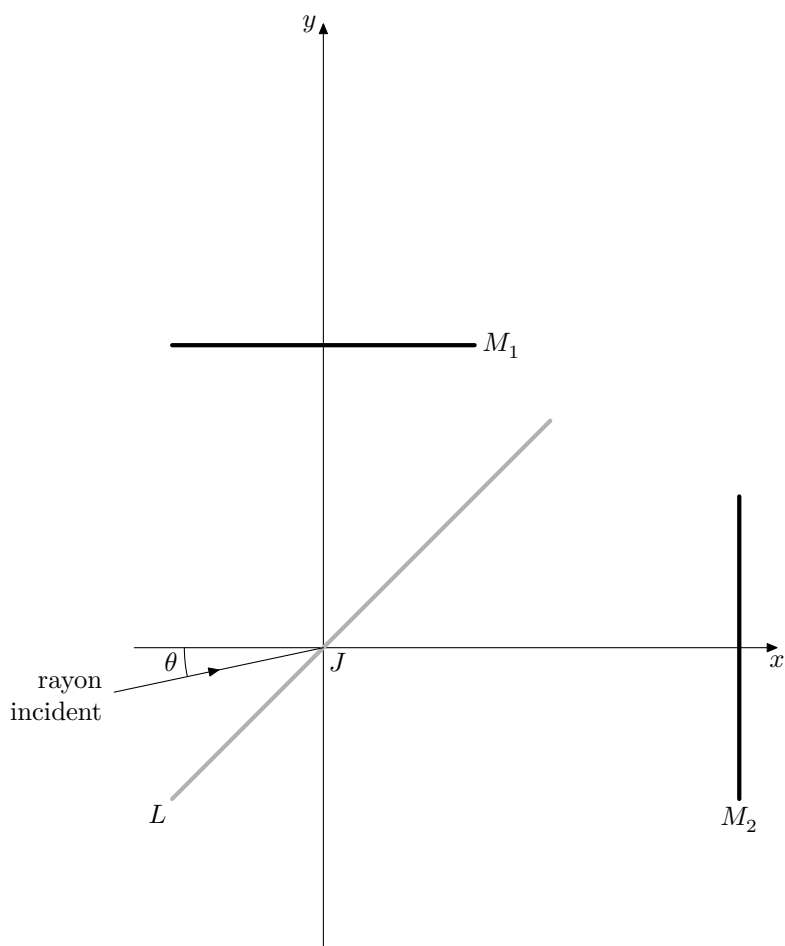


Figure A

**Ne rien écrire**

**dans la partie barrée**

P036-DR/2021-03-13 11:52:04

## Question 11



**Figure B**



Question 24

| <i>Électromagnétisme</i>                                                       | <i>Mécanique des fluides</i> |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Champ électrique $\vec{E}$                                                     |                              |
| Profondeur de peau $\delta$<br>évolution en $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$          |                              |
| Cas $\delta \rightarrow 0$<br>conducteur parfait $\sigma_0 \rightarrow \infty$ |                              |

Figure C

## Formulaire et données

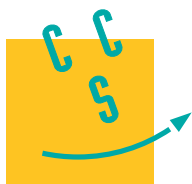
L'espace est rapporté au trièdre direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On donne, en coordonnées cartésiennes, les opérateurs

- gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}} \xi = \vec{\nabla}(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \vec{e}_z$ ;
- divergence :  $\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  ;
- rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$ ;
- laplacien scalaire :  $\Delta(\xi) = \nabla^2(\xi) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$ ;
- laplacien vectoriel :  $\overrightarrow{\Delta}(\vec{E}) = \nabla^2(\vec{E}) = \Delta(E_x) \vec{e}_x + \Delta(E_y) \vec{e}_y + \Delta(E_z) \vec{e}_z$ .

On rappelle par ailleurs que

- le rotationnel d'un gradient est nul :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} \xi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}(\xi) = \vec{0}$ ;
- la divergence d'un rotationnel est nulle :  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0$ ;
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div } \vec{B}) \vec{A} - (\text{div } \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$ ;
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \overrightarrow{\Delta}(\vec{A})$ .

|                                                     | Eau                                 | Air                                 |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) | $\rho_e = 1,0 \times 10^3$          | $\rho_a = 1,3$                      |
| Viscosité dynamique ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )  | $\eta_e \approx 1,0 \times 10^{-3}$ | $\eta_a \approx 1,8 \times 10^{-5}$ |

*Le feu et l'eau*

Le 15 avril 2019, un violent incendie s'est déclaré dans la cathédrale de Notre-Dame de Paris. La charpente constituée de milliers de poutres provenant de chênes centenaires a entièrement brûlé, la flèche réalisée en plomb s'est effondrée et la structure a été endommagée. Ce sujet traite quelques points concernant cet incendie. Il est constitué de trois parties.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche et les choix effectués et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

**I Le feu**

Le processus de combustion est une réaction chimique d'oxydation d'un combustible par un comburant (rôle le plus souvent joué par l'oxygène de l'air). Pour des raisons cinétiques, la combustion ne se produit que lorsque les réactifs sont portés à une température élevée. Il est donc nécessaire de fournir de l'énergie — généralement sous forme de transfert thermique — pour amorcer la combustion. Un feu est ainsi la résultante de la combinaison de ces trois éléments (combustible, comburant et énergie). En cas de suppression d'un élément de ce « triangle du feu », la combustion s'arrête ou le feu ne prend pas.

**I.A – Démarrage d'une combustion**

Cette sous-partie s'intéresse au rôle de la température dans le triangle du feu.

La réaction combustible-comburant est une réaction d'oxydation exothermique qui dégage de l'énergie et auto-entretient le feu.

**Q 1.** Rappel de la loi empirique d'Arrhenius et expliquer pourquoi la plupart des réactions chimiques sont accélérées par une augmentation de la température.

**Q 2.** Pour quelle phase (solide, liquide ou gaz) du combustible, l'amorçage d'une réaction de combustion devrait-il être plus aisé ? Justifier succinctement.

On appelle *point d'auto-inflammation*, la température à partir de laquelle une substance s'enflamme spontanément dans l'atmosphère normale. Pour une feuille de papier typique, le point d'auto-inflammation est de 232 °C. Le papier est ainsi facilement inflammable si l'on concentre, à l'aide d'une loupe, les rayons du soleil sur une feuille.

On place une feuille de papier noir (de masse surfacique  $\sigma = 100 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$  et de capacité thermique massique  $c = 1,4 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ ) au foyer d'une lentille convergente de distance focale  $f' = 10 \text{ cm}$  et de rayon  $r = 5 \text{ cm}$ . L'axe optique est dirigé selon la direction moyenne des rayons lumineux solaires. La lentille absorbe environ 25 % du rayonnement solaire dont le flux surfacique moyen est égal à  $800 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

**Q 3.** Déterminer la durée minimale nécessaire à l'auto-inflammation de la feuille de papier, de température initiale 20 °C, sachant que le Soleil est vu sous un diamètre angulaire apparent  $\alpha = 32$  minutes d'arc.

**Q 4.** La durée réelle devrait-elle être plus importante ou plus faible ? Le choix du papier noir est-il judicieux ?

**I.B – Combustion du bois**

Un solide, en particulier le bois, passe par plusieurs phases au cours de son échauffement avant de brûler, avec apparition des flammes. D'abord l'eau qu'il contient s'évapore autour de 100 °C à la pression atmosphérique, puis les constituants du bois commencent à se décomposer ; il s'agit du phénomène de pyrolyse, généralement observé entre 250 °C et 500 °C, qui conduit à la formation de gaz. C'est une partie de l'énergie dégagée par la combustion de ces gaz de pyrolyse dans le dioxygène de l'air qui permet de perpétuer l'ensemble de ces étapes. Lorsque le processus de pyrolyse est terminé et qu'il n'y a plus de substances volatiles, il subsiste un résidu charbonneux rougeoyant qui dégage encore beaucoup d'énergie, sa surface extérieure atteignant 800 °C.

Le bois de chêne est composé principalement d'environ 25 % de lignine ( $\text{C}_{40}\text{H}_{44}\text{O}_6$ ) et 75 % de carbohydrates  $\text{C}_n(\text{H}_2\text{O})_m$  (cellulose ( $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_5$ )<sub>p</sub> et hemicellulose).



**Figure 1** Différentes phases de combustion du bois<sup>1</sup>

**Q 5.** Une analyse élémentaire a fourni les pourcentages massiques respectifs en élément carbone, hydrogène et oxygène de 50 %, 6 % et 44 %. Montrer que, si le bois pouvait être considéré comme un corps pur, sa formule chimique serait  $\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}$ .

Dans la suite, on assimilera le bois à un corps pur de formule chimique brute  $\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}$ .

**Q 6.** Écrire l'équation-bilan de la réaction de combustion du bois avec l'oxygène de l'air. La combustion est supposée complète et conduire à la formation de  $\text{CO}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$ .

On appelle pouvoir calorifique inférieur (PCI) l'énergie dégagée par la combustion complète d'un kilogramme de combustible à pression constante, l'eau produite étant sous forme de vapeur.

**Q 7.** Pour le chêne, on mesure un PCI de  $19 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ . Quelle serait la valeur numérique de l'enthalpie de réaction de cette combustion ?

**Q 8.** En admettant qu'en fin de pyrolyse, les gaz libérés soient pour l'essentiel du dihydrogène  $\text{H}_2$  et du monoxyde de carbone  $\text{CO}$ , retrouver, à partir des données tabulées, la valeur de l'enthalpie standard de réaction de la combustion de ces gaz de pyrolyse dans le dioxygène de l'air. Conclure.

**Q 9.** Dans une pièce calorifugée et fermée, initialement à  $20^\circ\text{C}$  et de capacité thermique totale de l'ordre de  $6,0 \times 10^5 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ , brûle une bûche de bois de chêne de 1 kg. Quelle est la température maximale atteinte dans la pièce ? Commenter.

### **I.C – Propagation de la chaleur dans le combustible**

**Q 10.** Citer les trois modes de transfert thermique et donner leurs spécificités.

**Q 11.** Indiquer le rôle de chacun de ces modes dans la propagation d'un incendie.

On s'intéresse à l'avancée du front de combustion, au cours du temps, d'une poutre qui entre en combustion par l'une de ses extrémités. On fait l'hypothèse que les transferts thermiques dans le bois sont de nature purement diffusive.

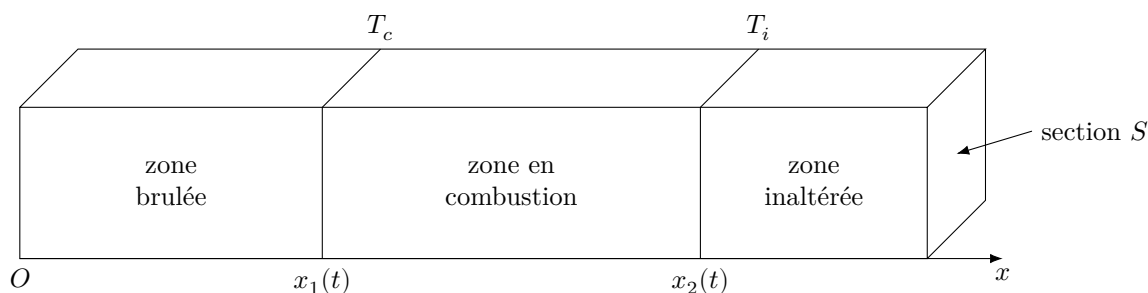
La poutre en combustion est un parallélépipède, infiniment long dans la direction ( $Ox$ ). La température sur une section transverse d'aire  $S$  de la poutre est supposée uniforme. On note  $T(x, t)$  la température à l'abscisse  $x$  de la poutre à un instant  $t$ . On suppose que le feu prend à l'une de ses extrémités d'abscisse nulle à un instant pris comme origine des temps ( $t = 0$ ). À un instant  $t$  ultérieur, on estime, dans ce modèle simple, que la poutre peut-être découpée en trois zones (figure 2) :

- la zone ayant brûlé entre l'instant initial et l'instant  $t$ , dont la température est supposée constante et égale à la température  $T_c$ , dite température de combustion,  $T_c = 720 \text{ K}$  ;
- une zone dans laquelle se déroule la combustion ;
- la zone encore inaltérée.

On note  $x_1(t)$  l'abscisse de la frontière entre la zone brûlée et la zone de combustion et  $x_2(t)$  l'abscisse de la frontière entre la zone de combustion et la zone inaltérée. Loin de  $x_2(t)$ , la température est supposée constante et égale à  $T_\infty = 320 \text{ K}$ .

La température  $T(x, t)$  dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion  $T_c$  et d'inflammation du bois  $T_i = 520 \text{ K}$ , conduisant à l'avancement des frontières  $x_1$  et  $x_2$  au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de brûler, on a toujours  $T(x_1(t), t) = T_c$  et  $T(x_2(t), t) = T_i$ .

<sup>1</sup> Benoît BRANDELET. (2016). *Caractérisation physico-chimique des particules issues du chauffage domestique au bois*. Thèse de doctorat. Université de Lorraine.



**Figure 2** Schéma de la poutre à l'instant  $t$

Les valeurs des conductivités thermiques, notées  $\lambda$ , et des diffusivités thermiques, notées  $D$ , du charbon et du bois étant relativement proches, nous considérerons qu'elles sont égales dans les trois zones. Nous prendrons comme valeur de la diffusivité thermique  $D = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On rappelle que la diffusivité thermique d'un matériau est le rapport entre sa conductivité thermique et sa capacité thermique volumique à pression constante.

On note  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante du bois dans la zone de combustion,  $\mu$  sa masse volumique et  $P_c$  la puissance thermique massique correspondant à l'enthalpie de réaction de combustion par unité de masse de bois et par unité de temps. On donne  $P_c = 4,0 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $c_p = 2,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**Q 12.** Effectuer un bilan d'enthalpie sur un élément de longueur  $dx$  de poutre de bois de section  $S$  compris entre  $x$  et  $x + dx$ , dans la zone de combustion. En supposant la loi de Fourier applicable, en déduire l'équation régissant l'évolution de la température  $T(x, t)$  dans la zone de combustion. Mettre cette équation sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa$$

en précisant les expressions de  $D$  et  $\kappa$  en fonction des données du problème.

**Q 13.** De même, écrire l'équation régissant l'évolution de la température  $T(x, t)$  dans la zone non altérée.

On souhaite dans un premier temps vérifier si l'on peut se placer dans le cadre simplifié de l'approximation des régimes quasi stationnaires thermiques.

**Q 14.** Calculer la durée caractéristique  $\tau_d$  de diffusion thermique pour une longueur d'une dizaine de centimètres d'un tronçon de poutre. Comparer ce temps de diffusion à l'ordre de grandeur de la durée  $\tau_c$  de combustion d'une même longueur de poutre. Conclure.

On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose  $u = x - ct$  où  $c$  est une constante positive et on effectue le changement de variables tel que  $T(x, t) = \theta(u)$ .

**Q 15.** Donner une interprétation de la quantité  $c$ .

**Q 16.** Déterminer les équations différentielles régissant l'évolution de la dérivée de  $\theta(u)$  dans la zone inaltérée et dans la zone en combustion.

**Q 17.** Montrer que la forme générale des solutions  $\theta_i(u)$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) dans chacune des trois zones respectives peut s'écrire

$$\begin{cases} \theta_1(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1, \\ \theta_2(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2, \\ \theta_3(u) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) & \text{pour } u > u_2. \end{cases}$$

**Q 18.** Déterminer, en justifiant la réponse, les expressions de  $a_1$  et  $a_3$  en fonction des données.

**Q 19.** Tracer l'allure de la fonction  $\theta(u)$  dans la poutre.

**Q 20.** Quelles conditions permettent d'obtenir les constantes  $a_2$ ,  $b_2$  et  $b_3$  ? On ne cherchera pas à les expliciter littéralement.

On montre que la constante  $c$  est solution de l'équation

$$\frac{c^2}{\kappa D} (T_c - T_\infty) = -\ln \left( 1 - \frac{c^2}{\kappa D} (T_i - T_\infty) \right).$$

On se propose de déterminer la valeur de  $c$  par une méthode graphique. La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \ln(1 - x)$  est fournie en annexe.

**Q 21.** Déterminer une valeur approchée de  $c$ . Conclure.

**Q 22.** Estimer la durée de combustion complète d'un mètre de poutre.

## II Le plomb

La toiture de la cathédrale Notre-Dame de Paris contenait du plomb qui a été porté au dessus de la température de formation des oxydes. Ainsi, les fumées de l'incendie ont pris une coloration jaune.

Les données concernant l'élément plomb figurent en annexe.

### II.A – L'élément plomb – Oxydation du plomb

On supposera que dans le domaine de température étudié, l'enthalpie standard de formation et l'entropie molaire standard sont indépendantes de la température en dehors des changements d'état.

**Q 23.** Le plomb solide cristallise dans un réseau cubique face centrée. Calculer le paramètre de maille  $a$ .

**Q 24.** Lors de l'incendie, la température a dépassé 800 °C. Sous quel(s) état(s) pouvait-on trouver du plomb sur les lieux de l'incendie ?

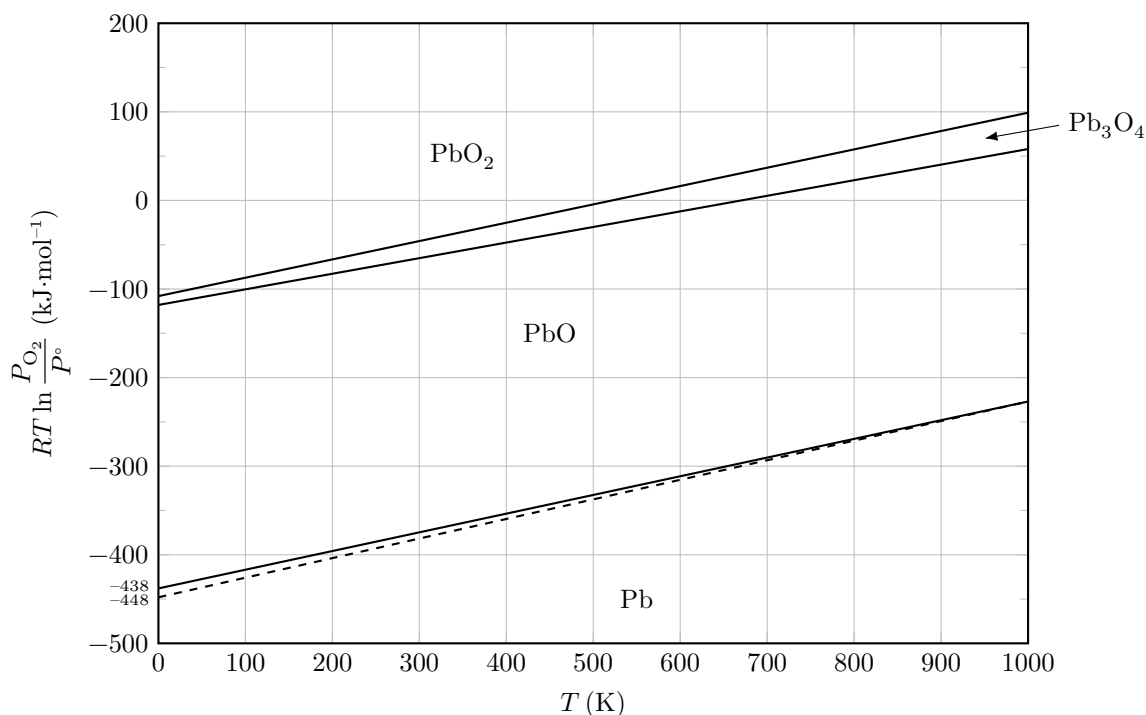
**Q 25.** Écrire les réactions du dioxygène de l'air sur le plomb solide conduisant aux oxydes  $\text{PbO}_{(s)}$ ,  $\text{Pb}_3\text{O}_{4(s)}$  et  $\text{PbO}_{2(s)}$  à température ambiante. On prendra un coefficient stœchiométrique de 1 pour le dioxygène.

**Q 26.** Préciser la valeur du nombre d'oxydation du plomb dans ces oxydes. Commenter la valeur pour  $\text{Pb}_3\text{O}_{4(s)}$ .

**Q 27.** Calculer la constante d'équilibre à 298 K de la réaction conduisant à  $\text{PbO}_{(s)}$  à partir des données thermodynamiques fournies en fin d'énoncé.

**Q 28.** Calculer la variance de chacun de ces trois équilibres. Quel serait l'effet d'une diminution de la pression en dioxygène à température constante ?

La figure 3 donne les domaines d'existence du plomb et de ses oxydes dans un diagramme  $RT \ln \frac{P_{\text{O}_2}}{P^\circ} = f(T)$ .



**Figure 3** Domaines d'existence

**Q 29.** Retrouver la valeur de la constante d'équilibre calculée à la question 27.

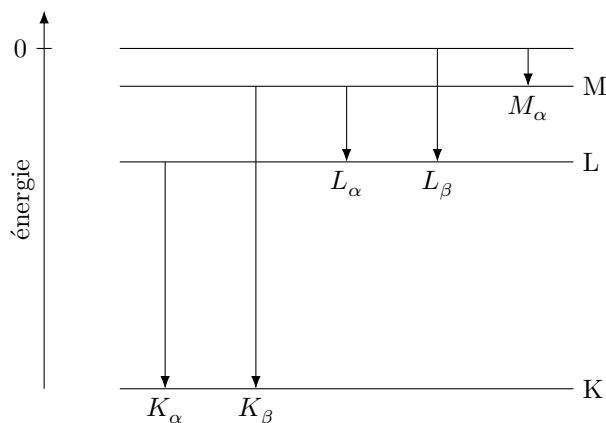
**Q 30.** Quel(s) composé(s) du plomb peu(ven)t être présent(s) dans un nuage de fumée à température 500 °C ?

### II.B – Détection du plomb

Différents organismes ont effectué des mesures de teneur en plomb dans les zones atteintes par les fumées de l'incendie. Le plomb est détecté par fluorescence X, méthode non destructive qui consiste à irradier un échantillon par des rayons X énergétiques qui arrachent un électron interne (couche K). Les atomes ainsi excités se désexcitent, les électrons descendent vers des niveaux d'énergie inférieurs en émettant des photons. Les énergies de ces photons sont caractéristiques de chacun des éléments présents dans l'échantillon. C'est ainsi que le spectre obtenu permet de reconnaître la présence et la quantité de plomb dans un échantillon.

Le tableau 1 donne les valeurs des énergies pour les niveaux K, L et M du plomb.

Les rayons utilisés sont produits à partir de cadmium  $^{109}_{48}\text{Cd}$  radioactif qui, en se désintégrant émet un photon  $\gamma$  d'énergie 88 keV et des rayons X ; sa durée de vie vaut 5,3 ans. Les notices des constructeurs précisent que les



**Figure 4** Diagramme énergétique simplifié du plomb —  
Les couches K, L et M correspondent respectivement à des  
états de nombre quantique principal  $n = 1, 2, 3$

| Niveau        | K     | L     | M    |
|---------------|-------|-------|------|
| Énergie (keV) | -88,0 | -14,3 | -3,0 |

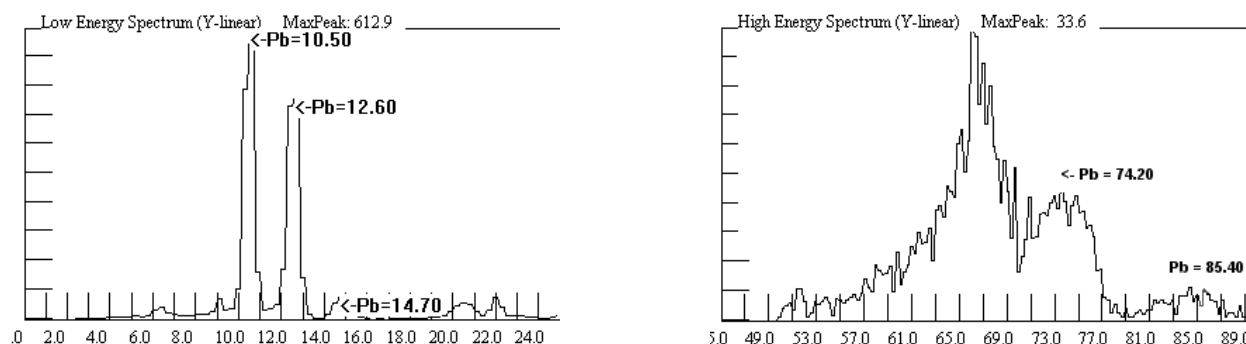
**Tableau 1** Énergies pour les niveaux K, L et M de l'atome de plomb

appareils à source de cadmium détectent les raies K et L du plomb, alors que les appareils à tube à rayons X (énergie 15 keV) détectent les raies L du plomb mais pas les raies K.

**Q 31.** Justifier cette dernière assertion.

**Q 32.** Quelles sont les énergies libérées lors des passages des couches M, puis L, au niveau fondamental ? Les photons correspondants sont-ils visibles ?

**Q 33.** La figure 5 donne deux spectres obtenus pour un échantillon contenant du plomb. L'abscisse est l'énergie du rayonnement émis exprimée en keV. Quelles raies ces spectres permettent-ils d'identifier ? Le modèle simple proposé permet-il de rendre compte des deux raies à 10,5 keV et 12,6 keV ? Proposer une explication possible pour l'existence de ces deux raies.



**Figure 5** Spectres rayons X obtenus pour un échantillon de plomb

### III L'eau

#### III.A – Extinction du feu

Comme évoqué en première partie, éteindre un feu nécessite la suppression d'un élément du triangle du feu : le combustible, le comburant ou l'apport d'énergie nécessaire à l'amorçage de la combustion. L'eau, par ses deux effets, permet d'agir sur deux des éléments du triangle du feu :

- l'eau présente une grande capacité thermique et une enthalpie de vaporisation élevée, elle utilise de l'énergie pour se vaporiser. Elle peut donc « refroidir » le feu ;
- l'eau vaporisée remplace partiellement l'air, et donc le dioxygène, à proximité des gaz de pyrolyse et des flammes.

**Q 34.** Vérifier dans un premier temps que la molécule d'eau ne se décompose pas en  $H_2$  et  $O_2$  à haute température.

**Q 35.** Quelle est l'énergie nécessaire pour vaporiser à pression constante 1 kg d'eau initialement à 15 °C et de température finale 800 °C ?



**Q 36.** Les pompiers appellent *puissance d'un feu* l'énergie thermique qu'il dégage chaque seconde. On constate que, pendant l'aspersion d'eau, seulement un tiers de l'eau se vaporise. Estimer dans ce cas la puissance de feu que peut traiter une lance de débit  $500 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$ . Dans le cas de l'incendie de Notre-Dame, les pompiers ont estimé que la puissance du feu a atteint  $1500 \text{ MW}$ . Commenter.

**Q 37.** Estimer la quantité d'eau réellement évaporée par minute, toujours pour un débit de  $500 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$ . En déduire le volume de vapeur d'eau produit par minute.

### III.B – Lances à incendie

Pour éteindre les feux, les pompiers utilisent des lances à incendie, reliées à de longs tuyaux acheminant l'eau depuis des fourgons ou des moto-pompes. Ces lances permettent de régler le débit et la forme du jet. Lors de l'incendie de Notre-Dame de Paris, le débit  $Q$  des lances utilisées était de l'ordre de  $500 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$  et le diamètre  $d$  de  $70 \text{ mm}$ .

**Q 38.** Estimer la valeur de la vitesse d'éjection  $V_e$  du jet arrosant la charpente du chevet de la cathédrale situé le plus en avant sur la photographie présentée figure 6. On admettra que cette image ne présente pas de déformation de perspective.



**Figure 6** Photographie du chevet (côté Est) de Notre-Dame de Paris le soir de l'incendie

**Q 39.** Comparer la valeur de  $V_e$  à la vitesse de l'eau dans le tuyau et expliquer la différence observée.

L'eau utilisée est pompée dans un camion-citerne ou fourgon-pompe stationné sur la route (figure 7). On appelle  $\Delta P = P_p - P_l$ , la différence de pression entre la sortie de la pompe (pression  $P_p$ ) et l'extrémité de la lance (pression  $P_l$ ).

**Q 40.** En supposant le fluide parfait, quelle doit être, en régime permanent, la différence de pression pour que l'eau arrive au niveau d'une nacelle située à  $30 \text{ m}$  de hauteur ?

En réalité, l'eau est visqueuse ; il est nécessaire de prendre en compte des frottements sur la paroi interne des tuyaux.

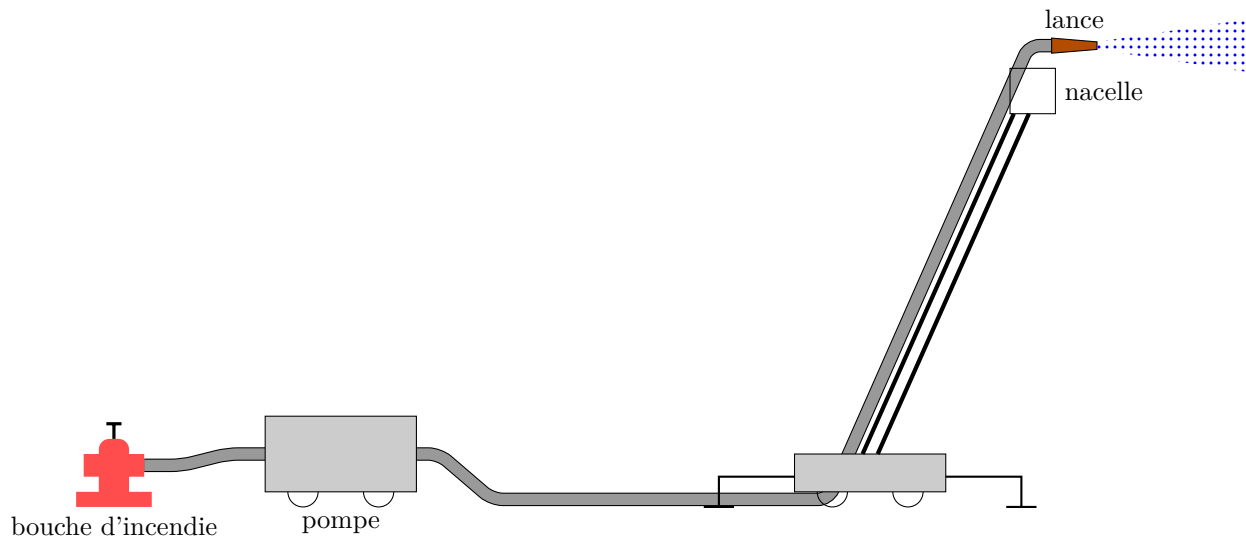
**Q 41.** Pour le débit des lances étudiées, l'écoulement dans les tuyaux est-il laminaire ou turbulent ?

Les frottements induisent une perte de charge (diminution de pression) lors du passage dans les tuyaux. La perte de charge linéique, notée  $J$ , est donnée par la formule de Darcy-Weisbach

$$J = f \frac{\rho V^2}{2d}$$

où  $d$  est le diamètre intérieur du tuyau,  $V$  la vitesse moyenne du fluide,  $\rho$  sa masse volumique et  $f$  un facteur pouvant dépendre du nombre de Reynolds et de la rugosité relative  $\varepsilon/d$ .

**Q 42.** Quelle est la dimension du facteur  $f$  ?



**Figure 7** Schéma d'acheminement de l'eau depuis la prise d'eau jusqu'à la nacelle

Pour un écoulement laminaire, le facteur  $f$  vaut  $f = 64/R_e$  où  $R_e$  est le nombre de Reynolds de l'écoulement. Si l'écoulement est turbulent, on utilise la formule de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right)$$

où  $\varepsilon$  est la rugosité, c'est-à-dire la dimension moyenne des aspérités de la paroi interne du tuyau. Cette formule de Colebrook n'est pas soluble littéralement et les pompiers utilisent des abaques ou des tableaux qui donnent les pertes de charge. Le tableau 2 donne les pertes de charge en fonction du débit et de la longueur d'un tuyau de diamètre 70 mm.

| Débit (L·min <sup>-1</sup> ) | Longueur (m) |     |      |     |     |     |      |      |      |      |      |
|------------------------------|--------------|-----|------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
|                              | 40           | 80  | 100  | 120 | 160 | 200 | 240  | 280  | 320  | 360  | 400  |
| 125                          | 0,0          | 0,0 | 0,0  | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,1  | 0,1  | 0,1  | 0,1  | 0,1  |
| 250                          | 0,1          | 0,1 | 0,1  | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3  | 0,4  | 0,4  | 0,5  | 0,6  |
| 375                          | 0,1          | 0,2 | 0,2  | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7  | 0,9  | 1,0  | 1,1  | 1,2  |
| 500                          | 0,2          | 0,4 | 0,55 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3  | 1,5  | 1,8  | 2,0  | 2,2  |
| 675                          | 0,4          | 0,8 | 1,0  | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4  | 2,8  | 3,2  | 3,6  | 4,0  |
| 750                          | 0,5          | 1,0 | 1,2  | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0  | 3,5  | 4,0  | 4,5  | 5,0  |
| 875                          | 0,7          | 1,3 | 1,7  | 2,0 | 2,7 | 3,4 | 4,0  | 4,7  | 5,4  | 6,1  | 6,7  |
| 1000                         | 0,9          | 1,8 | 2,2  | 2,6 | 3,5 | 4,4 | 5,3  | 6,2  | 7,0  | 7,9  | 8,8  |
| 1250                         | 1,4          | 2,8 | 3,4  | 4,1 | 5,5 | 6,9 | 8,3  | 9,6  | 11,0 | 12,4 | 13,8 |
| 1500                         | 2,0          | 4,0 | 5,0  | 5,9 | 7,9 | 9,9 | 11,9 | 13,9 | 15,8 | 17,8 | 19,8 |

**Tableau 2** Pertes de charge (en bar) en fonction du débit  $Q$  et de la longueur  $L$  pour un tuyau de diamètre  $d = 70$  mm

**Q 43.** D'après le tableau 2, le facteur  $f$  de la relation de Darcy dépend-il de la longueur du tuyau pour un débit de 500 L·min<sup>-1</sup> ?

**Q 44.** Exploiter la formule de Colebrook afin de calculer la rugosité relative,  $\varepsilon/d$ , d'un tuyau de 70 mm pour un nombre de Reynolds de  $5 \times 10^5$ . Commenter.

**Q 45.** Quelle doit être la différence de pression  $\Delta P$  si le tuyau qui alimente la lance en haut de la nacelle a une longueur totale de 200 m ? Peut-il y avoir d'autres causes de perte de charge ?

**Q 46.** En s'aidant d'un bilan de puissance, déterminer la puissance électrique minimale à fournir à la pompe pour obtenir une pression à la lance  $P_l = 6$  bar et un débit de 500 L·min<sup>-1</sup> dans les conditions décrites plus haut (hauteur de la nacelle 30 m, longueur du tuyau 200 m). On supposera que la pression d'alimentation de la pompe est de 1 bar (en réalité elle peut aller jusqu'à 16 bar pour les bouches d'incendie).

**Q 47.** L'incendie a duré 15 heures et a mobilisé plus de 500 pompiers, appuyés par 18 lances supposées toutes identiques et de même débit 500 L·min<sup>-1</sup>. Toutes les lances n'ont pas été en action pendant cette durée. En admettant que les lances ont été utilisées à leur maximum pendant 2 heures, quelle quantité d'eau a été déversée sur Notre-Dame ?

# Données

## Constantes et conversions de quelques unités

|                                                |                                                                |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Constante des gaz parfaits                     | $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$     |
| Constante d'Avogadro                           | $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                   |
| Constante de Planck                            | $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$              |
| Charge élémentaire                             | $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$                           |
| Accélération normale de la pesanteur terrestre | $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$                         |
| Le faraday                                     | $1 \text{ F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| La minute d'arc                                | $1' = 1/60^\circ$                                              |

## Données atomiques

| Élément                                          | H   | C    | O    | Pb    |
|--------------------------------------------------|-----|------|------|-------|
| Numéro atomique                                  | 1   | 6    | 8    | 82    |
| Masse molaire ( $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) | 1,0 | 12,0 | 16,0 | 207,2 |

## Données thermodynamiques et autres caractéristiques

Viscosité dynamique de l'eau (supposée indépendante de la température) :  $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Masses volumiques dans les conditions usuelles de températures et de pression :

|             |                                                |
|-------------|------------------------------------------------|
| eau liquide | $1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ |
| air         | $1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$             |

Capacité thermiques dans les conditions usuelles de températures et de pression (on admet que ces grandeurs ne dépendent pas de la température)

|                            |                                                             |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------|
| eau liquide                | $c_P = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| eau vapeur                 | $c_P = 1850 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| air sec                    | $c_P = 1005 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| air saturé en vapeur d'eau | $c_P = 1030 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |

Enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau à  $100^\circ\text{C}$  :  $\Delta_{\text{vap}}H^\circ = 2257 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

Enthalpies de formation et entropies molaires standards à  $298 \text{ K}$  :

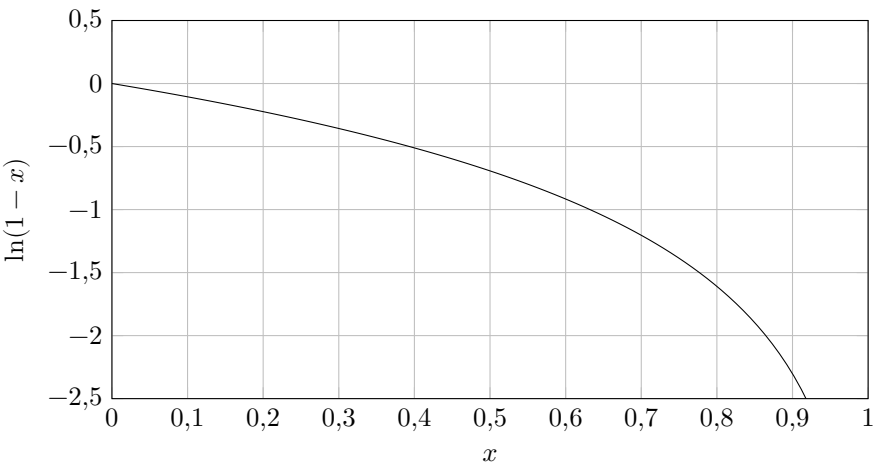
| Espèces                           | $\Delta_f H^\circ \text{ (kJ}\cdot\text{mol}^{-1})$ | $S_m^\circ \text{ (J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\text{H}_2(\text{g})$            | 0                                                   | 130,5                                                         |
| $\text{O}_2(\text{g})$            | 0                                                   | 205,0                                                         |
| $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$    | -285,1                                              | 70,0                                                          |
| $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$    | -241,8                                              | 188,7                                                         |
| $\text{C}_{(\text{graphite})}$    | 0                                                   | 5,7                                                           |
| $\text{CO}(\text{g})$             | -110,6                                              | 197,6                                                         |
| $\text{CO}_2(\text{g})$           | -393,5                                              | 213,7                                                         |
| $\text{Pb}(\text{s})$             | 0                                                   | 64,5                                                          |
| $\text{PbO}(\text{s})$            | -218,0                                              | 66,5                                                          |
| $\text{PbO}_2(\text{s})$          | -277,1                                              | 68,0                                                          |
| $\text{PbS}(\text{s})$            | -100,4                                              | 91,2                                                          |
| $\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$ | -719,0                                              | 211                                                           |
| $\text{SO}_2(\text{s})$           | -296,9                                              | 248                                                           |

Données spécifiques à l'élément plomb et description de quelques oxydes

|                                                          |                           |
|----------------------------------------------------------|---------------------------|
| Numéro atomique                                          | 82                        |
| Masse molaire                                            | 207,2 g·mol <sup>-1</sup> |
| Masse volumique                                          | 11,35 g·cm <sup>-3</sup>  |
| États d'oxydation                                        | 2 et 4                    |
| Température de fusion                                    | 327 °C                    |
| Température d'ébullition                                 | 1749 °C                   |
| Enthalpie molaire de fusion $\Delta_{\text{fus}}H^\circ$ | 4,9 kJ·mol <sup>-1</sup>  |

| Type                           | Couleur          | Masse volumique (kg·m <sup>-3</sup> ) | Évolution                                                                   |
|--------------------------------|------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| PbO                            | jaune (litharge) | 9500                                  | décomposition entre 300 °C et 400 °C en Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub>      |
| Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub> | orange (minium)  | 9100                                  | fusion et décomposition après 500 °C                                        |
| PbO <sub>2</sub>               | noir             | 9380                                  | fusion et décomposition à 290 °C en Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub> puis PbO |
| PbCO <sub>3</sub>              | blanc (céruse)   |                                       | instable au-dessus de 400 °C en PbO, CO et CO <sub>2</sub>                  |

Représentation graphique de la fonction  $\ln(1 - x)$



La cathédrale Notre-Dame de Paris

Principales dimensions de l'édifice :

|                                       |                     |
|---------------------------------------|---------------------|
| longueur                              | 127 m               |
| largeur                               | 48 m                |
| superficie intérieure                 | 4800 m <sup>2</sup> |
| hauteur des tours                     | 69 m                |
| hauteur de la flèche                  | 96 m                |
| hauteur de la façade sans les tours   | 45 m                |
| hauteur estimée de chaque arc-boutant | 30 m                |

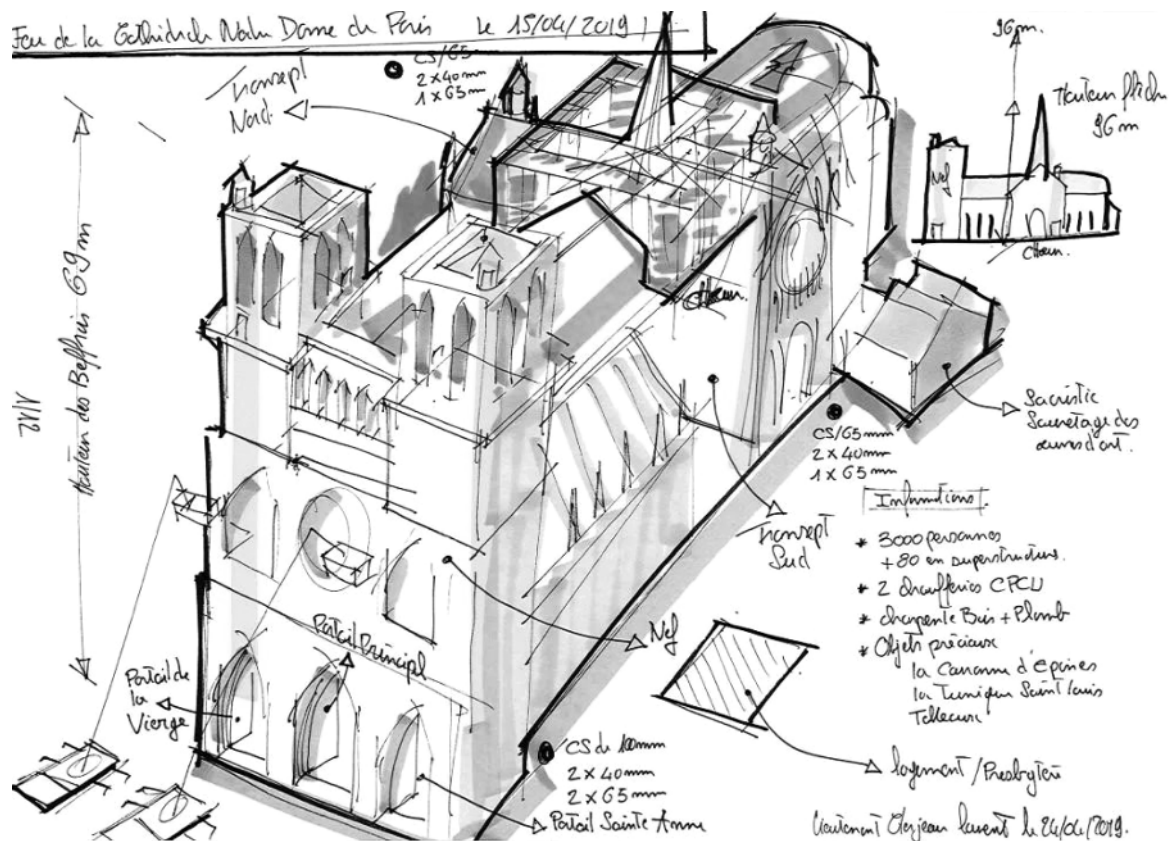


Schéma réalisé par le dessinateur de la Brigade des Sapeurs-Pompiers de Paris. Les marques circulaires noires indiquent les positions des pieds des échelles coulissantes porte-nacelles ou BEA (bras élévateurs aériens).

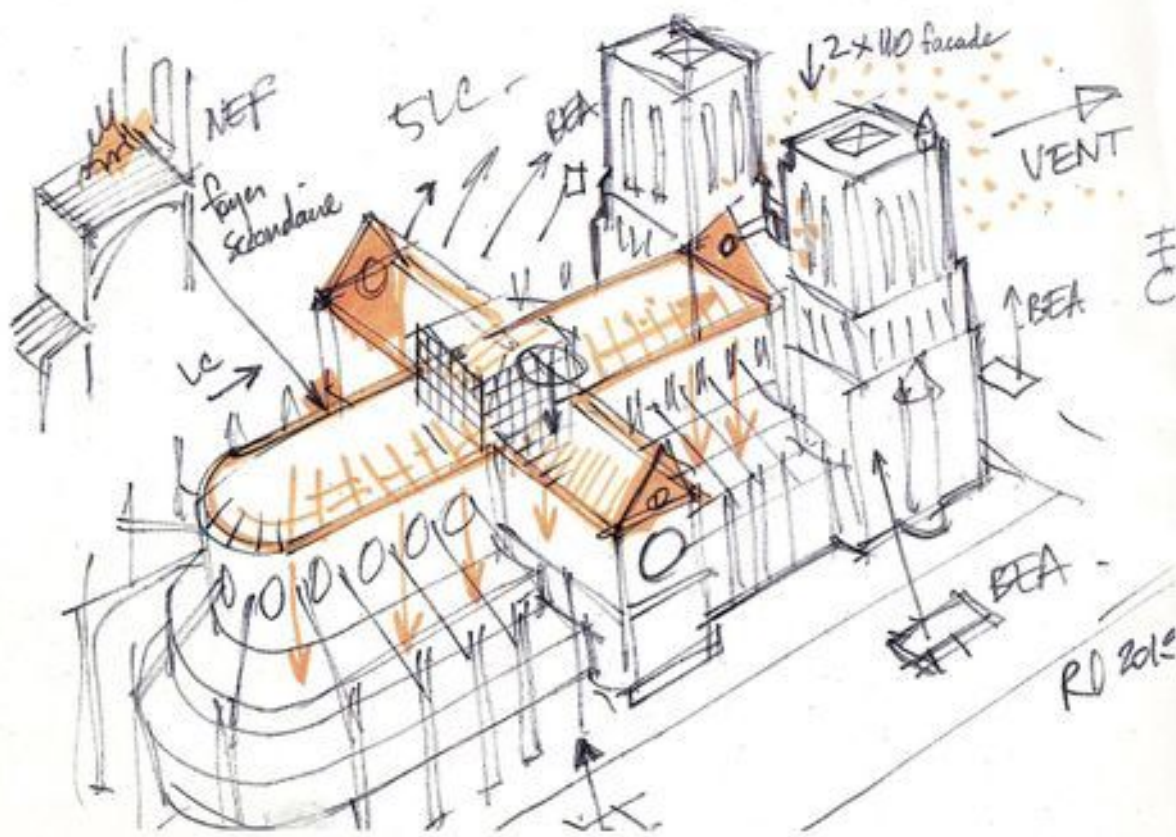
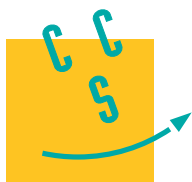


Schéma de la cathédrale réalisé lors de l'incendie par René Dosne, pompier retraité.

• • • FIN • • •





## *Sécurité d'une plongée à très grande profondeur : exemple de l'expédition Deepsea Challenger*

Ce sujet porte sur l'exploration des très grandes profondeurs à l'aide de sous-marins autonomes et s'attache à discuter des contraintes de sécurité liées à ces expéditions.

Il reprend en particulier les données disponibles sur l'expédition menée par le réalisateur James Cameron dans la fosse des Mariannes, fosse océanique la plus profonde connue à ce jour, et son sous-marin nommé Deepsea Challenger.

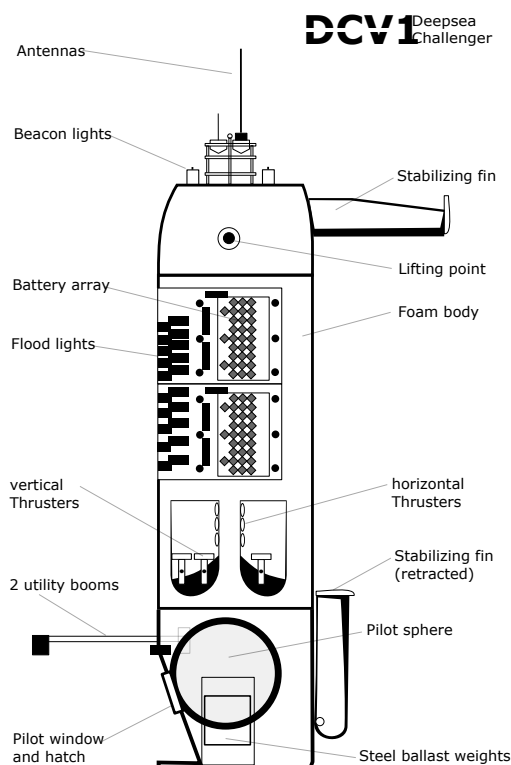
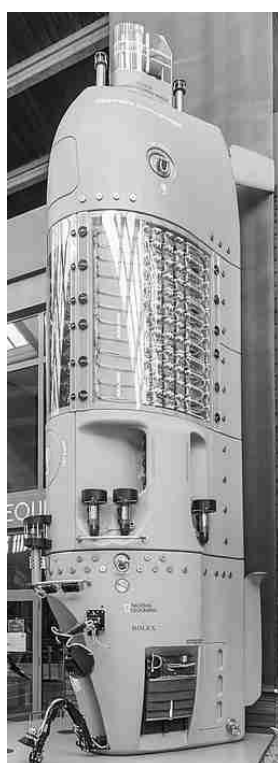


Figure 1 Le sous-marin Deepsea Challenger (Wikimedia)

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé ; d'autres données relèvent de l'initiative du candidat.

## I Pression et plongée

### I.A – Pression hydrostatique

La contrainte principale à laquelle est soumis un sous-marin est celle liée à la pression exercée par le fluide environnant sur la structure de l'habitacle. L'évaluation des pressions rencontrées au fond de l'océan est donc cruciale pour déterminer les efforts que devront reprendre les parois qui protègent le pilote.

On se place dans un repère cartésien de centre  $O$ , placé sur l'interface eau-air, et d'axe  $Oz$  descendant.

**Q 1.** On suppose que le champ de pression  $P$  du fluide vérifie la relation  $\rho \vec{g} - \text{grad } P = \vec{0}$  (la démonstration de cette relation n'est pas attendue). Proposer une interprétation physique de celle-ci et indiquer la signification de chacun des termes.

On suppose, dans un premier temps, que l'eau de mer est un fluide incompressible de masse volumique  $\rho_0 = \rho(z = 0)$ .

**Q 2.** En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  à une profondeur donnée  $z$ , en fonction de  $P_0$  la pression atmosphérique,  $g$  l'intensité de pesanteur uniforme qui règne dans l'océan,  $\rho_0$  et  $z$ .

Lorsqu'on approche des profondeurs atteintes par James Cameron, le modèle du fluide incompressible peut éventuellement être remis en cause. On conserve l'hypothèse isotherme, mais on cherche à modéliser les variations de la masse volumique en introduisant le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau par

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T.$$

On considère désormais que l'océan est isotherme, mais que la masse volumique  $\rho$  est variable.

**Q 3.** Montrer que

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T.$$

**Q 4.** On suppose que la grandeur  $\chi_T$  est une constante. En utilisant la relation de la statique des fluides, montrer que la masse volumique varie avec la profondeur selon

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}.$$

**Q 5.** En déduire que l'on a

$$P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g z).$$

**Q 6.** La pression dans la fosse des Mariannes (profondeur  $z_{\max} = 10,9$  km) a été mesurée à  $1,13 \times 10^8$  Pa. Le modèle prenant en compte la compressibilité de l'eau est-il suffisant pour prédire la pression à de telles profondeurs ? Proposer une amélioration de ce modèle.

Pour résister à une telle pression, il faut renforcer toutes les structures porteuses et notamment équiper la zone habitable sphérique de parois d'une épaisseur de plus de 5 cm d'acier. Le surpoids lié à cette structure est contrebalancé par un ensemble de plaques de mousse spécialement développées qui assure la flottabilité du sous-marin.

### **I.B – Plongée et remontée**

L'économie d'énergie est également critique. La plongée au fond de la fosse, ainsi que la remontée en surface, sont essentiellement assurées par les forces gravitaires. C'est donc un ensemble de masses attachées à la coque du sous-marin, appelées *ballast* qui permettent la plongée. Leur abandon au fond de la fosse en fin d'expédition déclenche la remontée du sous-marin. Ainsi, l'usage des propulseurs, alimentés par un circuit électrique, peut être réservé à l'exploration locale de la fosse.

Le déplacement d'un solide dans un fluide visqueux s'accompagne généralement d'une force dite de trainée qui dépend notamment de la forme du solide et du régime d'écoulement. La norme de cette force, opposée au mouvement, peut s'écrire sous la forme

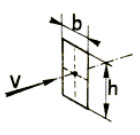
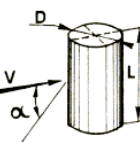
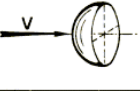
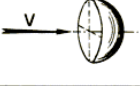
$$F = C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S$$

où  $v$  est la vitesse du solide,  $S$  sa surface frontale,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $C_x$  un coefficient empirique sans dimension. La figure 2 donne la valeur du coefficient  $C_x$  pour diverses formes géométriques.

Les relevés effectués lors de la première expédition montrent que la descente du sous-marin, à vitesse quasi constante, a duré environ 2 h 30 min et a permis d'atteindre une profondeur de 10,9 km. Le même trajet n'a pris que 70 min lors du retour à la surface.

**Q 7.** En explicitant clairement votre démarche ainsi que les hypothèses que vous serez amené à formuler, évaluer la masse de ballast qui a été libéré pour permettre la remontée du sous-marin.



| Fig. 19         | Géométries                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Cxp                                                                        |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|--|-----|----|-----|-----|-----|-----|------------------------------------------------------------------------------------|
| a               |  $\frac{h}{b} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 10 \\ 18 \\ \infty \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                              | $\begin{matrix} 1,10 \\ 1,15 \\ 1,19 \\ 1,29 \\ 1,40 \\ 2,01 \end{matrix}$ |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| b               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,11                                                                       |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| c               |  $\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\begin{matrix} 0,91 \\ 0,85 \\ 0,87 \\ 0,99 \end{matrix}$                 |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| d               |  $\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\begin{matrix} 0,93 \\ 0,78 \\ 1,04 \\ 1,52 \end{matrix}$                 |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| e               |  $\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \\ 40 \\ \infty \end{cases}$<br>Coef. de correction de l'obliquité<br>$Cx_{p\alpha} = k \cdot Cx_{p0}$ <table data-bbox="804 770 932 860"><tr><th>k pour <math>\alpha</math></th><th></th></tr><tr><td>1,0</td><td>0°</td></tr><tr><td>0,7</td><td>30°</td></tr><tr><td>0,2</td><td>60°</td></tr></table> | k pour $\alpha$                                                            |  | 1,0 | 0° | 0,7 | 30° | 0,2 | 60° | $\begin{matrix} 0,63 \\ 0,68 \\ 0,74 \\ 0,82 \\ 0,98 \\ 1,02 \\ 0,35 \end{matrix}$ |
| k pour $\alpha$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                            |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| 1,0             | 0°                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                            |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| 0,7             | 30°                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                            |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| 0,2             | 60°                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                            |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| f               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $\begin{matrix} 0,34 \\ 0,40 \end{matrix}$                                 |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |
| g               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $\begin{matrix} 1,33 \\ 1,17 \end{matrix}$                                 |  |     |    |     |     |     |     |                                                                                    |

**Figure 2** Extrait de *L'Aérodynamique et l'origine des trainées parasites*, Ewald HUNSINGER, Michaël OFFERLIN, Inter.action, 1997

## II Risque d'hypoxie

La puissance électrique disponible assure, entre autres, le fonctionnement du système de contrôle de l'atmosphère de la capsule pendant plus de 50 heures. Ce système permet de maintenir une composition de l'air intérieur de l'habitacle correspondant à celle de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer. On s'intéresse à la durée de survie du pilote au fond de l'océan en cas de panne de ce système.

Le dimensionnement des systèmes de survie en cas d'incidents divers s'appuie sur les données physiologiques moyennes d'un adulte :

- pression partielle en dioxygène pour que l'air soit respirable  $P_{O_2} > P_{O_2\ell} = 8,0 \times 10^3 \text{ Pa}$  ;
- volume moyen d'air inspiré au repos  $V_p = 0,50 \text{ L}$  ;
- fréquence respiratoire au repos  $f = 0,25 \text{ Hz}$ .

On considère que, lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume  $V_p$  d'air dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons. On admettra que la quantité de matière de dioxyde de carbone exhalée est égale à la quantité de matière de dioxygène consommée par les poumons.

**Q 8.** Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note  $n_i$  et  $P_{O_2i}$  respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la  $i$ -ème respiration après l'arrêt de ce système.

**Q 9.** En explicitant les hypothèses utilisées, établir la relation

$$n_{i+1} = n_i \left( 1 - \frac{V_p}{4V} \right)$$

où  $V$  est le volume libre dans l'habitacle. En déduire une relation entre  $P_{O_2i}$ ,  $P_{O_20}$ ,  $V_p$ ,  $V$  et  $i$ .

**Q 10.** En déduire le nombre d'inspirations que peut faire le pilote, puis sa durée de vie sans apport extérieur de dioxygène.

### III Système de libération du ballast

Le sous-marin est un système à flottaison négative, sa remontée à la surface se fait par la libération des ballasts. Afin d'empêcher que le sous-marin ne se retrouve bloqué au fond de l'océan, il est prévu plusieurs systèmes de libération :

- le système principal est composé d'un contacteur électromagnétique nécessitant une alimentation électrique extérieure. En cas de défaillance du système d'alimentation, il est prévu deux systèmes de secours ;
- un système de goupille thermique (*frangibolt*) commandé par un signal acoustique fait fondre un rivet par l'application d'un courant électrique. Ce dispositif est autonome et ne nécessite pas d'alimentation externe ;
- en ultime recours, un système de libération galvanique programmée (GTR : *galvanic timed release*) libère automatiquement le ballast par la corrosion spontanée d'une goupille en métal fortement réducteur après un temps inférieur à la durée maximale de plongée.

Un schéma d'un dispositif GTR est présenté figure 3. Le système présenté dans cette figure n'est pas celui utilisé dans le sous-marin, il s'agit d'un système analogue plus compact dont le temps de corrosion est équivalent. Les anneaux d'attache sont en nickel et le barreau cylindrique qui les relie en alliage de magnésium AZ31 composé très majoritairement de magnésium. Dans la suite, on note ce métal AZ31 et on considère que ses propriétés redox sont identiques à celles du magnésium.

Lors de l'immersion dans l'eau, on observe la formation de bulles au niveau des anneaux d'attache.

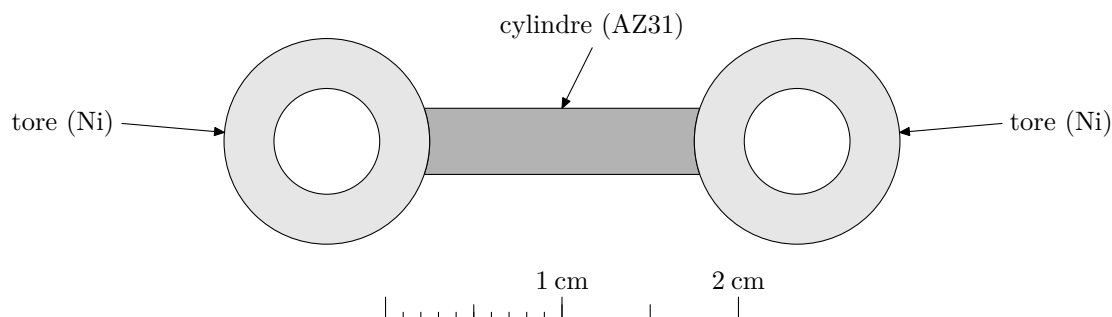


Figure 3

La figure 4 donne les courbes courant-potentiel.

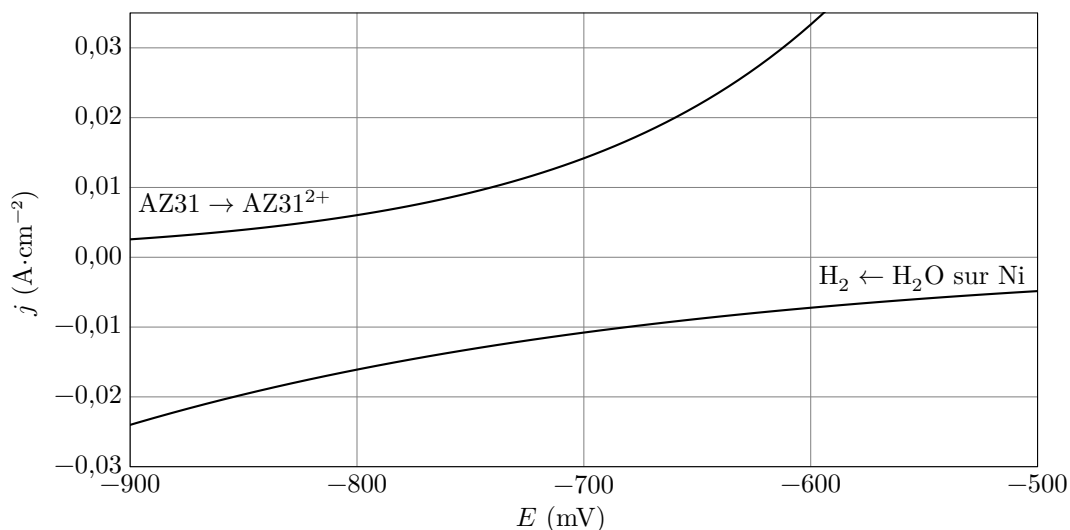


Figure 4

**Q 11.** Identifier les transformations se produisant sur chacune des surfaces métalliques. Écrire les demi-équations électroniques correspondantes ainsi que l'équation de réaction (on prendra un nombre stœchiométrique de 1 pour l'espèce qui s'oxyde).

**Q 12.** Déduire du schéma de la figure 3 et des données de l'énoncé l'expression de l'avancement maximal  $\xi_{\max}$  de cette réaction lorsque la tige de AZ31 a été totalement corrodée.

**Q 13.** Quel lien peut-on établir entre le courant de corrosion  $i_{\text{corr}}$  et le courant surfacique  $j_{AZ31}$  qui s'échappe de cette tige à l'instant initial ?

**Q 14.** En remarquant que les deux électrodes n'ont pas la même surface, en déduire un ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle le système GTR libère les ballasts. Commenter.

**Q 15.** Comment évolue cette durée si on prend en compte la variation de la surface du métal au cours du temps ? Justifier.

## IV Communication

Il est capital de maintenir la communication entre le sous-marin et la surface où se trouve un bateau dans lequel une équipe surveille et analyse toutes les données remontées par les dizaines de capteurs permettant de s'assurer du bon fonctionnement des systèmes (batterie, propulsion, ballast, qualité de l'air dans le poste de pilotage, température...). En cas de dysfonctionnement d'un des systèmes, l'équipe de surface doit être capable d'identifier la défaillance et de proposer une solution au pilote.

Le déploiement d'un câble entre le bateau et le sous-marin n'étant pas envisageable, on propose dans la suite d'étudier deux stratégies de télécommunication : une par ondes électromagnétiques et l'autre par ondes acoustiques.

### IV.A – Communication par ondes radio dans l'eau de mer

On admet qu'il est nécessaire de remplacer la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la permittivité  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  dans les équations de Maxwell afin de prendre en compte les propriétés de polarisation de l'eau de mer. La permittivité relative de l'eau de mer  $\epsilon_r$ , sensiblement égale à celle de l'eau, est rappelée dans les données. La perméabilité de l'eau de mer est supposée égale à celle du vide  $\mu_0$ .

On considérera que l'eau de mer se comporte comme un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  dont la valeur est fournie dans les données.

**Q 16.** Énoncer la loi d'Ohm locale reliant la densité volumique de courant  $\vec{j}$ , la conductivité  $\gamma$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .

**Q 17.** Rappeler l'équation locale de conservation de la charge et déduire que la densité volumique de charge vérifie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho = 0$$

où on exprimera  $\tau$  en fonction de la conductivité  $\gamma$  et de la permittivité  $\epsilon$ .

**Q 18.** Évaluer numériquement  $\tau$  et en déduire que, pour des ondes de fréquence inférieure à  $f = 1,00$  MHz, on peut considérer que  $\rho = 0$ .

On envisage la propagation d'une pseudo-onde plane progressive polarisée rectilignement se propageant dans l'eau de mer vers les  $z$  croissants,  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}z))\vec{e}_x$  avec  $i^2 = -1$ ,  $E_0$  et  $\omega$  des constantes réelles et  $\underline{k}$  une constante complexe.

**Q 19.** Écrire l'équation de Maxwell-Ampère et identifier un terme de courant de déplacement et un terme de courant de conduction. Déterminer la valeur de la pulsation  $\omega_c$  à partir de laquelle le courant de déplacement devient plus grand que le courant de conduction.

**Q 20.** On suppose  $\omega \ll \omega_c$ . Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$ . De quel type d'équation s'agit-il ?

**Q 21.** Exprimer le nombre d'onde complexe  $\underline{k}$  en fonction de  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . Évaluer numériquement  $\delta$  pour une fréquence  $f = 1,0$  MHz.

**Q 22.** Obtenir l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(z, t)$ , puis celle de sa moyenne temporelle  $\langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle$ .

**Q 23.** Évaluer le rapport  $\frac{\|\langle \vec{\Pi}(z + L, t) \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle\|}$  pour  $L = 10$  m.

**Q 24.** Est-il réaliste d'envisager une communication par ondes électromagnétiques (de cette gamme de fréquences) entre le bateau et le sous-marin ?

### IV.B – Communication par ondes acoustiques

#### IV.B.1) Équation de propagation de l'onde acoustique

Le système de communication retenu pour l'expédition Deepsea Challenger est basé sur la transmission d'ondes acoustiques. Il permet une communication par voix et messages textes sur des distances de plusieurs dizaines de kilomètres.

Nous modélisons dans cette partie la propagation unidirectionnelle d'une onde acoustique selon l'axe ( $Oz$ ) dans l'eau de mer considérée comme un fluide parfait de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$ .

Les effets de la pesanteur sont négligés et on appellera  $P_0$  la pression du fluide au repos,  $\rho_0$  sa masse volumique au repos. Ces grandeurs sont supposées indépendantes de la profondeur  $z$ .

Le passage de l'onde acoustique à la position  $z$  à l'instant  $t$  crée une perturbation dans le milieu et on notera les différents champs :

- $P(z, t) = P_0 + p(z, t)$  champ de pression du fluide ;
- $\rho(z, t) = \rho_0 + \mu(z, t)$  champ de masse volumique ;
- $v(z, t)$  champ de vitesse (composante suivant  $z$ ).

**Q 25.** Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Quelle hypothèse fait-on sur la nature de l'évolution thermodynamique de la particule fluide au passage de l'onde acoustique ?

**Q 26.** Donner les trois équations couplées sur  $p(z, t)$ ,  $\mu(z, t)$  et  $v(z, t)$ . Rappeler le concept physique que chacune d'entre elles traduit.

**Q 27.** Établir l'équation vérifiée par la surpression acoustique  $p(z, t)$  dans l'approximation acoustique.

**Q 28.** Exprimer la vitesse de propagation  $c$  d'une onde acoustique plane progressive dans l'eau de mer et donner sa valeur numérique.

#### IV.B.2) Relation de passage à l'interface d'un milieu stratifié

Lors de la propagation de l'onde acoustique vers le sous-marin, la vitesse de propagation de l'onde varie (notamment car la masse volumique de l'eau évolue avec la profondeur). Pour prendre en compte cet effet, on envisage, dans un premier temps, le cas simplifié que représente le passage d'une onde acoustique plane progressive d'un milieu 1 avec une vitesse de propagation  $c_1$  à un milieu 2 avec une vitesse de propagation  $c_2$ .

On envisage l'arrivée sur le dioptré ( $z = 0$ ) d'une onde plane progressive incidente (figure 5) dont le champ de surpression acoustique s'écrit

$$p_i(M, t) = p_{i0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM})) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_i = k_{i,x} \vec{u}_x + k_{i,z} \vec{u}_z.$$

On note pour les surpressions associées respectivement aux ondes réfléchies et transmises

$$p_r(M, t) = p_{r0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM})) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_r = k_{r,x} \vec{u}_x + k_{r,y} \vec{u}_y + k_{r,z} \vec{u}_z$$

$$p_t(M, t) = p_{t0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OM})) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_t = k_{t,x} \vec{u}_x + k_{t,y} \vec{u}_y + k_{t,z} \vec{u}_z$$

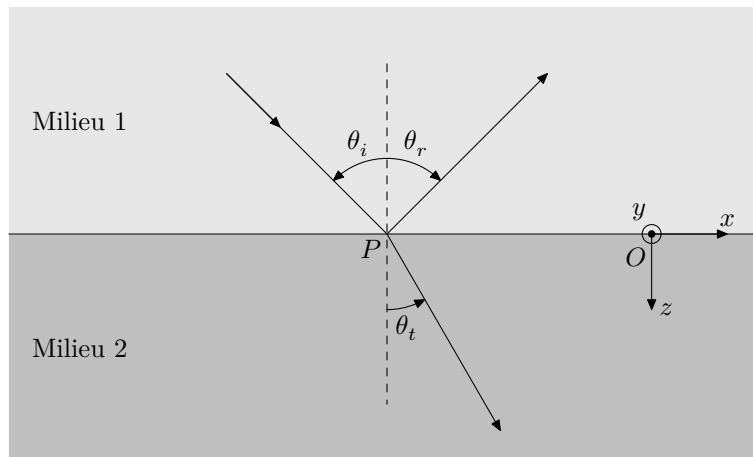


Figure 5

**Q 29.** Justifier que  $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = k_i$  puis exprimer  $k_i$  et  $k_t = \|\vec{k}_t\|$  en fonction de  $\omega$ ,  $c_1$  et  $c_2$ .

**Q 30.** Traduire la continuité de la pression en un point  $P$  quelconque de l'interface et la mettre sous la forme

$$p_{i0} + p_{r0} \exp(i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \overrightarrow{OP}) = p_{t0} \exp(i(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overrightarrow{OP}).$$

**Q 31.** Justifier que cette relation impose  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \overrightarrow{OP} = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$  pour tout point  $P$  sur l'interface.

**Q 32.** En déduire que  $k_{r,y}$  et  $k_{t,y}$  sont nuls et que

$$\begin{cases} \theta_r = -\theta_i \\ \frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{c_2} \end{cases}$$

Quelles lois retrouve-t-on ?

#### IV.B.3) Propagation d'une onde acoustique dans un milieu inhomogène

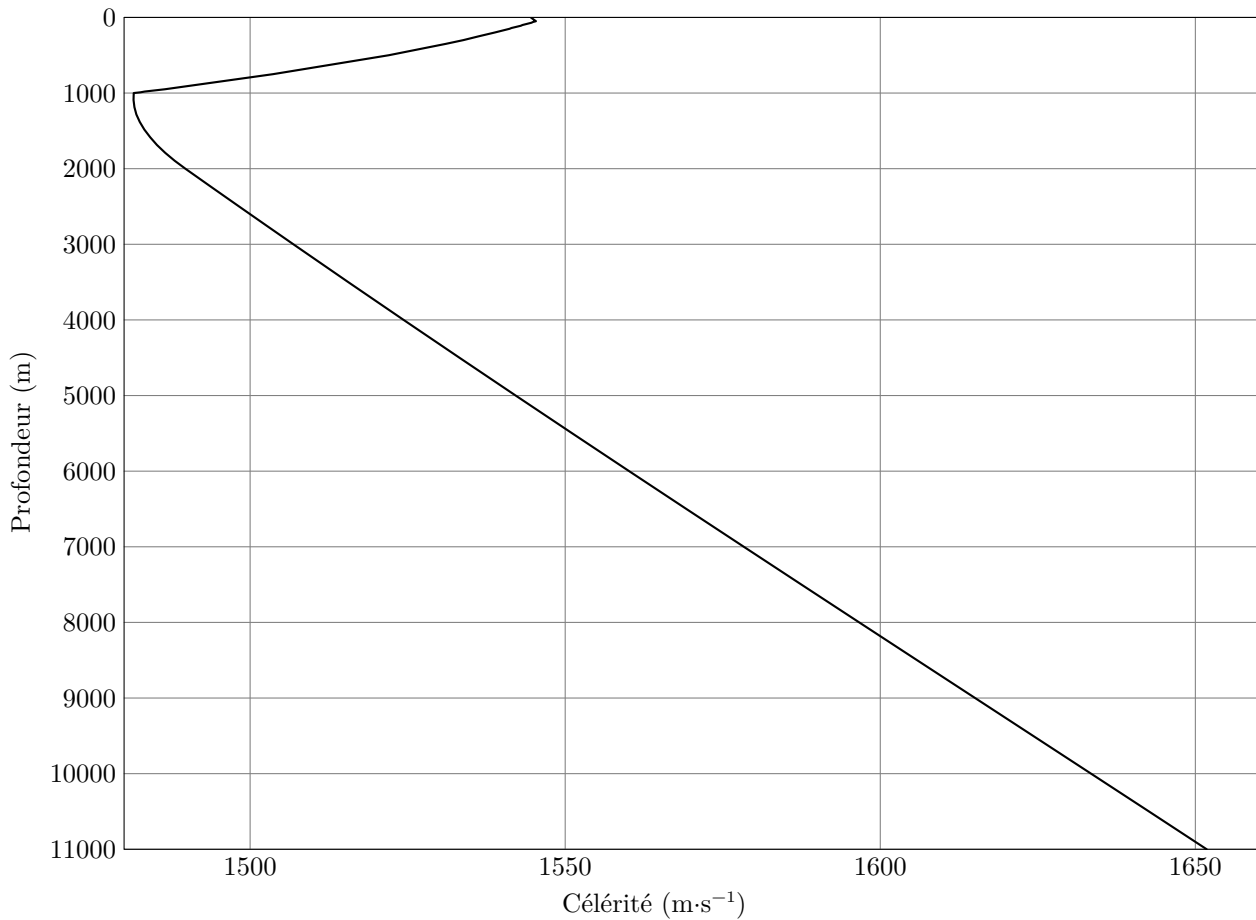
Les lois permettant de déterminer la direction de propagation d'une onde sonore sont analogues à celles de l'optique géométrique. On assimile dans la suite l'onde acoustique à un rayon sonore dont on cherche à déterminer la trajectoire.

On considère que la vitesse de propagation  $c(z)$  dans le milieu varie continument avec la profondeur. On appelle  $n(z) = \frac{c_0}{c(z)}$  l'indice du milieu à la profondeur  $z$ , avec  $c_0$  la vitesse de propagation en  $z = 0$ , et  $\theta(z)$  l'angle algébrique que fait un rayon avec la verticale.

**Q 33.** D'après la question 32, quelle grandeur faisant intervenir  $\theta$  et  $c$  est conservée au cours du trajet des ondes acoustiques ?

**Q 34.** Dessiner l'allure des trajets des rayons émis quasi verticalement en  $z = 0$  en supposant que  $c$  est une fonction croissante de  $z$ .

La figure 6 représente le profil d'évolution de la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans l'océan au niveau de la fosse des Mariannes avec une température de surface de 30 °C, un profil de température typique et une salinité de 34 ‰ (d'après National Physical Laboratory, UK).



**Figure 6**

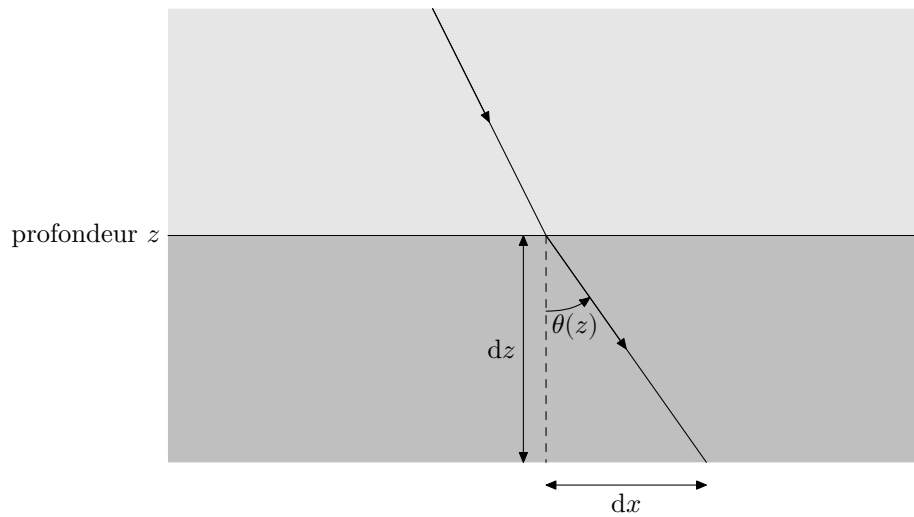
**Q 35.** Quelle est la valeur de l'angle maximal avec lequel le rayon doit être émis en surface pour qu'il atteigne le fond de la fosse des Mariannes.

On cherche désormais à déterminer la forme exacte des rayons sonores. On décompose le trajet en une infinité de petites déviations au niveau de dioptries horizontaux et on cherche à établir l'équation de la trajectoire des rayons. La figure 7 isole une déviation à la profondeur  $z$ .

**Q 36.** Exprimer le rapport  $\frac{dz}{dx}$  en fonction de  $\theta$ .

**Q 37.** À l'aide de la grandeur conservée déterminée précédemment, en notant  $\theta_0$  l'angle d'incidence à la surface ( $z = 0$ ), montrer que

$$\tan^2 \theta(z) = \frac{\frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}{1 - \left(\frac{\sin \theta_0}{n(z)}\right)^2}.$$



**Figure 7**

**Q 38.** En déduire l'équation différentielle de la trajectoire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(z)}{\sin \theta_0}\right)^2 - 1.$$

**Q 39.** Par quelle équation simple peut-on décrire l'évolution de la vitesse de propagation du son  $c(z)$  dans l'océan avec la profondeur, pour des profondeurs inférieures à 1000 m ? Donner une évaluation numérique des différents paramètres intervenant dans cette équation.

**Q 40.** Reprendre la même démarche pour des profondeurs supérieures à 1000 m.

L'équation différentielle déterminée précédemment étant difficile à résoudre, l'équation de la trajectoire n'est pas accessible directement. En revanche, on peut exprimer le rayon de courbure  $R$  de la trajectoire en tout point (rayon du cercle tangent à la trajectoire qui l'approche au mieux). On obtient la relation

$$R(z) = \left| \frac{n^2(z)}{\frac{dn(z)}{dz} \sin \theta_0} \right|.$$

**Q 41.** Montrer que, pour des profondeurs inférieures ou supérieures à 1000 m, les rayons acoustiques ont une forme simple que l'on précisera. Déterminer l'expression des rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  dans ces deux intervalles. On fera intervenir les paramètres évalués aux questions précédentes.

On souhaite déterminer dans quelle direction orienter l'émetteur pour communiquer entre le bateau en surface et le sous-marin au fond de la fosse des Mariannes si ces derniers sont séparés d'une distance horizontale de 1 km.

**Q 42.** Proposer, en le justifiant, un majorant raisonnable pour la valeur de l'angle d'incidence de l'émetteur par rapport à la verticale.

**Q 43.** En déduire les valeurs numériques des rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  pour cette incidence. Conclure sur l'orientation de l'émetteur.

# Données et formulaire

## Constantes diverses

Permittivité diélectrique du vide

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$\mathcal{F} = 96,5 \times 10^3 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Accélération de la pesanteur

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

## Données sur l'alliage AZ31

Masse volumique

$$\rho_{\text{AZ31}} = 1,74 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Masse molaire

$$M_{\text{AZ31}} = 24,4 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Couple d'oxydoréduction

$$\text{AZ31}^{2+}/\text{AZ31}$$

## Données sur l'eau de mer

Masse volumique

$$\rho_0 = 1,02 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Viscosité dynamique à 20 °C

$$\eta = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Coefficient de compressibilité isotherme

$$\chi_T = 4,41 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

Coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = 4,10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

Permittivité diélectrique relative

$$\epsilon_r = 75$$

Conductivité électrique

$$\gamma = 5 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$$

## Données sur Deepsea Challenger

Profondeur de la fosse des Mariannes

$$z_{\text{max}} = 10,9 \text{ km}$$

Diamètre équivalent du sous-marin

$$D_{DC} = 2,11 \text{ m}$$

Diamètre intérieur équivalent de la zone habitable du sous-marin

$$D = 1,09 \text{ m}$$

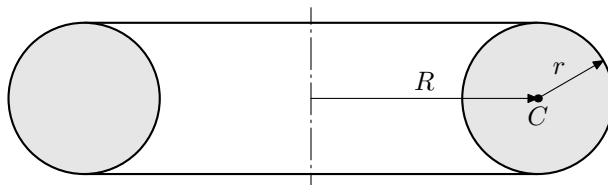
Hauteur du sous-marin

$$H_{DC} = 7,30 \text{ m}$$

## Formulaire

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

Un tore est un volume produit par la rotation d'un disque de rayon  $r$  autour d'un axe, situé dans son plan à la distance  $R$  de son centre.



Sa surface est donnée par

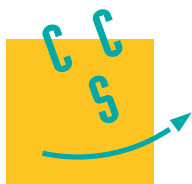
$$S = 4\pi^2 r R$$

et son volume par

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

• • • FIN • • •





## NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les deux parties du problème ainsi que les sous-parties sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées ailleurs.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées dans le document réponse.

### I Le voyage entre la Terre et Mars

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe  $a$  des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

#### I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

**Q 1.** Donner les dimensions de la constante gravitationnelle  $G$  ainsi que son unité dans le système international.

**Q 2.** Montrer que le moment cinétique  $\vec{L}_O$  en  $O$ , centre du Soleil, d'un objet de masse  $m$  est une constante du mouvement.

**Q 3.** On utilise les coordonnées cylindriques  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  avec  $\vec{e}_z$  tel que  $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$ . Justifier que le mouvement est plan et exprimer  $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  en fonction de  $L_O$  et  $m$ . Quel est le nom de cette grandeur ?

**Q 4.** Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon  $R$ , la vitesse  $V$  de l'objet en fonction de  $G$ ,  $M_S$ ,  $R$  et  $m$ . Calculer les valeurs numériques de  $V_T$ , la vitesse orbitale de la Terre et de  $V_M$ , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

#### I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

**Q 5.** Dédire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse  $m$  sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de  $G$ ,  $M_S$ ,  $R$  et  $m$ .

**Q 6.** Exprimer la période de rotation  $T$  de l'objet en fonction  $G$ ,  $M_S$  et  $R$  (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon  $R$  par le demi-grand axe de la trajectoire.

#### I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

**Q 7.** Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps  $t = 0$  du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ( $\theta_T(t = 0) = 0$ ).

**Q 8.** Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de  $V_T$ ,  $a_M$  et  $a_T$  la vitesse  $V'_T$  que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse  $\Delta V_T = V'_T - V_T$ . Calculer la valeur numérique de  $\Delta V_T$ .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

**Q 9.** Exprimer puis calculer la durée  $\Delta t$  du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

**Q 10.** Quel doit être l'angle  $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$  (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de  $\alpha_0$  et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

**Q 11.** Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

### I.D – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

**Q 12.** Déterminer l'angle  $\alpha_1$  (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

**Q 13.** En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse  $\Delta \vec{V}_T$  colinéaire à  $\vec{V}_T$  plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ( $\theta_T(t=0) = 0$ ) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant  $\Delta t'$  tel que  $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$ . On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  où  $p$  est appelé paramètre de la conique et  $e$  son excentricité.

**Q 14.** Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

**Q 15.** Justifier que  $r_P$ , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie  $r_P = a_T$ .

**Q 16.** Montrer que l'excentricité s'écrit  $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$  et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

**Q 17.** Exprimer l'énergie mécanique  $E_M$  du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de  $m$ ,  $V_T$  et  $e$ .

**Q 18.** En déduire la vitesse  $V_T''$  que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de  $V_T$  et  $e$ .

**Q 19.** Donner, en fonction de  $V_T$  et  $e$ , la variation de vitesse  $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$  qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de  $\Delta V_T'$ .

**Q 20.** Exprimer  $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  en fonction de  $a_T$  et  $V_T''$ .

**Q 21.** Évaluer le temps  $\Delta t'$  du transfert entre la Terre et Mars.

On donne : 
$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$$
 avec l'excentricité calculée en question 16.

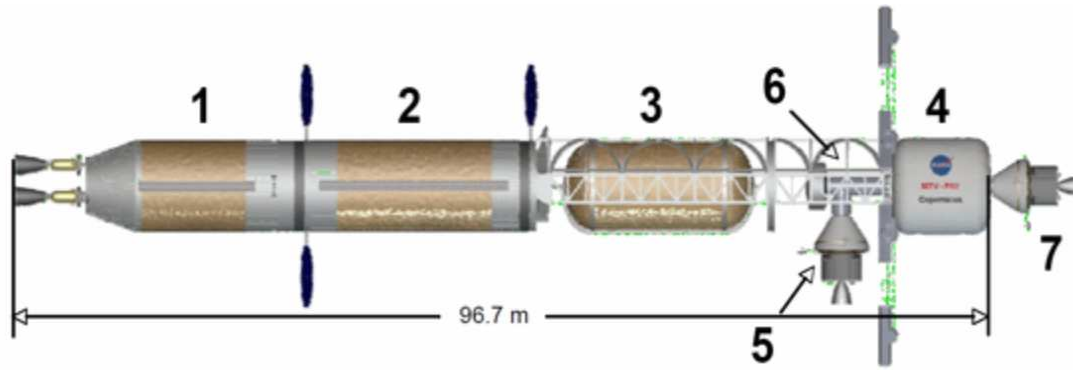
## II Le projet NERVA (Nuclear Engine for Rocket Vehicle Application)

Pour les phases d'insertion sur les trajectoires de transferts, la NASA préconise la propulsion nucléaire qui permet de réduire considérablement la masse de carburant par rapport à une propulsion chimique. Ce type de technologie a été mis au point dès les années 1960 pour le NERVA, elle repose sur l'éjection à grande vitesse d'hydrogène réchauffé par un réacteur nucléaire.

Le scénario propose l'utilisation d'un vaisseau assemblé en orbite basse terrestre constitué en modules indépendants afin de répondre à diverses exigences nécessaires au voyage interplanétaire. Ce vaisseau, d'un diamètre de 10 m et de près de 100 m de long a une masse d'environ 360 t. Il est équipé de deux moteurs NERVA dotés chacun d'une source thermique nucléaire d'une puissance  $P_{th} = 1,00$  GW et fournissant une poussée unitaire de 220 kN.

De l'hydrogène liquide, noté  $LH_2$ , est stocké à la température  $T_{vap}$  et à la pression  $P_{vap}$  dans des réservoirs.

On note  $m_0 = 360 \times 10^3$  kg la masse initiale du vaisseau,  $m(t)$  sa masse à l'instant  $t$ ,  $D = -\frac{dm}{dt} > 0$  le débit massique des gaz éjectés par les propulseurs NERVA (supposé constant jusqu'à épuisement du  $LH_2$ ) et  $v_1$  la vitesse des gaz en sortie de tuyère par rapport au vaisseau.



(1) Étage de propulsion nucléaire (2) Réservoir d'hydrogène liquide fixe (3) Réservoir d'hydrogène liquide large (4) Habitat utilisé pour le transit Terre-Mars (5) Vaisseau Orion (6) Système de télécommunication, cryorefroidisseurs et panneaux solaires (7) Port d'amarrage pour le vaisseau décollant de Mars

**Figure 1** Architecture du vaisseau

Dans la suite, le temps de poussée des moteurs est suffisamment court par rapport au temps des transferts pour considérer la trajectoire rectiligne dans le référentiel héliocentrique pendant une phase de propulsion. De plus, les forces de gravitation sont négligeables devant la poussée des moteurs.

### II.A – Étude dynamique

**Q 22.** À partir d'une étude dynamique sur le système fermé {vaisseau + gaz éjecté} entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , justifier l'équation différentielle suivante, dans laquelle  $\vec{F} = -D\vec{v}_1$  représente la force de poussée,

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Afin de pouvoir comparer l'efficacité des systèmes de propulsion ayant des débits, des vitesses d'éjection, ou des sources d'énergie différentes, on utilise généralement la notion d'impulsion spécifique notée  $I_{sp}$  s'exprimant en seconde. On peut la définir comme le temps pendant lequel une masse initiale  $m_i$  d'ergol est capable de donner une poussée égale à son poids à la surface de la Terre.

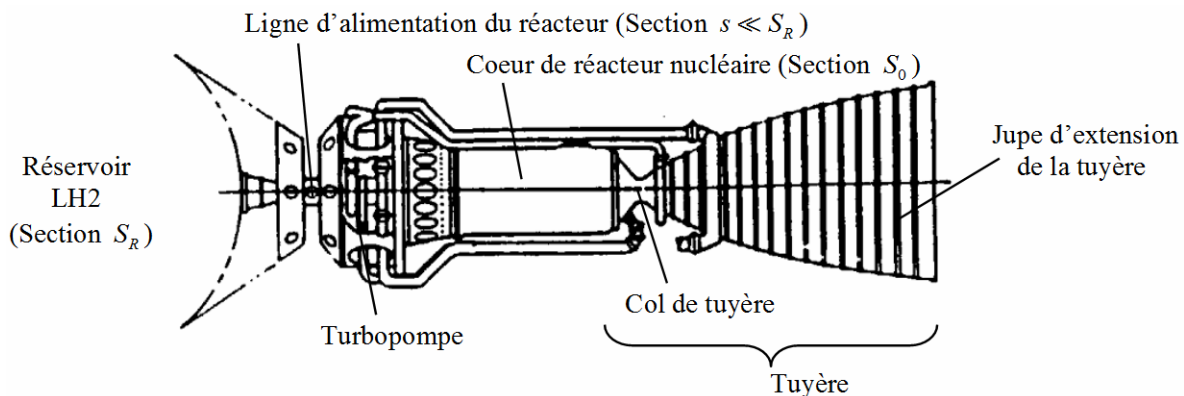
**Q 23.** Établir  $I_{sp}$  en fonction de  $g$  et  $v_1$ . Pour le vaisseau envisagé par la NASA, on a  $I_{sp} = 825$  s. Calculer la vitesse  $v_1$  d'éjection des gaz du moteur NERVA.

**Q 24.** Pour une injection sur une trajectoire de Hohmann vers Mars depuis l'orbite basse terrestre, une variation de vitesse  $\Delta V_T = 3,70 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  est requise. Déterminer la masse  $m_c$  de  $\text{LH}_2$  consommée. Le résultat est-il cohérent avec le dimensionnement proposé du vaisseau ?

**Q 25.** Quel sera le surplus de consommation dans l'hypothèse du voyage raccourci évoqué dans la sous-partie I.D ?

### II.B – Approche thermodynamique

Schématiquement, la technologie du NERVA utilise un cœur de réacteur nucléaire de section  $S_0 = 0,28 \text{ m}^2$  (correspondant à un diamètre  $d_0 = 60 \text{ cm}$ ) dont le rôle est de produire les gaz chauds à la température  $T_0 = 2500 \text{ K}$  et à la pression  $P_0 = 70,0 \times 10^5 \text{ Pa}$  nécessaires à la propulsion.



**Figure 2** Plan du moteur NERVA

Des turbopompes placées entre le réservoir et le cœur du réacteur permettent d'alimenter celui-ci en  $\text{LH}_2$  avec un débit massique constant  $D_m$ . On néglige les variations d'énergie cinétique de l'hydrogène devant les variations d'enthalpie dans le cœur du réacteur.

Lorsque l'hydrogène pénètre dans le cœur du réacteur, il est sous forme liquide à la température  $T_{\text{vap}}$  et à la pression  $P_{\text{vap}}$  d'équilibre liquide-gaz.

**Q 26.** En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert au cœur du réacteur, établir l'expression du débit massique  $D_m$  en fonction de  $P_{\text{th}}$ ,  $T_0$ ,  $T_{\text{vap}}$ ,  $M_{\text{H}_2}$ ,  $\Delta H_{\text{vap}}$ ,  $R$  et  $\gamma$ .

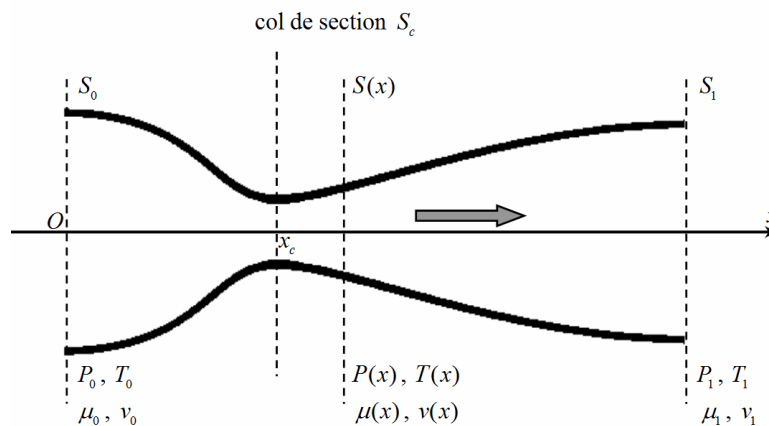
**Q 27.** Cette expression permet de calculer un débit massique  $D_m = 27,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Compte tenu des données proposées par la NASA, cette valeur vous semble-t-elle réaliste ?

**Q 28.** En l'absence de tuyère, déterminer la vitesse  $v_0$  en sortie de cœur de réacteur en fonction de  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $S_0$ ,  $D_m$  et de la constante spécifique du dihydrogène  $r = \frac{R}{M_{\text{H}_2}}$ , puis calculer sa valeur. La tuyère est-elle indispensable ?

## II.C – La tuyère

La tuyère du moteur NERVA présente une géométrie particulière dite tuyère de Laval comprenant trois parties distinctes :

- le convergent ;
- le col où la section est minimale ;
- le divergent.



**Figure 3** Tuyère de Laval

On cherche dans un premier temps à comprendre pourquoi cette forme est adaptée à l'éjection dans l'espace du dihydrogène issu du cœur de réacteur et ensuite à étudier les conséquences sur la vitesse des gaz en sortie de tuyère.

On rappelle l'équation d'Euler décrivant les évolutions spatiales et temporelles du champ de vitesse  $\vec{v}(x, t)$  d'un fluide de masse volumique  $\mu(x, t)$  soumis uniquement à la pression  $P(x, t)$  dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad} P.$$

L'écoulement du dihydrogène, se comportant comme un gaz parfait, dans la tuyère d'axe  $(Ox)$  est stationnaire et supposé adiabatique réversible. De plus, la section  $S(x)$  est lentement variable, ce qui permet de considérer l'écoulement unidirectionnel (colinéaire à l'axe  $(Ox)$ ) et unidimensionnel (les paramètres physiques ne dépendent que de l'abscisse  $x$ ).

Les grandeurs caractéristiques du gaz sont indicées par 0 à l'entrée de la tuyère et par 1 à la sortie.

### II.C.1) La forme de la tuyère

**Q 29.** Quelle condition nécessaire relie  $P_0$  et  $P_1$  pour avoir un écoulement dans le sens des  $x$  croissants ?

**Q 30.** Montrer que  $\mu v \frac{dv}{dx} = K \frac{dP}{dx}$  où  $K$  est une constante dont on donnera la valeur.

**Q 31.** La transformation étant adiabatique réversible, quelle relation lie  $\mu(x)$  à  $\mu_0$ ,  $P(x)$  et  $P_0$  ?

**Q 32.** Dédurre des deux précédentes questions la relation

$$v^2 - v_0^2 = C_1 \left( 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

où l'on exprimera la constante  $C_1$  en fonction de  $P_0$ ,  $\mu_0$  et  $\gamma$ .

**Q 33.** En posant  $\alpha = \frac{P(x)}{P_0}$  et en supposant que  $v_0$  est négligeable devant  $v$ , établir l'expression du débit massique dans la tuyère sous la forme

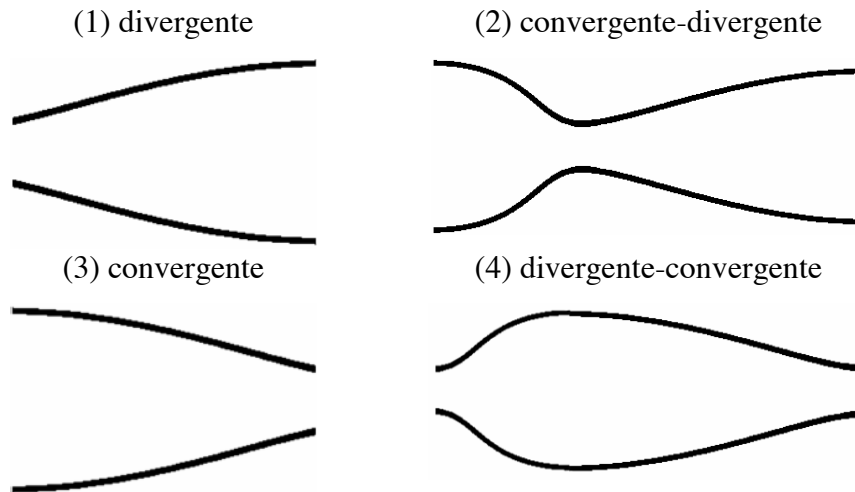
$$D_m = C_2 S(x) f(\alpha)$$

où  $f(\alpha)$  est une fonction de  $\alpha$  seul, à déterminer, et  $C_2$  une constante à exprimer en fonction de  $P_0$ ,  $\mu_0$  et  $\gamma$ .

**Q 34.** Justifier que l'on a nécessairement  $\alpha \in [0, 1]$ . Après avoir indiqué les limites, étudier la fonction  $f(\alpha)$  et préciser sa particularité en  $\alpha_M = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 0,528$ .

La tuyère doit avoir une forme adaptée aux conditions d'utilisation.

**Q 35.** Expliquer en quoi la valeur du rapport  $\frac{P_1}{P_0}$  influence sa géométrie et associer, parmi les formes proposées sur la figure 4, celles correspondant aux différents cas possibles.



**Figure 4** Les quatre géométries différentes des tuyères

**Q 36.** Afin d'éviter une trop forte détente des gaz après la sortie de la tuyère (ce qui peut conduire à la génération d'une onde de choc), on cherche à avoir une pression  $P_1$  proche de la pression extérieure. Le choix d'une tuyère de Laval pour le moteur NERVA est-il le plus judicieux ?

## II.C.2) La vitesse des gaz dans la tuyère

On se place dans la situation d'une propagation unidimensionnelle (selon  $\vec{e}_x$ ). Dans un premier temps, on cherche à établir la célérité des ondes acoustiques dans un fluide supposé parfait et soumis aux seules forces de pression. Celui-ci est caractérisé à l'équilibre par des valeurs uniformes  $P_0$  de la pression et  $\mu_0$  de la masse volumique. Du point de vue thermodynamique, ses évolutions sont considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité  $\chi_s$ . Le passage d'une onde sonore crée une perturbation et le fluide se déplace en de petits mouvements autour de l'équilibre, les champs de pression et de masse volumique devenant :  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$  et  $\mu(x, t) = \mu_0 + \tilde{\mu}(x, t)$ .

**Q 37.** Qu'appelle-t-on approximation acoustique ? Quel est l'ordre de grandeur de la surpression  $p$  pour des ondes acoustiques dans l'air ?

**Q 38.** Écrire et linéariser les équations locales de la mécanique des fluides et l'équation traduisant l'hypothèse thermodynamique effectuée. Établir l'équation de propagation des ondes acoustiques pour la surpression. Exprimer la célérité  $c$  de ces ondes en fonction de  $\chi_s$  et  $\mu_0$ .

**Q 39.** Dans le modèle du gaz parfait, établir la loi de variation de la célérité avec la température. Calculer  $c_0$  dans le dihydrogène en sortie du cœur de réacteur.

On définit le nombre de Mach  $M = \frac{v}{c}$  avec  $v$  la vitesse et  $c$  la célérité des ondes acoustiques. Un écoulement est dit subsonique pour  $M < 1$  et supersonique pour  $M > 1$ .

**Q 40.** Préciser la nature subsonique ou supersonique de l'écoulement de dihydrogène en sortie du cœur de réacteur.

**Q 41.** À partir de la relation établie à la question 32 et en tenant compte du caractère isentropique de l'évolution, établir une relation entre la température et la vitesse dans la tuyère. À quelle loi de conservation peut-on associer cette relation ? Justifier alors l'expression :

$$dT = -\frac{\gamma-1}{\gamma r} v^2 \frac{dv}{v}.$$

**Q 42.** En déduire la température en sortie de tuyère  $T_1$  ainsi que la nature subsonique ou supersonique de l'écoulement.

Dans la tuyère, les évolutions de la section  $S(x)$  et de la vitesse  $v(x)$  sont liées par la relation d'Hugoniot, admise :

$$\frac{dS}{S} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}$$

où  $M$  est le nombre de Mach.

**Q 43.** Au vu de la nature subsonique ou supersonique de l'écoulement à l'entrée et à la sortie de la tuyère, justifier que seule la tuyère de Laval permet une augmentation continue de la vitesse. Préciser la condition nécessaire sur le nombre de Mach  $M_c$  au niveau du col pour un fonctionnement optimal de celle-ci.

### II.C.3) Les dimensions de la tuyère

Connaissant le nombre de Mach au col et à la sortie de la tuyère, il est possible de déterminer les diamètres de celle-ci en ces points.

**Q 44.** Déduire de la question 41 la relation

$$T(1 + C_3 M^2) = C_4$$

où l'on exprimera les constantes  $C_3$  et  $C_4$  en fonction de  $\gamma$  et  $T_0$ .

**Q 45.** Déterminer les diamètres de la tuyère au col et à la sortie. Commenter vos résultats à l'aide de la figure 2.

**Q 46.** La pression en sortie de tuyère semble-t-elle respecter la condition évoquée à la question 36 ? Le dihydrogène subit-il un changement d'état à la sortie ?

---

• • • FIN • • •

---



|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

Signature

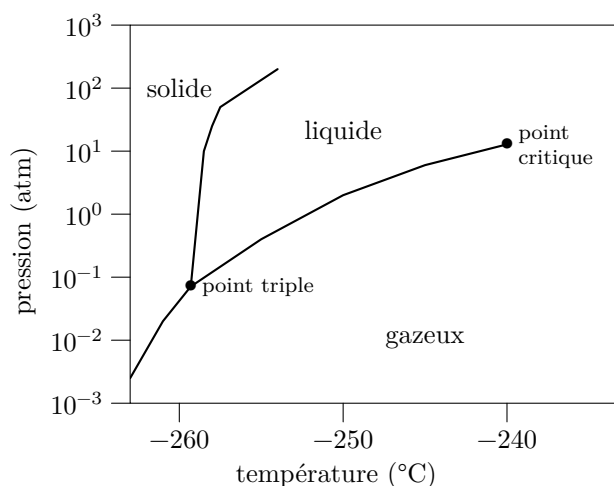
[illegible][illegible]

Épreuve : Physique 2 PC

Feville

|  |  |   |  |  |
|--|--|---|--|--|
|  |  | / |  |  |
|--|--|---|--|--|

## Données

$$M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$$
$$a_T = 150 \times 10^6 \text{ km}$$
$$a_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$$
$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$$
$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$
$$T_T = 365 \text{ jours}$$
$$T_M = 687 \text{ jours}$$
$$P_{\text{vap}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$\Delta H_{\text{vap}} = 0,900 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$
$$\mu_{\text{LH}_2} = 71,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$
$$M_{\text{H}_2} = 2,00 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$
$$\gamma = 1,4$$
$$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$
$$r = R/M_{\text{H}_2} = 4,16 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$
$$c_p = r\gamma/(\gamma - 1)$$




**Ne rien écrire****dans la partie barrée**

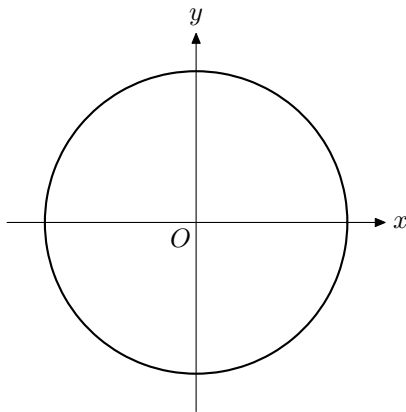
P043-DR/2022-03-18 09:35:08

## Formulaire

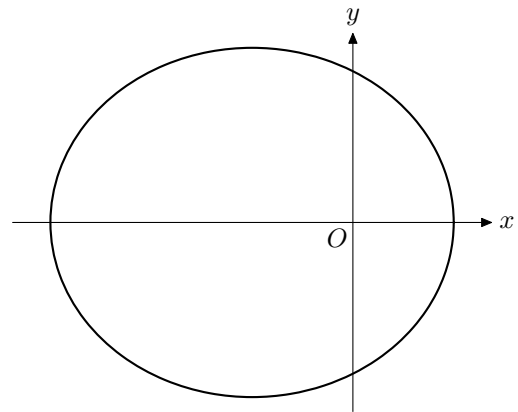
L'équation polaire d'une conique d'axe focal  $(Ox)$ , de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$  s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

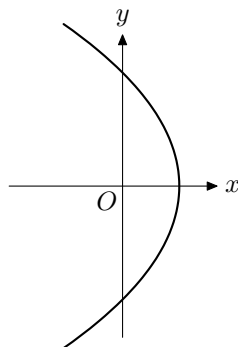
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



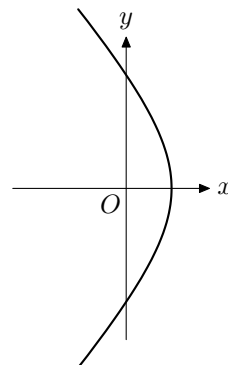
$e = 0$ , la courbe est un cercle



$0 < e < 1$ , la courbe est une ellipse



$e = 1$ , la courbe est une parabole



$e > 1$ , la courbe est une hyperbole

Questions 7 et 10

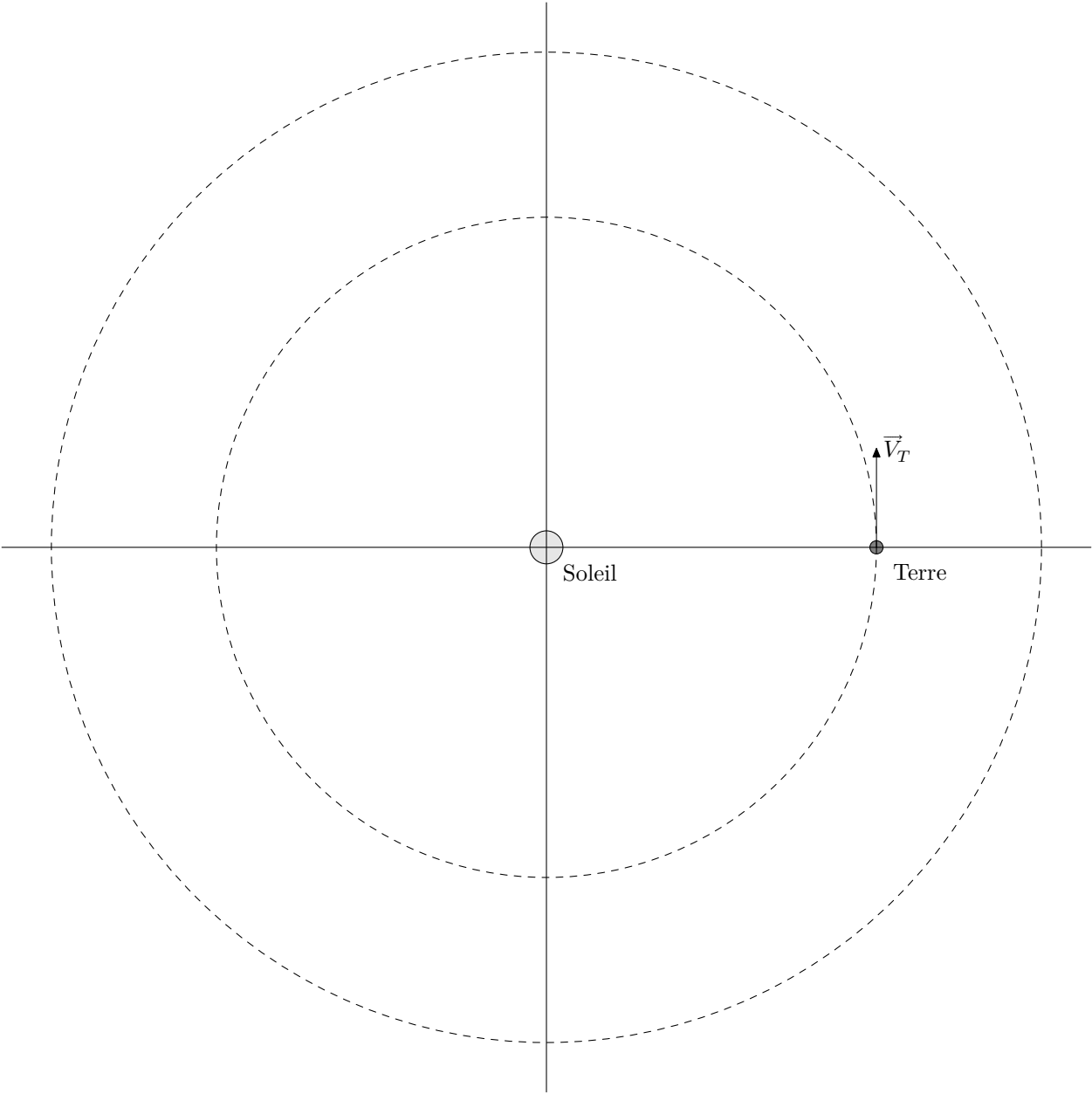


Figure A

Questions 14 et 16

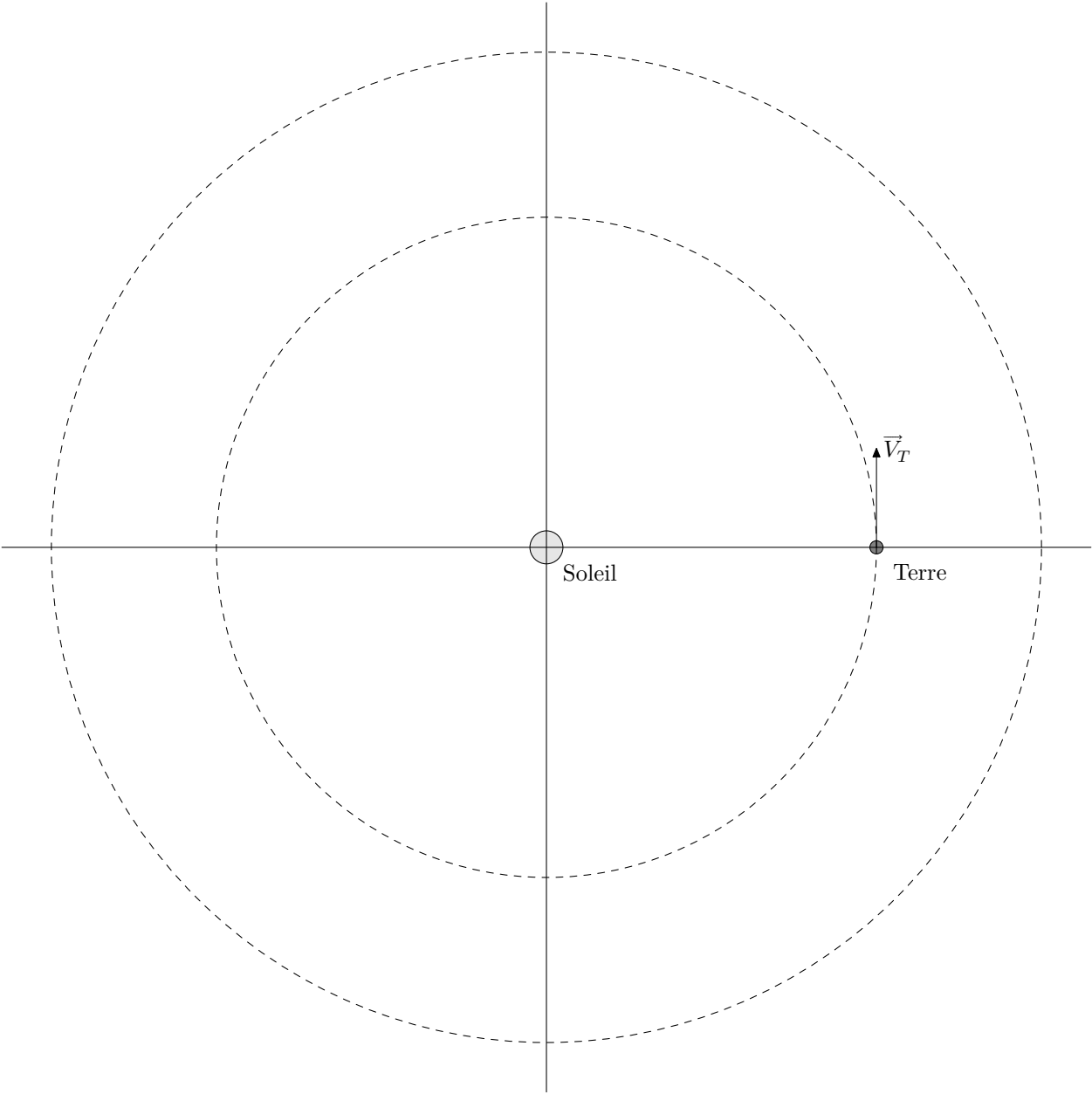
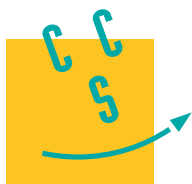


Figure B



## Détection de molécules individuelles à température ambiante

Une molécule fluorescente peut être utilisée comme une sonde locale, à l'échelle nanométrique, de son environnement. Des techniques comme la microscopie confocale, la microscopie biphotonique permettent la détection, avec un bon rapport signal sur bruit, de la fluorescence émise par une molécule individuelle appelée fluorophore. Il est ainsi possible d'accéder à une information non moyennée spatialement. L'évolution temporelle du signal permet alors de suivre la dynamique de la molécule étudiée, aussi bien la dynamique interne que les interactions de la molécule avec son environnement.

L'objet de ce sujet est de comprendre comment détecter de façon satisfaisante le signal de fluorescence émis par une seule molécule (partie I), comment exalter le signal (« Raman ») diffusé par une molécule en interaction avec une nanoparticule métallique (partie III). La partie II aborde l'analyse du signal de fluorescence émis par une molécule.

Les fluorophores sont des molécules qui absorbent la lumière dans un certain domaine spectral et réémettent de la lumière par désexcitation radiative dans un autre domaine. Les fluorophores étudiés sont insérés dans un substrat, qui peut être par exemple un polymère ou une matrice dite sol-gel, ou sont simplement des solutés dans un solvant. Le fluorophore est choisi pour être un bon chromophore, c'est-à-dire pour absorber fortement la lumière, et sera caractérisé par un fort coefficient d'extinction molaire à la longueur d'onde du maximum d'absorption  $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$  (par comparaison  $\varepsilon_{\max} \approx 2 \times 10^3 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour les ions permanganate en solution aqueuse).

Le signal de fluorescence  $S_f$  émis par une seule molécule dépend de son taux de fluorescence  $R_f$ , de l'ordre de  $1 \times 10^8 \text{ photons} \cdot \text{s}^{-1}$  dans des conditions favorables. Le microscope est, lui, caractérisé par son efficacité de détection globale des photons (système optique plus détecteur)  $\eta_D$  dont un ordre de grandeur satisfaisant est de 2 %. Pour obtenir un bon rapport signal sur bruit, il faut exciter convenablement les chromophores, collecter avec une bonne efficacité de détection le signal émis  $S_f$  et éliminer de façon importante le signal parasite  $S_d$  issu du très grand nombre de molécules du substrat qui seront illuminées en même temps que le chromophore.

Des données et relations utiles sont disponibles en fin d'énoncé.

### I Détection du signal de fluorescence de molécules individuelles à température ambiante

Les éléments essentiels du microscope sont : la source de lumière constituée par un faisceau laser adapté, l'objectif de microscope permettant à la fois d'exciter les fluorophores et de collecter la lumière émise, la lame séparatrice ou miroir dichroïque (voir plus loin le sens de ce terme) permettant la séparation entre lumière de fluorescence et lumière diffuse, et un photodétecteur utilisé en mode « comptage de photons » produisant un signal exprimé en nombre de coups.

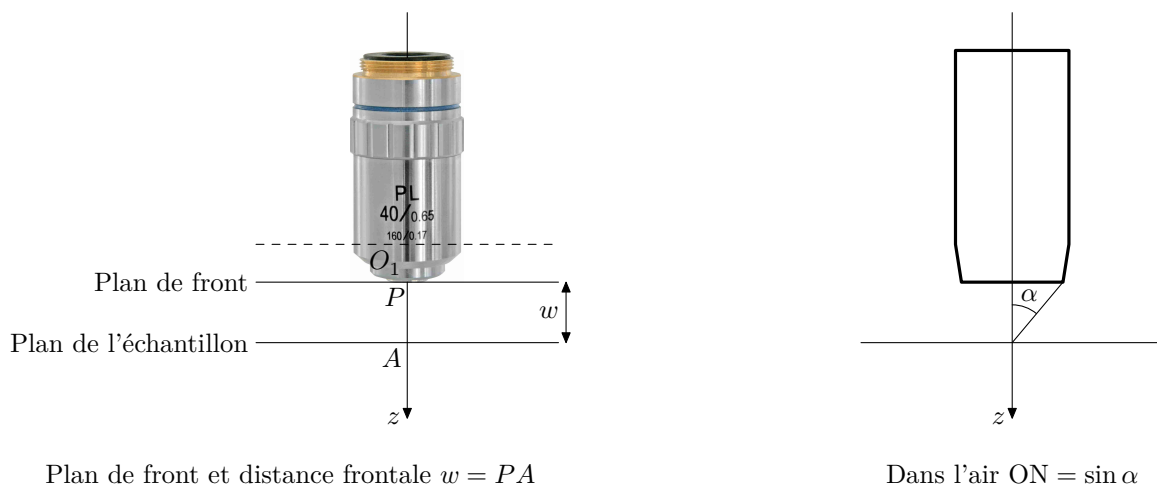
#### I.A – Objectif de microscope et microscopie classique

L'objectif de microscope est un dispositif optique complexe constitué de plusieurs lentilles optiques. Dans cette sous-partie, on considère un objectif  $\times 40$  utilisé dans un microscope classique, donnant d'un objet microscopique une image réelle agrandie renversée ; le grandissement transversal  $\gamma$  vaut donc  $\gamma = -40,0$ . On modélise l'objectif par une lentille mince convergente, d'axe optique ( $O_1z$ ) et de centre  $O_1$ .

La figure 1 montre une photographie de cet objectif avec les indications « 40 » pour le grandissement, « 0.65 » pour l'ouverture numérique (ON), « 160 » (mm) pour la longueur de tube  $\Delta$ , définie ci-après, et « 0.17 » (mm) pour la lamelle couvre-objet. Le plan de front  $P$  en avant de la monture de l'objectif est tel que la distance  $O_1P$  est égale à 3,5 mm.

En notant  $\alpha$  le demi-angle d'ouverture, c'est-à-dire l'angle entre l'axe optique et le rayon le plus écarté de l'axe optique qui entre dans l'objectif, l'ouverture numérique est définie par  $ON = n \sin \alpha$ , où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu dans lequel plonge l'objectif ( $n = 1,00$  pour l'air).

On utilise cet objectif et un oculaire de distance focale  $f'_2 = 20 \text{ mm}$  dans un microscope classique. L'objectif et l'oculaire sont maintenus solidaires par le tube du microscope qui impose la distance  $F'_1F_2$  entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire. Cette distance  $\Delta$  est appelée intervalle optique du microscope ou longueur de tube. Le microscope est utilisé de telle façon que l'œil n'ait pas besoin d'accommoder.



**Figure 1** Objectif de microscope  $\times 40$

Par souci de simplicité, pour les calculs, on se placera dans les conditions de Gauss, même si elles sont mal vérifiées en pratique. Un schéma optique du microscope est représenté sur la figure A du document réponse.

**Q 1.** Où doit se former l'image intermédiaire donnée par l'objectif, pour une observation sans accommodation à travers l'oculaire, de l'image finale ?

**Q 2.** Sur le schéma de la figure A du document réponse, réaliser la construction géométrique de l'image de l'objet  $AB$  par l'ensemble du microscope.

**Q 3.** Déterminer puis calculer la distance focale équivalente  $f'_1$  de la lentille modélisant l'objectif.

**Q 4.** Déterminer puis calculer la distance frontale  $w$  (distance de travail), c'est-à-dire la distance  $PA$  séparant la lame porte-échantillon et le plan de front de l'objectif  $\times 40$ . Expliquer pourquoi certains objectifs de fort grandissement sont équipés d'un système à ressort qui évite la détérioration de la lentille frontale.

On considère que l'œil est capable d'accommoder pour avoir une vision nette d'un objet situé à une distance minimale  $d_m = 25$  cm. L'œil est positionné dans le plan focal image de l'oculaire.

**Q 5.** Calculez la latitude de mise au point du microscope pour cet objectif, c'est-à-dire la distance dont on peut déplacer l'objectif par rapport à l'objet en conservant une vision nette. De quel système doit être équipé le tube du microscope ?

### **I.B – Microscope de fluorescence utilisé en configuration confocale pour la réjection du bruit de fond**

Le microscope classique est modifié de la façon suivante : on supprime l'oculaire et on positionne un capteur dans le plan de l'image intermédiaire donnée par l'objectif, en le centrant sur l'axe optique. Pour réaliser un « microscope confocal », on introduit également un diaphragme de petite taille (par exemple  $10\ \mu\text{m}$ ), lui aussi centré sur l'axe optique, dans le plan du capteur. De cette façon l'ensemble (capteur + diaphragme) permet de réaliser un détecteur quasi-ponctuel.

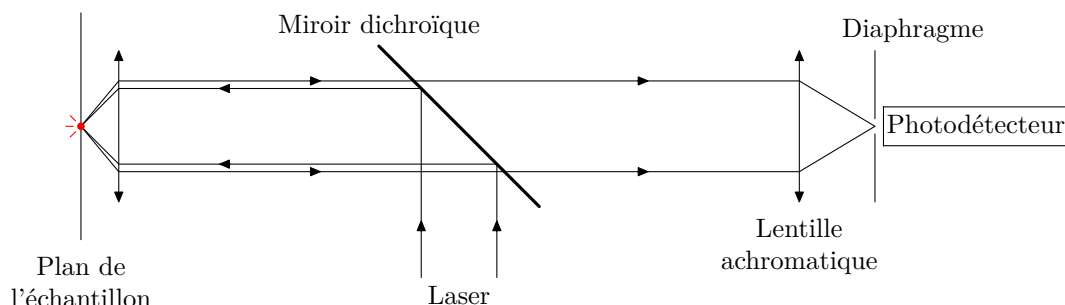
**Q 6.** Sur le schéma de la figure B du document réponse, tracer le faisceau de lumière émis par le point  $B$  situé dans le plan de l'échantillon mais hors de l'axe optique.

**Q 7.** Sur le schéma de la figure C, tracer le faisceau de lumière émis par le point  $C$  situé sur l'axe optique mais hors du plan de l'échantillon.

**Q 8.** À quoi sert l'introduction d'un trou de petite taille dans le plan du photodétecteur ?

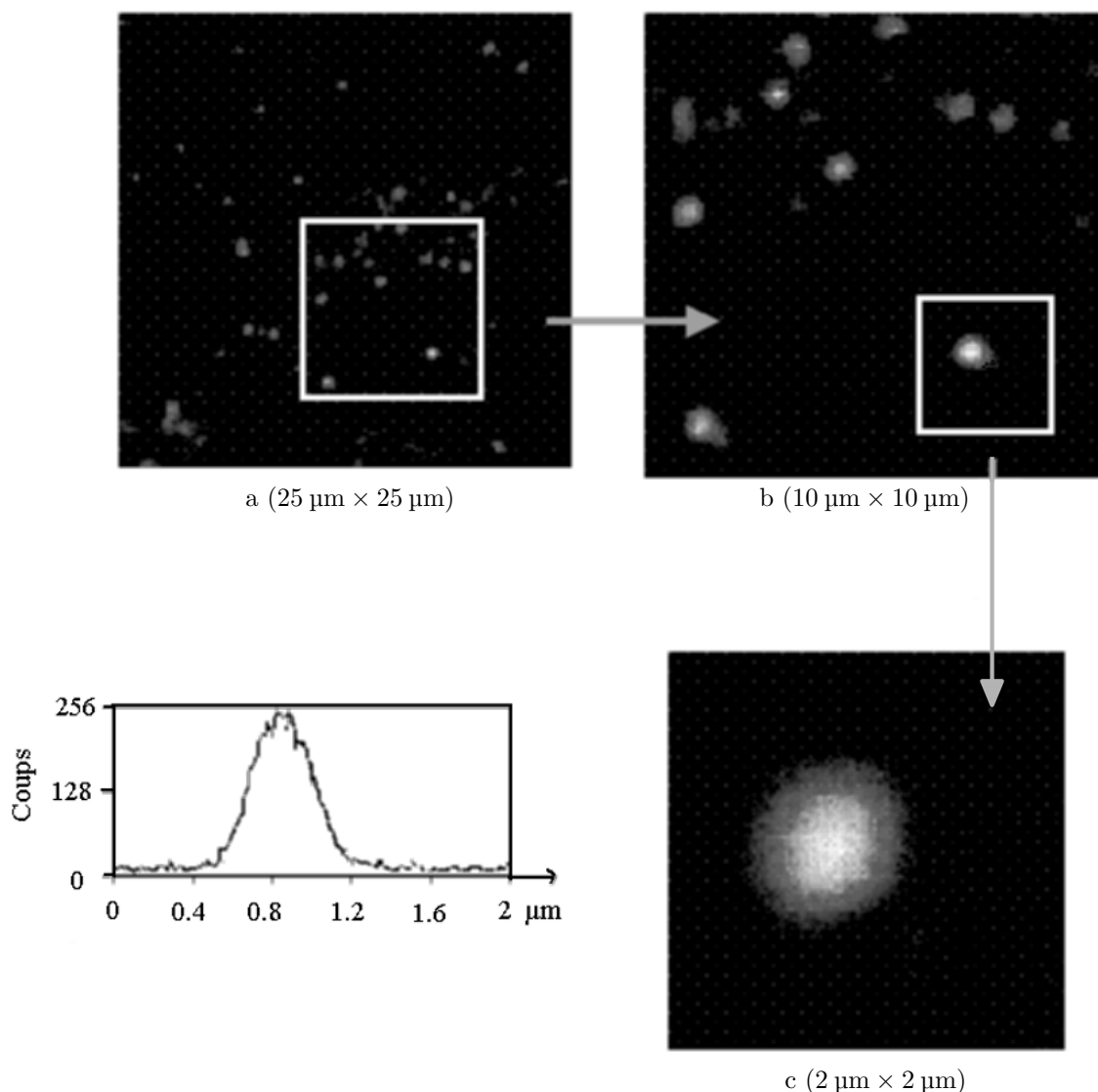
**Q 9.** Justifier la nécessité d'un système de balayage (translation de l'échantillon dans son plan) pour réaliser une image de fluorescence.

La figure 2 présente le schéma de principe du microscope confocal de fluorescence utilisé pour la détection de molécules individuelles.



**Figure 2** Schéma de principe du microscope confocal

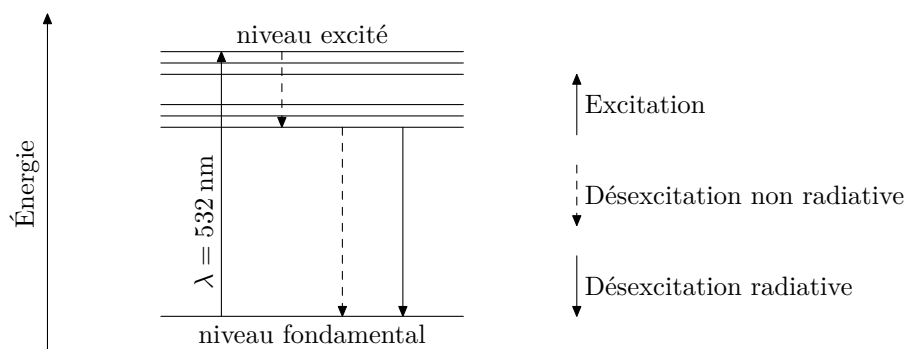
La figure 3 montre des images de fluorescence obtenues avec ce dispositif. Il convient de remarquer que ces images sont le résultat d'un balayage, chaque pixel est associé à une position de l'échantillon et l'énergie lumineuse détectée à cette position, pendant le temps d'exposition choisi, est codée en niveau de gris.



**Figure 3** Images de fluorescence de molécules individuelles ( $256 \times 256$  pixels), zooms successifs sur une même zone de l'échantillon (images a, b et c) et profil du nombre de coups détectés sur une ligne de l'image c passant par le centre de la tache image

### I.C – Séparation de la lumière de fluorescence de la lumière diffuse

Les fluorophores sont des molécules qui absorbent la lumière dans un certain domaine spectral (excitation) et réémettent de la lumière (désexcitation radiative). La figure 4 donne un premier schéma très simplifié des niveaux d'énergie dans une molécule organique fluorescente.



**Figure 4** Schéma simplifié des niveaux d'énergie dans une molécule fluorescente

**Q 10.** D'après le schéma de la figure 4 comparer la longueur d'onde du signal de fluorescence résultant de la désexcitation radiative à celle du laser excitateur ( $\lambda = 532$  nm).

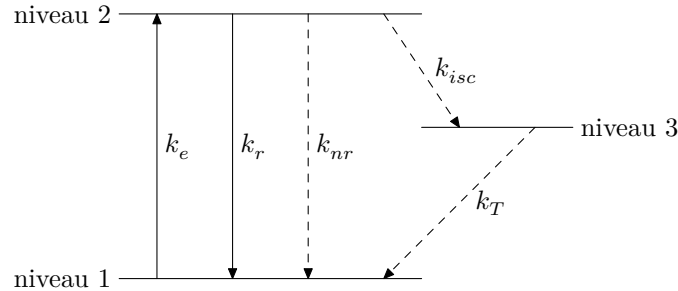
On utilise un séparateur de faisceau assimilé ici à une lame semi-réfléchissante fine qui joue le rôle d'un miroir plan pour la lumière laser. On parle de *miroir dichroïque*.

**Q 11.** Expliquer le rôle de la lame semi-réfléchissante et donner l'allure que doit avoir la courbe du coefficient de transmission du miroir en fonction de la longueur d'onde  $T(\lambda)$ .

### I.D – Émission de la lumière de fluorescence par un fluorophore

Afin d'estimer de façon simple le rendement de fluorescence, on adopte une modélisation simplifiée qui néglige le décalage de longueur d'onde entre le laser excitateur et le signal de fluorescence. On considère alors que la molécule peut accéder à trois niveaux d'énergie schématiquement représentés sur la figure 5.

On note  $k_e$  le taux d'excitation du niveau 1 (niveau fondamental) au niveau 2 (niveau excité),  $k_r$  et  $k_{nr}$  les taux de désexcitation radiative et non radiative du niveau 2 vers le niveau 1 et  $k_T$  le taux de désexcitation du niveau 3 (appelé niveau triplet) vers le niveau 1. Il existe, à partir du niveau 2, une possibilité pour la molécule de passer dans le niveau 3 avec un taux  $k_{isc}$  (« inter-system crossing »).



**Figure 5** Description des niveaux d'énergie du fluorophore par un système à 3 niveaux

On note  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , les probabilités d'occupation de chaque niveau. Les probabilités  $P_1$  et  $P_3$  obéissent aux équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= -k_e P_1 + (k_r + k_{nr}) P_2 + k_T P_3, \\ \frac{dP_3}{dt} &= k_{isc} P_2 - k_T P_3.\end{aligned}$$

**Q 12.** Déterminer l'équation vérifiée par  $\frac{dP_2}{dt}$  en fonction des taux définis précédemment et des probabilités d'occupation des niveaux d'énergie. Les équations du système sont-elles linéairement indépendantes ?

On suppose que le système est fermé, c'est-à-dire que les seuls niveaux accessibles sont les niveaux 1, 2, et 3. Cela permet d'écrire une relation supplémentaire entre les probabilités  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

**Q 13.** Écrire cette relation entre les probabilités  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

En réalité la molécule n'est pas toujours photostable. La fluorescence peut s'arrêter brutalement et définitivement après que la molécule ait été excitée un trop grand nombre de fois. Le système réel n'est donc pas fermé.

**Q 14.** Comment peut-on observer ce phénomène sur l'image b de la figure 3 ?

**Q 15.** Déterminer la solution stationnaire  $P_{2s}$  pour la probabilité d'occupation du niveau 2 en fonction de  $k_e$ ,  $k_r$ ,  $k_{nr}$ ,  $k_{isc}$  et  $K = 1 + \frac{k_{isc}}{k_T}$  dans le cas d'un système fermé.

Le taux de fluorescence en régime stationnaire s'écrit  $R_f = k_r P_{2s}$ .

**Q 16.** En déduire qu'il existe un taux limite de fluorescence, noté  $R_f^\infty$  quand le taux d'excitation  $k_e$  devient très grand devant les taux de désexcitation  $k_r$ ,  $k_{nr}$  et  $k_{isc}$ . Justifier qualitativement l'existence d'un taux limite.

**Q 17.** Expliquer pourquoi alors il n'est pas souhaitable d'exciter trop fortement l'échantillon.

**Q 18.** Calculer la valeur numérique de  $R_f^\infty$  dans le cas d'un « bon » chromophore où  $K = 10$  avec une durée de vie radiative  $\tau_r = 1/k_r = 5$  ns.

On définit le taux d'excitation à saturation  $k_e^s$  par  $R_f(k_e^s) = \frac{1}{2} R_f^\infty$  et  $I_s$  l'intensité à saturation du faisceau laser, correspondant à ce taux d'excitation.

**Q 19.** Montrer que le taux d'excitation à saturation  $k_e^s$  s'écrit  $k_e^s = \frac{1}{\phi_f} \frac{k_r}{K}$ . Expliciter  $\phi_f$  appelé *rendement quantique de fluorescence* en fonction  $k_r$ ,  $k_{nr}$  et  $k_{isc}$ . Réexprimer alors  $R_f^\infty$  en fonction  $\phi_f$  et  $k_e^s$ .

L'intensité laser à saturation  $I_s$  et le taux d'excitation à saturation  $k_e^s$  sont reliées par  $k_e^s = \frac{I_s \varepsilon_{\max}}{h\nu N_A}$  où  $\nu$  est la fréquence de l'onde laser,  $h$  la constante de Planck,  $N_A$  la constante d'Avogadro et  $\varepsilon_{\max}$  le coefficient d'extinction molaire.



**Q 20.** Quelle est la dimension de  $\sigma = \varepsilon_{\max}/N_A$  ? Quel sens concret peut-on donner à la grandeur  $\sigma$  ? Pour les molécules considérées, on a  $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Commenter l'ordre de grandeur de  $\sigma$ .

**Q 21.** Déterminer numériquement, en  $\text{kW} \cdot \text{cm}^{-2}$  l'intensité à saturation  $I_s$  pour  $\lambda = 532 \text{ nm}$  la longueur d'onde du laser utilisé,  $\phi_f \approx 1$ ,  $K = 10$ ,  $\tau_r = 1/k_r = 5 \text{ ns}$  et  $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Commenter sachant qu'un laser de type He-Ne tel que ceux utilisés en travaux pratiques émet, en ordre de grandeur, une puissance de 1 mW.

### I.E – Excitation laser

Phénoménologiquement, pour des objectifs de grande ouverture numérique, dont le diaphragme d'entrée est légèrement sur-illuminé, une bonne description du faisceau laser d'axe  $Oz$  (origine  $O$  au point de focalisation) est donnée par une fonction gaussienne-gaussienne en fonction des coordonnées cylindriques  $r$  et  $z$

$$I(r, z) = I_0 \exp\left(-2\frac{z^2}{\omega_z^2}\right) \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega_r^2}\right)$$

où  $\omega_r = 0,5 \frac{\lambda}{\sin \theta}$  et  $\omega_z = 0,8 \frac{\lambda}{1 - \cos \theta}$  sont des grandeurs dépendant de la longueur d'onde et de l'ouverture numérique  $\text{ON} = \sin \theta$ .

**Q 22.** En considérant la molécule fluorescente comme un émetteur ponctuel, évaluer l'ouverture numérique de l'objectif utilisé pour réaliser les images de la figure 3 avec la longueur d'onde laser  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . Pourquoi est-il important d'utiliser un objectif d'ouverture numérique élevée ?

**Q 23.** Déterminer un ordre de grandeur de la puissance du faisceau laser incident pour obtenir un taux d'excitation à saturation.

**Q 24.** Déterminer un ordre de grandeur du volume excité en fonction de  $\omega_r$  et  $\omega_z$ . Calculer numériquement cet ordre de grandeur.

Pour réaliser un échantillon permettant la détection individuelle de molécules fluorescentes, on réalise un dépôt d'une solution de molécules fluorescentes solvatées, sur une lame porte-échantillon. Le dépôt est réalisé sur un plateau tournant à haute vitesse pour produire des films de 100 nm d'épaisseur.

**Q 25.** Quel doit être l'ordre de grandeur de la concentration de la solution de molécules fluorescentes pour pouvoir produire des images telles que celles représentées en figure 3 ?

### I.F – Rapport signal sur bruit

Le signal étudié est le nombre de photons détectés (ou nombre de « coups »).

**Q 26.** Exprimer le signal de fluorescence détecté  $S_f$  provenant d'un seul fluorophore en fonction de l'efficacité de détection, du taux de fluorescence  $R_f$  et de la durée d'acquisition  $\tau_a$ .

**Q 27.** Les images de fluorescence ont été obtenues avec un taux d'excitation  $k_e = 0,1k_e^s$  afin de préserver la photo-stabilité de la molécule. Quelle durée  $\tau_i$  est nécessaire pour obtenir l'image b de la figure 3 ? Le temps de déplacement de l'échantillon sera négligé.

Le signal diffusé par l'ensemble des molécules contenues dans le volume sondé  $V$  en fonction de la densité volumique de molécules de la matrice  $n$  s'écrit en fonction de l'efficacité de détection, de l'intensité laser  $I_0$ , de la durée d'acquisition  $\tau_a$ ,  $S_d = \eta_D \sigma_d n V \frac{I_0 \tau_a}{h\nu}$  où  $\sigma_d$  est une constante appelée section efficace de diffusion. Le bruit généré  $B$  est égal à la racine carrée du nombre total de coups détectés  $S = S_f + S_d$ .

**Q 28.** Exprimer le rapport signal sur bruit  $S_f/B$  en fonction des grandeurs du problème.

**Q 29.** Expliquer pourquoi le diaphragme permet d'améliorer le rapport signal sur bruit de l'image.

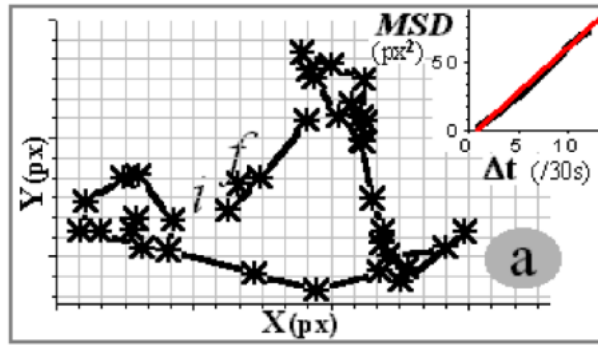
## II Analyse de la lumière de fluorescence

On s'intéresse à la détection de chromophores fluorescents (« pérylène orange ») dans un film sol-gel d'épaisseur 50 à 100 nm. La matrice sol-gel dont est constitué le film a une structure poreuse, comprenant une matrice en silice avec des cavités (pores), le plus souvent remplies de solvant et des interconnexions étroites entre pores.

La figure 6 montre le suivi du déplacement d'une molécule de chromophore dans lequel les positions successives de la molécule, représentées par des croix, ont été pointées à intervalles de temps réguliers. On cherche à rendre compte du déplacement par un processus diffusif modélisé par une marche au hasard. Par simplicité, on raisonne sur un problème à une dimension, suivant un axe ( $Ox$ ). La molécule  $A$ , initialement en  $O$ , fait des sauts entre des sites fixes d'abscisses  $x_n = na$  (positions  $A_n$ ) distants de  $a$ . La durée de chaque saut est notée  $\tau$ . Les deux sens de déplacement à chaque saut sont équiprobables.

**Q 30.** Relier la probabilité  $p(x_n, t_n)$  pour la particule d'être à l'abscisse  $x_n$  à la date  $t_n = n\tau$  aux probabilités  $p(x_{n-1}, t_{n-1})$  et  $p(x_{n+1}, t_{n-1})$ .

**Q 31.** En passant à une probabilité continue  $p(x, t)$  définie en tout point et à tout instant, montrer qu'on peut écrire :  $p(x_n, t_n) \approx p(x_n, t_{n-1}) + \frac{\partial p}{\partial t} \tau$ .



**Figure 6** Suivi temporel du déplacement d'une molécule fluorescente dans une matrice sol-gel

- Q 32.** Relier par un développement limité au second ordre  $p(x_{n-1}, t_{n-1})$  et  $p(x_{n+1}, t_{n-1})$  à  $p(x_n, t_{n-1})$ .
- Q 33.** Montrer alors que  $p(x, t)$  vérifie une équation de diffusion.
- Q 34.** Déterminer le coefficient de diffusion  $D$ .
- Q 35.** Exprimer  $\langle \overline{OA_N} \rangle$ , la moyenne statistique sur un grand nombre de configurations de la quantité vectorielle  $\overline{OA_N}$  après  $N$  sauts. Commenter.
- Q 36.** Montrer que le déplacement quadratique moyen  $\Delta^2$  (noté MSD sur la figure 6),  $\Delta^2 = \langle \|\overline{OA_N}\|^2 \rangle$ , est proportionnel à la durée  $\Delta t$  correspondant à  $N$  sauts.  
À deux dimensions on admet que le coefficient de proportionnalité est multiplié par deux. Sur le schéma de la figure 6, est tracé la modélisation de  $\Delta^2$  en fonction de la durée  $\Delta t$ .
- Q 37.** Sur la molécule suivie en figure 6, une modélisation linéaire de  $\Delta^2$  en fonction de  $\Delta t$  donne pour le coefficient directeur  $\beta = 4 \times 10^{-13}$  SI. En déduire la valeur du coefficient de diffusion avec son unité.

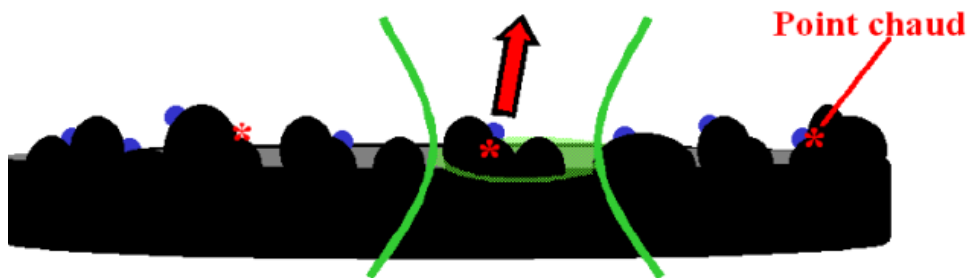
### III Exaltation du signal par un substrat métallique présentant une rugosité

Dans cette partie, le signal détecté n'est pas un signal de fluorescence mais un autre signal appelé « diffusion Raman », qu'on détecte avec un dispositif optique proche de celui de la partie I. Ceci n'a pas de conséquence sur ce qui est étudié dans cette partie. Dans la diffusion Raman, le champ électrique associé à l'onde lumineuse incidente induit une polarisation des molécules, qui deviennent alors sources d'une onde électromagnétique dite onde diffusée.

Le substrat présente des agrégats de nanoparticules métalliques sur lesquels des molécules se sont fixées (phénomène d'adsorption). Les concentrations utilisées sont telles que statistiquement il y a au plus une molécule adsorbée par agrégat. On constate expérimentalement que certains de ces agrégats permettent d'amplifier le signal Raman diffusé par la molécule de plusieurs ordres de grandeurs et sont pour cette raison appelés « points chauds » du substrat.

Deux contributions possibles à cette amplification sont étudiées dans cette partie :

- l'effet d'antenne lié à l'adsorption d'une molécule par une nanoparticule de dimensions nanométriques ;
- un effet lié à l'excitation collective des électrons de surface (phénomène de « plasmon de surface localisé »).



**Figure 7** Substrat métallique présentant une rugosité sur lequel sont adsorbées des molécules

#### III.A – Dipôle induit dans une nanoparticule métallique sphérique de taille 10 nm

L'adsorption de la molécule entraîne une polarisabilité de la nanoparticule sur laquelle elle est adsorbée. Ainsi, sous l'action du champ électrique de l'onde laser, la nanoparticule acquiert un dipôle induit  $\vec{p}_1 = \alpha_1 \epsilon_0 \vec{E}$  et la molécule  $\vec{p}_2 = \alpha_2 \epsilon_0 \vec{E}$ . Le champ électrique  $\vec{E}$  est considéré comme uniforme à l'échelle étudiée. On admet que l'amplitude du champ de l'onde diffusée est une fonction croissante de l'amplitude du dipôle induit dans l'entité microscopique.

**Q 38.** Comment appelle-t-on la grandeur  $\alpha$  ? Préciser, en la justifiant, la dimension de  $\alpha$  puis donner un ordre de grandeur littéral.

**Q 39.** Évaluer numériquement l'ordre de grandeur du rapport  $\alpha_2/\alpha_1$ . Conclure sur l'effet d'antenne que représente la nanoparticule pour la molécule.

### III.B – Modèle de Drude pour les électrons métalliques de la nanoparticule

Pour rendre compte des propriétés de la nanoparticule, on cherche à exprimer sa conductivité électrique en régime sinusoïdal établi. On utilise la représentation complexe en notant les grandeurs complexes associées aux grandeurs dépendant sinusoïdalement du temps par des lettres soulignées.

On considère la vitesse d'un électron libre du métal  $\underline{v}$  induite par un champ électrique oscillant d'amplitude complexe  $\underline{E}_0 e^{i\omega t}$  et on néglige la force magnétique exercée sur un électron. Pour modéliser les phénomènes dissipatifs, on introduit une force visqueuse  $-(m/\tau)\underline{v}$  où  $\tau$  est un temps caractéristique du métal.

**Q 40.** Exprimer le vecteur densité volumique de courant  $\underline{j}_e$  en fonction de la densité volumique  $n$  d'électrons libres du métal, de la charge de l'électron  $-e$  et de sa vitesse  $\underline{v}$ .

**Q 41.** Exprimer la conductivité électrique complexe  $\sigma$  en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\omega$  et de la pulsation

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \text{ appelée pulsation plasma.}$$

**Q 42.** Montrer que si la constante  $\tau$  est « suffisamment » grande, alors la conductivité  $\sigma$  est imaginaire pur. Quelle est alors la valeur moyenne de la puissance cédée par le champ électrique dans le métal ?

**Q 43.** On définit la constante diélectrique du métal par  $\varepsilon = 1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ . Exprimer  $\varepsilon$  en fonction de  $\omega$  et de la pulsation  $\omega_p$ , dans le cas où les pertes sont négligeables.

On donne alors l'expression de la polarisabilité de la particule métallique sphérique de rayon  $a$  en fonction de la constante diélectrique du métal

$$\alpha = 4\pi a^3 \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right).$$

**Q 44.** En déduire la condition sur la pulsation du champ pour que la polarisabilité de la particule métallique sphérique devienne très grande.

La pulsation résonante pour une particule d'argent sphérique correspond à une longueur d'onde de 355 nm. Mais lorsque la forme s'allonge et que la particule devient ellipsoïdale, la résonance se dédouble et une des deux résonances (celle correspondant au mouvement d'oscillation électronique suivant le grand axe de l'ellipsoïde) est déplacée vers le rouge. Ainsi à 532 nm pour l'argent, la résonance plasmon correspond à une nanoparticule présentant une excentricité de 4.

## Données et formulaire

*Relations de conjugaison de Descartes et de Newton* pour une lentille mince de distance focale  $f'$ , de centre optique  $O$ , de foyer objet  $F$ , de foyer image  $F'$  et expression du grandissement algébrique  $\gamma$ ,  $A$  et  $A'$  étant deux points conjugués appartenant à l'axe optique.

$$\begin{cases} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \\ \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{F'A'} \overline{FA} = -f'^2 \\ \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \end{cases}$$

### Constantes physiques

|                                    |                                                    |
|------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Constante de Planck                | $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  |
| Constante d'Avogadro               | $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$       |

• • • FIN • • •



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Numéro de place

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

Numéro d'inscription

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

Signature

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Nom

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Prénom

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Épreuve : Physique 2 PC

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

 / 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

Question 2

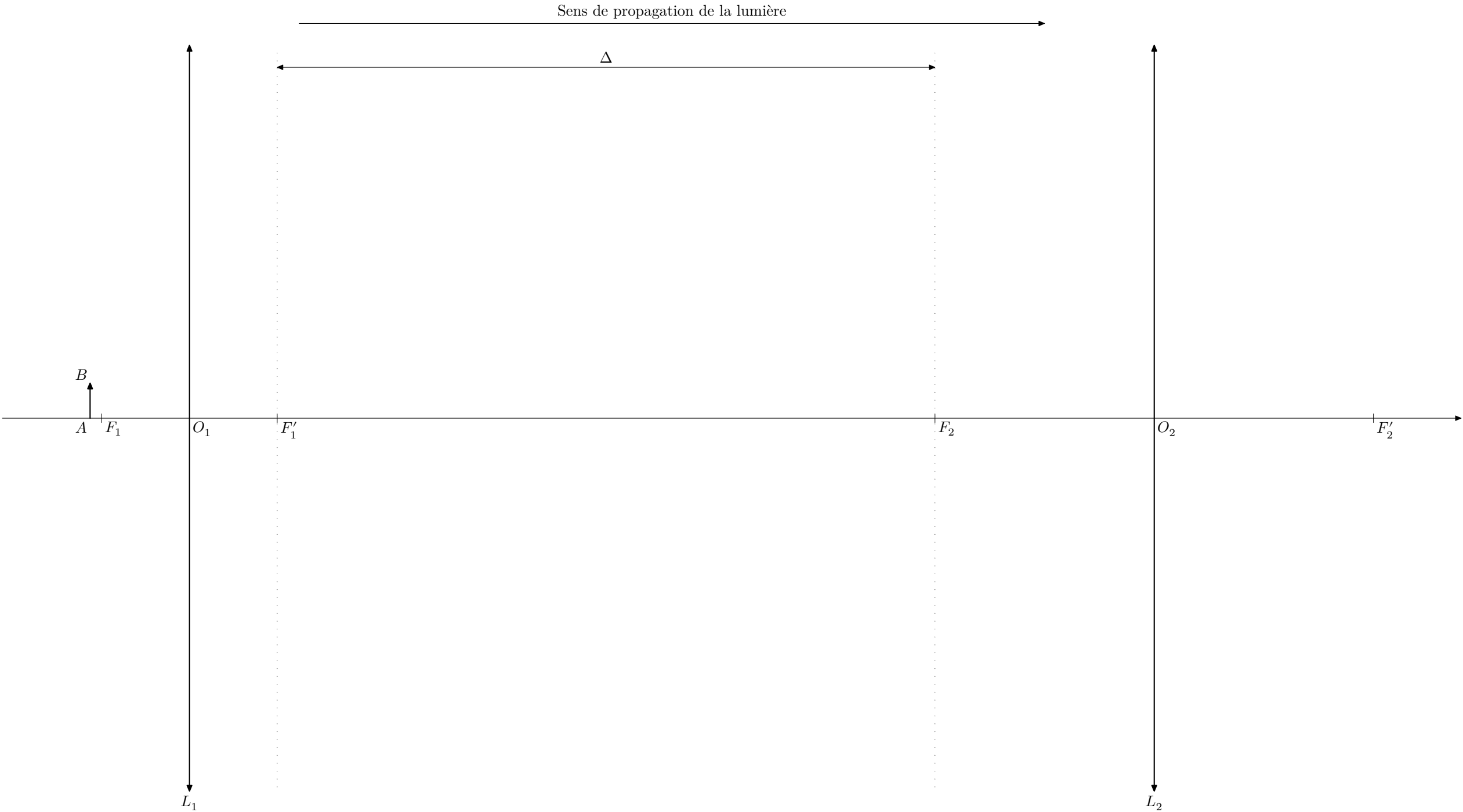
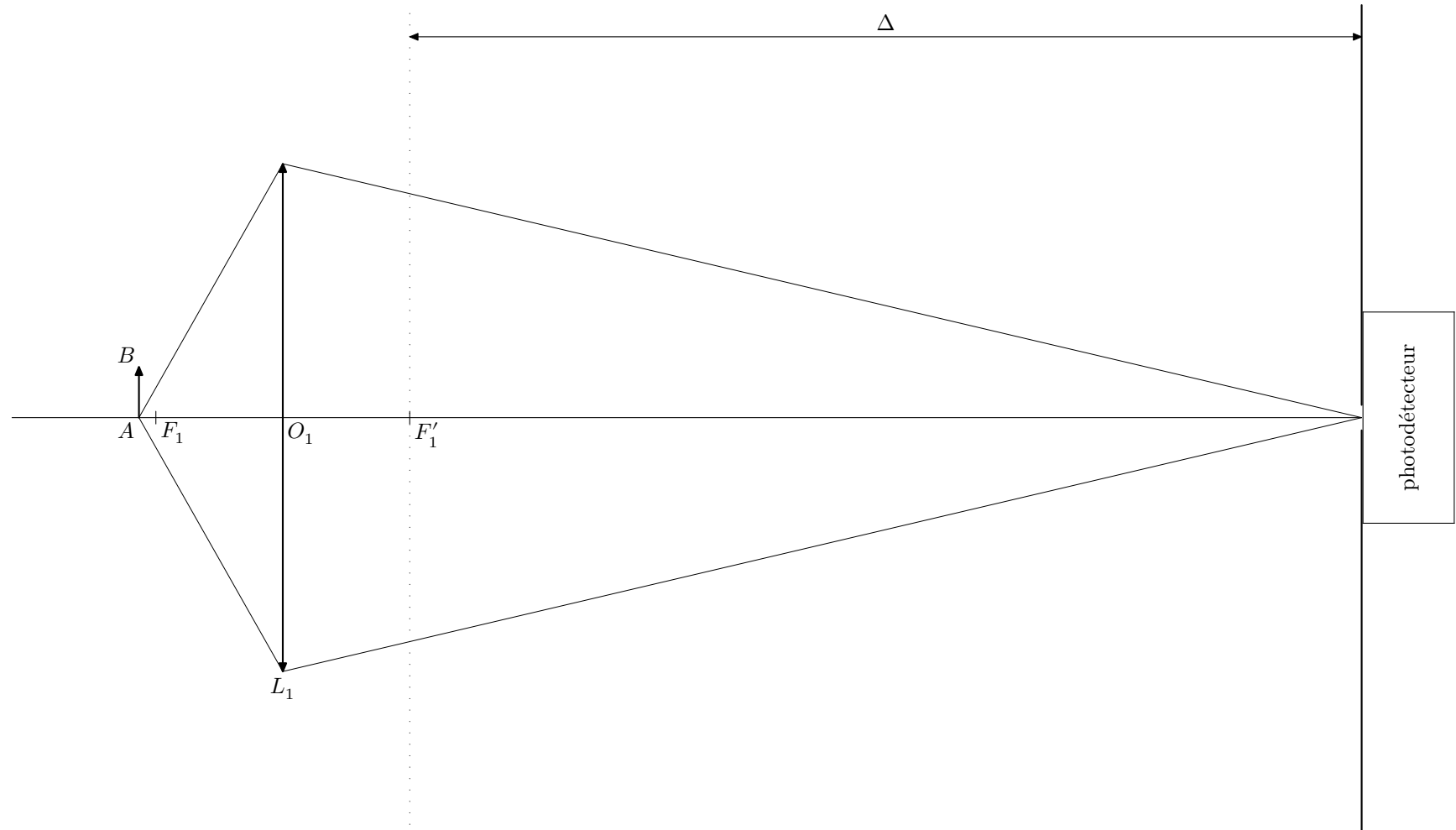


Figure A Schéma optique du microscope

**Ne rien écrire dans la partie barrée**

P044-DR/2021-01-23 10:11:35

### Question 6



**Figure B**

Question 7

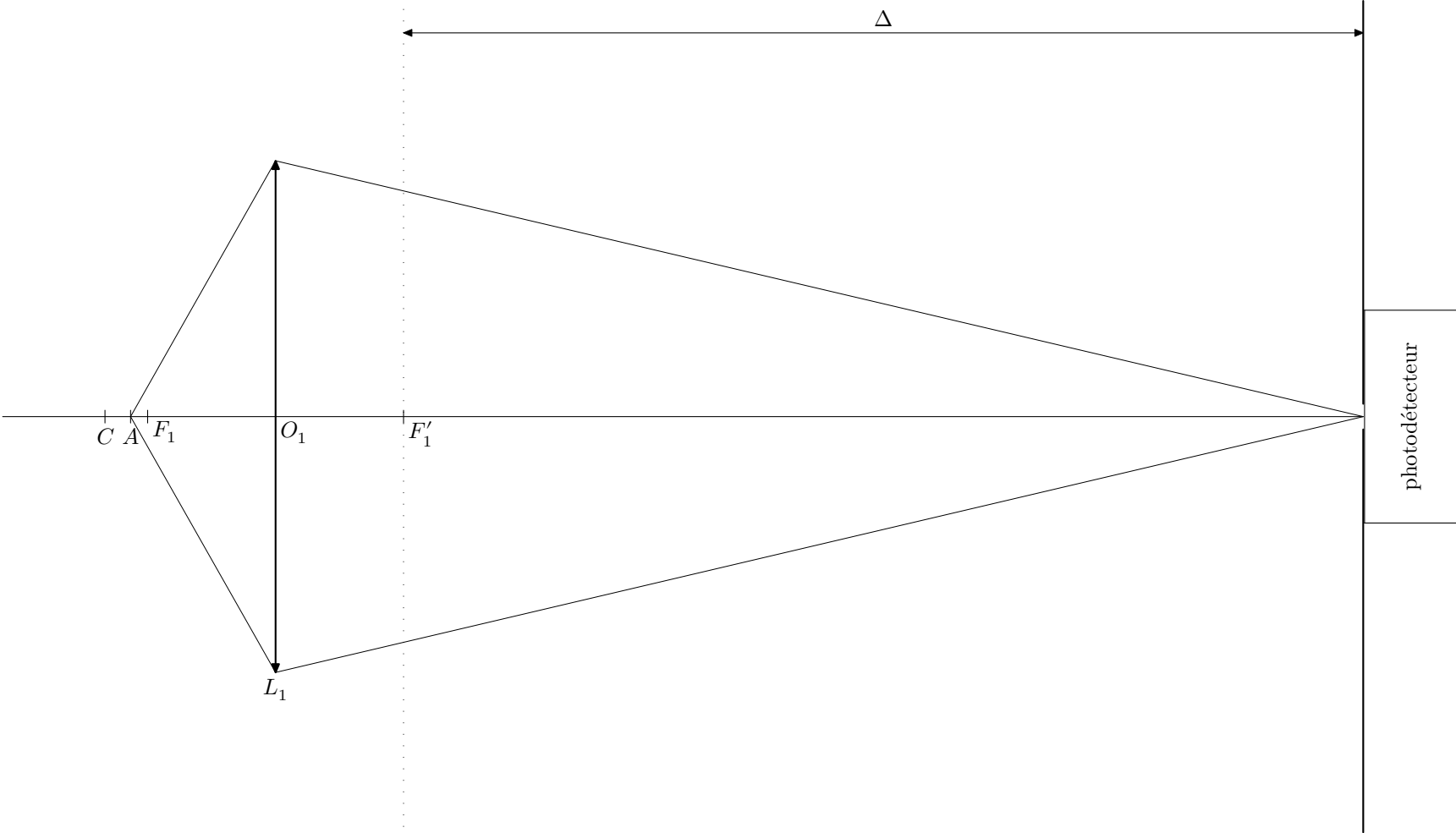
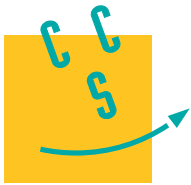
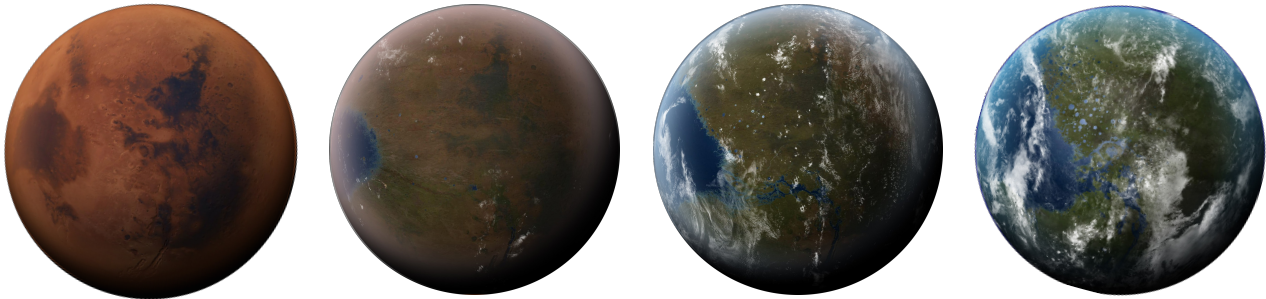


Figure C

*Terraformation de Mars*

**Figure 1** Vue d'artiste des phases hypothétiques de la terraformation de Mars. D'après Wikipédia, auteur : Daein Ballard.

Parue entre 1994 et 2000, la Trilogie de Mars de l'américain Kim Stanley Robinson relate la colonisation et la terraformation de la planète Mars.

La terraformation consiste à modifier la géologie et le climat d'une planète pour la rendre habitable par les humains ou toute forme de vie terrestre. Les modifications profondes à apporter à la planète sont complexes et demandent énormément de ressources. Sur Mars, les faibles température et pression empêchent la vie à la surface. Avant de développer un écosystème, il faut d'abord apporter une atmosphère à même de réchauffer la planète et de supporter la vie. Bien que considérée comme un vieux rêve de science fiction, la faisabilité de la terraformation soulève de nombreuses questions de physique, ce problème en abordant quelques-unes.

Le problème comporte deux parties indépendantes. Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

## I L'atmosphère de Mars et son échappement

Il y a quatre milliards d'années, Mars avait un environnement identique à celui de la Terre : une atmosphère dense était présente et permettait de conserver chaleur et humidité, ce qui participait à rendre cette planète habitable.

Aujourd'hui, Mars n'a quasiment plus d'atmosphère. Elle est devenue une planète froide et désertique. Son atmosphère actuelle est principalement composée (en pourcentages massiques) de dioxyde de carbone (96 %), d'argon (environ 2 %) et de diazote (2 %). Elle comporte également des traces de dioxygène, d'eau et de méthane. La pression moyenne ambiante est environ 170 fois moins importante que sur Terre. À une altitude de référence, au niveau du sol martien, la pression moyenne et la température moyenne sont respectivement de 600 Pa et 210 K. La masse totale de l'atmosphère martienne est estimée à 25 teratonnes (25 000 milliards de tonnes), soit environ 200 fois moins que l'atmosphère terrestre.

Un point  $M$  de l'atmosphère de Mars est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$ , le centre de la planète, celle-ci étant modélisée par une boule de répartition de masse à symétrie sphérique. On note donc que  $r \geq R_m$ ,  $R_m$  étant le rayon moyen de Mars.

### I.A – Préliminaire : le champ de pesanteur martien

On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution du champ de pesanteur martien avec l'altitude. Pour cela, on l'assimile au champ gravitationnel et on raisonne par analogie avec l'interaction électrostatique. Le champ de pesanteur martien est noté  $\vec{g}(M)$  au point  $M$ .

**Q 1.** Expliquer en quoi l'assimilation du champ de pesanteur au champ gravitationnel constitue une approximation.



**Q 2.** Soit deux particules supposées ponctuelles positionnées aux points  $M_1$  et  $M_2$ , portant respectivement les charges  $q_1$  et  $q_2$ . On note  $d$ , la distance entre  $M_1$  et  $M_2$ . Rappeler l'expression de la force d'interaction électrostatique créée par  $q_1$  et agissant sur  $q_2$ . Proposer un schéma associé.

**Q 3.** Par une analogie formelle soignée entre les champs électrostatique et gravitationnel, construire et énoncer le théorème de Gauss gravitationnel (analogue en gravitation du théorème de Gauss de l'électrostatique).

**Q 4.** En déduire, dans l'espace autour de Mars, une expression de l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}(M)$  de cette planète.

**Q 5.** Obtenir une expression de  $\vec{g}(M)$  en fonction de  $R_m$ ,  $r$  et  $\vec{g}_0$ , accélération de la pesanteur au niveau du sol. Déterminer et calculer l'intensité  $g_0$  de cette dernière.

## **I.B – L'atmosphère martienne, hors tempêtes de poussières**

### **I.B.1) Le modèle de l'atmosphère isotherme**

On néglige tout mouvement au sein de l'atmosphère martienne. On l'assimile à un gaz parfait de particules de masse molaire  $M_a$ . On note respectivement  $P(M)$  et  $\mu(M)$  la pression et la masse volumique au point  $M$ . La température de l'atmosphère, supposée uniforme, est notée  $T_0$ . La pression au sol est notée  $P_0$ .

On suppose l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}(M)$  radiale et d'intensité uniforme :  $\|\vec{g}(M)\| = g_0$ .

**Q 6.** Rappeler l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression dans un fluide, puis établir l'équation locale de la statique des fluides.

**Q 7.** Montrer que la loi de variation de la pression se met sous la forme  $P(r) = C_0 \exp(-\frac{r}{H})$  dans l'atmosphère martienne ( $r \geq R_m$ ). Exprimer le facteur  $C_0$  et la hauteur d'échelle  $H$  en fonction de  $P_0$ ,  $M_a$ ,  $g_0$ ,  $R$  et  $T_0$ .

**Q 8.** Déterminer une valeur numérique pour  $M_a$  compte tenu de la composition de l'atmosphère martienne fournie dans l'introduction de cette partie. Puis calculer  $H$ .

### **I.B.2) Dédution de la masse de l'atmosphère martienne**

**Q 9.** Expliciter grâce au modèle précédent  $\mu(r)$  en fonction de  $r$ ,  $R_m$ ,  $H$  et  $\mu_0 = \mu(R_m)$ . On précisera l'expression de  $\mu_0$  en fonction de  $P_0$ ,  $M_a$ ,  $R$  et  $T_0$ .

**Q 10.** Montrer que l'expression de la masse totale de l'atmosphère martienne – d'extension infinie dans le modèle étudié – se met sous la forme suivante :  $m_{\text{atm}} = \frac{4\pi P_0}{g_0} [2H^2 + 2HR_m + R_m^2]$ . En déduire une expression approchée, puis effectuer l'application numérique.

### **I.B.3) Une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère**

La couche la plus externe de l'atmosphère d'un corps céleste est appelée exosphère. L'altitude minimale de l'exosphère, appelée exobase, peut être choisie comme définition de l'épaisseur de l'atmosphère : on la note  $e$ .

L'exosphère se définit comme la région de l'atmosphère où la densité de particules est assez faible pour que l'effet des collisions entre particules soit négligeable en comparaison de l'effet de leur cinétique. En particulier, le libre parcours moyen des particules de l'atmosphère y est supérieur à la longueur caractéristique de décroissance de la densité de l'atmosphère.

L'expression du libre parcours moyen d'une particule de l'atmosphère est donnée par  $\ell(M) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu(M)}$ , où  $a$  est la taille typique des molécules formant le gaz et  $N_a$  la constante d'Avogadro.

**Q 11.** Donner l'interprétation physique du libre parcours moyen. En proposer une estimation au niveau du sol martien, que l'on notera  $\ell_0$ . Commenter.

**Q 12.** Exprimer  $e$  en fonction de  $\ell_0$  et  $H$  en utilisant le modèle de l'atmosphère isotherme précédent. En déduire une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère martienne. Confronter le résultat à la valeur fournie dans les données en fin d'énoncé.

## **I.C – L'échappement de l'atmosphère martienne vers l'espace**

En 2013, la NASA a envoyé la sonde MAVEN qui est toujours en activité autour de Mars. Sa principale mission est de mesurer quantitativement le taux de perte des composés atmosphériques qui s'échappent dans le milieu interplanétaire afin de pouvoir extrapoler les taux d'échappement tout au long de l'histoire de la planète. En novembre 2015, l'équipe scientifique de MAVEN a rendu publics des résultats montrant que les gaz atmosphériques s'évaporaient dans l'espace au rythme de  $100 \text{ g.s}^{-1}$  environ.

Les mécanismes ayant conduit l'atmosphère martienne à être ce qu'elle est aujourd'hui ne sont pas bien connus. L'une des hypothèses avancées est que la faible gravité a entraîné la dispersion progressive des gaz légers de la haute atmosphère vers l'espace.

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la perte de la majeure partie de l'atmosphère, il y a environ 4 milliards d'années. En particulier, Mars aurait perdu son bouclier magnétique permettant alors au vent solaire de balayer une grande partie de son atmosphère. De plus, d'importantes éruptions volcaniques ou des impacts de météorites auraient éjecté les gaz atmosphériques vers l'espace.

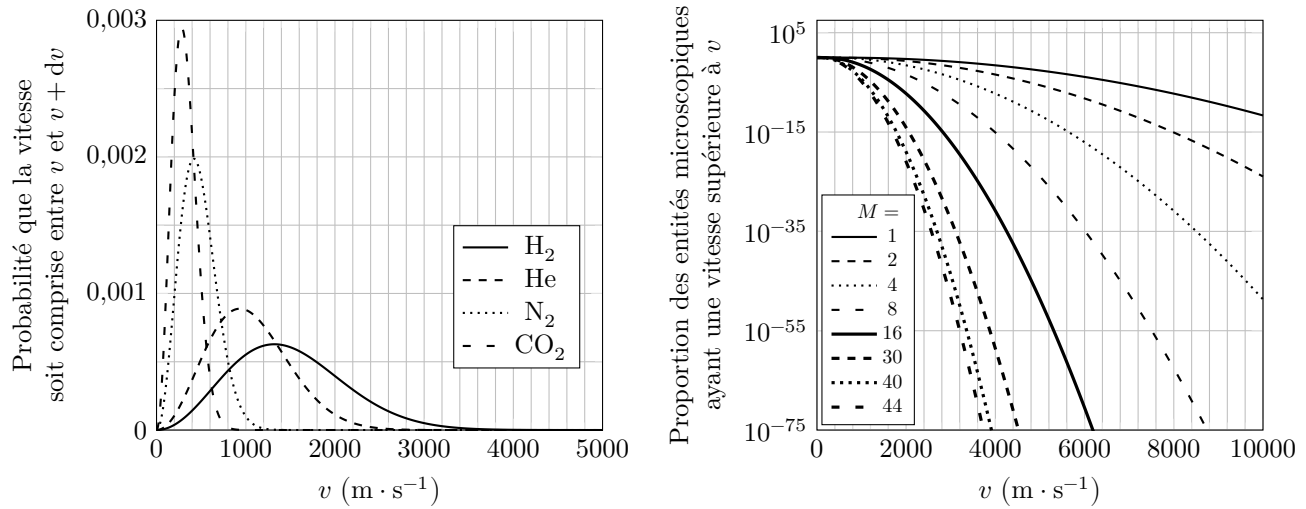
Aujourd'hui encore, d'autres processus continuent de faire évoluer la composition de l'atmosphère martienne. Le phénomène d'échappement atmosphérique décrit la perte des gaz constituant l'atmosphère vers l'espace. Plusieurs mécanismes peuvent contribuer à cet échappement, le principal paramètre d'influence étant la masse de la planète Mars.

### I.C.1) Processus d'échappement de Jeans

L'un des mécanismes d'échappement est celui dit de Jeans. Certaines molécules en provenance des couches atmosphériques inférieures de Mars peuvent subir des réactions chimiques les transformant en atomes neutres (N, H, O, etc). Lorsque ces réactions se produisent près de l'exobase, certains des atomes sont expulsés vers l'exosphère. En effet, dans cette région, la densité est suffisante pour que des collisions se produisent, mais elle est suffisamment faible pour que l'énergie acquise par les particules ne soit pas dissipée dans de nouvelles collisions (thermalisation). Ainsi, ces atomes ont acquis suffisamment d'énergie pour s'échapper dans l'espace interplanétaire : ils ont alors une vitesse supérieure à la vitesse de libération de l'atmosphère.

Ce phénomène peut s'observer également dans une moindre mesure pour les molécules.

**Q 13.** À l'aide des graphes fournis figure 2 et de données numériques dûment justifiées, indiquer quel est le principal élément chimique qui subit l'échappement de Jeans. Conclure. De la même manière, justifier la composition de l'atmosphère martienne actuelle.



**Figure 2** Gauche : distribution maxwellienne des vitesses, pour la température  $T_0 = 210 \text{ K}$ . Droite : proportion des entités microscopiques de masse molaire  $M$ , exprimée en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , ayant une vitesse supérieure à  $v$ .

### I.C.2) Modèle hydrodynamique de l'échappement

Cet échappement est un cas limite de l'échappement de Jeans. Les particules les plus légères entraînent les plus lourdes dans l'espace interplanétaire. Il a joué un rôle important au tout début de l'histoire de la planète Mars. L'équation de Navier-Stokes dans le contexte d'un fluide autour de la planète Mars est de la forme

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} - \frac{G \mu m_m}{r^2} \vec{u}_r$$

en tenant compte de la gravitation, explicitée en coordonnées sphériques, où  $\mu$  est encore la masse volumique de l'atmosphère,  $G$  la constante de gravitation universelle et  $m_m$  la masse de la planète Mars.

Pour la suite, on modélise l'atmosphère martienne, là où elle est suffisamment dense, par un gaz parfait en écoulement parfait et stationnaire. On suppose la température uniforme au sein du fluide : elle est égale à la température moyenne  $T_0$  au niveau du sol martien. L'écoulement est considéré unidimensionnel : le champ des vitesses est de la forme  $\vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques avec  $v(r) > 0$ . La pression  $P$  au sein du fluide ne dépend que de la coordonnée radiale  $r$ , ainsi que sa masse volumique  $\mu$ .

On note  $d(r)$  la distance moyenne entre deux particules de l'atmosphère martienne et  $n^*(r)$  la densité volumique de particules.

**Q 14.** Indiquer le lien, en ordre de grandeur, entre  $n^*(r)$  et  $d(r)$ . En déduire une relation entre  $\mu(r)$ ,  $d(r)$ ,  $N_a$  et  $M_a$ .

**Q 15.** En comparant la distance caractéristique  $d(r)$  entre particules et la taille caractéristique de l'écoulement  $e$ , indiquer dans quelle zone de l'atmosphère martienne ce modèle continu est de nature à donner des résultats pertinents. Dans cette question, on pourra se contenter d'utiliser le modèle de l'atmosphère isotherme en équilibre.

**Q 16.** Déterminer l'équation différentielle reliant les champs  $v(r)$ ,  $P(r)$  et  $\mu(r)$ .

**Q 17.** En déduire, en éliminant le champ de pression  $P(r)$ , une nouvelle équation différentielle ne faisant apparaître plus que les champs des vitesses de l'écoulement  $v(r)$  et de masse volumique  $\mu(r)$  de l'atmosphère.

**Q 18.** Montrer que le produit  $\mu(r)v(r)r^2$  est une constante de l'écoulement modélisé. *On ne se préoccupe pas de la valeur de cette constante.*

**Q 19.** En déduire que l'équation différentielle vérifiée par  $v(r)$  se met sous la forme :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = 2 \left( \frac{1}{r} - \frac{r^*}{r^2} \right) \quad (\text{I.1})$$

pour laquelle on exprimera les grandeurs  $c$  et  $r^*$ .

**Q 20.** Vérifier la cohérence des expressions des grandeurs  $c$  et  $r^*$  obtenues à la question précédente en termes de dimensions. Déterminer leurs valeurs numériques.

La distance  $r^*$  correspond à une distance critique dans ce modèle. On adopte pour la suite une approche simplifiée en se concentrant uniquement sur les solutions du problème pour lesquelles  $\frac{1}{v} \frac{dv}{dr}$  ne s'annule pas pour  $r = r^*$ . On ne se préoccupe pas des autres solutions mathématiques possibles.

**Q 21.** Déterminer  $v(r^*)$ .

Le débit massique d'échappement atmosphérique de Mars, de  $100 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$  environ, a été mesuré par la sonde MAVEN à une altitude de 150 km environ. Elle a également mesuré une masse volumique de  $2 \times 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  à cette altitude.

**Q 22.** Évaluer la contribution hydrodynamique au débit massique d'échappement atmosphérique de Mars donnée par le modèle qui précède. Conclure.

## II Constitution d'une atmosphère martienne

### II.A – Conditions de température et de pression attendues sur Mars

Terraformer, c'est aussi changer la température sur la planète à coloniser. Avec une température moyenne de 210 K, l'eau liquide n'est quasiment pas présente à la surface de la planète Mars. On va étudier dans quelle mesure l'atmosphère peut permettre, par effet de serre, une augmentation de la température.

On rappelle la loi de Stefan-Boltzmann qui donne la puissance émise par unité de surface d'un corps noir à la température  $T$ :  $p_e = \sigma T^4$  où  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ .

De même, on rappelle la loi du déplacement de Wien qui permet de prédire la longueur d'onde pour laquelle la densité spectrale de puissance du rayonnement thermique émis par ce corps est maximale:  $\lambda = \frac{\beta}{T}$ , avec  $\beta = 2,90 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$ . Dans la suite, on pourra considérer que ce rayonnement est monochromatique.

Les puissances surfaciques sont indiquées par des  $p$  minuscules, les puissances totales, par des  $\mathcal{P}$  majuscules caligraphiés. On repère par un premier indice,  $s$  ou  $m$ , les grandeurs relatives respectivement au Soleil ou à la planète Mars; un second indice,  $i$ ,  $e$  ou  $a$ , indique respectivement si la puissance est incidente, émise ou absorbée.

#### II.A.1) Détermination de la température d'équilibre en l'absence d'atmosphère

En l'absence d'atmosphère, la principale source d'énergie permettant au sol martien d'atteindre sa température d'équilibre, notée  $T_m$ , est le rayonnement solaire. On suppose que  $T_m$  est uniforme en tout point de la surface de Mars.

Dans ce modèle, on considère que le sol de Mars n'absorbe pas la totalité de la puissance du rayonnement solaire incident, notée  $\mathcal{P}_{m,i}$ . Il en réfléchit une partie, notée  $\mathcal{P}_{m,r}$ , selon la loi  $\mathcal{P}_{m,r} = \alpha \mathcal{P}_{m,i}$  où la constante  $\alpha$ , appelée albédo de Bond de la surface de Mars, vaut 0,25.

**Q 23.** Exprimer la puissance totale émise par la surface du Soleil, notée  $\mathcal{P}_{s,e}$ .

**Q 24.** Exprimer la puissance moyenne surfacique reçue par le sol martien,  $p_{m,i}$ , au niveau de l'orbite de Mars.

**Q 25.** Exprimer la puissance totale absorbée par la planète, notée  $\mathcal{P}_{m,a}$ .

**Q 26.** Exprimer la puissance émise par la planète, notée  $\mathcal{P}_{m,e}$ .

**Q 27.** Justifier que la puissance absorbée doit être égale à la puissance émise, puis en déduire l'expression et la valeur de la température d'équilibre  $T_m$  pour la surface de Mars en l'absence d'atmosphère. Commenter.

#### II.A.2) Utilisation du modèle de l'effet de serre

On considère que le sol martien absorbe toujours une fraction du rayonnement solaire incident selon la loi indiquée dans la sous-partie précédente. Par contre, on admet qu'il absorbe totalement le rayonnement atmosphérique. On note  $T'_m$ , la nouvelle température d'équilibre de la surface du sol martien, supposée uniforme.

Quant à l'atmosphère, elle peut être modélisée par une fine couche de gaz (épaisseur  $e \ll R_m$ ) totalement transparente aux rayonnements électromagnétiques, sauf aux infrarouges pour lesquels elle absorbe une fraction  $\varepsilon$  des rayonnements. On suppose que l'atmosphère, homogène, possède une température uniforme notée  $T_a$ .

On néglige tout phénomène de réflexion du rayonnement par l'atmosphère.

**Q 28.** Indiquer à quel domaine du rayonnement électromagnétique correspond le rayonnement émis par le Soleil. Préciser également à quel domaine du rayonnement électromagnétique doit correspondre le rayonnement émis par le sol martien.

**Q 29.** En respectant les conventions de notations adoptées, réaliser un schéma faisant apparaître les puissances surfaciques incidentes, absorbées et émises par la surface du sol martien et par son atmosphère.

**Q 30.** À partir de deux bilans de puissances, déterminer la température d'équilibre du sol martien,  $T'_m$ , en présence d'une atmosphère en fonction de  $\mathcal{P}_{s,e}$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  et  $r_m$ , puis en fonction uniquement de  $T_m$  et  $\varepsilon$ .

**Q 31.** Calculer la valeur du coefficient d'absorption  $\varepsilon$  qu'il faudrait pour obtenir une température moyenne au sol de 298 K sur Mars. Commenter le résultat.

**Q 32.** Déterminer la température d'équilibre du sol martien maximale envisageable en supposant que l'on soit capable d'optimiser les coefficients  $\alpha$  et  $\varepsilon$ . Conclure.

## II.B – Transfert de masse depuis la ceinture d'Astéroïdes

Pour constituer une atmosphère martienne suffisante, on imagine récupérer la masse nécessaire depuis la ceinture d'astéroïdes. Il s'agit d'une région du Système solaire, distante (en moyenne) de  $r_{\text{ast}}$  du Soleil, située entre les orbites de Mars et de Jupiter. Elle contient des astéroïdes dont la taille varie du grain de poussière au planétoïde de quelques centaines de kilomètres de diamètre. Sa masse totale est estimée à  $3 \times 10^{21}$  kg.

La composition typique d'un astéroïde (en fractions massiques) est la suivante :

- silicates (dioxyde de silicium,  $\text{SiO}_2$  et autres oxydes métalliques) : 85 % ;
- eau : 11 % ;
- carbone : 2 % ;
- métaux divers : 2 %.

### II.B.1) Détermination de la masse d'astéroïdes nécessaire à la constitution d'une atmosphère suffisante

Pour des questions d'habitabilité de la planète, on souhaite se limiter à une pression maximale de 1 bar.

**Q 33.** En se plaçant dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à l'équilibre, calculer la masse totale de l'atmosphère  $m'_{\text{atm}}$  correspondant à cette valeur limite de pression.

**Q 34.** Estimer la masse d'astéroïdes, notée  $m_{\text{ast}}$ , à déplacer depuis la ceinture d'astéroïdes dans le but de former une atmosphère de masse  $m'_{\text{atm}}$  composée majoritairement de dioxyde de carbone.

### II.B.2) À propos du transfert d'un astéroïde

On envisage d'amener un astéroïde de la ceinture depuis son orbite circulaire de rayon  $r_{\text{ast}}$  jusqu'à l'orbite martienne, ces deux orbites étant coplanaires. On considère pour la suite l'astéroïde Patientia, de masse  $m_p = 1 \times 10^{19}$  kg, que l'on assimilera à un point matériel  $M$ . On imagine le faire passer par une demi-ellipse de transfert, dite de Hohmann, dont le périhélie  $P$  (point au plus près du Soleil) se trouve sur l'orbite martienne et l'aphélie  $A$  (point le plus éloigné) sur la ceinture d'astéroïdes.

**Q 35.** Réaliser un schéma légendé précisant les orbites et la demi-ellipse de transfert en jeu. Les points  $A$  et  $P$  seront indiqués, ainsi que le centre  $S$  du Soleil.

**Q 36.** Rappeler et justifier les deux lois de conservation usuelles dans le cadre de l'étude mécanique d'un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale conservatif.

**Q 37.** Déterminer une expression de l'énergie mécanique  $E_{m1}$  que possède l'astéroïde Patientia, relativement au référentiel héliocentrique d'étude galiléen, lorsqu'il est en orbite circulaire au niveau de la ceinture.

On s'intéresse à présent à la trajectoire de Hohmann. Il s'agit ici de trouver une expression de l'énergie mécanique  $E_m$  de l'astéroïde Patientia en mouvement sur la demi-ellipse correspondante. Le point  $M$  sur cette trajectoire est repéré par ses coordonnées polaires d'origine au centre  $S$  du Soleil.

**Q 38.** Expliciter le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du point  $M$  et son vecteur moment cinétique  $\vec{L}$  par rapport au centre  $S$  en coordonnées polaires. Exprimer ensuite le moment cinétique en fonction de la constante des aires notée  $C$ .

**Q 39.** Mettre  $E_m$  sous la forme  $E_m = \frac{1}{2}m_p \dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$  et donner l'expression de  $E_{\text{eff}}(r)$ .

**Q 40.** En utilisant le résultat de la question précédente, obtenir la relation donnant l'énergie mécanique  $E_m$  de l'astéroïde Patientia sur la trajectoire de Hohmann en fonction de son demi-grand axe  $a$ , ainsi que de  $G$ ,  $m_p$  et  $m_s$ .

Le passage de l'astéroïde de l'orbite de la ceinture à la trajectoire de Hohmann s'effectue en lui appliquant une brusque variation  $\Delta v$  de la valeur de sa vitesse.

**Q 41.** Indiquer, avec justification, si ce passage correspond à une diminution ou à une augmentation de l'énergie mécanique de l'astéroïde.

- Q 42.** Exprimer  $\Delta v$  en fonction des différentes données de l'énoncé. En faire une application numérique.
- On imagine disposer d'un engin à réaction que l'on arrimerait à l'astéroïde Patientia pour réaliser l'opération précédente de brusque variation  $\Delta v$  de la valeur de sa vitesse. Cet engin disposerait d'un propulseur performant capable d'éjecter de la matière à une vitesse  $v_e = 1 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  par rapport à lui. On néglige la rotation propre de l'astéroïde.
- Q 43.** Montrer, par une approche quantitative, qu'une telle démarche pour effectuer l'opération de transfert de l'astéroïde Patientia sur la trajectoire de Hohmann souhaitée n'est pas vraiment envisageable.
- La faisabilité de la terraformation de Mars continue de faire l'objet de débats et de recherches scientifiques, même si la réussite d'une telle entreprise nécessiterait certainement des efforts considérables.*

## Données et formulaire

Caractéristiques de la planète Mars :

|                                                            |       |                                  |
|------------------------------------------------------------|-------|----------------------------------|
| Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil         | $r_m$ | $2,28 \times 10^8 \text{ km}$    |
| Rayon moyen de la planète Mars                             | $R_m$ | $3,39 \times 10^3 \text{ km}$    |
| Masse de la planète Mars                                   | $m_m$ | $6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$ |
| Température à la surface de Mars                           | $T_0$ | 210 K                            |
| Pression à la surface de Mars                              | $P_0$ | 600 Pa                           |
| Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière) | $e$   | $2,20 \times 10^2 \text{ km}$    |

Caractéristiques du Soleil :

|                                  |       |                                  |
|----------------------------------|-------|----------------------------------|
| Rayon moyen du Soleil            | $R_s$ | $6,96 \times 10^5 \text{ km}$    |
| Masse du Soleil                  | $m_s$ | $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ |
| Température de surface du Soleil | $T_s$ | 5778 K                           |

Ceinture d'astéroïdes :

|                                         |                  |                              |
|-----------------------------------------|------------------|------------------------------|
| Rayon moyen de la ceinture d'astéroïdes | $r_{\text{ast}}$ | $4,6 \times 10^8 \text{ km}$ |
|-----------------------------------------|------------------|------------------------------|

Autres données utiles :

|                                      |                 |                                                                         |
|--------------------------------------|-----------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Constante de gravitation universelle | $G$             | $6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Constante des gaz parfaits           | $R$             | $8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$                 |
| Constante d'Avogadro                 | $\mathcal{N}_a$ | $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                                  |
| Masse molaire du carbone             | $M_C$           | $12 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                      |
| Masse molaire de l'oxygène           | $M_O$           | $16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                      |
| Masse molaire de l'argon             | $M_{\text{Ar}}$ | $40 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                      |
| Masse molaire de l'azote             | $M_N$           | $14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$                                      |

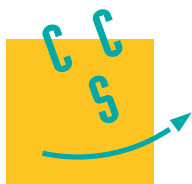
Des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{u_\varphi} \\ \text{div } \overrightarrow{f} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \\ \left[ f(r) \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \left( f(r) \overrightarrow{u_r} \right) &= f(r) \frac{df(r)}{dr} \overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

Quelques intégrales :  $\int_0^\infty u^2 \exp(-u) du = 2$  et  $\int_0^\infty u \exp(-u) du = 1$ .

• • • FIN • • •





## *Améliorations des performances en cyclisme*

Dans le cyclisme de haut niveau, les gains aérodynamiques font bien souvent la différence, en particulier en contre-la-montre où les vitesses de déplacement sont les plus élevées. À ces vitesses, 90 % de la puissance développée est utilisée pour lutter contre l'effort de trainée aérodynamique. Parmi les facteurs influant sur cette trainée, le casque représente de l'ordre de 2 à 8 % de la trainée totale, en fonction de la géométrie de celui-ci. L'utilisation d'un casque performant joue donc un rôle important dans l'amélioration des performances.

Le 23 juillet 1989, Greg Lemond remporte le Tour de France devant Laurent Fignon avec 8 secondes d'avance au terme des 3285 km de l'épreuve. L'ultime étape, décisive, est un contre-la-montre lors duquel Greg Lemond prend l'avantage sur Laurent Fignon en lui reprenant 58 secondes sur les 24,5 km du parcours, effectués à près de  $55 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  de vitesse moyenne. Au-delà des considérations physiologiques des deux cyclistes, Lemond utilisa de nombreux éléments novateurs en ce qui concerne l'aérodynamisme. En particulier, il était muni d'un casque profilé, révolutionnaire pour l'époque. Fignon, de son côté, ne portait pas de casque.



**Figure 1** Greg Lemond (à gauche) et Laurent Fignon (à droite) lors du dernier contre-la-montre du Tour 1989

Ce sujet propose de déterminer le gain en puissance que permettent deux évolutions majeures du casque de contre-la-montre.



**Figure 2** Casque de vélo traditionnel (à gauche), en goutte d'eau (au centre) et à flux d'air (à droite)

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines formules et données utiles ainsi que les définitions de quelques fonctions Python sont regroupées en fin d'énoncé.

# I Une première évolution de la forme du casque : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau

L'objectif de cette partie est de quantifier le gain de puissance que procure ce type de casque par rapport à un casque dit « classique ».

## I.A – Évaluation du gain en puissance par une approche empirique

Afin de quantifier l'apport d'un casque profilé par rapport à un casque traditionnel, on étudie une phase de descente en roue libre (c'est-à-dire sans pédalage) sur route rectiligne, de pente constante. La figure 3 précise le système de coordonnées cartésiennes utilisé.

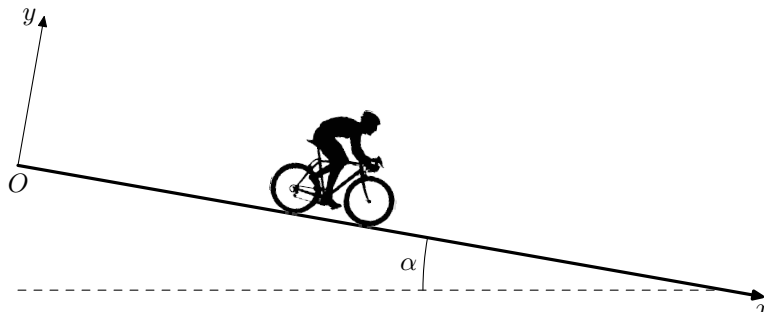


Figure 3 Représentation schématique du système étudié

Pour toute cette partie, on considérera le système {cycliste + vélo}, assimilé à un point matériel  $M$ . On supposera ce système soumis aux seules actions extérieures suivantes :

- l'action de la pesanteur, notée  $\vec{P}$  ;
- l'action de la route sur les roues, notée  $\vec{R}$  incluant :
  - la réaction normale, notée  $\vec{N}$ ,
  - la résistance au roulement, notée  $\vec{F}_r$  et supposée telle que  $\vec{F}_r = -\mu_r N \vec{e}_x$  où  $N$  est la norme de la réaction normale et  $\mu_r$  le coefficient de résistance au roulement ;
- l'action de l'air sur le système.

On note  $m$  la masse du système,  $\vec{v}$  la vitesse du système dans le référentiel terrestre,  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $\alpha$  l'angle entre la direction horizontale et la direction de la route.

### I.A.1) Étude de la phase de démarrage

Avant d'envisager une étude en régime permanent, il est nécessaire de caractériser la phase de démarrage pour déterminer la distance que parcourt le cycliste avant d'atteindre sa vitesse limite. On supposera que le cycliste est initialement à la position  $x = 0$  à l'instant  $t = 0$  et se lance dans la pente sans vitesse initiale.

On modélise l'action de l'air sur le système {cycliste + vélo} par une force de trainée de la forme

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2}\rho S C_x v \vec{v}$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $S$  la surface frontale projetée sur le plan perpendiculaire à l'écoulement,  $C_x$  le coefficient de trainée aérodynamique du système {cycliste + vélo} et  $v$ , la norme de  $\vec{v}$  sa vitesse par rapport à la route.

Dans cette section I.A.1, on prendra pour les applications numériques  $S C_x = 0,30 \text{ m}^2$  et  $\alpha = 0,10 \text{ rad}$  (descente sur une pente de 10 %).

**Q 1.** Rappeler l'expression du nombre de Reynolds, noté  $R_e$ , de l'écoulement de l'air autour du cycliste et rappeler ce qu'il caractérise. Donner un ordre de grandeur de  $R_e$  pour un cycliste roulant à  $40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . En considérant que, si  $10^3 < R_e < 10^6$ , la trainée est proportionnelle au carré de la vitesse, le modèle de trainée proposé paraît-il adapté ?

**Q 2.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $v$ , la norme de la vitesse du système {cycliste + vélo}. On l'écrira sous la forme suivante, en précisant les expressions littérales et les valeurs numériques des paramètres  $a$  et  $b$ ,

$$\frac{dv(t)}{dt} + av^2(t) = b. \quad (\text{I.1})$$



**Q 3.** En utilisant l'équation différentielle précédemment établie, déterminer la norme de la vitesse limite atteinte en régime permanent, que l'on écrira sous la forme

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{K}{SC_x}} \quad (\text{I.2})$$

où  $K$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\mu_r$ .

**Q 4.** Calculer la valeur numérique de  $v_{\text{lim}}$ . Commenter.

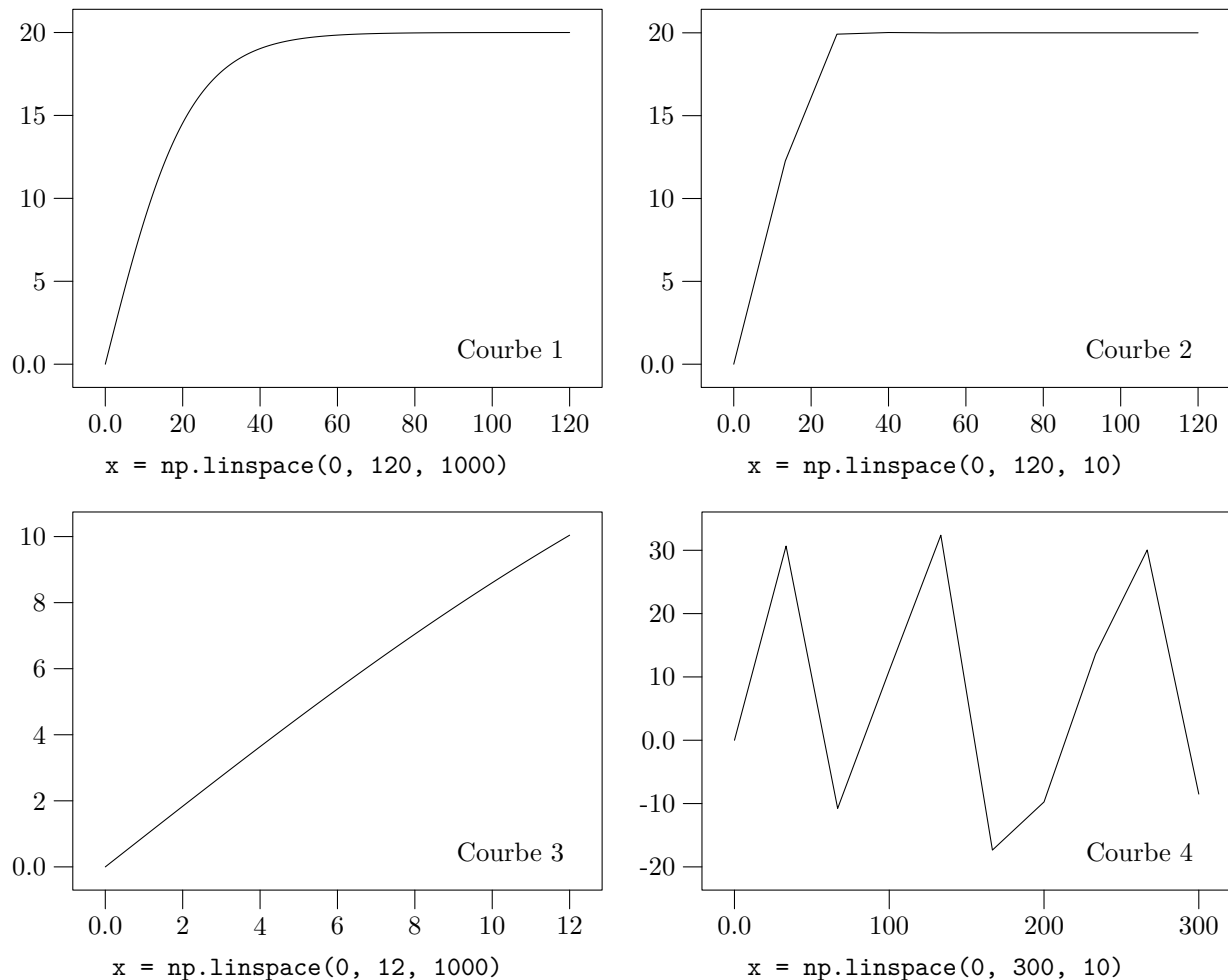
La figure 4 propose un programme Python pour résoudre numériquement l'équation (I.1).

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def r(f, v, t):
4     V = [v]
5     for i in range(len(t) - 1):
6         V.append(V[i] + (t[i+1] - t[i]) * f(V[i]))
7     return V
8 def g(u):
9     return 0.92 - 2.3e-3 * u * u
10 x = np.linspace(0, 120, 1000)
11 y = r(g, 0, x)
12 plt.plot(x, y)
13 plt.show()
```

**Figure 4** Résolution numérique de l'équation (I.1)

**Q 5.** En explicitant les lignes concernées du programme de la figure 4, expliquer son principe. Quelle méthode de résolution utilise-t-il ?

Le programme de la figure 4 est exécuté avec plusieurs versions de la ligne 10. Les courbes obtenues sont données figure 5.



**Figure 5**

**Q 6.** Expliciter la signification physique des valeurs figurant dans la ligne 10 et commenter l'allure de ces courbes au regard des valeurs utilisées.

On souhaite déterminer la distance  $L_{RP}$  parcourue avant d'atteindre le régime permanent.

**Q 7.** À partir des courbes proposées sur la figure 5 et en détaillant la démarche suivie, estimer un ordre de grandeur de cette distance.

**Q 8.** Écrire une fonction Python permettant d'accéder à cette valeur à partir des données numériques issues de ces courbes.

### I.A.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

L'objectif est ici de déterminer le gain de puissance que procure un casque profilé par rapport à un casque classique. Pour ce faire, le cycliste est muni d'un capteur GPS permettant de repérer sa position au cours du temps. Différents essais sont réalisés dans la descente de Laffrey en Isère. Cette descente présente l'avantage d'être rectiligne et de pente quasiment constante sur 6,5 km.

On suppose dans cette section que la distance  $L_{RP}$  calculée précédemment a été parcourue et que le régime permanent est atteint. Pour cela, on limite l'étude à un sous-segment, de longueur  $L' = 5,00$  km et de pente constante 10 % en descente (donc d'angle  $\alpha = 0,10$  rad), rectiligne. Diverses applications gratuites disponibles sur internet permettent d'accéder au temps mis par le cycliste pour parcourir ce tronçon. On modélise l'action de l'air sur le système par la force de trainée aérodynamique.

Nous avons vu précédemment l'effet du  $SC_x$  sur la vitesse du cycliste. Différents paramètres impactent la valeur de ce  $SC_x$ . Afin de quantifier l'effet du casque uniquement, nous considérons dans cette partie le même cycliste, muni du même vélo, des mêmes vêtements et dans la même position. Seul le choix du casque diffère. On note alors  $SC_{x,c}$  le  $SC_x$  du système {cycliste + vélo} lorsque le cycliste est muni d'un casque classique et  $SC_{x,p}$  ce  $SC_x$  lorsque le cycliste est muni d'un casque profilé. On note respectivement  $v_{lim,c}$  et  $v_{lim,p}$  les vitesses en régime permanent sur le tronçon considéré.

#### a) Résultats expérimentaux

Le protocole expérimental mis en œuvre est le suivant : le cycliste parcourt ce tronçon, de longueur  $L'$ , 10 fois muni d'un casque de vélo classique, puis 10 fois muni d'un casque de contre-la-montre profilé. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1 ci-après.

| Numéro de l'essai | Temps de parcours<br>casque classique (en s) | Temps de parcours<br>casque profilé (en s) |
|-------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1                 | 270                                          | 258                                        |
| 2                 | 267                                          | 261                                        |
| 3                 | 269                                          | 259                                        |
| 4                 | 272                                          | 262                                        |
| 5                 | 271                                          | 260                                        |
| 6                 | 269                                          | 260                                        |
| 7                 | 268                                          | 259                                        |
| 8                 | 272                                          | 258                                        |
| 9                 | 270                                          | 263                                        |
| 10                | 271                                          | 258                                        |

**Tableau 1** Mesures expérimentales des temps de parcours dans la descente de Laffrey avec casques classique et profilé

Deux sources d'incertitudes sont ici présentes :

- celle de précision de la mesure temporelle, résultant du défaut de précision de la localisation par le GPS. Cet aspect est négligé ici et fera l'objet de la sous-partie I.B ;
- celle de répétabilité du protocole, que nous allons quantifier ici.

**Q 9.** Déterminer la vitesse moyenne  $\langle v_c \rangle$  et l'incertitude-type de type A  $u(\langle v_c \rangle)$  sur cette moyenne dans le cas du casque classique.

Le même calcul avec le casque profilé donne  $\langle v_p \rangle = 19,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $u(\langle v_p \rangle) = 0,041 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Afin d'estimer l'impact de cette variabilité de mesures sur la faisabilité de l'expérience, on utilise le programme présenté en figure 6 qui simule un grand nombre de valeurs aléatoires répondant aux paramètres calculés à la question précédente. Les résultats obtenus sont présentés sous forme d'histogrammes dans la figure 7.

**Q 10.** Conclure quant à la pertinence de cette démarche expérimentale.

```

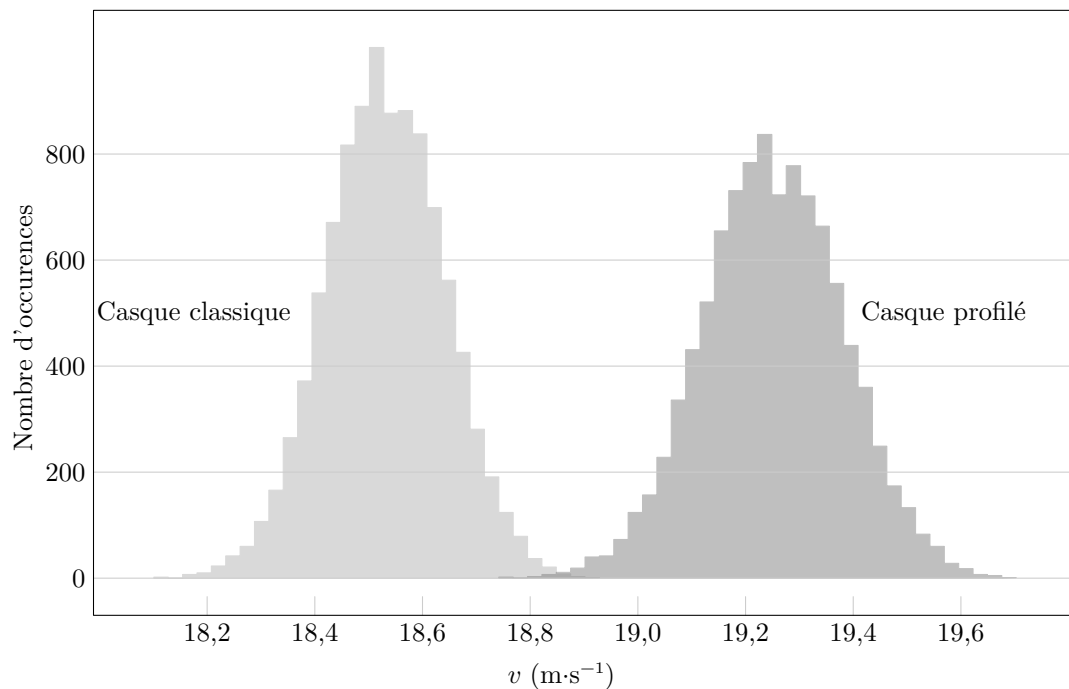
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy.random as rd

3 def MonteCarlo(
4     vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
5     incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
6     N:int, # nombre d'échantillons à produire
7 ) -> [float]: # tableau de N vitesses simulées
8     generateur = rd.default_rng()
9     return generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N)

10 classique = MonteCarlo(██████, ██████, 10000);
11 profilé = MonteCarlo(19.25, 0.13, 10000);
12 plt.hist([classique, profilé], bins=60)
13 plt.show()

```

**Figure 6** Programme de simulation (les valeurs utilisées ligne 10 ont été volontairement masquées)



**Figure 7** Histogrammes de répartition des vitesses simulées

**Q 11.** Écrire une fonction Python `MonteCarlo2(vitesseMoyenne, incertitudeType, N, K)`, où  $K$  est la constante intervenant dans l'expression (I.2) de la question 3. Cette fonction est une adaptation de la fonction `MonteCarlo` de la figure 6 qui renvoie un couple de valeurs : une évaluation du  $SC_x$  et une incertitude-type associée.

Une application de cette fonction conduit aux valeurs du tableau 2.

|                                    | Configuration avec casque classique | Configuration avec casque profilé |
|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| $SC_x$ (m <sup>2</sup> )           | 0,3051                              | 0,2937                            |
| incertitude-type (m <sup>2</sup> ) | 0,0036                              | 0,0037                            |

**Tableau 2** Valeurs de  $SC_x$  et incertitude-type associées

b) *Exploitation des résultats de l'expérience*

**Q 12.** Exprimer les différentes puissances s'appliquant sur le système {cycliste + vélo} en fonction de  $m$ ,  $v$ ,  $g$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_r$  et  $SC_x$ .

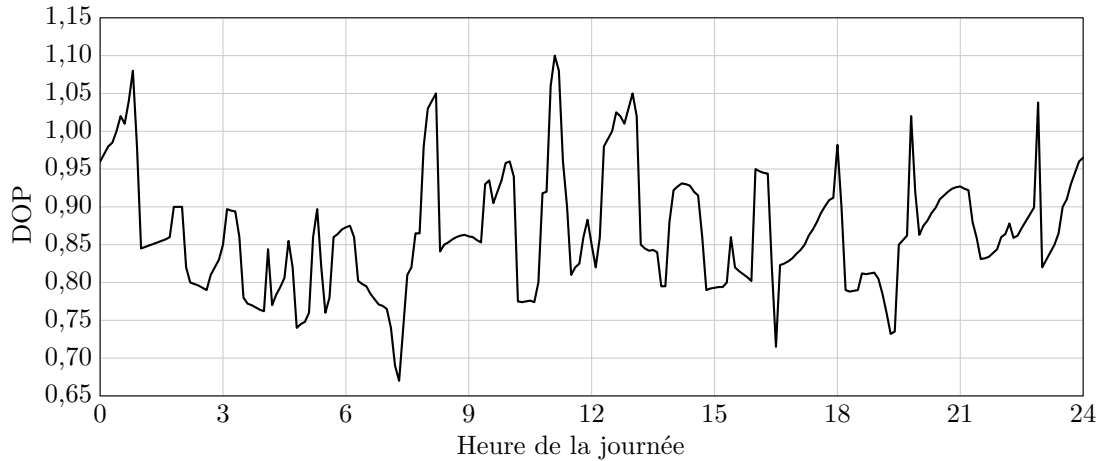
**Q 13.** En utilisant le tableau 2, évaluer numériquement le gain en puissance procuré par le casque profilé à  $v_{\text{lim}} = 54,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , vitesse moyenne de Greg Lemond lors du contre-la-montre final du Tour 1989. Déterminer également une incertitude-type sur ce résultat. Commenter.

### I.B – Détermination de la précision du repérage par GPS

Dans la sous-partie précédente, l'incertitude due au positionnement par le capteur GPS a été négligée. L'objectif de cette partie est de vérifier cette hypothèse.

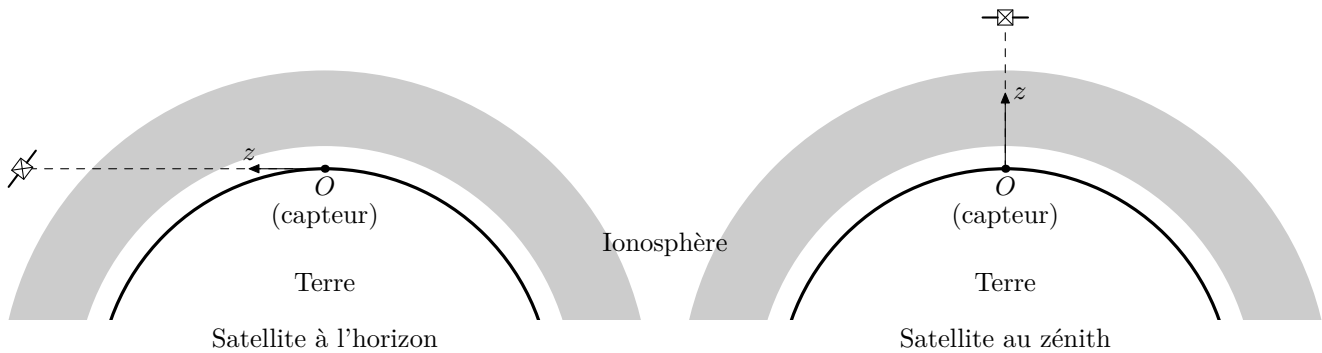
La localisation d'un capteur GPS (Global Positioning system) s'appuie sur la mesure des temps de parcours de signaux émis par un ensemble de satellites situés à environ 20 000 km d'altitude et reçus par le capteur GPS au sol. Les signaux sont émis sous la forme de paquets d'ondes dans deux fines bandes spectrales dédiées, centrées respectivement sur les fréquences  $\nu_1 = 1575,4$  MHz et  $\nu_2 = 1227,6$  MHz.

L'information obtenue d'un premier satellite donne une position possible du capteur à la surface d'une sphère centrée autour de ce satellite. Un second permet de situer l'appareil sur le cercle intersection entre les deux sphères centrées autour de ces deux satellites. Un troisième permet de limiter la position à deux points, dont un seul est à la surface de la Terre. Un dernier permet de synchroniser l'horloge des satellites avec celle du capteur. Une incertitude dans l'estimation de la distance entre le capteur et un satellite se reporte sur la localisation au sol. Dans la suite nous ne considérons qu'un des satellites dont l'horloge est supposée parfaitement synchronisée avec celle du capteur, on néglige donc l'incertitude sur la mesure temporelle. On considère, en première approximation, que la précision de positionnement au sol est liée à l'incertitude de mesure de distance capteur-satellite et à un facteur géométrique, nommé DOP (Dilution of Precision). Ainsi le décalage maximal au sol est le produit de la valeur maximale du DOP et du décalage maximal de la distance capteur-satellite. La figure 8 présente un relevé du DOP pour le capteur utilisé dans l'expérience décrite en I.A.2.



**Figure 8** Variations typiques du DOP au cours d'une journée (d'après Jean-Marc PIÉPLU, GPS et Galileo Systèmes de navigation par satellites, Eyrolles, 2006)

Les ondes émises, avant d'atteindre le capteur au sol, traversent l'ionosphère (couche haute de l'atmosphère formée d'un gaz partiellement ionisé) et subissent, par rapport à la propagation dans le vide, un retard  $\tau$ , dit retard ionosphérique. Celui-ci, en affectant l'estimation de la distance capteur-satellite, induit une incertitude de positionnement. En dehors de l'ionosphère, le milieu de propagation est non dispersif.



**Figure 9** Terre, ionosphère et positions du satellite sur l'horizon et au zénith

Pour caractériser l'interaction entre l'onde électromagnétique émise par le satellite et l'ionosphère, cette dernière est modélisée par une couche uniforme, d'épaisseur  $d$  constante, située entre 80 et 800 km d'altitude et formée d'un plasma peu dense. Ce plasma est composé de cations considérés fixes (du fait de leur masse très supérieure à celle des électrons) et d'électrons libres de densité particulière constante  $n = 1,0 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$ , de charge  $-e$  et de masse  $m_e$ . À la densité particulière  $n$ , les interactions électrons-électrons et électrons-cations sont négligeables. Le plasma est supposé localement neutre et les électrons sont non relativistes (leur vitesse  $V$  est très inférieure à  $c$ , la célérité de la lumière dans le vide). Leur poids est négligeable devant la force de Lorentz. On note  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.

L'axe  $(Oz)$  est l'axe capteur-satellite. Le champ électrique de l'onde émise par le satellite à la distance  $z$  du capteur est modélisé par l'écriture complexe  $\underline{E}(z, t) = E_0 \exp(i(\omega t + \underline{k}z))\underline{e}_x$  où  $E_0$  est une constante réelle,  $\omega$  est la pulsation de l'onde monochromatique et  $\underline{k}$  est une constante complexe dépendant de  $\omega$  ainsi que des caractéristiques du plasma.

**Q 14.** En formulant une hypothèse sur l'une des composantes de la force de Lorentz, sans la discuter à ce stade, montrer que la conductivité complexe du plasma peut se mettre sous la forme

$$\underline{\sigma} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

où  $\omega_p$  est la pulsation plasma que l'on exprimera en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $m_e$ ,  $n$  et  $e$ .

**Q 15.** Établir l'équation aux dérivées partielles portant sur  $\underline{E}_x(z, t)$  caractérisant la propagation de l'onde dans le plasma.

**Q 16.** En déduire la relation de dispersion caractéristique du plasma sous la forme  $k^2 = f(\omega)$ . Indiquer dans quel cas et pourquoi on parle de domaine de transparence du plasma.

**Q 17.** Montrer que les deux bandes spectrales utilisées par le GPS se situent dans le domaine de transparence du plasma.

**Q 18.** Exprimer la vitesse de phase  $V_\varphi$ .

**Q 19.** Rappeler la signification de la vitesse de groupe  $V_g$  à une pulsation  $\omega$  et l'exprimer.

**Q 20.** Tracer l'allure de  $V_\varphi$  et de  $V_g$  en fonction de  $\omega$ . Commenter au regard des fréquences utilisées pour les signaux GPS.

**Q 21.** Exprimer, en notation complexe, le champ magnétique  $\underline{B}$ . Justifier l'hypothèse faite à la question 14.

**Q 22.** En supposant que le satellite est à la verticale du capteur, donner une expression approchée du retard ionosphérique à la traversée de l'ionosphère en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$ ,  $c$  et de l'épaisseur  $d$  d'ionosphère traversée.

**Q 23.** En négligeant l'altitude du bas de l'ionosphère devant son épaisseur et la réfraction ionosphérique, proposer une expression approchée de  $\tau$  lorsque, depuis le point où se trouve le capteur, le satellite est sur l'horizon. Donner ainsi une estimation numérique du retard maximum subi à la traversée de l'ionosphère.

**Q 24.** Justifier que ne pas tenir compte de la différence entre  $V_g$  et  $c$  dans le plasma induit un décalage de positionnement au sol.

**Q 25.** En utilisant le résultat des questions précédentes et la figure 8, estimer la valeur numérique du décalage maximal de positionnement au sol, puis l'incertitude-type sur ce décalage. On procédera à une évaluation de type B sur une distribution uniforme que l'on précisera.

**Q 26.** En déduire, en supposant que la seule source d'incertitude est ce défaut de positionnement, une estimation de l'incertitude-type relative sur la vitesse pour un essai de l'expérience étudiée à la question 9. Commenter sur l'impact potentiel d'un défaut de localisation GPS sur l'expérience décrite dans la section I.A.2.

## II Du casque goutte d'eau au casque flux d'air

Le 8 octobre 2016, l'Allemand Patrick Lange prend la troisième place des championnats du monde de triathlon Ironman à Kona, dans l'archipel d'Hawaii. Le 14 octobre 2017, il devient champion du monde sur le même parcours. Si ses temps de natation et de course à pied ont été quasiment identiques en 2016 et en 2017, il a en revanche gagné près de 9 minutes sur les 180 kilomètres du parcours vélo. Il a utilisé le même vélo lors de ces deux éditions mais, s'il portait en 2016 un casque en goutte d'eau classique, il a opté en 2017 pour un casque novateur, utilisant un flux d'air « aspiré » sur l'avant du casque, puis réinjecté dans le dos du cycliste. L'objectif de cette partie est de caractériser et de quantifier l'apport de ce casque.

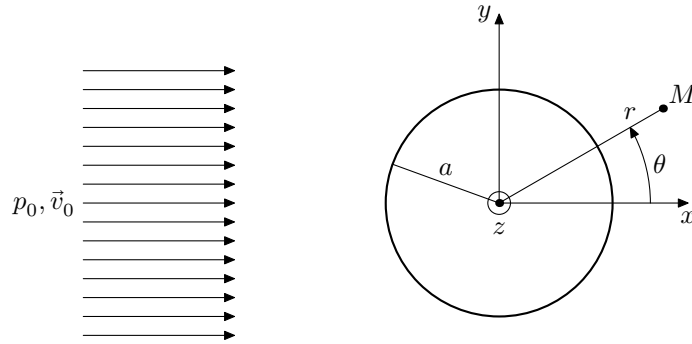


**Figure 10** Le casque à flux d'air utilisé par Patrick Lange lors de sa victoire à l'Ironman de Kona en 2017

### II.A – Modélisation du flux d'air autour du cycliste

On modélise l'écoulement de l'air autour du buste du cycliste, en dehors de la couche limite, par un écoulement d'air autour d'un cylindre, de rayon  $a$ , de hauteur infinie et d'axe ( $Oz$ ) perpendiculaire au plan de l'écoulement (figure 11). Le problème est invariant par translation suivant ( $Oz$ ) et l'écoulement est partout supposé stationnaire, incompressible, homogène, parfait et irrotationnel. L'action de la pesanteur est négligée. On note

respectivement  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  et  $p_0$  la vitesse et la pression loin en amont du cylindre. Au voisinage du cylindre, en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ , le champ des vitesses est de la forme  $\vec{v}_e = v_{er}(r, \theta) \vec{e}_r + v_{e\theta}(r, \theta) \vec{e}_\theta$  et la pression est notée  $p_e$  (l'indice  $e$  faisant référence à l'extérieur de la couche limite dont l'étude sera abordée dans la sous-partie II.B).



**Figure 11** Modélisation de l'écoulement de l'air autour du cylindre

**Q 27.** Montrer qu'il existe un potentiel des vitesses  $\varphi$  tel que  $\vec{v}_e = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  et vérifiant l'équation de Laplace  $\Delta \varphi = 0$ .

**Q 28.** Pour l'écoulement uniforme, loin en amont, montrer que le potentiel des vitesses  $\varphi$  associé peut être pris de la forme  $\varphi = v_0 x$ . Caractériser alors les surfaces équipotentiels et les lignes de courant.

On admet que le potentiel des vitesses du problème est donné par

$$\varphi(M) = \gamma r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

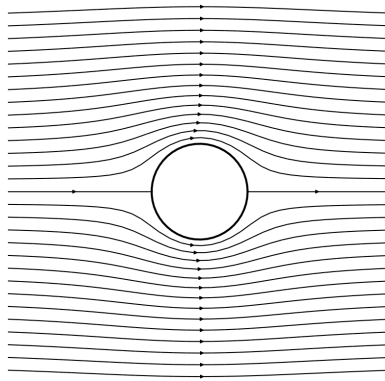
où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires d'axe  $(Oz)$  et  $\gamma$  une constante positive.

**Q 29.** Déterminer l'expression de  $\gamma$ .

**Q 30.** Déterminer les composantes polaires  $v_{er}$  et  $v_{e\theta}$  du champ des vitesses  $\vec{v}_e$ .

**Q 31.** Montrer que les conditions aux limites à la surface du cylindre sont vérifiées.

À partir de l'expression de  $\varphi$ , un programme Python a permis de tracer la représentation des lignes de courant présentée sur la figure 12.



**Figure 12** Tracé des lignes de courant

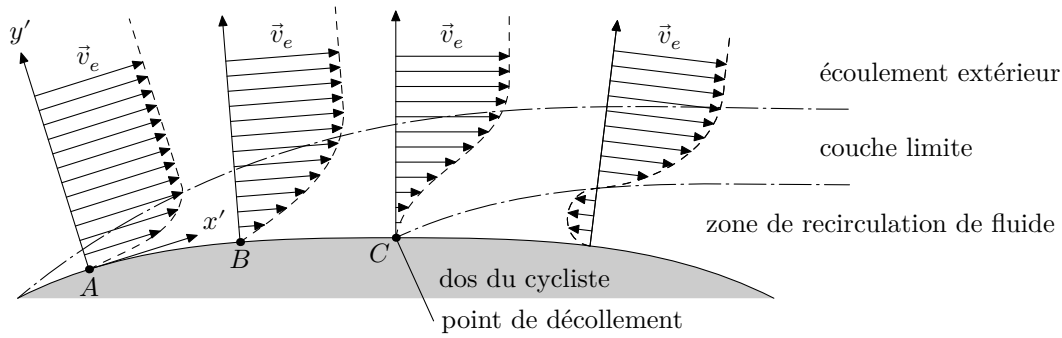
**Q 32.** Montrer, à partir de l'équation de Navier-Stokes et en précisant clairement les hypothèses utilisées, que la quantité  $\frac{p_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2}$  est constante et uniforme dans tout l'écoulement.

**Q 33.** En s'appuyant sur le tracé des lignes de courant de la figure 12, décrire comment évolue la pression dans l'écoulement au voisinage de la surface du cylindre pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$ .

## II.B – Comportement de la couche limite

Le cycliste utilise pour l'instant un casque aérodynamique profilé en goutte d'eau. La trainée ne peut être expliquée dans l'écoulement parfait et il faut prendre en compte les effets de la viscosité dans la couche limite dans laquelle les gradients de vitesse sont localisés. En dehors de la couche limite, l'écoulement est celui d'un fluide parfait. On l'appelle dans la suite écoulement extérieur par opposition à l'écoulement intérieur à la couche limite. La couche limite peut se détacher à partir d'un point, dit point de décollement. Il apparaît, en aval de ce point, une zone de recirculation de fluide responsable d'une augmentation sensible de la trainée. On suppose que le décollement ne se produit que sur le dos du cycliste.

On se place ici dans le cas d'une couche limite laminaire, incompressible et homogène. On note respectivement  $\vec{v}$  et  $p$  la vitesse et la pression de l'écoulement dans la couche limite et  $\vec{v}_e$  et  $p_e$  la vitesse et la pression dans l'écoulement extérieur. Loin en amont du cycliste, elles sont notées  $\vec{v}_0$  et  $p_0$ . On note respectivement  $x'$  et  $y'$  les coordonnées locales tangente (ou longitudinale) et normale à la surface de l'obstacle, comme l'illustre la figure 13.



**Figure 13** Évolution du champ de vitesse dans la couche limite en amont et en aval du point de décollement

La courbure du dos du cycliste est supposée assez faible pour que la dérivation dans le repère local  $(x', y')$  se fasse comme dans un repère cartésien. On note respectivement  $v'_x$  et  $v'_y$  les composantes longitudinale et transversale de  $\vec{v}$ . La dimension caractéristique dans la direction  $x'$  est notée  $L$ ; celle dans la direction transversale  $y'$  est notée  $\delta(x')$  et nous la nommerons « épaisseur de la couche limite ».

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- (1) en amont du point de décollement,  $\delta(x') \ll L$  ;
- (2) l'écoulement dans la couche limite est quasi-parallèle à la paroi ( $|v'_y| \ll |v'_x|$ ) ;
- (3) les variations de vitesse dans la direction  $y'$  sont très supérieures à celles dans la direction  $x'$ , c'est-à-dire que  $\left| \frac{\partial v'_x}{\partial x'} \right| \ll \left| \frac{\partial v'_x}{\partial y'} \right|$  et  $\left| \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \right|$ .

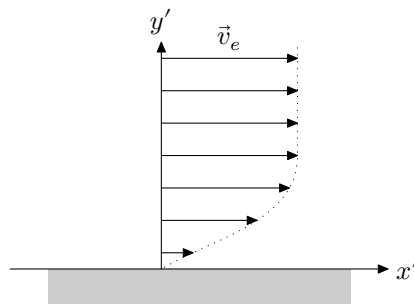
La condition de raccord avec l'écoulement extérieur parfait, de nature asymptotique, se traduit par

$$v'_x(y' = \delta(x')) \approx v_e \quad \text{et} \quad p(y' = \delta(x')) \approx p_e.$$

### II.B.1) Couche limite le long de la paroi

La couche limite évolue sous l'action conjuguée de phénomènes de diffusion de quantité de mouvement dans la direction  $y'$  et de convection (ou advection) dans le sens  $x'$  de l'écoulement. Dans cette section, on néglige les effets de la pesanteur, les gradients de pression sont considérés nuls et l'écoulement est instationnaire.

On considère, dans un premier temps, que l'écoulement dans la couche limite est unidirectionnel dans la direction longitudinale  $x'$ , la vitesse ne dépendant que de la coordonnée  $y'$  dans la direction orthogonale à l'écoulement,  $\vec{v}(y, t) = v'_x(y', t)\vec{e}_{x'}$  (figure 14). L'épaisseur de la couche limite ne dépend donc pas de  $x'$  et est notée  $\delta$ .



**Figure 14** Écoulement unidirectionnel

**Q 34.** Montrer que les phénomènes de diffusion de quantité de mouvement dans la couche limite sont décrits par une équation aux dérivées partielles de la forme

$$F(v'_x) = D G(v'_x)$$

où  $F$  et  $G$  sont deux opérateurs aux dérivées partielles, respectivement temporel et spatial, à préciser et où  $D$  est un coefficient à exprimer en fonction de la viscosité dynamique  $\eta$  et de la masse volumique  $\rho$  de l'air. Quel nom donne-t-on à  $D$  ?



**Q 35.** Exprimer les temps caractéristiques  $\tau_{\text{diff}}$  et  $\tau_{\text{conv}}$  de diffusion et de convection de quantité de mouvement. Montrer que le nombre de Reynolds peut être interprété comme un rapport de ces deux grandeurs. Commenter.

**Q 36.** En exprimant le fait que, dans la couche limite, le temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur la distance  $\delta$  est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de convection sur la distance  $L$ , montrer que la dimension transversale caractéristique de la couche limite est, en ordre de grandeur, donnée par  $\delta \approx \frac{L}{\sqrt{R_e}}$  où  $R_e$  est un nombre de Reynolds qui sera assimilé à celui de l'écoulement extérieur évalué à la question 1.

**Q 37.** Déterminer un ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite.

On considère dans toute la suite que l'écoulement dans la couche limite est quasi-parallèle, comme représenté dans la figure 13. L'ordre de grandeur de la couche limite est celui évalué à la question précédente.

**Q 38.** Compte tenu du résultat précédent, commenter les hypothèses (1), (2) et (3) du modèle.

## II.B.2) Décollement de la couche limite

On se place toujours dans le cas où l'écoulement dans la couche limite est quasi-parallèle comme représenté dans la figure 13.

Dans cette section, on néglige toujours l'effet de la pesanteur, mais on prend désormais en compte le gradient de pression. De plus, on admet que, tant que la couche limite n'a pas décollé, la pression dans la couche limite est indépendante de  $y'$  et que le gradient longitudinal de pression dans la couche limite suivant  $x'$  est imposé par l'écoulement extérieur, c'est-à-dire  $\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial p_e}{\partial x'}$ , où  $p_e$  est la pression dans l'écoulement extérieur. (Au-delà du point de décollement, ce modèle n'est plus valable, la composante  $v'_y$  n'étant plus négligeable.)

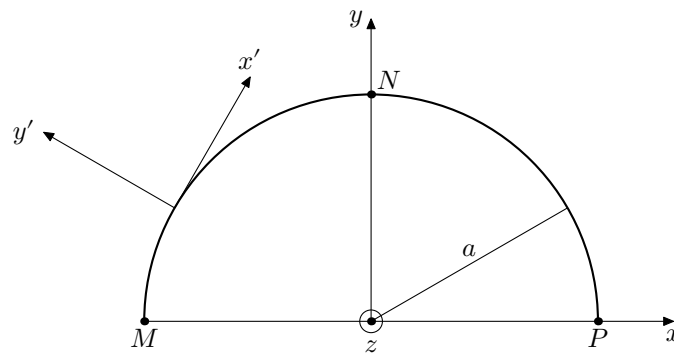
On considère que l'écoulement dans la couche limite est stationnaire.

**Q 39.** En utilisant l'équation de Navier-Stokes, montrer que le gradient de pression en  $x'$  et la concavité du profil de vitesse vérifient à la paroi

$$\frac{\partial p}{\partial x'}(y' = 0) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}(y' = 0).$$

**Q 40.** En analysant l'évolution de la concavité du profil de vitesse aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définis figure 13 déterminer le signe de  $\frac{\partial p}{\partial x'}$  en ces trois points. Donner une condition nécessaire sur ce signe pour observer le décollement de la couche limite.

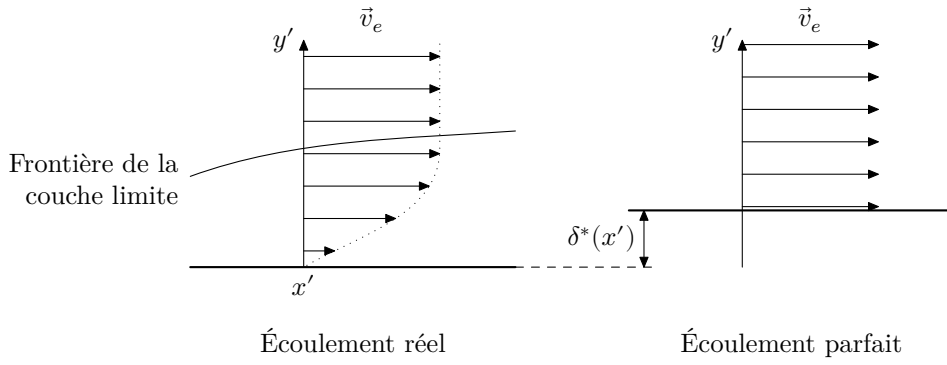
**Q 41.** En première approximation, on peut modéliser le dos du cycliste par un demi-cylindre (figure 15). En s'appuyant sur les résultats des questions 33 et 40, justifier que la couche limite peut décoller uniquement entre les points  $N$  et  $P$ , mais pas entre les points  $M$  et  $N$ .



**Figure 15** Profil et repère cartésien local  $(x', y')$

On s'intéresse à présent au comportement de la couche limite sur le dos du cycliste en amont du point de décollement. On considère la couche limite en régime stationnaire, d'écoulement bidimensionnel, les notations étant celles de la figure 13. La dimension dans la direction  $z$  orthogonale au plan de l'écoulement est notée  $L_t$ .

On définit  $D_m(x')/L_t$  le débit massique par unité de longueur, où  $D_m(x')$  désigne le débit massique de l'écoulement réel au travers d'une section de la couche limite d'abscisse  $x'$  sur toute sa hauteur. On note alors  $\delta^*(x')$  l'épaisseur de déplacement qui correspond à la perte de débit massique par unité de longueur  $\Delta D_m(x')/L_t$  par rapport au cas d'un écoulement parfait sur la même section. Ainsi l'épaisseur de déplacement apparaît comme la hauteur dont il faudrait déplacer la paroi pour maintenir le débit massique inchangé dans un écoulement de fluide qui serait parfait (figure 16). On a donc  $\Delta D_m(x') = \rho L_t v_e \delta^*(x')$ .



**Figure 16** Épaisseur de déplacement

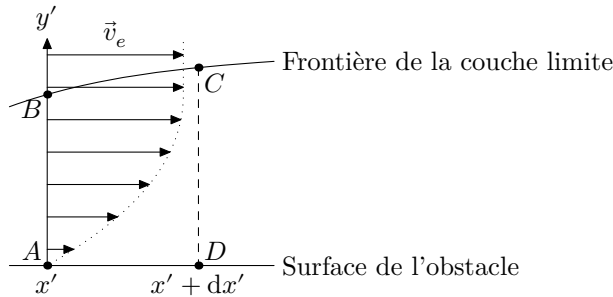
On définit également  $P(x')/L_t$ , la quantité de mouvement longitudinale à l'abscisse  $x'$  (en projection suivant le sens de l'écoulement) par unité de longueur. On note alors  $\theta(x')$  l'épaisseur de quantité de mouvement longitudinale qui correspond à la perte de quantité de mouvement longitudinale par unité de longueur  $\Delta P(x')/L_t$  dans la couche limite par rapport au cas d'un écoulement qui serait parfait (à débit massique donné). Ainsi, on a  $\Delta P(x') = \rho L_t v_e^2 \theta(x')$ .

**Q 42.** Montrer que

$$\delta^*(x') = \int_0^{\delta(x')} \left(1 - \frac{v}{v_e}\right) dy'.$$

**Q 43.** On note  $D_m(x')$  le débit massique à travers la section droite en  $x'$  de la couche limite et de largeur  $L_t$ . Déterminer l'expression de  $D_m(x')$  en fonction de la masse volumique  $\rho$ , de la norme de la vitesse extérieure  $v_e$ , de la largeur  $L_t$  de l'écoulement, de l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite et de l'épaisseur de déplacement  $\delta^*$ . Commenter.

On définit, sur une tranche de la couche limite entre  $x'$  et  $x' + dx'$ , une surface de contrôle  $\Sigma$  représentée figure 17 (échelle verticale non respectée) par sa section longitudinale  $ABCD$ . La largeur de l'écoulement est toujours prise égale à  $L_t$ .



**Figure 17** Évolution de la couche limite entre  $x'$  et  $x' + dx'$

On constate que l'épaisseur de la couche limite augmente le long de la surface de l'obstacle suivant les  $x'$  croissants. Cela se traduit par l'existence d'un débit massique entrant  $D'_{me}$  à travers la frontière supérieure de la couche limite.

On construit un système fermé délimité par une surface  $\Sigma^*$  constitué,

- à l'instant  $t$ , du contenu matériel de  $\Sigma(t)$  et de la masse entrante dans la surface de contrôle entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . On note  $dm_e$  la masse entrant par la trace  $AB$  et  $dm_{e,\text{sup}}$  la masse entrant par la trace  $BC$  ;
- à l'instant  $t + dt$ , du contenu matériel de  $\Sigma(t + dt)$  et de la masse sortant de la surface de contrôle par la trace  $CD$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , notée  $dm_s$ .

On admet par ailleurs que

- la force de frottement agissant sur ce système au niveau du contact avec l'obstacle (trace  $AD$ ) s'écrit, projetée sur la direction  $x'$ ,

$$df = -\tau_w L_t dx'$$

où  $\tau_w$  est un coefficient appelé *contrainte de frottement pariétale* ;

- la force de pression s'appliquant sur la partie supérieure du système (trace  $BC$ ), projetée sur  $x'$ , s'écrit

$$df_{p,\text{sup}}(x') = p(x') \frac{d\delta(x')}{dx'} L_t dx' ;$$

- l'on peut négliger la composante de frottement agissant à travers la surface de la frontière supérieure de la couche limite (trace  $BC$ ) ;
- l'expression de la quantité de mouvement entrant en  $x'$  pendant  $dt$ , projetée sur  $x'$ , est

$$dP(x') = \rho v_e^2(x') L_t (\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')) dt$$

où  $\theta(x')$  est l'épaisseur de quantité de mouvement définie précédemment, page 11.

**Q 44.** Par un bilan de masse et de quantité de mouvement entre les instants  $t$  et  $t + dt$  sur le système fermé délimité par la surface  $\Sigma^*$ , montrer qu'en se limitant au premier ordre,

$$\frac{d}{dx'} \left( \rho v_e^2(x') (\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')) \right) - v_e(x') \frac{d}{dx'} \left( \rho v_e(x') (\delta(x') - \delta^*(x')) \right) = -\delta(x') \frac{dp(x')}{dx'} - \tau_w$$

**Q 45.** En utilisant la relation de Bernoulli dans l'écoulement extérieur ainsi que le résultat de la question 39, montrer l'équation, dite *équation intégrale de Von Karman*,

$$\frac{\tau_w}{\rho v_e^2} = \frac{1}{v_e} \frac{dv_e}{dx'} (\delta^* + 2\theta) + \frac{d\theta}{dx'}.$$

### — Résolution de l'équation de Von Karman —

On définit  $H = \delta^*/2\theta$  le facteur de forme. On pose un paramètre sans dimension  $\lambda = R_e \left( \frac{\theta}{L} \right)^2 \frac{d(v_e/v_0)}{d(x'/L)}$  de sorte qu'on puisse écrire  $H = H(\lambda)$  et  $\frac{\tau_w \theta}{\eta v_e} = S(\lambda)$  où  $H(\lambda)$  et  $S(\lambda)$  sont des fonctions inconnues. L'analyse empirique de nombreux résultats montre que l'équation de Von Karman peut se réécrire de façon approchée sous la forme

$$2(S(\lambda) - \lambda(2 + H(\lambda))) = F(\lambda) \quad \text{où} \quad F(\lambda) \approx 0,45 - 6,0\lambda.$$

Le tableau 3 fournit les valeurs de  $H(\lambda)$  et  $S(\lambda)$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

| $\lambda$ | $H(\lambda)$ | $S(\lambda)$ |
|-----------|--------------|--------------|
| 0,0       | 2,61         | 0,220        |
| -0,040    | 2,81         | 0,153        |
| -0,064    | 3,05         | 0,104        |
| -0,076    | 3,38         | 0,067        |
| -0,0808   | 3,61         | 0,030        |
| -0,0820   | 3,70         | 0,0          |

**Tableau 3** Table de corrélation pour  $H(\lambda)$  et  $S(\lambda)$

On admet que la couche limite adhère à la paroi tant que la contrainte de frottement pariétale  $\tau_w$  est positive et décolle quand  $\tau_w$  s'annule. De plus, dans ces conditions, on admet que l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  de la couche limite laminaire sur le dos du cycliste de dimension longitudinale  $L$  satisfait aux relations suivantes, dans lesquelles le nombre de Reynolds est celui de la question 1.

$$\begin{cases} \left( \frac{\theta(x')}{L} \right)^2 \approx \frac{0,0039}{R_e} & \text{si } 0 \leq \frac{x'}{L} \leq 0,1 \\ \left( \frac{\theta(x')}{L} \right)^2 \approx \frac{0,075}{R_e} \left( \frac{49,522}{(2 - x'/L)^6} - 1 \right) & \text{si } 0,1 \leq \frac{x'}{L} \leq 1 \end{cases}$$

La vitesse dans l'écoulement extérieur, qui vaut  $v_0$  à l'infini en amont du cycliste, peut être approchée par

$$\begin{cases} \frac{v_e(x')}{v_0} = 19 \left( \frac{x'}{L} \right) & \text{si } 0 \leq \frac{x'}{L} \leq 0,1 \\ \frac{v_e(x')}{v_0} = 2 - \left( \frac{x'}{L} \right) & \text{si } 0,1 \leq \frac{x'}{L} \leq 1 \end{cases}$$

**Q 46.** En utilisant les données relatives à la résolution de l'équation de Von Karman, estimer la position relative  $x'/L$  du point de décollement de la couche limite.

Si le décollement se produit sur le premier tiers du dos du cycliste (origine aux épaules), il génère un sillage large dissipateur d'énergie. Le casque présenté en figure 10 est conçu pour canaliser le flux d'air entrant en face frontale de façon à l'accélérer pour l'injecter par un orifice de faible section sur le dos du cycliste.

**Q 47.** Expliquer en quoi ce casque permet de réduire la dissipation d'énergie.

En 2016, Patrick Lange a parcouru les 180 km de la partie vélo de l'Ironman d'Hawaï en 4 h 37 min 49 s. En 2017, il a mis 4 h 28 min 53 s.

**Q 48.** En supposant que ce gain est attribuable uniquement au changement de casque, estimer la puissance supplémentaire qu'aurait dû fournir Patrick Lange avec son matériel de 2016, pour réaliser son temps de 2017. On considérera que pour l'épreuve de 2016,  $SC_x = 0,25 \text{ m}^2$ . Conclure au regard de la valeur obtenue à la question 13.

## Données et formulaire

### Constantes diverses

|                                                             |                                                                   |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Permittivité du vide                                        | $\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Charge élémentaire                                          | $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$                               |
| Masse de l'électron                                         | $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$                            |
| Célérité de la lumière dans le vide                         | $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$                 |
| Rayon terrestre                                             | $R_T \approx 6400 \text{ km}$                                     |
| Masse volumique de l'air                                    | $\rho = 1,225 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$                       |
| Viscosité dynamique de l'air                                | $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$               |
| Accélération de la pesanteur                                | $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$                             |
| Masse du système {cycliste + vélo}                          | $m = 80 \text{ kg}$                                               |
| Coefficient de résistance au roulement du vélo sur la route | $\mu_r = 6,4 \times 10^{-3}$                                      |

### Équation de Navier-Stokes

On rappelle que dans un écoulement fluide, newtonien et incompressible, le champ de vitesse  $\vec{v}$  satisfait à l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\eta$  sa viscosité dynamique,  $p$  le champ de pression et  $\vec{f}_v$  représente la résultante des forces volumiques autres que celles de pression et de viscosité.

### Expression des opérateurs usuels

En coordonnées cartésiennes :

- Gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}}(a) = \vec{\nabla} a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z$
- Divergence :  $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- Laplacien scalaire :  $\Delta(a) = \vec{\nabla}^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$
- Laplacien vectoriel :  $\Delta(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \Delta(A_x) \vec{e}_x + \Delta(A_y) \vec{e}_y + \Delta(A_z) \vec{e}_z$

En coordonnées cylindriques :

- Gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}}(a) = \frac{\partial a}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z$
- Rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

### Relations entre opérateurs

$$\begin{aligned} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(a)) &= \Delta(a) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(a)) &= \vec{0} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A}) \\ (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} &= \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \wedge \vec{A} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A}^2) \end{aligned}$$

Évaluation de type A :

Si l'on dispose de  $N$  mesures  $y_i$  d'une grandeur  $y$ , alors

| Valeur moyenne                                     | Incertitude-type sur une mesure                                                   | Incertitude-type sur la moyenne                                                                                                   |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ | $u(y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$ | $u(\langle y \rangle) = \frac{u(y)}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$ |

Évaluation de type B :

Si la grandeur mesurée  $y$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ , l'incertitude-type est alors

$$u(y) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

## Opérations et fonctions Python

On suppose avoir exécuté l'instruction

```
import numpy as np
```

### Fonctions

- `range(n:int)` renvoie la séquence des  $n$  premiers entiers ( $0 \rightarrow n-1$ )  
`list(range(5))`  $\rightarrow [0, 1, 2, 3, 4]$ .

### Opérations sur les listes

- `len(u)` donne le nombre d'éléments de la liste  $u$  ;  
`len([1, 2, 3])`  $\rightarrow 3$ , `len([[1, 2], [3, 4]])`  $\rightarrow 2$ .
- `u.append(e)` ajoute l'élément  $e$  à la fin de la liste  $u$  (identique à `u[len(u):] = [e]`).

### Opérations sur les tableaux

- `a.ndim` nombre de dimensions du tableau  $a$ .
- `a.shape` tuple donnant la taille du tableau  $a$  pour chacune de ses dimensions.
- `len(a)` taille du tableau  $a$  dans sa première (ou seule) dimension (identique à `a.shape[0]`).
- `np.linspace(start, stop, num=50)` crée un vecteur contenant `num` valeurs équiréparties dans l'intervalle `[start, stop]` ;  
`np.linspace(1, 10, 4)`  $\rightarrow \text{array}([1., 4., 7., 10.])$ .
- `np.arange(start, stop, step)` crée un vecteur contenant des valeurs régulièrement espacées de `step` dans l'intervalle `[start, stop[` ;  
`np.arange(1, 2, 0.2)`  $\rightarrow \text{array}([1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8])$ .
- `np.mean(a)`, `np.std(a)` calcule respectivement la moyenne et l'écart-type des éléments du tableau  $a$ .
- `np.sqrt(a)` crée un tableau de même forme que  $a$  dont les éléments sont les racines carrées des éléments de  $a$ .

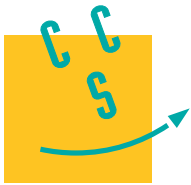
### Générateurs pseudo-aléatoires

- `np.random.default_rng()` crée un générateur de nombres pseudo-aléatoires utilisant l'algorithme *permutation congruential generator* (PGC-64).
- `g.normal(loc=0.0, scale=1.0, size=None)` où  $g$  est un générateur de nombres pseudo-aléatoires, renvoie un vecteur de `size` échantillons suivant une loi normale d'espérance `loc` et d'écart-type `scale`.

---

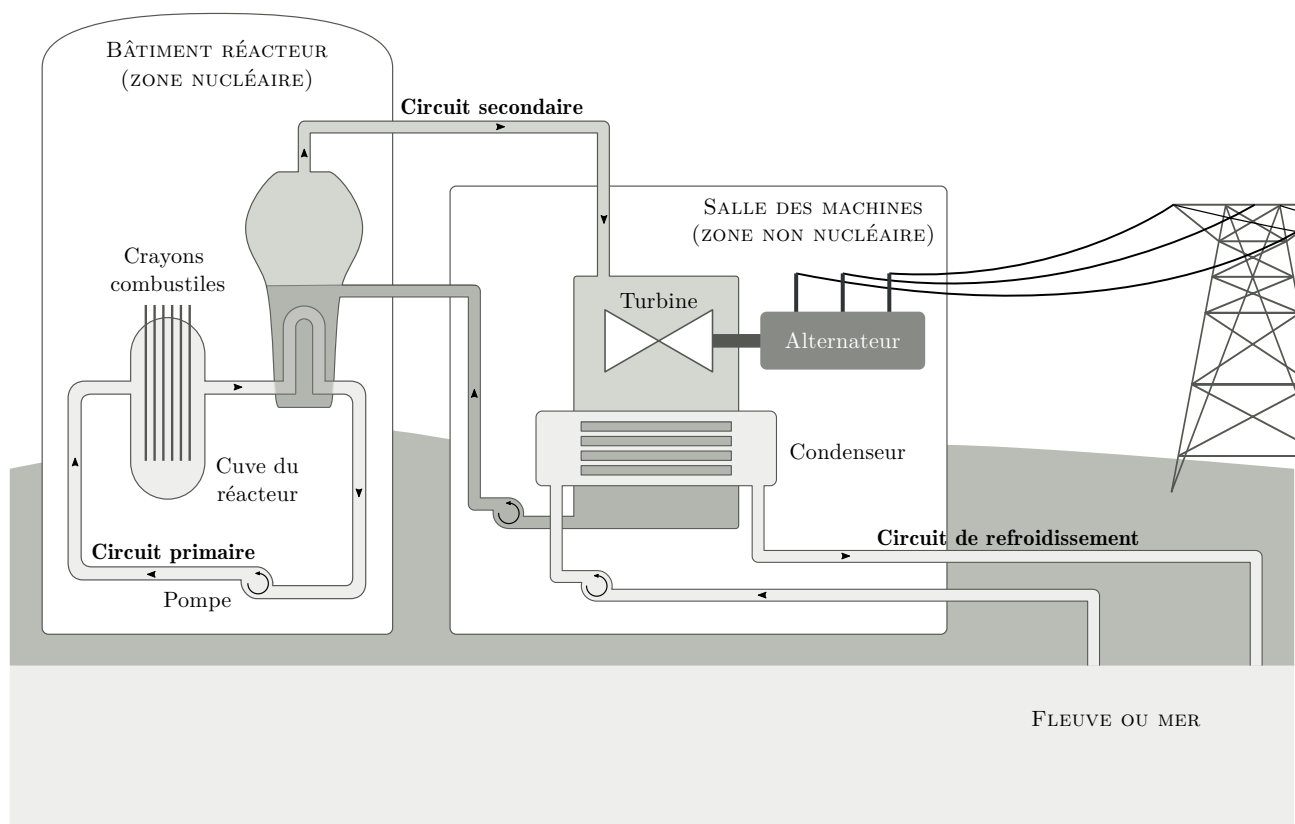
• • • FIN • • •

---



## Autour d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à  $p = 155$  bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.



**Figure 1** Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

*Un formulaire et certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.*

### I Étude du circuit primaire

Le cœur est constitué de  $N = 41448$  crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur  $H = 3,66$  m et de diamètre  $d = 2R_4 = 9,5$  mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut :  $P_1 = 2776$  MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible,  $\text{UO}_{2(s)}$ , dont la température de fusion vaut  $2800\text{ °C}$ . La conductivité thermique de  $\text{UO}_{2(s)}$  vaut  $\lambda_2 = 3,5\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

La pression de vapeur saturante de l'eau à  $345\text{ °C}$  vaut  $155\text{ bar}$ .

Dans cette partie, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique.

### I.A – Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible  $\text{UO}_{2(s)}$  et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de  $R_4$  à  $R_5$  et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut  $T_5 = 303\text{ °C}$ .

On note  $T_2$  et  $T_3$  les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note  $T_4$  et  $T_5$  les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les  $N$  crayons combustibles de hauteur  $H$  sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface  $dS$  de cette interface s'écrit  $h dS (T_s - T_a)$  où  $h$  désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et  $T_s$  et  $T_a$  désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut  $h_2 = 10\text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ . Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut  $h_4 = 25\text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur  $e = R_4 - R_3 = 0,60\text{ mm}$  dont la conductivité thermique vaut  $\lambda_3 = 16\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

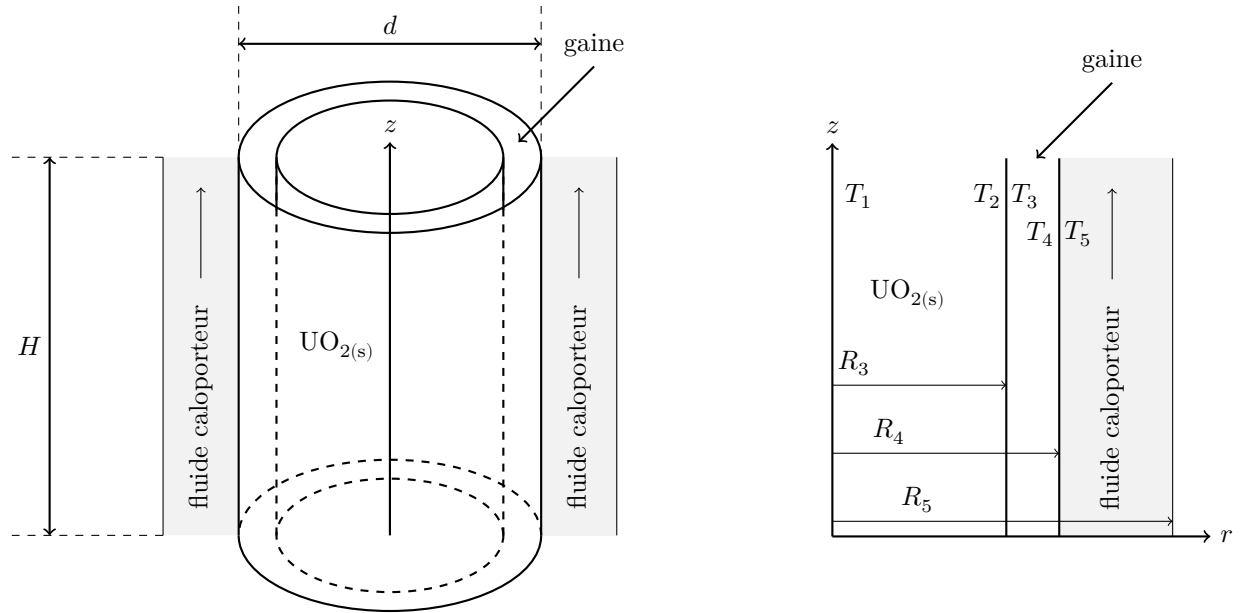


Figure 2

**Q 1.** Exprimer la surface latérale totale, notée  $S_{tot}$ , de l'ensemble des  $N$  crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de  $N$ ,  $d$  et  $H$ .

On note  $P_V$  la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au cœur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle  $r$  la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des  $N$  crayons.

**Q 2.** Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0.$$

Exprimer  $A$  en fonction de  $P_V$  et  $\lambda_2$ .

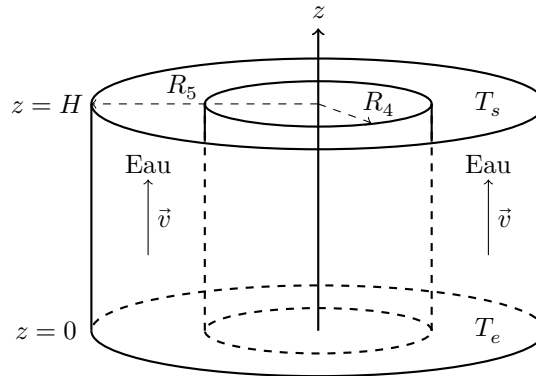


- Q 3.** Exprimer la température  $T(r)$  dans  $\text{UO}_{2(s)}$  en fonction de  $P_V$ ,  $T_2$ ,  $R_3$ ,  $\lambda_2$  et  $r$ .
- Q 4.** Exprimer la température  $T_3$  en fonction de  $T_2$ ,  $P_1$ ,  $h_2$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $H$  et  $N$ .
- Q 5.** Exprimer la température  $T(r)$  en un point de la gaine en fonction de  $T_4$ ,  $P_1$ ,  $R_4$ ,  $\lambda_3$ ,  $S_{\text{tot}}$  et  $r$ .
- Q 6.** Calculer les températures  $T_4$ ,  $T_3$ ,  $T_2$  et  $T_1$ .
- Q 7.** Représenter le profil température  $T(r)$  pour  $0 \leq r \leq R_5$ .
- Q 8.** Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

**I.B – Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température**

Dans cette partie, on néglige l'influence de la gaine mais on tient compte du profil non uniforme, selon la coordonnée  $z$ , de la puissance thermique générée par les réactions de fission, ainsi que de la dépendance avec  $z$  du champ de température.

Chaque crayon combustible de rayon  $R_4$  et de hauteur  $H$  est refroidi par une circulation d'eau liquide dans un espace annulaire de rayon extérieur  $R_5$  entourant le crayon. On ne considère dans cette sous-partie qu'un seul crayon.



**Figure 3**

La puissance thermique  $P_V(z)$  par unité de volume engendrée par les réactions de fission au sein de la barre du combustible est modélisée par :  $P_V(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$ . On suppose que les échanges thermiques se font toujours exclusivement dans la direction radiale de la barre de combustible. On appelle  $r$  la distance à l'axe du cylindre.

L'eau liquide circule à la vitesse  $v = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  avec un débit massique  $D_m = 0,30 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  ; la température d'entrée (en  $z = 0$ ) de l'eau liquide est  $T_e = 284 \text{ }^\circ\text{C}$  et sa température de sortie (en  $z = H$ ) est  $T_s = 322 \text{ }^\circ\text{C}$ . La capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante sur cette plage de température, est prise égale à  $c_5 = 5750 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ . On admet qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur pour  $r = R_5$ .

Dans la suite, on suppose que la température de l'eau liquide ne dépend que de  $z$  et on la note  $T(z)$  ; la température dans la barre de combustible dépend de  $r$  et  $z$  et est notée  $T_c(r, z)$ .

- Q 9.** En réalisant un bilan thermodynamique pendant  $dt$  pour l'eau liquide entre les cotes  $z$  et  $z + dz$  (avec  $dz \ll z$ ), en écoulement stationnaire dans l'espace annulaire, justifier que :

$$D_m c_5 [T(z + dz) - T(z)] = P_V(z) \pi R_4^2 dz.$$

- Q 10.** Exprimer  $T_s - T_e$  en fonction de  $R_4$ ,  $H$ ,  $D_m$ ,  $c_5$  et  $P_0$ . Exprimer la température  $T(z)$  de l'eau liquide en fonction de  $T_e$ ,  $T_s$ ,  $z$  et  $H$ .

On note  $h_{cc}$  le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de combustible et l'eau liquide dans ce modèle, et  $T_p(z)$  la température de la paroi de la barre de combustible à l'altitude  $z$ .

- Q 11.** Montrer que :

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[ 1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right].$$

Exprimer  $B$  et  $C$  en fonction de  $h_{cc}$ ,  $H$ ,  $D_m$ ,  $c_5$  et  $R_4$ .

**Q 12.** Déterminer la température  $T_c(r, z)$  dans la barre de combustible. Montrer que :

$$\frac{T_c(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[ 1 + D \cos \left( \frac{\pi z}{H} \right) \right] + \left[ E + F \left( 1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin \left( \frac{\pi z}{H} \right).$$

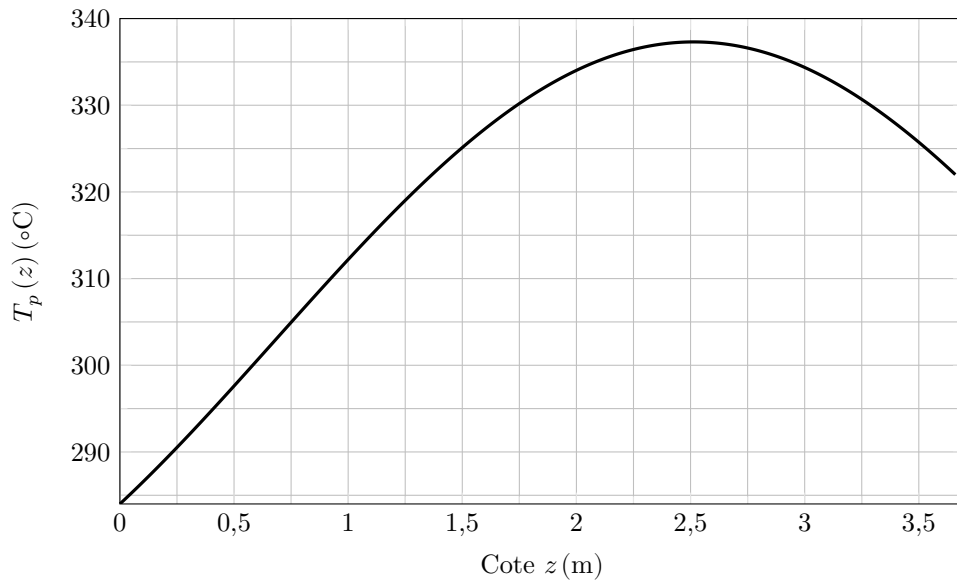
Exprimer  $D$ ,  $E$  et  $F$  en fonction de  $D_m$ ,  $c_5$ ,  $H$ ,  $h_{cc}$ ,  $\lambda_2$  et  $R_4$ .

**Q 13.** Exprimer la température  $T_c(r = 0, z)$  sur l'axe de la barre de combustible à l'altitude  $z$  en fonction de  $T_e$ ,  $T_s$ ,  $D_m$ ,  $z$ ,  $H$ ,  $c_5$ ,  $h_{cc}$ ,  $\lambda_2$  et  $R_4$ .

**Q 14.** En déduire l'altitude pour laquelle la température sur l'axe de la barre de combustible est maximale. Calculer la valeur de la température maximale sur l'axe ; on prendra  $h_{cc} = 33 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Préciser si un critère de sureté en température est respecté.

Le graphe de la figure 4 représente l'évolution de la température de la paroi du crayon combustible avec la cote  $z$ .

**Q 15.** Justifier qualitativement son allure.



**Figure 4** Évolution spatiale de la température  $T_p$  de la paroi du crayon combustible.

## II Étude du circuit secondaire

### II.A – Préliminaire

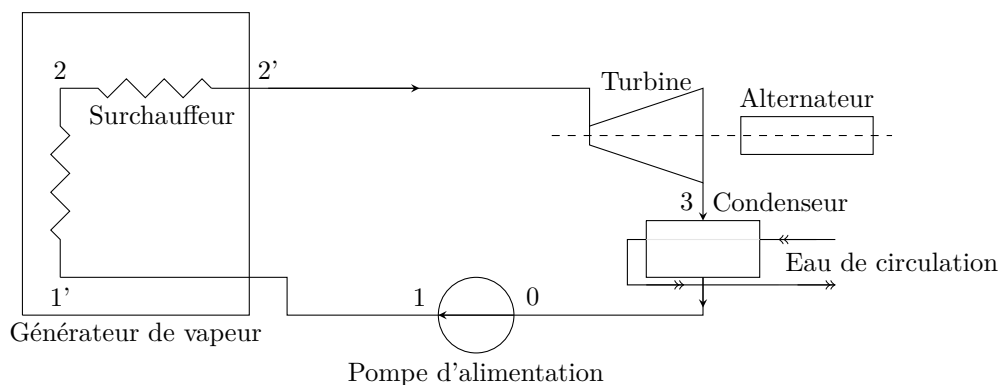
On considère un fluide en écoulement stationnaire, sans variation notable de son énergie mécanique, dans une machine. Il y entre dans l'état E (pression  $p_e$ , température  $T_e$ , enthalpie massique  $h_e$ ) et en sort dans l'état S (pression  $p_s$ , température  $T_s$ , enthalpie massique  $h_s$ ). On note  $w_u$  le travail utile massique et  $q$  le transfert thermique massique reçus algébriquement par le fluide lors de la traversée de la machine.

**Q 16.** Établir soigneusement la relation vérifiée dans ce cas par  $h_s - h_e$ ,  $w_u$  et  $q$ .

### II.B – Cycle de Hirn

On considère le circuit secondaire, décrit par la figure 5 :

- la pompe d'alimentation porte l'eau liquide juste saturée (état 0) de la basse pression  $p_3 = 0,040 \text{ bar}$  du condenseur à la pression  $p_2 = 85,8 \text{ bar}$  du générateur de vapeur (GV) de façon isentropique (état 1) ;
- l'eau liquide entre ensuite dans le générateur de vapeur, où elle est chauffée de façon isobare jusqu'à la température  $T_2$  du changement d'état (état 1' – liquide juste saturant), puis est totalement vaporisée jusqu'à l'état 2 (vapeur saturante sèche). Le surchauffeur (2 – 2') fonctionne de façon isobare ;
- la vapeur sèche produite (état 2') subit ensuite une détente isentropique dans une turbine calorifugée amenant le système dans l'état 3, à la température  $T_0$  ;
- le mélange diphasé (état 3) pénètre ensuite dans le condenseur pour y être totalement condensé (état 0).



**Figure 5** Cycle de Hirn.

On se place en régime stationnaire. On suppose l'eau liquide incompressible et on néglige le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation.

Dans la suite, les grandeurs thermodynamiques indicées par  $i$  sont relatives à l'état  $i$ .

On donne  $T_0 \simeq T_1 = 29^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 300^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 500^\circ\text{C}$ , ainsi qu'un extrait de tables thermodynamiques pour l'eau sur le tableau 1. Les données suivantes sont également fournies :

- chaleur latente massique de vaporisation de l'eau à  $T_2$  :  $L_v(T_2) = 1404 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  ;
- enthalpie et entropie massiques respectives de la vapeur d'eau sèche à  $500^\circ\text{C}$  et  $85,8 \text{ bar}$  :  $h = 3391 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et  $s = 6,68 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

| Pression de vapeur saturante (bar) | Température ( $^\circ\text{C}$ ) | Liquide juste saturé |      | Vapeur saturante sèche |      |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------|------|------------------------|------|
|                                    |                                  | $s$                  | $h$  | $s$                    | $h$  |
| 85,8                               | 300                              | 3,25                 | 1345 | 5,70                   |      |
| 0,040                              | 29                               | 0,42                 | 121  | 8,47                   | 2554 |

**Tableau 1** Quelques données thermodynamiques pour l'eau. L'enthalpie massique  $h$  est exprimée en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et l'entropie massique en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

**Q 17.** Expliquer pourquoi  $T_0 \simeq T_1$  et  $h_0 \simeq h_1$ . Préciser l'allure d'une transformation isentropique dans le domaine liquide du diagramme des frigoristes ( $p, h$ ).

**Q 18.** Donner le nom des différentes courbes du diagramme des frigoristes ( $p, h$ ) du document réponse 1 et y représenter précisément le cycle décrit par le fluide.

**Q 19.** Calculer, à partir de données du tableau 1 pour plus de précision, le titre massique en vapeur ainsi que l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine. Positionner le point représentatif de cet état sur le diagramme des frigoristes du document réponse 1.

**Q 20.** Définir et calculer l'efficacité  $\eta$  de ce cycle.

**Q 21.** Établir l'expression de l'efficacité de Carnot  $\eta_C$  d'une machine cyclique ditherme fonctionnant en moteur entre une source chaude à la température  $T_C$  et une source froide à la température  $T_F$ . La calculer en prenant respectivement pour  $T_F$  et  $T_C$  les températures minimale et maximale du fluide dans le circuit secondaire. Commenter en justifiant l'écart éventuel avec la valeur de l'efficacité obtenue à la question précédente.

## II.C – Cycle à double surchauffe

Les gouttes d'eau liquide peuvent endommager la turbine. Aussi, est-il avantageux d'utiliser une turbine à deux corps permettant d'obtenir un titre massique en vapeur en sortie de turbine proche de 1 grâce à une double surchauffe. Le cycle de Hirn précédent est modifié :

- de l'eau (état 1) est admise dans le générateur de vapeur (GV) d'où elle sort à l'état de vapeur saturante sèche (état 2) ;
- elle passe ensuite dans le premier surchauffeur isobare (2 – 2'), pour être détendue dans la turbine haute pression (HP) (2' – 4) ;
- la vapeur sèche (état 4) est envoyée dans un second surchauffeur isobare (4 – 4') pour être ensuite détendue dans l'étage de turbine basse pression (BP) (4' – 5). Le titre massique en vapeur dans l'état 5 est sensiblement égal à 1 ;

- le fluide dans l'état 5 se condense totalement à la température  $T_0$  dans le condenseur isobare (5 – 0) ;
- le liquide juste saturé (état 0) est ensuite comprimé de façon isentropique à la pression  $p_2$  du générateur de vapeur (état 1).

Les détentes dans les turbines, calorifugées, sont supposées isentropiques. On se place encore une fois en régime stationnaire et on a toujours  $T_0 \simeq T_1 = 29^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 300^\circ\text{C}$  et  $T_2' = 500^\circ\text{C}$ . De plus,  $T_4 = 300^\circ\text{C}$  et  $T_4' = 500^\circ\text{C}$ .

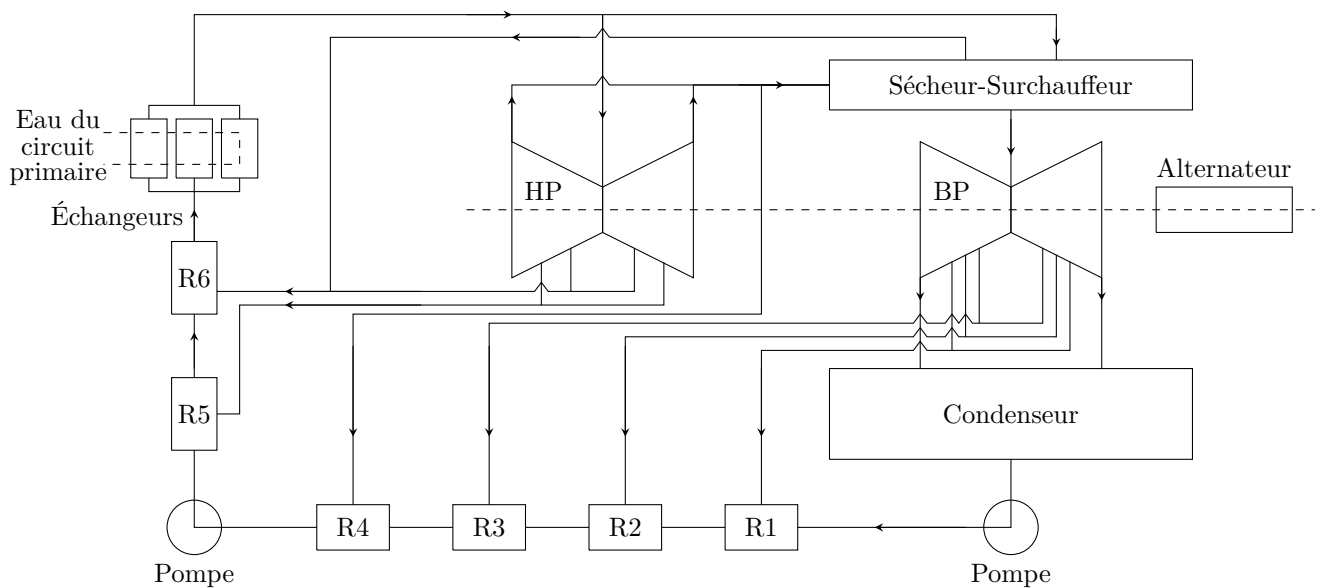
**Q 22.** Représenter précisément le cycle décrit par le fluide dans le diagramme des frigorisites du document réponse 1. Définir et calculer l'efficacité de de cycle.

### II.D – Cycle réel d'une tranche nucléaire

Pour des raisons technologiques, des limitations de pression et de température interviennent directement dans le choix des caractéristiques du cycle eau-vapeur de ces centrales thermiques nucléaires, d'où des cycles moins « poussés » que dans les centrales thermiques classiques.

Le cœur du réacteur est réfrigéré et modéré par l'eau, laquelle vient se refroidir dans les échangeurs principaux (appelés générateurs de vapeur). Les mélangeurs ou réchauffeurs sont notés R1, R2, R3, R4, R5 et R6 (figure 6).

On se place toujours en régime stationnaire.



**Figure 6** Schéma simplifié du circuit eau-vapeur d'une centrale nucléaire.

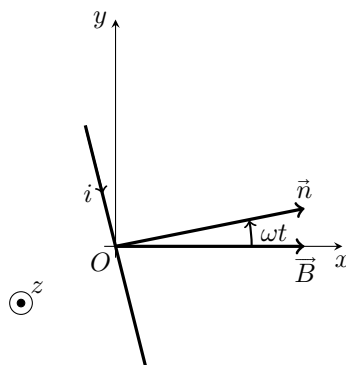
**Q 23.** Calculer l'efficacité du cycle en vous appuyant notamment sur les caractéristiques thermodynamiques du cycle fournies dans le tableau 2. En déduire la puissance disponible aux bornes de l'alternateur. En réalité, cette puissance disponible n'est que de 960 MW : proposer une explication.

| Eau du circuit                                               | Débit massique<br>(t·h <sup>-1</sup> ) | Température<br>(°C) | Pression<br>(bar) | Enthalpie massique<br>(kJ·kg <sup>-1</sup> ) |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------|-------------------|----------------------------------------------|
| Eau sortie condenseur                                        |                                        | 32,5                | 0,050             | 136,0                                        |
| Eau sortie réchauffeur 4                                     |                                        | 181,1               |                   | 768,0                                        |
| Eau sortie réchauffeur 5                                     |                                        | 181,7               |                   | 772,2                                        |
| Eau entrée échangeurs principaux                             | 5412,1                                 | 219,3               | 60                | 941,7                                        |
| Vapeur sortie échangeurs principaux                          | 5412,1                                 | 268,7               | 54                | 2788,4                                       |
| Vapeur admission turbine HP                                  | 5001,9                                 | 266,4               | 52                | 2787,1                                       |
| Vapeur alimentant le sècheur surchauffeur                    | 403,7                                  | 266,4               | 52                | 2787,1                                       |
| Vapeur soutirage 6 sortie turbine HP                         | 214,3                                  | 223,3               | 26                | 2682,5                                       |
| Vapeur soutirage 5 sortie turbine HP                         | 208,4                                  | 203,4               | 17,6              | 2622,6                                       |
| Vapeur soutirage 4 sortie turbine HP                         | 402,1                                  | 183,8               | 11,5              | 2562,8                                       |
| Vapeur à l'échappement de la turbine HP                      | 4177,1                                 | 183,8               | 11,5              | 2562,8                                       |
| Vapeur admission turbine BP                                  | 3704,0                                 | 264,1               | 11,2              | 2970,4                                       |
| Vapeur soutirage 3 sortie turbine                            | 281,4                                  | 137,8               | 3,6               | 2731,5                                       |
| Vapeur soutirage 2 sortie turbine                            | 235,4                                  | 97,4                | 0,97              | 2538,9                                       |
| Vapeur soutirage 1 sortie turbine                            | 134,2                                  | 60,8                | 0,22              | 2377,8                                       |
| Vapeur entrée condenseur<br>(en provenance de la turbine BP) | 3053,0                                 | 32,9                | 0,050             | 2242,2                                       |

**Tableau 2** Caractéristiques thermodynamiques du cycle.

### III Étude de l'alternateur

On modélise le rotor de l'alternateur par une spire circulaire de surface  $S$  parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$  et tournant sans frottement autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$ , dans une région où existe un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B \vec{u}_x$ , perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 7). Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à la spire est orienté en accord avec le courant  $i(t)$ . On considère qu'à  $t = 0$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires de même sens. On note  $R$  la résistance et  $L$  l'inductance propre de la spire.



**Figure 7**

**Q 24.** Déterminer l'expression de l'intensité du courant qui circule dans la spire en régime sinusoïdal forcé.

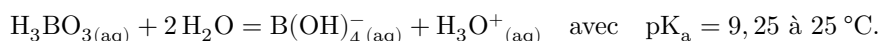
**Q 25.** Obtenir l'expression de la valeur moyenne de la projection sur l'axe ( $Oz$ ) du moment du couple exercé par  $\vec{B}$  sur la spire en rotation. Interpréter son signe.

**Q 26.** Déterminer la puissance mécanique moyenne de la turbine qui entraîne le rotor de cet alternateur, ainsi que la puissance moyenne dissipée par effet Joule. Comparer ces deux puissances.

## IV Contrôle de la concentration en bore dans le circuit primaire

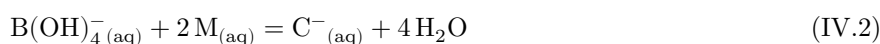
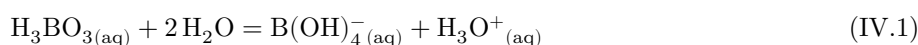
Chaque réacteur nucléaire est équipé d'un circuit de refroidissement du réacteur à l'arrêt. Ce circuit contient un mélange d'eau et de bore. Le bore, présent dans l'eau du circuit primaire sous forme d'acide borique dissous, permet de modérer, par sa capacité à absorber les neutrons, la réaction en chaîne. Les règles d'exploitation demandent de réaliser un contrôle de la concentration en bore.

L'acide borique  $H_3BO_3$  est un monoacide faible :



### IV.A – Titration pH-métrique

En présence de D-mannitol (noté M), l'ion  $B(OH)_4^-$  donne un ion noté  $C^-$ . La dissociation de  $H_3BO_3$  avec le D-mannitol s'écrit :



La constante thermodynamique d'équilibre de la réaction IV.2 est  $K_2 = 10^5$ .

**Q 27.** Calculer la constante d'équilibre  $K$  de la réaction de formation de  $C_{(aq)}^-$ , avec un coefficient stœchiométrique unité, à partir de l'acide borique et du D-mannitol aqueux à  $25^\circ C$ . Commenter le résultat.

Le mélange  $H_3BO_{3(aq)} + 2 M_{(aq)}$  joue le rôle d'un acide faible au sens de Bronsted. On définit la constante d'acidité apparente de l'acide borique par  $K_{a,app} = \frac{a_{C^-} a_{H_3O^+}}{a_{H_3BO_3}}$  où interviennent les activités des espèces dissoutes.

**Q 28.** Exprimer  $pK_{a,app}$  en fonction de  $pK = -\log K$ ,  $[M_{(aq)}]$  et de la concentration standard  $c^\circ$ .

On étudie le dosage de l'acide borique par une solution d'hydroxyde de sodium.

On prépare 10 mL d'une solution d'acide borique de concentration  $C_0$  ; on ajoute  $x$  grammes de D-mannitol en s'assurant de respecter la condition  $[M_{(aq)}] \gg [H_3BO_{3(aq)}]$  ; on complète à 200 mL avec de l'eau distillée. On ajoute un barreau aimanté afin d'agiter le mélange.

On dispose dans la burette d'une solution d'hydroxyde de sodium à la concentration  $C_B = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . On appelle  $V_B$  le volume de la solution d'hydroxyde de sodium versé au cours du dosage.

On réalise trois dosages à  $25^\circ C$  avec des valeurs différentes de  $x$ , l'une d'elles correspondant au cas  $x = 0$  (absence de D-mannitol). Les trois courbes (a), (b) et (c) correspondantes, obtenues suite à une étude expérimentale, figurent sur le graphe de la figure 8.

**Q 29.** Déterminer  $C_0$  ainsi que les valeurs de  $x$  notées respectivement  $x_a$ ,  $x_b$  et  $x_c$  ayant conduit à chacune des courbes (a), (b) et (c).

### IV.B – Titration conductimétrique

On s'intéresse à présent au principe d'une autre technique de titrage, conductimétrique.

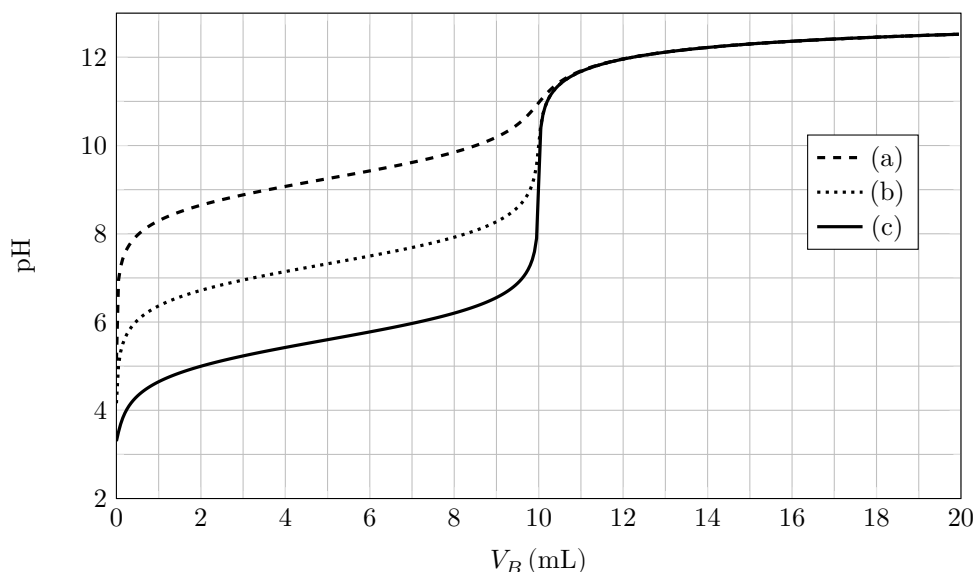
On prépare 10 mL d'une solution d'acide borique de concentration  $C'_0$  ; on la complète avec de l'eau distillée jusqu'à atteindre un volume  $V_A = 40 \text{ mL}$  où la concentration en acide borique est notée  $C_A$ . On ajoute un barreau aimanté.

Dans la burette, on dispose d'une solution titrante d'hydroxyde de sodium à la concentration  $C_B = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . On appelle  $V_B$  le volume de cette solution titrante versé au cours du dosage à  $25^\circ C$ .

On utilise un conductimètre pour suivre l'évolution de la conductivité  $\sigma$  de la solution titrée en fonction du volume  $V_B$ .

**Q 30.** Déterminer la loi de conductivité  $\sigma$  en fonction notamment du volume  $V_B$  de solution titrante versé avant et après l'équivalence.

**Q 31.** Représenter, justifications à l'appui, l'allure de  $(V_A + V_B)\sigma$  en fonction de  $V_B$  en y repérant le volume réel versé  $V_{B,eq}$  à l'équivalence. Conclure sur la possibilité de titrer ainsi le bore en solution.



**Figure 8** Courbe de titrage pH-métrique de l'acide borique, avec ou sans D-mannitol, par l'hydroxyde de sodium.

## V Étude de la contamination des circuits par les produits d'activation

Un flux de neutrons peut activer des atomes qui produisent alors un rayonnement. Les tubes des générateurs de vapeur sont constitués d'Inconel (alliage à base de nickel et de chrome). La composition massique de l'alliage 690 est : 58 % de Ni, 31 % de Cr et 11 % de Fe. Les alliages à base de nickel jouent un rôle important dans la construction des matériaux utilisés pour le circuit primaire. De nombreuses études (Palmer, Tremaine et Leblanc, etc.) ont été menées sur la solubilité des oxydes métalliques (Ni, Fe, Cr, Co). On étudie par la suite l'oxyde de nickel  $\text{NiO}_{(s)}$ .

### V.A – Préliminaire

**Q 32.** Représenter un diagramme de prédominance ou d'existence en fonction du pH relatif aux espèces  $\text{NiO}_{(s)}$ ,  $\text{Ni}^{2+}_{(aq)}$  à une température de 300 °C. On prendra une concentration de frontière  $C'_{fr} = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

**Q 33.** Expliquer l'origine de l'irradiation possible des intervenants lors des opérations de maintenance dans le circuit primaire et la préconisation du choix d'un pH supérieur à 3 dans l'eau du circuit primaire à une température de 300 °C.

### V.B – Modèle de Palmer

On considère les espèces  $\text{NiO}_{(s)}$ ,  $\text{Ni}^{2+}_{(aq)}$  et  $\text{Ni(OH)}_{2(aq)}$ . On note  $s$  la solubilité de l'oxyde de nickel définie par  $s = [\text{Ni}^{2+}_{(aq)}] + [\text{Ni(OH)}_{2(aq)}]$ .

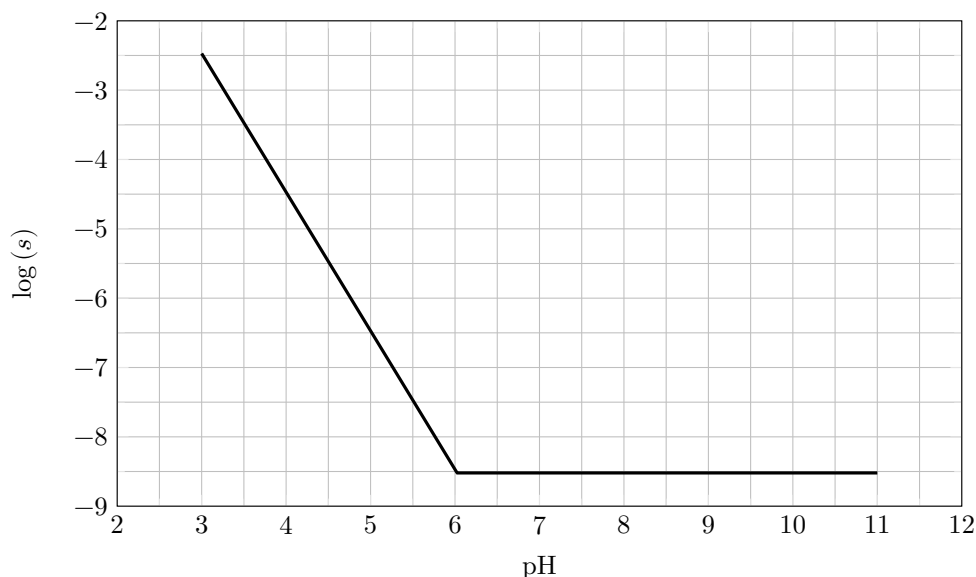
**Q 34.** Représenter un diagramme de prédominance en fonction du pH relatif cette fois-ci aux espèces  $\text{Ni}^{2+}_{(aq)}$  et  $\text{Ni(OH)}_{2(aq)}$  à la température de 300 °C.

**Q 35.** Retrouver par le calcul les équations de droite du diagramme simplifié de la figure 9 représentant  $\log(s)$  en fonction du pH pour un pH compris entre 3 et 11.

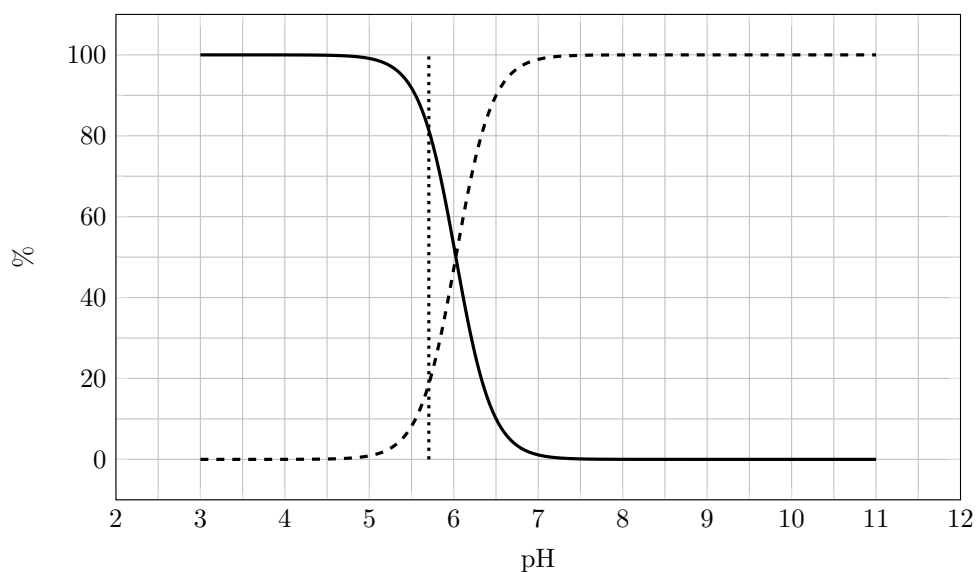
**Q 36.** Compléter le programme Python du document réponse 2 permettant d'obtenir le tracé du diagramme de distribution donnant en pourcentages  $\frac{[\text{Ni}^{2+}_{(aq)}]}{[\text{Ni(OH)}_{2(aq)}] + [\text{Ni}^{2+}_{(aq)}]}$  et  $\frac{[\text{Ni(OH)}_{2(aq)}]}{[\text{Ni(OH)}_{2(aq)}] + [\text{Ni}^{2+}_{(aq)}]}$  en fonction du pH à la température de 300 °C. Le programme doit également représenter sur le même graphique une droite verticale correspondant au pH de l'eau neutre à 300 °C.

Le tracé obtenu est similaire à celui de la figure 10 réalisé dans les mêmes conditions d'étude.





**Figure 9** Diagramme de solubilité de l'espèce  $\text{NiO}_{(s)}$  en fonction du pH à 300 °C.



**Figure 10** Diagramme de distribution à 300 °C.

### V.C – Modèle de Tremaine et Leblanc

Les mesures de Tremaine et Leblanc montrent que la dissolution de l'oxyde de nickel atteint un palier minimum à 300 °C entre les pH 7 et 8 avant d'augmenter à nouveau. L'espèce  $\text{Ni}(\text{OH})_{3(aq)}^-$  est postulée pour justifier cette augmentation de la solubilité au-delà de pH = 8.

On appelle  $K_{s3}$  la constante thermodynamique d'équilibre de la réaction :  $\text{NiO}_{(s)} + 3\text{H}_2\text{O} = \text{Ni}(\text{OH})_{3(aq)}^- + \text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+$ . Pour  $T = 300\text{ °C}$ , on a  $K_{s3} = 1,699 \times 10^{-18}$ .

**Q 37.** Représenter un diagramme de prédominance en fonction du pH relatif aux espèces  $\text{Ni}^{2+}_{(aq)}$ ,  $\text{Ni}(\text{OH})_{2(aq)}$  et  $\text{Ni}(\text{OH})_{3(aq)}^-$  à la température de 300 °C.

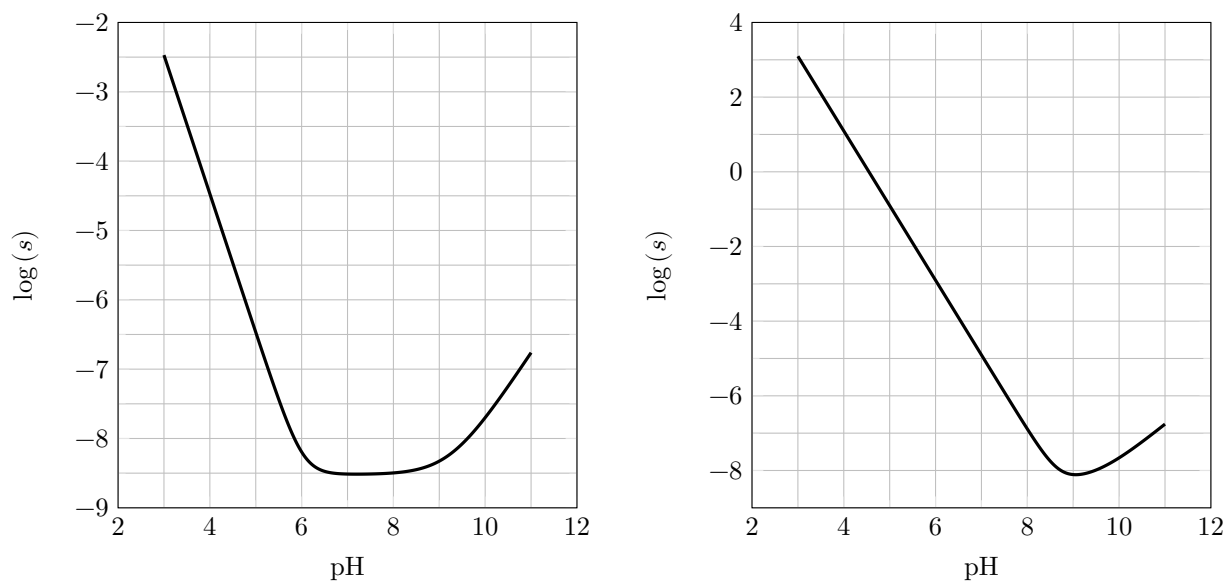
La solubilité de l'oxyde de nickel est cette fois-ci définie par  $s = [\text{Ni}^{2+}_{(aq)}] + [\text{Ni}(\text{OH})_{2(aq)}] + [\text{Ni}(\text{OH})_{3(aq)}^-]$ .

Le diagramme de solubilité de l'oxyde de nickel est représenté sur la figure 11 pour deux températures différentes.

**Q 38.** Déterminer par le calcul les valeurs de pH où la solubilité est minimale pour les températures de 300 °C et 90 °C. On négligera les variations de  $K_{s3}$  avec la température.

Lors d'un arrêt à froid, la pression du circuit primaire peut descendre jusqu'à 31 bar et la température jusqu'à 90 °C.

**Q 39.** Expliquer pourquoi il est essentiel de bien choisir le pH lors du fonctionnement en puissance du circuit primaire. Préciser une valeur optimale du pH relativement au nickel. Citer le(s) risque(s) encouru(s) par le personnel lors des opérations de maintenance si le pH n'est pas modifié lors de l'arrêt à froid.



**Figure 11** Diagramme de solubilité de l'espèce NiO(s) en fonction du pH pour deux températures : 300 °C et 90 °C.

# Formulaire et données

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Variation d'entropie d'une phase condensée incompressible de capacité thermique  $C$  entre un état 1 et un état 2 :

$$\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Coordonnées du point critique de l'eau :  $T_C = 374 \text{ °C}$ ,  $p_C = 221 \text{ bar}$ .

Formule trigonométrique :  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [-\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

Moment du couple subi par un dipôle magnétique en champ magnétique uniforme :  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ .

Loi de Kohlrausch :  $\sigma = \sum_i \lambda_i C_i$ , avec  $\sigma$  la conductivité de la solution et  $\lambda_i$  la conductivité molaire ionique de l'ion d'indice  $i$  de concentration  $C_i$ .

Tableau de conductivités molaires ioniques à 25 °C :

| Ion                                                    | H <sub>3</sub> O <sup>+</sup> | Na <sup>+</sup> | OH <sup>-</sup> | B(OH) <sub>4</sub> <sup>-</sup> |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------|---------------------------------|
| $\lambda_i$<br>(mS·m <sup>2</sup> ·mol <sup>-1</sup> ) | 35,0                          | 5,01            | 19,8            | 6,70                            |

Produit ionique de l'eau à plusieurs températures :

| Température<br>(°C) | 25    | 90    | 300   |
|---------------------|-------|-------|-------|
| pK <sub>e</sub>     | 14,00 | 12,44 | 11,41 |

Équations de réaction et lois d'évolution de leur pK avec la température  $T$  en kelvins :

|                                                                                                        |                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\text{NiO}_{(s)} + 2 \text{H}_3\text{O}^+_{(aq)} = \text{Ni}^{2+}_{(aq)} + 3 \text{H}_2\text{O}$      | $\text{pK}_4 = 6,093 - \frac{5513,46}{T}$             |
| $\text{Ni}^{2+}_{(aq)} + 4 \text{H}_2\text{O} = \text{Ni(OH)}_{2(aq)} + 2 \text{H}_3\text{O}^+_{(aq)}$ | $\text{pK}_5 = -6,09 + \frac{7282,7}{T} + 0,009476 T$ |

Autres données numériques :

| Grandeur                         | Notation           | Valeur | Unité                                |
|----------------------------------|--------------------|--------|--------------------------------------|
| Masse molaire de l'acide borique | $M_{\text{HBO}_3}$ | 61,84  | g·mol <sup>-1</sup>                  |
| Masse molaire du D-mannitol      | $M_{\text{D}}$     | 182,17 | g·mol <sup>-1</sup>                  |
| Constante des gaz parfaits       | $R$                | 8,314  | J·K <sup>-1</sup> ·mol <sup>-1</sup> |
| Concentration standard           | $c^\circ$          | 1      | mol·L <sup>-1</sup>                  |

• • • FIN • • •



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Numéro de place

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

Numéro d'inscription

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

Signature

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Nom

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Prénom

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Épreuve : Physique-Chimie 1 PSI

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Document réponse

DOCUMENT RÉPONSE 1

DOCUMENT RÉPONSE 1

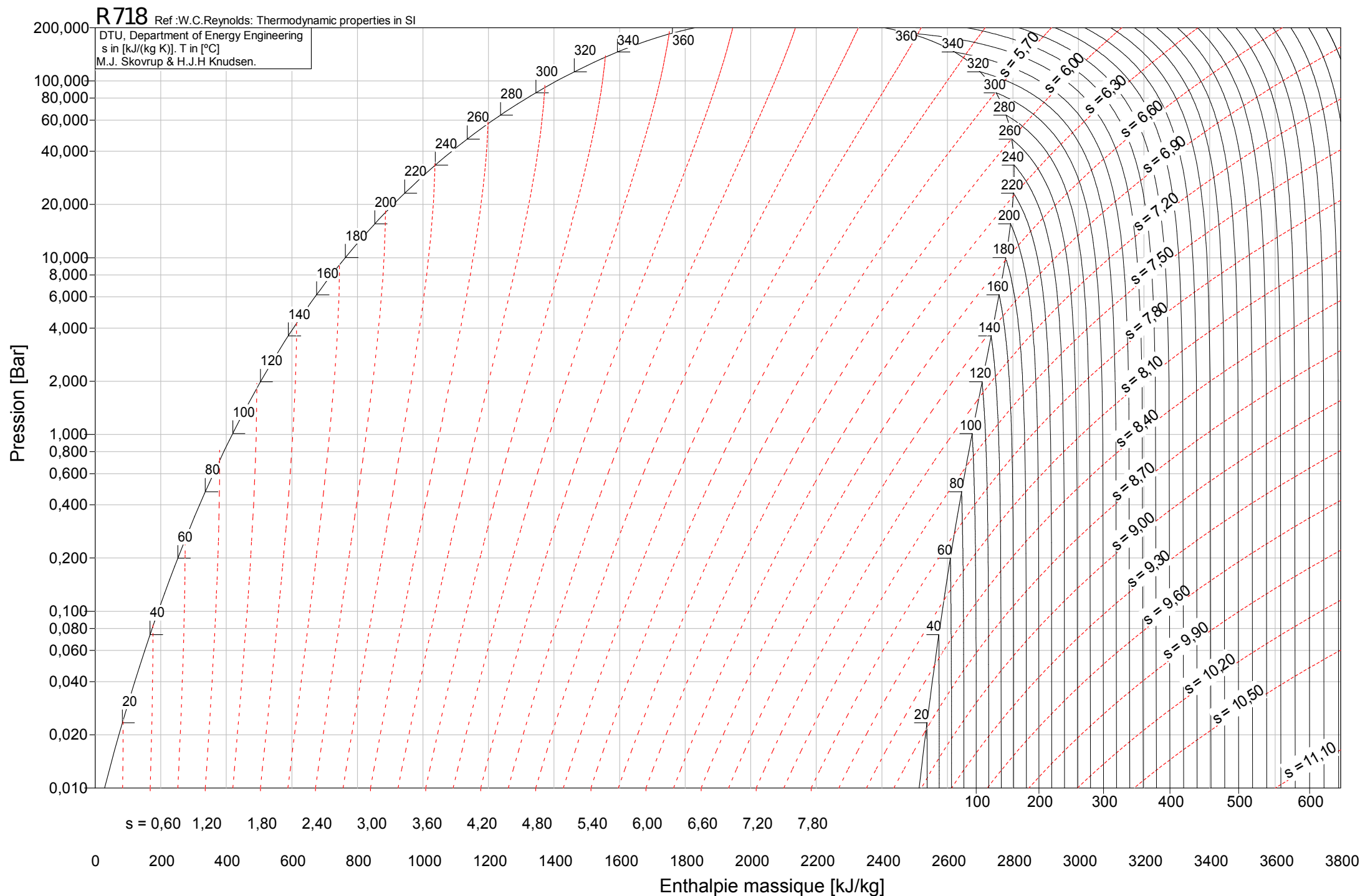


Diagramme des frigorisistes.

La pression est exprimée en bar, l'entropie massique en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , l'enthalpie massique en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et la température en  $^{\circ}\text{C}$ .

Ne rien écrire

dans la partie barrée

P053-DR/2024-04-08 10:29:23

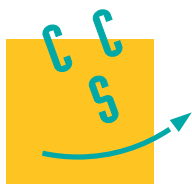
## DOCUMENT RÉPONSE 2

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Fonctions de calcul des constantes d'équilibre K4 et K5 associées respectivement à pK4 et pK5
5  def K4(T): # Température T en kelvins
6      return 
7
8  def K5(T): # Température T en kelvins
9      return 
10
11 # Température en kelvins
12 T = 
13
14 # Valeur du pH de l'eau neutre à la température T
15 pHen = 
16
17 N = 1000 # Nombre de points
18 pHmin = 3 # pH de départ pour la représentation
19 pHmax = 11 # pH de fin pour la représentation
20 pas = (pHmax-pHmin)/(N-1) # Pas entre deux valeurs successives du pH
21
22 pH = np.zeros(N) # Tableau de N valeurs nulles
23 y1 = np.zeros(N)
24 y2 = np.zeros(N)
25
26 for i in range(N):
27     pH[i] = pHmin+i*pas # Valeur du pH pour le point d'indice i
28     h = 10**(-pH[i]) # Valeur de h=[H3O+]/c°
29     # Part y1 = [Ni2+]/([Ni(OH)2]+[Ni2+])
30     y1[i] = 
31     # Part y2 = [Ni(OH)2]/([Ni(OH)2]+[Ni2+])
32     y2[i] = 
33
34 # Réalisation du tracé en fonction du pH
35 # avec une ordonnée en pourcentage (valeurs comprises entre 0 et 100)
36 plt.figure()
37 plt.plot(, ) # Courbe relative à [Ni2+]/([Ni(OH)2]+[Ni2+])
38 plt.plot(, linestyle='--') # Courbe relative à [Ni(OH)2]/([Ni(OH)2]+[Ni2+])
39 plt.plot([pHen, pHen], [0, 100], linestyle=':') # Courbe relative au pH de l'eau neutre
40 plt.xlabel('pH')
41 plt.ylabel('%')
42 plt.grid() # Affichage de la grille
43 plt.show()

```





## Utilisation des batteries Li-ion

Ce sujet aborde quelques éléments liés à l'utilisation des batteries lithium-ion. À partir d'une première étude chimique et thermodynamique sur un accumulateur en fonctionnement, on s'intéresse à la diffusion thermique dans une batterie composée d'un ensemble d'accumulateurs. Enfin, une dernière partie aborde l'utilisation de panneaux solaires comme source d'énergie. Les trois parties sont largement indépendantes.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Un formulaire et certaines valeurs numériques sont regroupés en fin d'énoncé.

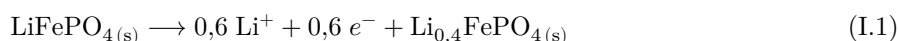
### I Étude d'un accumulateur Li-ion



Figure 1 Accumulateur Li-ion de type 18650

#### I.A – Accumulateur lithium fer phosphate

Les batteries Li-ion  $\text{LiFePO}_4/\text{C}$  ont une densité d'énergie quatre fois supérieure à celle des batteries au plomb. Elles sont actuellement utilisées dans les voitures électriques et les smartphones. Un accumulateur est constitué d'une électrode en lithium fer phosphate ( $\text{LiFePO}_4$ ) et d'une électrode de graphite ( $\text{C}$ ). En fonctionnement, l'électrode  $\text{LiFePO}_4$  ne peut pas être complètement dé-lithiée et la quantité de matière en ions  $\text{Li}^+$  effectivement extraite est de seulement 0,6 mol. On considère que les deux demi-équations suivantes modélisent les réactions qui se déroulent aux électrodes :



- Q 1. Identifier, en justifiant, la réaction se déroulant à l'anode et celle à la cathode.
- Q 2. Écrire l'équation bilan de la pile en fonctionnement.
- Q 3. En utilisant une approche électrochimique, proposer une estimation de la masse d'un accumulateur 18650 de capacité spécifique 2600 mA·h.
- Q 4. La masse d'un tel accumulateur est mesurée à  $m = 45,5$  g. Proposer une explication de la différence avec la masse obtenue à la question précédente.

#### I.B – Courbe galvanostatique

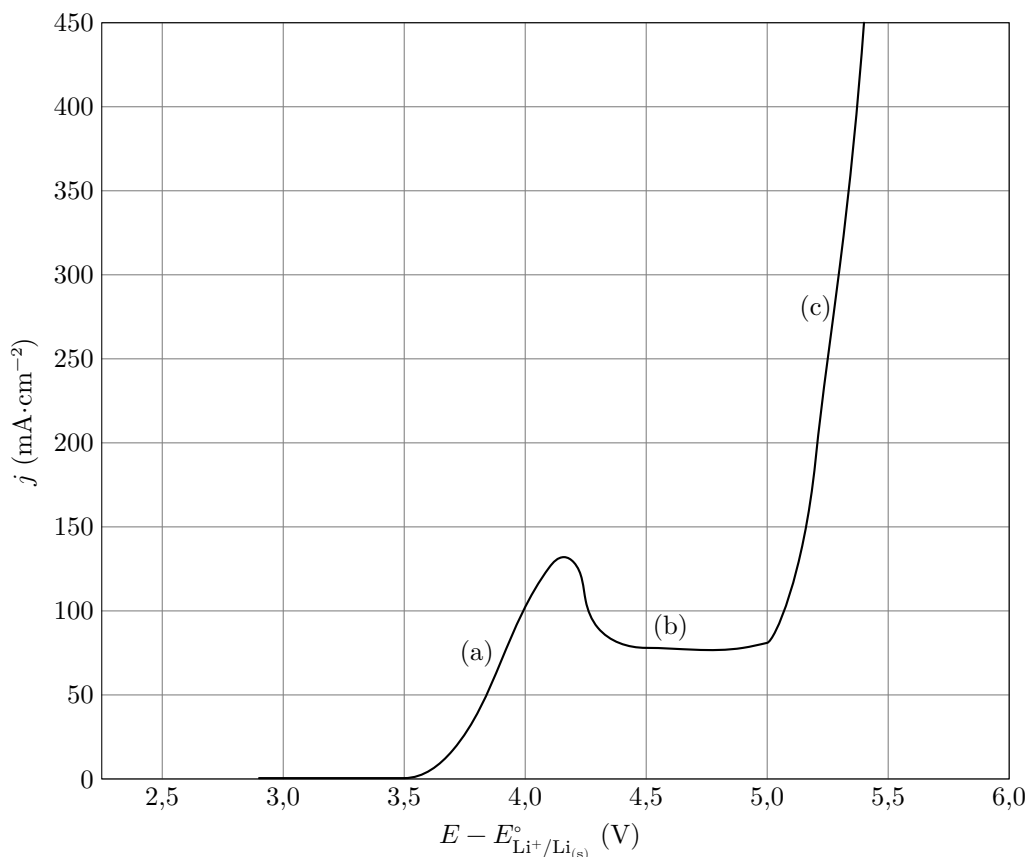
Des courbes densité de courant-potentiel, comme celle simplifiée proposée en figure 2, permettent de mieux connaître les limites de l'électrode employée. Le solvant utilisé est l'éthyl-propyl-carbonate (EPC) dont le domaine d'inertie électrochimique est compris entre les potentiels  $E_{\text{EPC},1} = -3,0$  V et  $E_{\text{EPC},2} = 2,1$  V. Par convention, l'abscisse des courbes densité de courant-potentiel utilisant le lithium est le potentiel évalué par rapport au potentiel standard du couple  $\text{Li}^+/\text{Li}_{(\text{s})}$ .

- Q 5. Décrire le montage à trois électrodes permettant de tracer une courbe courant-potentiel.
- Q 6. Attribuer à la portion (a) de la courbe la demi-équation d'oxydoréduction susceptible de se produire en s'appuyant notamment sur les données numériques.

La diminution de courant sur la portion (b) est attribuée à un phénomène de passivation à la surface de l'électrode accompagné d'une transition de phase.

- Q 7. Proposer une explication de l'augmentation brutale de la densité de courant sur la portion (c) de la courbe.





**Figure 2** Courbe densité de courant-potential simplifiée d'une électrode de  $\text{LiFePO}_{4(s)}$ , le solvant utilisé est l'éthyl-propyl-carbonate (EPC) contenant des ions  $\text{Li}^+$  à  $1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$

**Q 8.** Tracer l'allure de la branche de réduction du couple  $\text{Li}^+/\text{LiC}_{6(s)}$  pour une électrode en graphite plongeant dans de l'EPC avec une concentration en ions  $\text{Li}^+$  de  $C_0 = 4,0 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . On supposera que le couple considéré correspond à un système rapide. Justifier l'intérêt d'utiliser des concentrations élevées.

### I.C – Échauffement d'un accumulateur

#### I.C.1) Thermodynamique physique

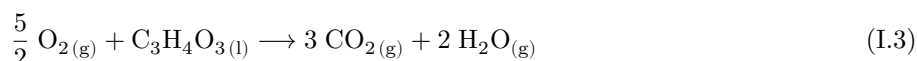
Depuis l'utilisation de ces batteries Li-ion, plusieurs cas d'explosion ont été recensés que ce soit pour les téléphones portables, les ordinateurs ou encore les véhicules. Des courts-circuits au sein de l'accumulateur ont souvent été incriminés. En 2011, des chercheurs Taïwanais ont montré que lorsque la température dépasse  $100^\circ\text{C}$ , les accumulateurs Li-ion peuvent exploser et induire localement une élévation de température de  $900^\circ\text{C}$ .

**Q 9.** Estimer le temps de décharge d'une batterie Li-ion mise en court-circuit dont la résistance interne est  $r = 7,7 \text{ m}\Omega$ , la tension à vide  $U = 3,7 \text{ V}$  et la capacité spécifique  $2600 \text{ mA}\cdot\text{h}$ .

**Q 10.** Déterminer s'il est possible qu'un court-circuit puisse être responsable d'une telle élévation de température.

#### I.C.2) Influence de l'électrolyte

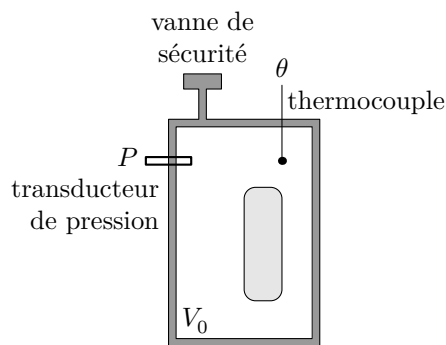
Ces chercheurs ont constaté que l'explosion d'une batterie Li-ion peut survenir même pour un accumulateur déchargé. Parmi les réactions intervenant dans les explosions de batteries Li-ion, la combustion de l'acide pyruvique ( $\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_3(l)$ ), utilisé comme électrolyte, joue un rôle important dans l'élévation de température. Sa réaction de combustion est modélisée par l'équation



**Q 11.** Justifier que l'enthalpie standard de formation de  $\text{O}_{2(g)}$  est nulle.

**Q 12.** Déterminer l'enthalpie standard de réaction à  $298 \text{ K}$ . Commenter son signe.

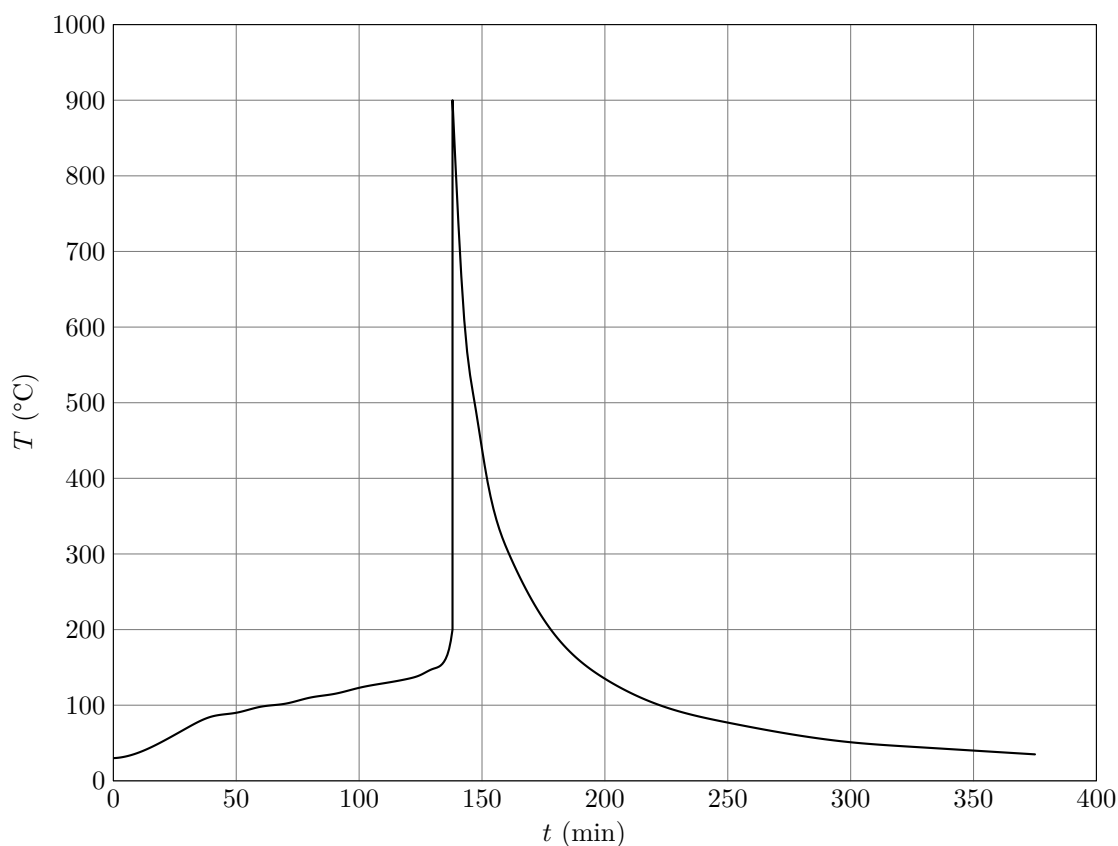
Afin d'évaluer les risques lors d'une surchauffe d'une batterie Li-ion, un accumulateur de type 18650 initialement à la température  $T_i = 298 \text{ K}$  sous une pression  $P_i = 1,0 \text{ bar}$  est placé dans un calorimètre en acier fermé hermétiquement de volume  $V_0 = 150 \text{ mL}$  (figure 3). Le système est équipé d'une mesure en temps réel de la température et de la pression malgré l'explosion. Cette batterie est chauffée progressivement jusqu'à  $\theta_0 = 129^\circ\text{C}$ , température à partir de laquelle l'explosion de la batterie commence. Dans toute l'étude, on suppose que la capacité thermique du calorimètre est négligeable et que le volume occupé par la batterie est négligeable devant l'espace libre disponible. En outre, on considère les gaz comme parfaits.



**Figure 3** Vent Sizing Package 2 (VSP2™), calorimètre adiabatique à faible inertie thermique, d'après <https://www.fauske.com>

**Q 13.** Déterminer, compte tenu de l'évolution de la température observée (figure 4), si le calorimètre est parfaitement calorifugé.

**Q 14.** En estimant le temps caractéristique de retour à la température ambiante, justifier que la transformation du contenu du calorimètre liée à l'explosion peut être assimilée à une transformation adiabatique.



**Figure 4** Profil de température d'une batterie chauffée dans un calorimètre, d'après Can-Yong Jhu *et al*, Journal of Hazardous Materials, 2011

On suppose notamment que

- la contribution des gaz enfermés dans l'enceinte est négligeable en termes de bilan thermique ;
- l'énergie libérée lors de l'explosion correspond en bonne approximation à l'échange thermique isotherme à pression constante associé à la réaction (I.3) ;
- le dioxygène nécessaire à la réaction (I.3) est fourni en quantité juste suffisante par une décomposition interne de l'accumulateur.

**Q 15.** En utilisant la figure 4, estimer la quantité de matière d'acide pyruvique mise en jeu lors de l'explosion.

**Q 16.** Déterminer la quantité de matière d'acide pyruvique  $n_{\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_3, \text{lim}}$  conduisant à la pression  $p_{\text{lim}} = 75 \text{ bar}$  dans le calorimètre.

**Q 17.** Sachant que le calorimètre utilisé peut résister à une pression de 75 bar, conclure quant à l'intérêt d'un des éléments constitutifs du calorimètre schématisé sur la figure 3.

### I.D – Emballlement thermique

On suppose que la réaction de combustion de l'électrolyte (I.3) suit une loi de vitesse d'ordre 1 par rapport à l'acide pyruvique  $C_3H_4O_3$ . On considère que les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques dans un volume  $V$  constant. On note  $\alpha_{\text{diss}}(t)$  le taux d'avancement de la réaction comme rapport de la quantité de matière en acide pyruvique consommé par la quantité de matière initiale, notée  $n_0$ .

**Q 18.** Exprimer la loi de vitesse donnant la vitesse de disparition de l'acide pyruvique en fonction de  $\alpha_{\text{diss}}(t)$ ,  $n_0$ ,  $V$  et la constante de vitesse  $k$ .

**Q 19.** Rappeler la loi d'Arrhénius. Préciser l'influence de la température sur la vitesse de réaction.

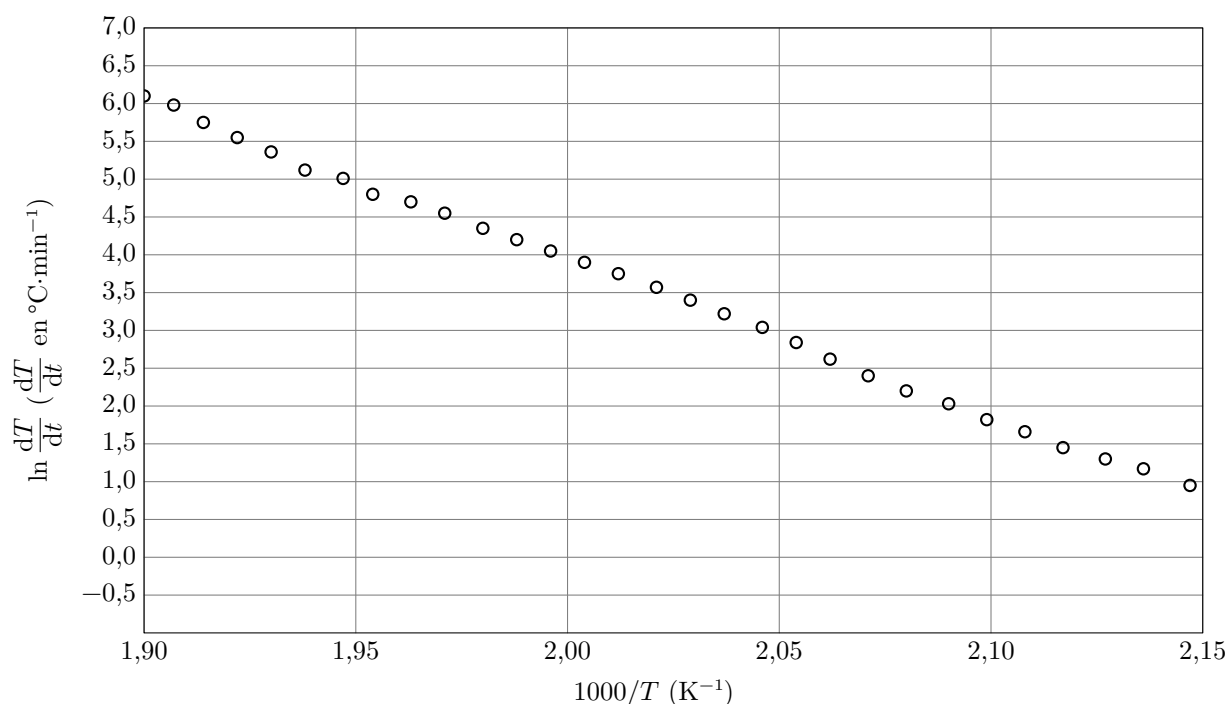
**Q 20.** On considère une batterie de capacité thermique  $C$ , siège de la réaction (I.3) de combustion de l'électrolyte. On décompose la transformation adiabatique entre  $t$  et  $t+dt$  en une transformation chimique à température et pression constantes puis un échauffement isobare de la batterie. Exprimer la variation d'enthalpie lors de ces deux transformations infinitésimales. Montrer que l'évolution de température vérifie :

$$\frac{dT}{dt} = \beta(1 - \alpha_{\text{diss}}) \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

où  $\beta$  est une constante positive à exprimer en fonction des constantes et données du problème.

**Q 21.** Au regard de l'équation différentielle ci-dessus, justifier le terme d'*emballement thermique* lorsque l'avancement de la réaction est faible ( $\alpha_{\text{diss}} \ll 1$ ).

Le dispositif expérimental décrit figure 3 permet de relever la température en fonction du temps notamment pour  $\alpha_{\text{diss}}(t) \ll 1$ . La figure 5 donne une représentation de  $\ln \frac{dT}{dt}$  en fonction de  $\frac{1}{T}$ .



**Figure 5** Tracé de  $\ln(dT/dt)$  en fonction de  $1000/T$  pour une batterie Li-ion déchargée pendant son explosion, d'après Can-Yong Jhu *et al*, Journal of Hazardous Materials, 2011

**Q 22.** En supposant que le modèle isobare reste valide, calculer l'énergie d'activation à l'aide de la courbe de la figure 5.

## II Contrôle thermique d'un ensemble d'éléments

Une batterie d'une voiture électrique est composée d'environ 2000 éléments et représente une part non négligeable du prix du véhicule. Le contrôle de la température a pour but d'optimiser les performances de la batterie, tout en limitant son vieillissement. Un système de gestion thermique de batterie idéal permet :

- d'éviter à la batterie de subir des températures extrêmes (inférieures à  $-30^\circ\text{C}$  et au-delà de  $40^\circ\text{C}$ ) ;
- de minimiser l'écart de température entre les accumulateurs à  $10^\circ\text{C}$  ;
- de conserver une température moyenne dans le pack aux alentours de  $25$  à  $30^\circ\text{C}$ .

Le premier point permet d'éviter la dégradation de la batterie et de ses performances. L'uniformisation de la température des cellules accorde tous les accumulateurs au même niveau de performance pendant toute la durée de vie de la batterie. Enfin, la gamme de température moyenne proposée permet d'associer des performances optimales vis-à-vis du fonctionnement de la batterie et de sa durée de vie.

## II.A – Diffusion thermique

On considère un ensemble d'accumulateurs Li-ion en série formant un bloc cylindrique homogène de rayon  $a$  et de longueur  $2L = 1,00$  m. Le tout est plongé dans l'air considéré comme un thermostat à la température  $T_{\text{ext}}$ . On suppose le gradient radial de température suffisamment faible pour que, dans la section droite d'abscisse  $x$ , la température  $T(x, t)$  soit uniforme. On note  $\mu$  la masse volumique de l'accumulateur cylindrique,  $c$  sa capacité thermique massique et  $\lambda$  sa conductivité thermique ; ces trois grandeurs sont constantes et uniformes.

En fonctionnement en régime permanent, chaque accumulateur dégage une puissance par unité de volume  $p_J$ , uniforme et constante, notamment en raison de l'effet Joule. On note  $h_{cc}$  le coefficient conducto-convectif à travers la surface latérale de sorte que la loi de Newton pour l'interface accumulateur-fluide s'écrit

$$\vec{j} = h_{cc}(T(x, t) - T_{\text{ext}})\vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire local, normal à la surface latérale, orienté vers le fluide.

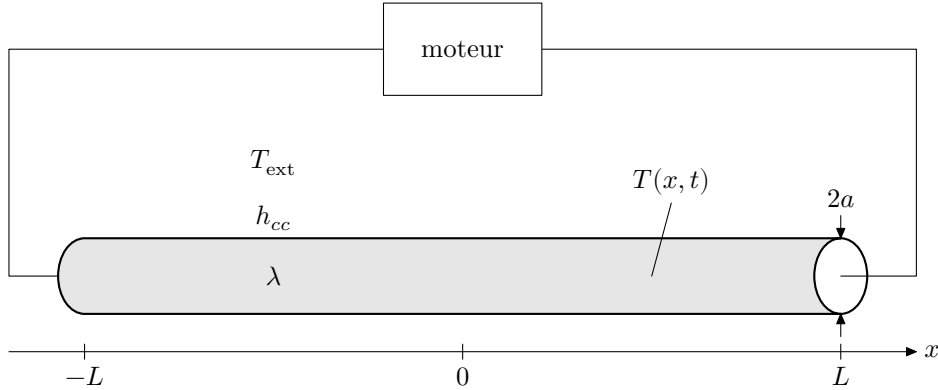


Figure 6 Notations

**Q 23.** À partir d'un bilan d'énergie sur un système judicieusement choisi, montrer que le champ de température vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2h_{cc}}{a}(T_{\text{ext}} - T(x, t)) + p_J.$$

**Q 24.** Simplifier l'équation précédente en régime stationnaire, en faisant apparaître les grandeurs  $H = \sqrt{\frac{a\lambda}{2h_{cc}}}$

et  $T_l = T_{\text{ext}} + \frac{p_J a}{2h_{cc}}$ .

**Q 25.** Préciser la signification physique de la grandeur  $H$ .

**Q 26.** On admet que  $T(x = \pm L) = T_{\text{ext}}$ . En déduire que le profil de température peut se mettre sous la forme

$$T(x) = A \cosh\left(\frac{x}{H}\right) + B$$

où  $A$  et  $B$  seront des constantes exprimées en fonction de  $H$ ,  $L$ ,  $T_{\text{ext}}$  et  $T_l$ .

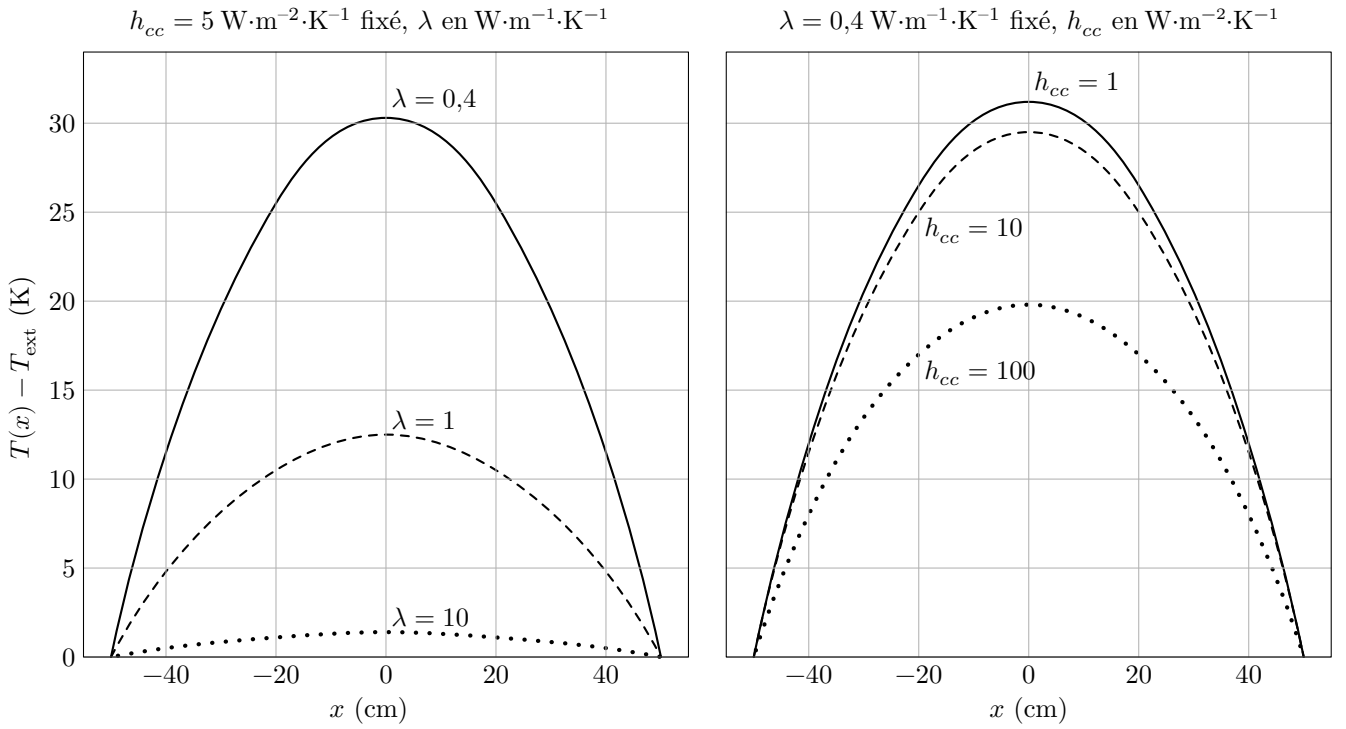
**Q 27.** Ce modèle a permis de construire les représentations graphiques présentées figure 7. Commenter qualitativement ces simulations au regard des expressions de  $H$  et  $T_l$ . Parmi les valeurs proposées pour les paramètres  $\lambda$  et  $h_{cc}$  de ces simulations, préciser lesquelles permettraient de contribuer à une bonne gestion thermique de la batterie.

## II.B – Étude sur banc d'essai

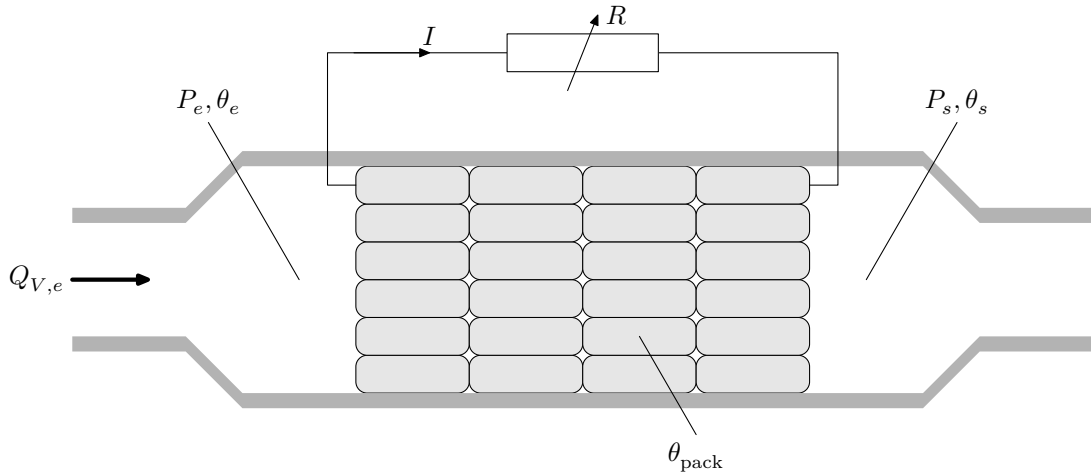
Afin d'assurer le bon fonctionnement d'une batterie, la température des différents éléments peut être contrôlée grâce à un flux d'air circulant autour des éléments. Afin d'évaluer les échanges thermiques avec l'air, un ensemble de  $N = 144$  accumulateurs de type 18650 (de diamètre  $d = 18$  mm) sont superposés les uns aux autres et placés dans un caisson ventilé et calorifugé, de section parfaitement adaptée à la dimension du pack (figure 8). L'écoulement de l'air, supposé stationnaire et incompressible, est assuré par un ventilateur imposant un débit volumique en entrée de  $Q_{V,e} = 80 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Des instruments de mesure permettent d'évaluer la température de l'air à l'entrée du caisson ( $\theta_e = 20,0$  °C) ainsi qu'à sa sortie ( $\theta_s = 25,5$  °C).

**Q 28.** Les différents accumulateurs sont placés côté à côté selon un agencement  $6 \times 6 \times 4$  (figures 8 et 9). Exprimer puis calculer  $d_{\text{écoulement}}$ , la distance caractéristique de l'écoulement entre les éléments.

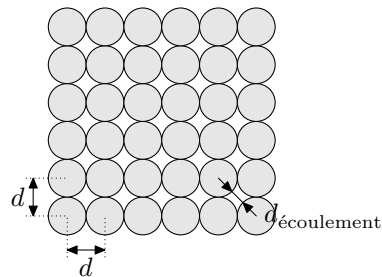
**Q 29.** Estimer la vitesse de l'écoulement entre les accumulateurs, en supposant l'écoulement parfait.



**Figure 7** Profils de température pour une même puissance volumique  $p_J$ , à coefficient  $h_{cc}$  fixé ou à  $\lambda$  fixé



**Figure 8** Banc d'essai de contrôle de la température au sein d'un ensemble d'accumulateurs, inspiré des travaux de Charles-Victor Hémary, Études des phénomènes thermiques dans les batteries Li-ion, Université de Grenoble, 2013



**Figure 9** Disposition des accumulateurs dans l'écoulement

**Q 30.** Estimer le nombre de Reynolds pour l'écoulement entre les accumulateurs. Conclure sur le régime de l'écoulement.

**Q 31.** Démontrer, à l'aide d'un bilan d'énergie sur un système judicieusement choisi et en explicitant toute hypothèse éventuellement utile, l'équation

$$\mathcal{P} = D_m(h_s - h_e)$$

où  $h_s$  et  $h_e$  sont les enthalpies massiques de l'air respectivement en sortie et en entrée du caisson,  $\mathcal{P}$  est la puissance thermique échangée entre l'ensemble des accumulateurs et le fluide et  $D_m$  le débit massique d'air.

**Q 32.** Déterminer l'expression de la puissance échangée entre l'ensemble des accumulateurs et l'air supposé se comporter comme un gaz parfait, puis calculer sa valeur numérique à partir des mesures de températures  $\theta_e$  et  $\theta_s$ .

**Q 33.** En fonctionnement, la température du pack est mesurée à  $\theta_{\text{pack}} = 30,0^\circ\text{C}$  et est supposée uniforme sur l'ensemble du pack. On note  $\bar{\theta} = (\theta_e + \theta_s)/2$ , la température moyenne de l'air circulant autour du pack. Estimer la valeur du coefficient conducto-convectif  $h_{cc}$ .

**Q 34.** Les manomètres mesurent une chute de pression  $\Delta P = 10 \text{ mbar}$  de part et d'autre des accumulateurs. Expliquer l'origine de cette variation de pression.

**Q 35.** Exprimer puis calculer la puissance électrique consommée par le ventilateur en considérant que le rendement électromécanique du ventilateur vaut 60 %. Commenter ce résultat.

### III Utilisation de panneaux solaires

#### III.A – Puissance nécessaire pour une voiture

**Q 36.** On considère le véhicule présenté figure 10 roulant sur un sol horizontal. En admettant que les frottements de l'air sont prépondérants devant toute autre forme de dissipation d'énergie et à l'aide des figures 11 et 12, proposer une estimation de la vitesse maximale que peut atteindre ce véhicule, sans tenir compte de la présence de tout dispositif de stockage d'énergie.



**Figure 10** La société néerlandaise Lightyear propose une berline équipée de  $5 \text{ m}^2$  de panneaux solaires qui mesure 5,05 m de longueur, 1,82 m de largeur et 1,40 m de hauteur et possède un coefficient de traînée  $C_x = 0,23$

Les cellules solaires en tandem qui associent le silicium à une pérovskite aux halogénures métalliques constituent une voie prometteuse pour dépasser la limite d'efficacité des cellules individuelles. Nous décrivons un tandem pérovskite/silicium monolithique avec un rendement de conversion de puissance certifié de 29,15 %. L'absorbeur de pérovskite, avec une bande interdite de 1,68 eV, est resté stable en phase sous illumination grâce à une combinaison d'extraction rapide des trous et de recombinaison non radiative minimisée à l'interface sélective des trous. Ces caractéristiques ont été rendues possibles par une monocouche de carbazole à substitution méthyle auto-assemblée comme couche sélective de trous dans la cellule de pérovskite. L'extraction accélérée des trous était liée à un faible facteur d'idéalité de 1,26 et à des facteurs de remplissage à jonction unique allant jusqu'à 84 %, tout en permettant une tension en circuit ouvert en tandem pouvant atteindre 1,92 V. À l'air, sans encapsulation, un tandem conserve 95 % de son efficacité initiale après 300 heures de fonctionnement.

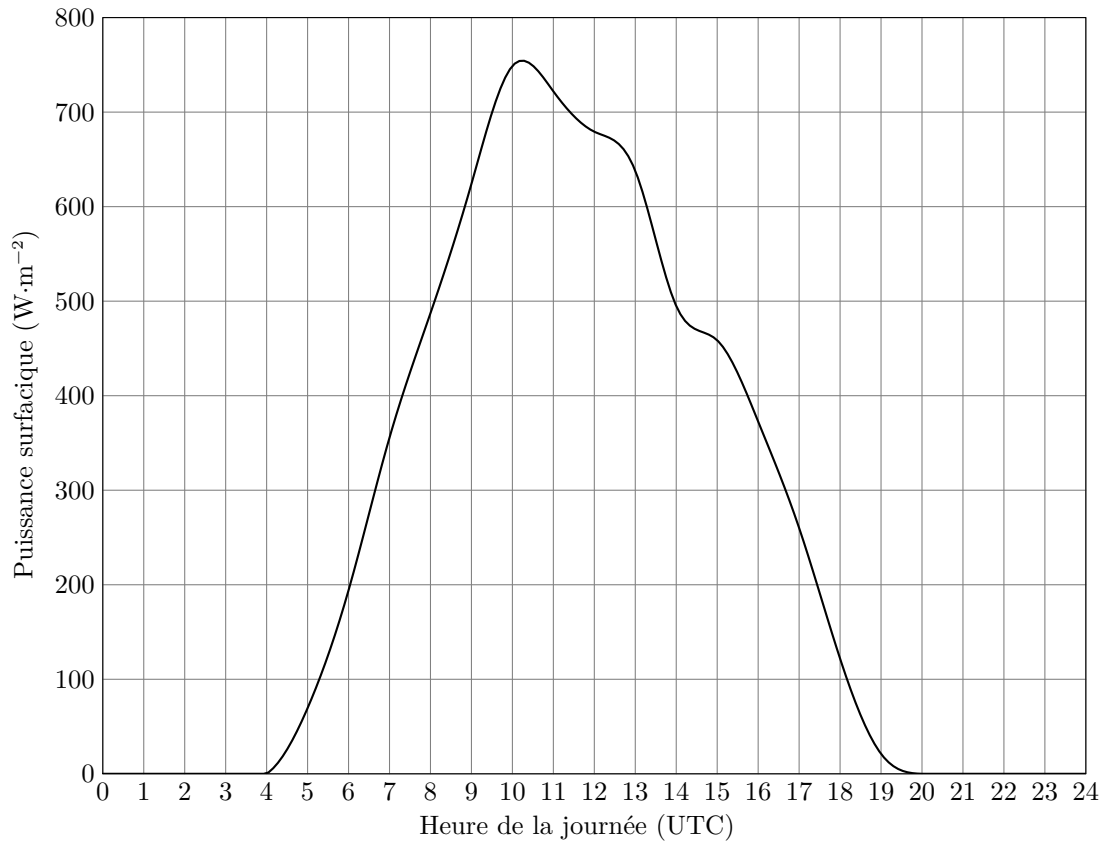
**Figure 11** Résumé de l'article de Amran Al-Ashouri *et al.*, publié dans *Science* en décembre 2020

#### III.B – Conversion de puissance

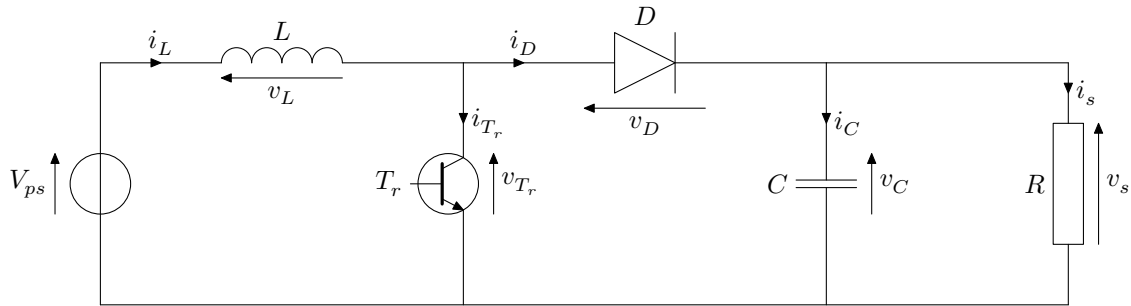
La tension  $V_{ps}$  fournie par les panneaux solaires ne permet pas de recharger directement une batterie de tension 350 V. Un régulateur MPPT (*Maximum Power Point Tracking*) constitué d'un convertisseur électronique DC/DC a pour rôle d'optimiser les valeurs des paramètres électriques de fonctionnement entre le système photovoltaïque et la batterie. Le champ d'application de ces convertisseurs est large ; on étudie ici un hacheur parallèle (convertisseur Boost) dont le schéma de principe est donné en figure 13.

Ce système est composé principalement d'une bobine d'inductance  $L$  et de deux interrupteurs  $T_r$  et  $D$  considérés comme idéaux. Le conducteur ohmique de résistance  $R$  modélise la batterie à charger. Un signal rectangulaire périodique de période  $T$  commande l'interrupteur  $T_r$ . Selon l'état des deux interrupteurs, on peut distinguer deux phases de fonctionnement :

- la phase active, de durée  $\alpha T$ , lorsque l'interrupteur  $T_r$  est fermé et l'interrupteur  $D$  est ouvert ; le coefficient  $\alpha$  désigne le rapport cyclique ;
- la phase de roue libre, de durée  $(1 - \alpha)T$ , lorsque l'interrupteur  $T_r$  est ouvert et l'interrupteur  $D$  est fermé.



**Figure 12** Puissance surfacique journalière reçue à Paris moyennée sur le mois de juillet pour une année météorologique typique, d'après <https://re.jrc.ec.europa.eu>



**Figure 13** Schéma de principe d'un convertisseur Boost

Dans l'étude qui suit, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le régime périodique est établi ;
- la tension d'alimentation  $V_{ps}$  est continue et constante ;
- la valeur de la capacité  $C$  est suffisamment grande afin de pouvoir considérer la tension de sortie  $v_s$  comme supérieure à  $V_{ps}$ .

### III.B.1) Phase active $0 \leq t < \alpha T$

**Q 37.** On admet que  $v_s > 0$ . Justifier que la diode est bloquée. Représenter alors le schéma du circuit équivalent pour cette phase active supposée débuter à l'instant  $t = 0$ .

**Q 38.** En déduire l'expression de  $i_L(t)$  avec pour condition initiale  $i_L(t = 0) = i_{L,\min}$ .

**Q 39.** Indiquer le temps caractéristique associé à l'ensemble résistance-condensateur. En déduire une condition sur  $C$  pour que la tension  $v_s$  puisse être considérée comme constante.

### III.B.2) Phase de roue libre $\alpha T \leq t < T$

**Q 40.** Représenter le schéma équivalent du convertisseur Boost durant la phase de roue libre.

**Q 41.** On pose  $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$ . En déduire l'expression de  $i_L(t)$  en fonction de  $V_{ps}$ ,  $v_s$ ,  $L$ ,  $\alpha T$  et  $i_{L,\max}$ .

### III.B.3) Valeurs moyennes sur une période

**Q 42.** Déterminer deux expressions distinctes de la valeur de l'ondulation de l'intensité  $i_{L,\max} - i_{L,\min}$ , en fonction de  $\alpha$ ,  $T$ ,  $L$ ,  $V_{ps}$  et  $v_s$ .

**Q 43.** Représenter l'allure de l'évolution de l'intensité  $i_L(t)$  sur une durée de deux périodes.



**Q 44.** En déduire  $\langle v_L(t) \rangle$  et  $\langle v_s(t) \rangle$ , les valeurs moyennes sur une période des tensions  $v_L(t)$  et  $v_s(t)$ , en fonction de  $V_{ps}$  et  $\alpha$ .

**Q 45.** Justifier la dénomination de hacheur-survolteur associée au convertisseur Boost. Déterminer la valeur du rapport cyclique  $\alpha$  pour permettre la recharge de la batterie étudiée si la tension aux bornes de l'association des panneaux solaires est de 72 V.

## Données

*Valeurs relatives à l'accumulateur 18650*

- Capacité spécifique  $Q = 2600 \text{ mA}\cdot\text{h}$
- Tension  $U = 3,7 \text{ V}$
- Masse  $m = 45,5 \text{ g}$
- Diamètre  $d = 18 \text{ mm}$
- Hauteur  $h = 65 \text{ mm}$
- Résistance interne  $r = 7,7 \text{ m}\Omega$
- Capacité thermique massique  $c_p = 0,73 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Conductivité thermique  $\lambda = 0,40 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

*Grandeurs générales*

- Masses molaires

|                                     | Li  | Fe   | P    | C    | O    | H   |
|-------------------------------------|-----|------|------|------|------|-----|
| $M \text{ (g}\cdot\text{mol}^{-1})$ | 6,9 | 55,8 | 31,0 | 12,0 | 16,0 | 1,0 |

- Potentiels standards

|                       | $\text{Li}^+/\text{Li}_{(\text{s})}$ | $\text{Li}^+/\text{LiFePO}_4_{(\text{s})}$ | $\text{Li}^+/\text{LiC}_6_{(\text{s})}$ |
|-----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $E^\circ \text{ (V)}$ | -3,0                                 | 0,6                                        | -2,9                                    |

- Enthalpies standard de formation à 298 K

|                                                     | $\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_{3(\text{l})}$ | $\text{CO}_{2(\text{g})}$ | $\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$ |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| $\Delta_f H^\circ \text{ (kJ}\cdot\text{mol}^{-1})$ | -1165,30                                     | -393,5                    | -241,8                            |

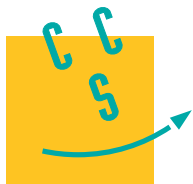
- Constante de Faraday :  $\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Constante universelle des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Dans les conditions usuelles de température et de pression,  $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,059 \text{ V}$
- Viscosité cinématique de l'air :  $\nu = 1,6 \times 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
- Masse volumique de l'air dans les conditions usuelles de température et de pression :  $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Capacité thermique massique à pression constante de l'air :  $c_p(\text{air}) = 1,0 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
- Coefficient conducto-convectif de l'air dans les conditions opératoires décrites en II.A :  $h_{cc} = 5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$

*Formulaire*

- Force de trainée d'un corps de surface frontale  $S$ , de coefficient de trainée  $C_x$ , se déplaçant à la vitesse  $v$ , dans un fluide de masse volumique  $\rho$  :

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2.$$

• • • FIN • • •



## Vitesses mécaniques et célérités des ondes

Bien qu'exprimées dans les mêmes unités, les notions de *vitesse* et de *célérité* sont bien distinctes. Dans tout le sujet, on appellera *vitesse* (notée  $\vec{v}$  ou  $\vec{V}$  par exemple) la grandeur cinématique associée au déplacement d'un point ou d'un objet *matériel*, tandis qu'on parlera de *célérité* (notée  $c_0, c_a, \dots$ ) pour les grandeurs associées à la propagation des ondes (lumineuses, acoustiques, vagues, ...). Dans toute la suite on retiendra que les célérités d'ondes sont des *grandeurs positives* tandis que les vitesses des objets sont des grandeurs vectorielles, chaque composante étant elle-même une *grandeur algébrique*.

Ce sujet est divisé en deux problèmes **totalelement indépendants**, dans lesquelles les notions de vitesse et célérité interviennent dans des contextes distincts.

Dans le problème **Partie A** la célérité des ondes est  $c_0$ , celle de la lumière dans le vide et, dans l'approximation non relativiste de la mécanique, les vitesses des objets vérifient  $\|\vec{v}\| \ll c_0$ .

Dans le problème **Partie B** c'est la célérité  $c_a$  des ondes acoustiques (dans des milieux solides, liquides, gaz) qui est étudiée. On rappelle ici que, dans l'approximation acoustique, les vitesses des molécules du fluide vérifient  $\|\vec{v}\| \ll c_a$ .

On notera  $i^2 = -1$  ; la base cartésienne associée au repère  $(Oxyz)$  sera notée  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Pour un point du plan  $(Oxy)$  on utilisera aussi les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  associées au repère mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Toutes les valeurs numériques nécessaires sont regroupées dans un tableau unique en fin d'énoncé, ainsi qu'un formulaire mathématique.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un numéro de question souligné. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

### Partie A – Mécanique et célérité de la lumière

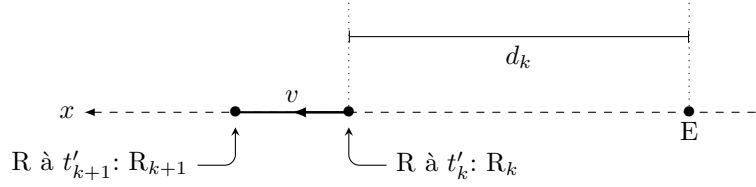
Ce problème **Partie A** étudie trois situations **indépendantes entre elles** explorant les liens entre la célérité  $c_0$  de la lumière (et des ondes électromagnétiques dans le vide) et les vitesses d'objets matériels :

- la partie **I** présente une méthode astronomique de *mesure de la célérité de la lumière dans le vide*  $c_0$ , bien avant bien sûr que celle-ci ne soit définie conventionnellement, par comparaison aux vitesses relatives des planètes ;
- la partie **II** étudie une manifestation d'une *correction relativiste* aux lois de la mécanique céleste : les écarts de trajectoire de la planète Mercure aux lois de Kepler du mouvement gravitationnel ;
- enfin, la partie **III** s'intéresse à la propagation des ondes *lumineuses* dans un fluide transparent et entraîné ; il s'agit d'une expérience de physique fondamentale datant de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, peu avant la transition entre mécanique classique et relativiste.

#### I – La mesure de la célérité de la lumière par Rømer

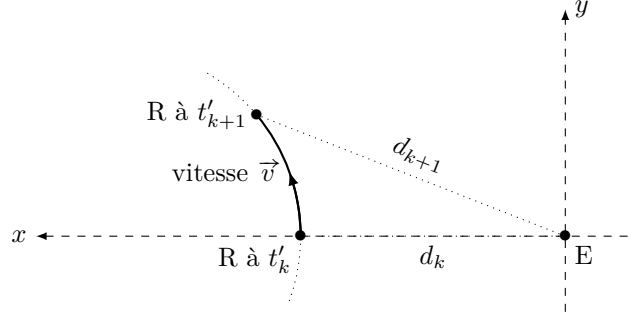
On étudie d'abord un point E qui émet périodiquement un signal lumineux isotrope aux instants  $t_k = kT$ , où  $T$  est la période d'émission et  $k \in \mathbb{N}$ . Ce signal se propage avec la célérité  $c_0$  puis est reçu au point R qui est en mouvement rectiligne à la vitesse  $\vec{v}$  et s'éloigne ainsi de E (figure 1). On note  $t'_k$  et  $t'_{k+1}$  les instants de réception des signaux émis à  $t_k$  et  $t_{k+1}$  et  $d_k$  la distance  $R_k E$  à l'instant  $t'_k$ .

**Q1.** Exprimer la distance  $d_{k+1} = R_{k+1} E$  en fonction de  $d_k, c_0, T$  et des instants  $t'_k$  et  $t'_{k+1}$ . En déduire que la réception des signaux par R est périodique de période  $T'$  et exprimer  $T'$  en fonction de  $T, v$  et  $c_0$ . Connaissez-vous le nom usuellement donné à l'effet ainsi mis en évidence ?



**Figure 1** – Réception d'un signal périodique par un récepteur en éloignement longitudinal

On considère maintenant un point E qui émet périodiquement un signal lumineux isotrope aux mêmes instants  $t_k = kT$  ; le signal est reçu au point R en mouvement à la vitesse variable  $\vec{v}$ . Comme  $c_0 \gg \|\vec{v}\|$  on pourra admettre qu'entre la réception des  $k$ -ième et  $k+1$ -ième signaux le déplacement de R est quasiment rectiligne et uniforme (figure 2). Les instants de réception sont notés  $t'_k$  et  $t'_{k+1}$  et on aura donc  $\vec{R}_k \vec{R}_{k+1} \simeq \vec{v} (t'_{k+1} - t'_k)$ . On choisira l'axe  $(Ox)$  de sorte que  $\vec{R}_k \vec{E} = -d_k \vec{u}_x$ .



**Figure 2** – Réception d'un signal périodique par un récepteur en mouvement arbitraire

- Q2.** Exprimer  $d_{k+1} = \|\vec{R}_{k+1} \vec{E}\|$  en fonction de  $d_k$ , des composantes  $v_x$  et  $v_y$  de  $\vec{v}$  et de l'intervalle de temps entre réceptions,  $T' = t'_{k+1} - t'_k$ .
- Q3.** En déduire l'expression approchée, au premier ordre en  $v/c_0$  :

$$T' = \frac{T}{1 - v_x/c_0}$$

Dans cette relation, la composante  $v_x$  peut être qualifiée de *vitesse d'éloignement*.

L'astronome danois Rømer proposa à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle la première détermination de la célérité  $c_0$  de la lumière en mesurant la période des occultations de l'astre Io, qui est de tous les satellites de Jupiter le plus proche de sa planète ; il a donc une rotation rapide autour de celle-ci, avec une période de l'ordre de 43 heures.

Jupiter est une planète assez éloignée du Soleil et par suite sa position change peu pendant une durée aussi courte ; la période de rotation de Io autour de Jupiter est aussi bien sûr constante. Cependant, les moments où l'on *observe* les apparitions successives de Io (correspondant à des fins d'éclipses) dans son mouvement autour de Jupiter changent lentement au cours du temps, du fait des variations de la distance de la Terre à Jupiter, c'est-à-dire essentiellement du fait de la rotation terrestre.

Ainsi, ces occultations se produisent un peu plus tôt ou un peu plus tard que si la distance de la Terre à Jupiter restait fixe. Le phénomène est bien sûr lié à la propagation des ondes lumineuses de Jupiter à la Terre, et c'est ce qui a permis la mesure de  $c_0$ .

Le tableau 1 résume les observations de Rømer, c'est-à-dire la mesure de la durée moyenne  $\tau$  séparant deux apparitions consécutives de Io durant l'année 1676. Au moyen de mesures ultérieures menées pendant huit ans, Rømer finit par conclure que la période  $\tau$  de ces apparitions varie *annuellement* avec une valeur moyenne  $\tau_m = 42,46$  heures et une amplitude totale de variation  $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$  égale à 22 minutes.

| Début des mesures         | 13 mai | 13 juin | 7 août | 14 août | 23 août |
|---------------------------|--------|---------|--------|---------|---------|
| Valeur de $\tau$ (heures) | 42,45  | 42,54   | 42,50  | 42,48   | 42,63   |

**Tableau 1** – Les premières mesures de Rømer

- Q4.** On admettra que la Terre et Jupiter ont des orbites circulaires et coplanaires, héliocentriques, parcourues dans le même sens. Les données en fin d'énoncé en donnent certaines propriétés. Exprimer puis calculer la période  $T_J$  de révolution de Jupiter autour du Soleil.

On poursuit l'étude dans un référentiel qui accompagne Jupiter dans sa rotation autour du Soleil de sorte que l'axe Soleil–Jupiter est fixe, confondu avec l'axe  $(Ox)$ . À l'échelle des mesures réalisées par Rømer, on considérera que le point E d'émission de lumière lors de l'apparition de Io derrière l'ombre de Jupiter est confondu avec le point J qui modélise la position de Jupiter.

- Q5.** Montrer que dans ce référentiel le mouvement de la Terre est circulaire uniforme de vitesse  $\|\vec{v}\| = v \simeq 27 \text{ km/s}$ . Quelles sont les valeurs extrêmes et moyenne de la vitesse d'éloignement de la Terre par rapport à E ?
- Q6.** En écrivant que la variation temporelle est directement liée au temps nécessaire à la lumière pour traverser la distance entre Jupiter et la Terre, montrer que  $\Delta\tau \simeq \frac{T_0 v}{\pi c_0}$ ; en déduire l'estimation proposée par Rømer pour  $c_0$ ; commenter.

La recherche d'un référentiel galiléen pour l'étude des mouvements des astres a mené à en proposer deux. Le *référentiel héliocentrique*, noté  $(\mathcal{R}_H)$ , a son origine au centre du Soleil et ses trois axes pointent vers des directions réputées fixes, définies par des étoiles lointaines. Le référentiel de Copernic, noté  $(\mathcal{R}_K)$ , a son origine au barycentre du système solaire et pointe vers les mêmes directions fixes.

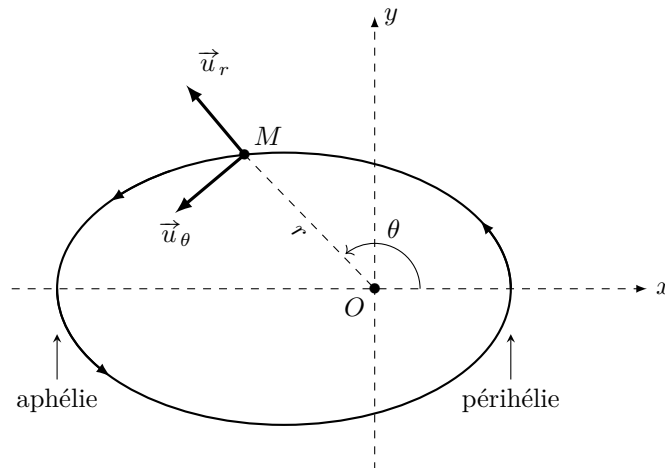
Les lois de la gravitation de Newton, postérieures (1687) à la mesure de Rømer, ainsi que la mesure précise (bien postérieure) du rayon de la trajectoire de Io autour de Jupiter (voir les données en fin d'énoncé) permettent de comparer les masses des différents constituants du système solaire, donc aussi les positions des centres des référentiels de Copernic  $(\mathcal{R}_K)$  et héliocentrique  $(\mathcal{R}_H)$ . Dans cette comparaison, on ne tiendra compte dans ce qui suit que de la seule planète Jupiter, la plus massive du système solaire.

- Q7.** Estimer le rapport des masses  $M_\odot$  du Soleil et  $M_J$  de Jupiter puis commenter, numériquement, l'écart entre les centres de ces deux référentiels  $(\mathcal{R}_H)$  et  $(\mathcal{R}_K)$ .

## II – Les perturbations séculaires de l'orbite de Mercure

### II.1 – La trajectoire de Mercure selon les lois de Kepler

Mercure est la planète la plus proche du Soleil; de plus, sa trajectoire est fortement excentrique, caractérisée par des distances minimale et maximale au Soleil nettement distinctes (cf. données en fin d'énoncé). Notant  $(Oxy)$  le plan de la trajectoire parcourue dans le sens direct,  $O$  le centre du référentiel galiléen d'étude, le mouvement de Mercure sera (cf. figure 3) assimilé à celui d'un point matériel  $M$  décrit en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .



**Figure 3** – Trajectoire de Mercure selon les lois de Kepler

- Q8.** On admet alors l'expression  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  de l'équation de la trajectoire, où  $p$  et  $e$  sont des constantes positives. Exprimer puis calculer les paramètres  $p$  et  $e$  de la trajectoire de Mercure en fonction des données  $r_{\max}$  et  $r_{\min}$ .
- Q9.** Exprimer l'accélération de  $M$  sous la forme  $\vec{a} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$  et exprimer la constante  $K$ . Montrer que  $r^2 \dot{\theta} = C_a$ ; préciser le nom et le signe de la constante  $C_a$ .
- Q10.** On note  $\vec{v}$  la vitesse de  $M$ ; sur un tour, c'est une fonction  $\vec{v}(\theta)$  de l'angle  $\theta$ . Montrer que le mouvement est caractérisé par  $\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{1}{H} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$  où  $H$  est une constante positive que l'on précisera.

**Q11.** En déduire qu'on peut, sans perdre de généralité, choisir un vecteur constant  $\vec{e}$  de norme  $e$  et dirigé selon  $(Oy)$  de sorte que  $H\vec{v} = \vec{u}_\theta + \vec{e}$  puis vérifier que la projection de cette relation sur  $\vec{u}_\theta$  permet de retrouver l'équation de la trajectoire, avec  $p = \frac{\mathcal{C}_a^2}{K}$ .

## II.2 – Correction relativiste pour la trajectoire de Mercure

La trajectoire de Mercure est en fait perturbée par les autres planètes du système solaire. Cependant, on sait depuis le XIX<sup>e</sup> siècle que, même après correction de ces influences gravitationnelles, l'axe des absides (la droite qui joint le périhélie et l'aphélie de la trajectoire de Mercure) tourne très lentement dans le sens direct et dans le plan de sa trajectoire de  $\alpha = 42''$  (secondes d'arc) par siècle. Il n'est possible de rendre compte de ce phénomène que dans le cadre de la mécanique relativiste. Nous adopterons ici une expression corrigée de l'accélération utilisée ci-dessus :

$$\vec{a} = -\frac{K}{r^2} \left[ 1 + \gamma \frac{v_\theta^2}{c_0^2} \right] \vec{u}_r$$

où  $\gamma$  est une constante qui reste à évaluer,  $v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{u}_\theta$  est la composante orthoradiale de la vitesse et  $c_0$  est la célérité de la lumière dans le vide. On notera qu'il s'agit toujours d'un problème à force centrale, avec en particulier la constante des aires  $\mathcal{C}_a$ .

**Q12.** Proposer, dans le cas de Mercure, une estimation numérique du rapport  $v_\theta/c_0$ . En déduire une estimation de l'effet relativiste sur la rotation de Mercure, cumulé au bout d'un siècle. On pourra supposer que  $\gamma$  reste de l'ordre de grandeur de l'unité.

Pour tenir compte de ce qui précède, on cherche une solution des équations du mouvement avec correction relativiste sous la forme :

$$\vec{v} = \frac{K}{\mathcal{C}_a} [\vec{u}_\theta + \vec{e}(t)]$$

et on cherche à caractériser les variations lentes du vecteur  $\vec{e}(t)$ , appelé *vecteur excentricité* sous l'action du *supplément d'accélération* relativiste  $\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{\gamma K}{r^2} \frac{v_\theta^2}{c_0^2} \vec{u}_r$ , qu'on remplacera dans tout ce qui suit par sa valeur *moyenne* au cours d'une période  $T$  du mouvement *keplerien* (non perturbé).

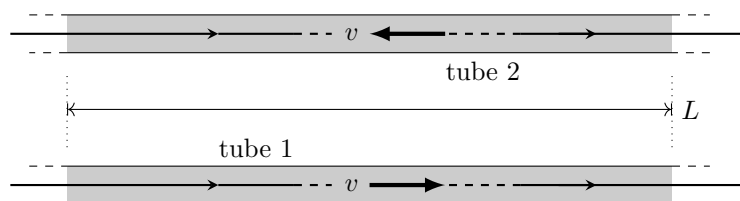
**Q13.** Montrer que cette moyenne se met sous la forme  $\langle \vec{a}_{\text{rel}} \rangle = A \gamma \frac{K}{\mathcal{C}_a} \vec{u}_z \wedge \vec{e}$  et expliciter la constante  $A$  en fonction des données ; on pourra dans la suite admettre que  $A = 2,2 \cdot 10^{-14}$  SI.

**Q14.** Établir une relation de la forme  $\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}$  ; ce résultat est-il compatible avec la lente rotation signalée plus haut de l'axe des absides de  $42''$  d'arc par siècle ? Le cas échéant, proposer une valeur numérique du coefficient  $\gamma$ . Dans le cadre de la théorie de la relativité générale d'Einstein,  $\gamma$  est un entier.

## III – Propagation de la lumière dans un fluide en mouvement

### III.1 – L'entraînement des ondes lumineuses dans l'eau

En 1851, Fizeau réalise une expérience d'interférence dans un dispositif présentant deux tubes contenant de l'eau en mouvement, en sens inverse. La figure 4 en présente le principe : dans deux tubes la célérité de lumière est respectivement dans le même sens et en sens inverse de la vitesse  $v$  de l'eau, liquide transparent d'indice  $n$ . La source de lumière utilisée est monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0$  (dans le vide).



**Figure 4** – Le principe de l'expérience de Fizeau

On notera respectivement  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  les célérités (vitesses de phase) de la propagation de la lumière dans le vide et dans les deux tubes, de même longueur  $L$ . On notera aussi  $\Delta c = c_1 - c_2$  et  $c_m = \sqrt{c_1 c_2}$  la célérité « moyenne » ; comme  $|\Delta c| \ll c_m$  on peut aussi écrire  $c_m \simeq \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ .

**Q15.** Exprimer la différence de temps de parcours  $\Delta t = t_2 - t_1$  de la longueur  $L$  par la lumière dans les deux tubes. En déduire la différence de phase  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  acquise du fait de la propagation dans ces deux tubes en fonction de  $L$ ,  $\lambda_0$ ,  $c_0$ ,  $c_m$  et  $\Delta c$ .

Le but de l'expérience était de distinguer entre plusieurs modèles théoriques de l'époque :

- le modèle *sans entraînement* de la lumière par l'eau, avec  $\Delta c = 0$  et  $c_m = c_0/n$  ;
- le modèle d'*entraînement total* de la lumière par l'eau, avec  $\Delta c = 2v$  et  $c_m = c_0/n$  ;
- le modèle d'*entraînement partiel* de la lumière, proposé par Fresnel en 1819, avec un raisonnement assez complexe aboutissant à  $\Delta c = 2v [1 - 1/n^2]$  et  $c_m = c_0/n$ .

Si le dispositif est inséré au sein d'un système interférentiel, il sera possible de distinguer entre les différents modèles théoriques seulement si le déplacement de  $\Delta N$  franges d'interférence (par rapport à une situation où l'eau est immobile) dépasse une valeur seuil  $\Delta N_{\min}$  qui dépend de l'expérience. On supposera que la différence de marche au point d'observation ne dépend que de  $\Delta\varphi$  calculé en **Q15**.

**Q16.** Quel est le déplacement  $\Delta N$  dans un modèle *sans entraînement* ?

**Q17.** Dans le cadre du modèle d'*entraînement partiel*, montrer que la longueur minimale des tubes nécessaire au succès de l'expérience est :

$$L > L_{\min} = \Delta N_{\min} \frac{\lambda_0 c_0}{2v(n^2 - 1)}.$$

Faire et commenter l'application numérique si  $n = 1,33$ ,  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ ,  $v = 7 \text{ m/s}$  et  $\Delta N_{\min} = 0,75$ . Une telle longueur suffira-t-elle pour valider ou invalider le modèle d'*entraînement total* ?

### III.2 – Le modèle classique des vitesses d'entraînement

On peut expliciter partiellement les modèles proposés dans un cadre mécanique. La célérité des ondes lumineuses relativement au référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à l'eau est  $\vec{c}_{o/\mathcal{R}'} = (c_0/n)\vec{u}_x$  tandis que la vitesse d'entraînement de ce référentiel relativement au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  est  $\vec{v}_e = \pm v\vec{u}_x$  selon le tube étudié. Les célérités cherchées  $\vec{c}_1$  et  $\vec{c}_2$  sont alors les vitesses de la lumière relativement à  $\mathcal{R}$ , telles qu'elles se déduisent des lois de composition des vitesses.

**Q18.** Rappeler la loi de composition des vitesses de la mécanique classique. En déduire  $c_1$  et  $c_2$  puis  $\Delta c$  et  $c_m$  ; quel modèle retrouve-t-on ainsi ?

Les mesures de Fizeau ont conclu à la validité du modèle d'entraînement partiel de Fresnel.

### III.3 – Le modèle relativiste pour les ondes lumineuses dans l'eau

À partir de 1905, un modèle nouveau se substitue au précédent : celui de la relativité restreinte. Dans ce cadre, et toutes les vitesses étant des grandeurs algébriques dirigées par  $(Ox)$ , la loi de composition des vitesses prend la forme (admise ici) :

$$v_{M/\mathcal{R}} = \frac{v_e + v_{M/\mathcal{R}'}}{1 + \frac{v_e v_{M/\mathcal{R}'}}{c_0^2}}$$

si on note  $v_{M/\mathcal{R}}$  (resp.  $v_{M/\mathcal{R}'}$ ) la vitesse de  $M$  relativement au référentiel  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}'$ ) et  $v_e$  la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  relativement à  $\mathcal{R}$ .

**Q19.** Écrire et commenter l'expression de  $v_{M/\mathcal{R}'}$  en fonction de  $v_{M/\mathcal{R}}$  et  $v_e$ . Que devient la loi d'addition relativiste si  $v_{M/\mathcal{R}} = \pm c_0$  ? Commenter.

**Q20.** On considère maintenant que  $v_{M/\mathcal{R}'} = c_0/n$  tandis que  $v_e = \pm v$  avec  $v \ll c_0$ . Déterminer les vitesses  $c_1$  et  $c_2$  correspondantes dans  $\mathcal{R}$ .

**Q21.** En déduire les expressions de  $\Delta c$  et  $c_m$ . Est-il possible, dans l'expérience de Fizeau, de distinguer le modèle relativiste du modèle d'entraînement partiel de Fresnel ?

## Partie B – Mécanique et célérité des ondes acoustiques

Ce problème **Partie B** étudie deux situations totalement **indépendantes entre elles** illustrant les liens entre la célérité  $c_a$  des ondes acoustiques dans divers substrats et les vitesses d'objets matériels :

- la partie **I** décrit le lien entre la vitesse d'avalanche des grains de sable des dunes et les ondes sonores émises à cette occasion : le *chant des dunes* ;
- la partie **II** s'intéresse à la propagation des ondes *acoustiques* dans un fluide globalement *entraîné* (comme par exemple l'eau d'un courant marin océanique).

### I – Le chant des dunes

Le phénomène étudié ici est connu depuis très longtemps : il s'agit de l'émission d'ondes acoustiques dans l'air qui surmonte les dunes de sable lors de micro-avalanches, c'est le *chant des dunes*. Des observations scientifiques réalisées depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle fournissent les résultats suivante : la fréquence du son émis va de 60 Hz (désert) à 1 kHz (plages) ; le chant produit lors d'écoulements disparaît lorsque le sable est humide ou mélangé avec des poussières.

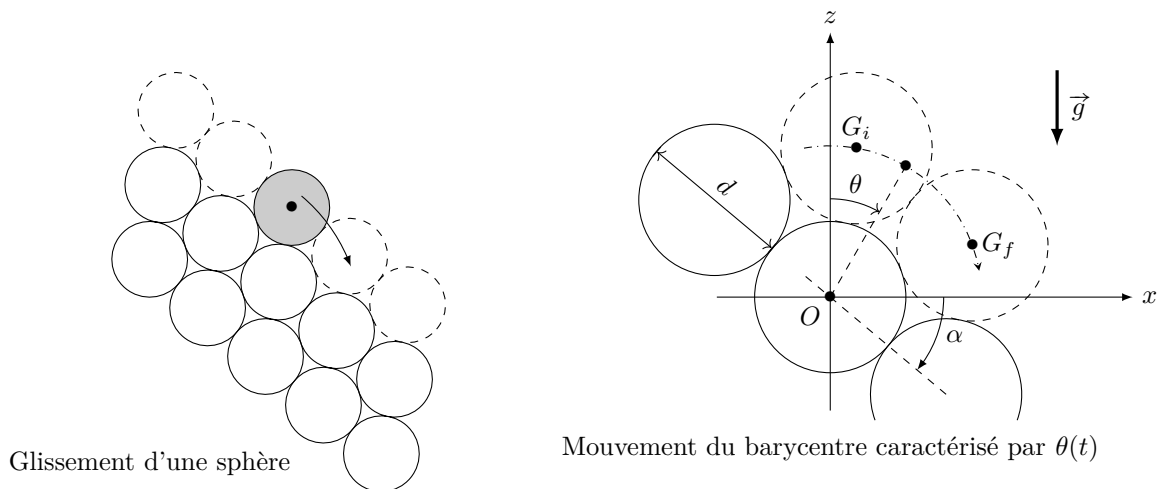
Une première interprétation est alors proposée, liant le son entendu à la résonance des ondes acoustiques *au sein des grains de sable* formant des cavités résonantes de la dimension  $d$  du diamètre des grains de sable eux-mêmes. On cherche à confronter ce modèle à quelques mesures récentes de fréquences moyennes de chant et de diamètres moyens des grains de sable (table 2, extrait de la thèse de S. Dagois-Bohy, 2010).

| Dune                 | fréquence $f$ , Hz | diamètre $d$ , $\mu\text{m}$ |
|----------------------|--------------------|------------------------------|
| Al Wagan (Oman)      | $80 \pm 3$         | $200 \pm 70$                 |
| Dumont (USA)         | $83 \pm 7$         | $174 \pm 50$                 |
| Eureka (USA)         | $90 \pm 15$        | $165 \pm 50$                 |
| Mar de dunas (Chili) | $97 \pm 4$         | $168 \pm 40$                 |
| Omega 1 (Maroc)      | $100 \pm 5$        | $155 \pm 20$                 |

**Tableau 2** – Caractéristiques du chant de quelques dunes

**Q22.** Rappeler la relation liant la fréquence fondamentale  $f_1$  d'oscillation d'une corde vibrante fixée aux deux extrémités d'une cavité de longueur  $d$  en fonction de la célérité  $c_a$  de l'onde. Sachant que la célérité des ondes acoustiques dans un solide (comme le sable) est nettement supérieure à sa célérité dans l'air ( $\simeq 350 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  à  $30^\circ\text{C}$ ), que penser de ce premier modèle ?

Une autre interprétation de ce phénomène a été proposée au *Laboratoire Matière et Systèmes Complexes* de l'université Paris-Cité. Dans ce cadre une partie de l'écoulement des grains de sable de la dune « a une vitesse homogène, comme un bloc solide ». On décrira la dune de sable comme un empilement compact de sphères de diamètre  $d$ , alignées en formant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (figure 5, à gauche) et dont les grains de la couche supérieure sont susceptibles de glisser vers le bas.



**Figure 5** – Modèle de glissement d'une bille sur une couche de sable

On étudie (figure 5, à droite) le mouvement de glissement sans aucun frottement d'un grain de sable sphérique, homogène de masse  $m$ , dont le barycentre passe de la position initiale  $G_i$  à la position finale  $G_f$  ; il reste en permanence au contact des grains, supposés fixes, de la couche inférieure.



- Q23.** Exprimer en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $d$  et  $\theta$  l'énergie potentielle de pesanteur du grain mobile. Montrer qu'il existe une valeur minimale  $\alpha_{\min}$  de  $\alpha$  qui empêche la position initiale de former un équilibre stable.
- Q24.** On ne suppose pas forcément que  $\alpha > \alpha_{\min}$  mais, sous l'influence par exemple du vent, le grain étudié débute en  $G_i$  un mouvement de translation circulaire de centre  $O$  avec la vitesse  $v_i$ . En l'absence de tout frottement, déterminer sa vitesse  $v_f$  lorsque le centre du grain parvient en  $G_f$  en fonction de  $v_i$ ,  $g$ ,  $d$  et  $\alpha$ . On pourra remarquer que  $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$ .
- Q25.** Avant de recommencer à tourner autour du grain suivant, l'arrivée en  $G_f$  se traduit par un choc avec dissipation d'une fraction  $\epsilon$  de l'énergie cinétique ; ainsi la translation circulaire suivante recommence avec  $v_i'^2 = (1-\epsilon)v_f^2$ . Expliciter  $v_i'^2$  en fonction de  $v_i^2$ ,  $\epsilon$ ,  $g$ ,  $d$  et  $\alpha$  et en déduire que la vitesse d'un grain tend vers une limite  $v_{\lim}$  telle que  $v_{\lim}^2 = \kappa g d$  où on exprimera la grandeur  $\kappa > 0$  en fonction de  $\alpha$  et  $\epsilon$ .

On suppose enfin que le mouvement des grains pendant la totalité de l'avalanche se fait à vitesse quasiment constante  $v$  telle que  $v^2 = \kappa g d$ . Les grains de sable heurtent alors périodiquement la couche sur laquelle ils glissent et émettent le son identifié comme le chant de la dune.

- Q26.** Expliciter la fréquence  $f$  de l'émission sonore par l'avalanche des chocs des grains de sable. Les données de la table 2 sont-elles compatibles avec ce modèle ? Si oui, estimer la constante  $\kappa$ . Selon vous, ce modèle reste-il pertinent dans le cas du chant des plages ?

## II – Propagation des ondes acoustiques et entraînement par l'eau

On s'intéresse dans cette partie **II** à la propagation d'ondes acoustiques dans l'eau, en présence du champ de pesanteur d'intensité  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  et d'un éventuel mouvement d'ensemble de l'eau (circulation dans une canalisation, courant marin...) de vitesse uniforme et constante  $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ . Ainsi, la pression et la vitesse dans l'eau seront caractérisées, en notations complexes, par :

$$p(\vec{r}, t) = p_{\text{st}}(z) + p_1 \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \vec{u}_x + \vec{v}_1 \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$$

où  $p_{\text{st}}(z)$  désigne la répartition statique de pression (en l'absence d'onde) avec, à la surface libre  $z = 0$  de l'eau,  $p_{\text{st}}(0) = p_0 = 1 \text{ bar}$  ; on se limitera à  $|p_1| \ll p_{\text{st}}(z)$  et  $\|\vec{v}_1\| \ll v_0 \ll c_a$  où  $c_a$  désignera la célérité de l'onde ainsi étudiée. On rappelle l'équation dynamique de Navier–Stokes qui lie les évolutions de la pression  $p$ , de la vitesse  $\vec{v}$  et de la masse volumique  $\rho$  en fonction de la viscosité dynamique de l'eau  $\eta$  :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}.$$

- Q27.** En déduire l'expression de  $dp_{\text{st}}/dz$  puis une forme simplifiée de l'équation de Navier–Stokes.

Dans toute la suite on pourra noter les expressions complexes de la pression  $p(\vec{r}, t) = p_{\text{st}}(z) + \underline{p}$ , de la masse volumique  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \underline{\rho}$  et de la vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \vec{u}_x + \underline{\vec{v}}$ . Dans ces expressions,  $p_{\text{st}}(z)$ ,  $\rho_0$  et  $v_0 \vec{u}_x$  désignent les valeurs moyennes en l'absence d'onde tandis que  $\underline{p}$ ,  $\underline{\rho}$  et  $\underline{\vec{v}}$  désignent les (petites) fluctuations de ces grandeurs dues à l'onde.

### II.1 – Propagation et atténuation des ondes acoustiques

- Q28.** Rappeler la définition de la compressibilité  $\chi$  de l'eau et en déduire le lien entre les fluctuations  $\underline{p}$  de la pression et  $\underline{\rho}$  de la masse volumique, en se limitant au premier ordre.

Dans l'eau, l'intensité acoustique (des sonars par exemple) est mesurée par  $I_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{|\underline{p}|}{p_{\text{ref}}}$  où  $p_{\text{ref}} = 1 \mu\text{Pa}$  ; les sonars les plus puissants atteignent (exceptionnellement)  $I_{\text{dB}} = 240 \text{ dB}$ , dépassant ainsi les chants des baleines qui atteignent au maximum  $I_{\text{dB}} = 180 \text{ dB}$ .

On s'intéresse d'abord à la propagation des ondes acoustiques dans un fluide parfait ( $\eta = 0$ ) en l'absence de courant d'ensemble ( $v_0 = 0$ ).

- Q29.** Établir les deux équations linéarisées  $\rho_0 \omega \underline{\vec{v}} = \vec{k} \underline{p}$  et  $\vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = \chi \omega \underline{p}$ . En déduire la célérité  $c_a$  des ondes acoustiques dans l'eau et faire l'application numérique.
- Q30.** Dans le cas des ondes émises lors du chant d'une baleine près de la surface libre de l'eau, estimer et commenter les amplitudes des ondes de masse volumique  $|\underline{\rho}|$  et de vitesse  $|\underline{\vec{v}}|$ .

On cherche maintenant à connaître l'effet de la prise en compte de la viscosité de l'eau sur la propagation des ondes acoustiques. On exprime à cet effet l'équation de dispersion donnant  $\vec{k}^2$  en fonction de  $\omega$ ,  $c_a$  et d'autres caractéristiques du fluide ( $\vec{k}^2$  peut être une fonction complexe). En l'absence de viscosité,  $\vec{k}^2 = f_0(\omega, c_a)$ .

**Q31.** Montrer que  $\vec{k}^2 = \frac{f_0(\omega, c_a)}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$  et exprimer  $\omega_c$  en fonction de  $\eta$  et  $\chi$ . Proposer une interprétation simple de la grandeur  $\omega_c$  et commenter sa valeur numérique.

**Q32.** On lit dans la littérature technique que l'atténuation des ondes acoustiques dans l'eau est faible dans le domaine audio basse fréquence; à plus haute fréquence et pour les ultrasons elle s'exprime par un coefficient d'atténuation  $\beta$  qui s'exprime en décibel par kilomètre. Justifier cette affirmation puis exprimer le coefficient  $\beta$  en fonction notamment de la viscosité de l'eau, avant de proposer une application numérique pour deux domaines de fréquences dont vous justifierez le choix. Comparer aux mesures effectuées dans l'atlantique pour lesquelles  $\beta \sim 0,12$  dB/km aux fréquences audio, et conclure.

## II.2 – Entraînement de l'onde acoustique par un courant d'ensemble

On revient ici à l'étude des ondes acoustiques dans un fluide parfait ( $\eta = 0$ ) mais on tient compte de la vitesse d'ensemble de l'eau, uniforme et constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ ; l'onde se propage dans une direction caractérisée par le vecteur d'onde réel  $\vec{k} = k \vec{u}$  où  $k > 0$  et  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire. La vitesse des courants océaniques en particulier vérifie  $|v_1| \ll v_0 \ll c_a$ .

**Q33.** Proposer un ordre de grandeur pour  $v_0$ , en kilomètre par heure. Expliciter ensuite  $\text{div}(\rho \vec{v})$  et  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  avec  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \underline{\vec{v}}$  et  $\rho = \rho_0 + \underline{\rho}$  en vous limitant aux termes du premier ordre en  $\underline{\rho}$  et  $\underline{\vec{v}}$ .

**Q34.** Montrer les deux équations  $\rho_0 \underline{\vec{v}}(\omega - \Omega) = \underline{p} \vec{k}$  et  $\vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = (\omega - \Omega) \underline{p} \chi$  et expliciter la grandeur  $\Omega$  en fonction de  $v_0$ ,  $k$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u}_x = \cos \theta$ .

**Q35.** En déduire la célérité  $c'_a$  des ondes acoustiques en fonction de  $v_0$ ,  $\cos \theta$  et de la valeur  $c_a$  obtenue dans l'eau au repos. Peut-on parler de loi de composition des vitesses?

## Données numériques

| Grandeur                                   | notation         | valeur               | unité                                             |
|--------------------------------------------|------------------|----------------------|---------------------------------------------------|
| Accélération de la pesanteur au sol        | $g$              | 9,8                  | $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$                      |
| Célérité de la lumière dans le vide        | $c_0$            | $3,00\cdot 10^8$     | $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$                      |
| Compressibilité isentropique de l'eau      | $\chi$           | $4,10\cdot 10^{-10}$ | $\text{Pa}^{-1}$                                  |
| Constante de la gravitation universelle    | $\mathcal{G}$    | $6,67\cdot 10^{-11}$ | $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1}$ |
| Distance moyenne Jupiter–Soleil            | $d_{\text{JS}}$  | $7,78\cdot 10^{11}$  | m                                                 |
| Distance moyenne Jupiter–Io                | $d_{\text{JI}}$  | $4,22\cdot 10^8$     | m                                                 |
| Distance minimale de Mercure au Soleil     | $r_{\text{min}}$ | $4,60\cdot 10^{10}$  | m                                                 |
| Distance maximale de Mercure au Soleil     | $r_{\text{max}}$ | $6,98\cdot 10^{10}$  | m                                                 |
| Jour (solaire moyen)                       | 24 h             | 86 400               | s                                                 |
| Masse du Soleil                            | $M_{\odot}$      | $1,99\cdot 10^{30}$  | kg                                                |
| Masse volumique moyenne de l'eau           | $\rho_0$         | $1,00\cdot 10^3$     | $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$                     |
| Période de révolution terrestre (année)    | $T_0$            | 365                  | jour                                              |
| Rayon moyen du Soleil                      | $R_{\text{S}}$   | $6,96\cdot 10^8$     | m                                                 |
| Rayon moyen de Jupiter                     | $R_{\text{J}}$   | $6,99\cdot 10^7$     | m                                                 |
| Seconde d'arc                              | $1''$            | $4,85\cdot 10^{-6}$  | rad                                               |
| Unité astronomique (distance Terre–Soleil) | $a_0$            | $1,49\cdot 10^{11}$  | m                                                 |
| Viscosité dynamique de l'eau               | $\eta$           | $1,20\cdot 10^{-3}$  | $\text{Pa}\cdot\text{s}$                          |

## Suite arithmético–géométrique

Si  $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$  où  $|\alpha| < 1$ , la suite réelle  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tend, pour  $n \rightarrow \infty$ , vers la limite  $u_{\infty} = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ , quelle que soit la valeur initiale  $u_0$ .

## Quelques intégrales trigonométriques

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$$

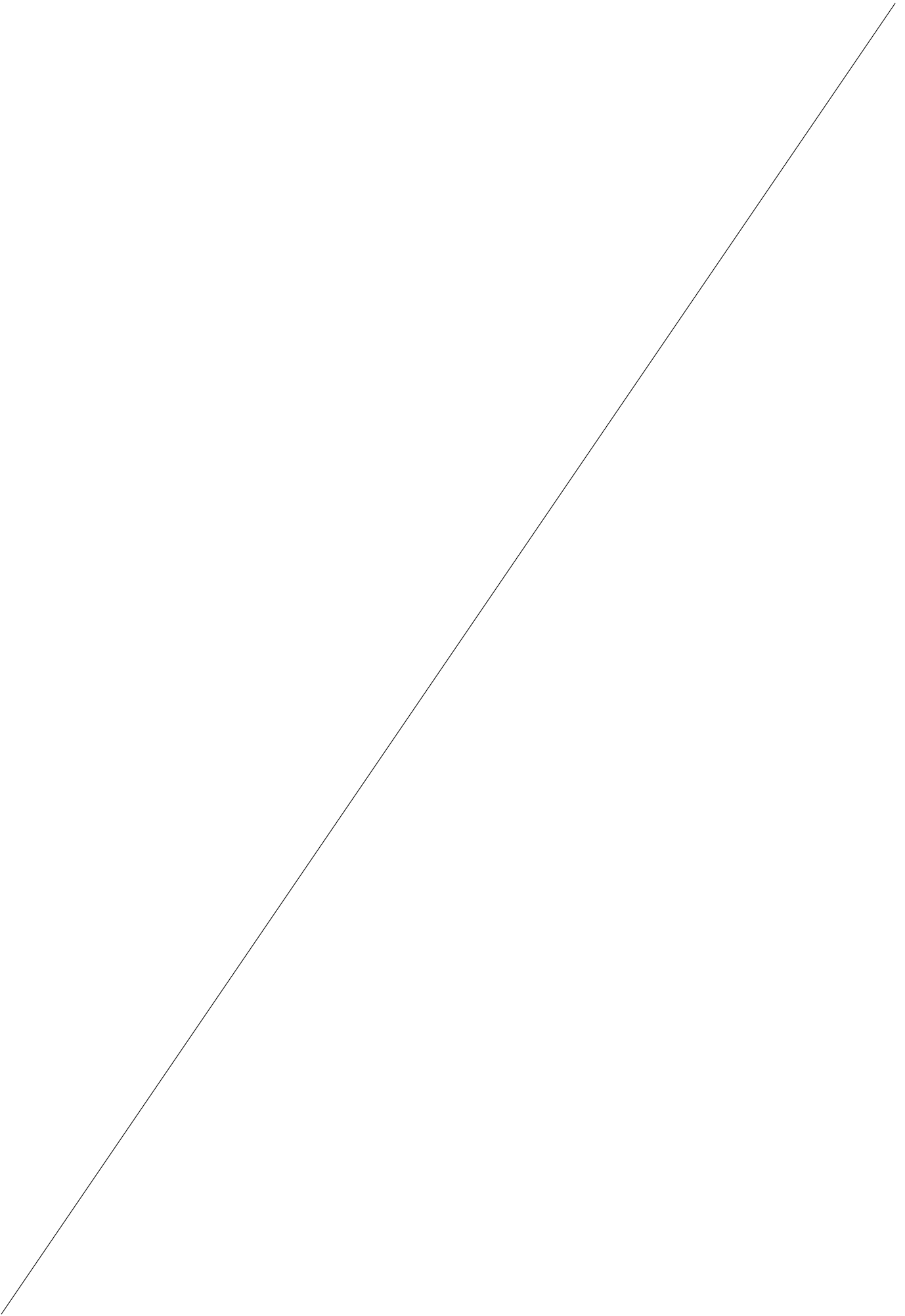
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$$

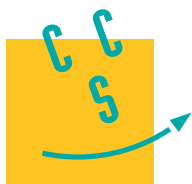
## Analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} = A_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad \text{div} (F \vec{A}) = F \text{div } \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} F \cdot \vec{A}$$

◇ Fin ◇





## Applications des propriétés magnétiques et électriques de matériaux

La synthèse de nouveaux matériaux a permis de réaliser des dispositifs possédant des propriétés intéressantes du point de vue de la miniaturisation ou de la sensibilité aux champs électromagnétiques.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à remettre avec la copie. Certaines données numériques utiles sont disponibles dans ce document réponse.

### Notations

À toute grandeur, fonction sinusoïdale du temps,  $g(t) = G \cos(\omega t + \varphi)$ , on associe la grandeur  $\underline{g}(t) = \underline{G} e^{j\omega t}$ , où  $j^2 = -1$  et  $\underline{G} = G e^{j\varphi}$  est appelée *amplitude complexe* de  $g$ .

## I Le transformateur miniaturisé

Le besoin de transformateurs de plus en plus petits dans les systèmes électroniques embarqués a conduit à la conception de transformateurs miniaturisés. Les différents éléments (conducteurs, matériaux magnétiques, isolants) sont directement réalisés sur un circuit imprimé. La miniaturisation a été rendue possible grâce à l'utilisation de fréquences élevées et à l'aptitude des nouveaux matériaux à supporter de hautes températures.

Un transformateur est composé de différents matériaux :

- un matériau conducteur pour réaliser les enroulements (ou bobinages) ;
- un matériau magnétique ;
- un matériau isolant pour isoler les enroulements primaire et secondaire.

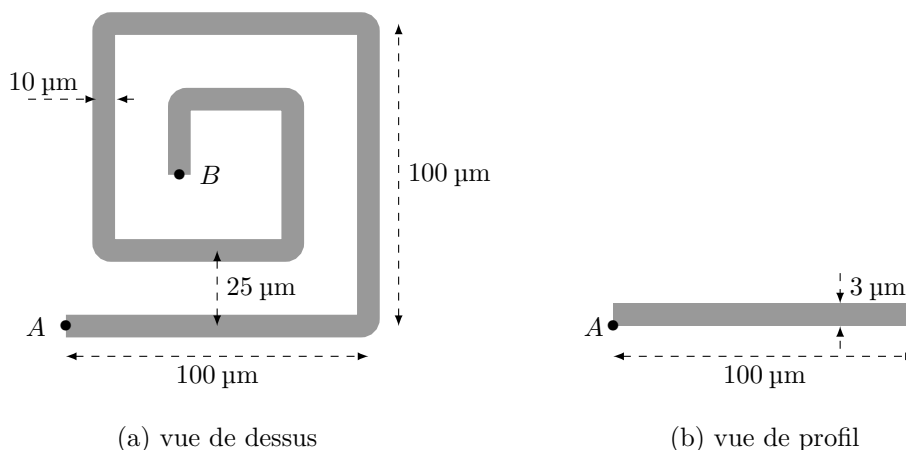


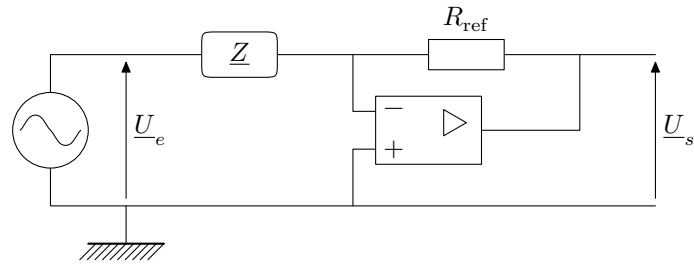
Figure 1 Schéma d'un enroulement en cuivre

### I.A – Les enroulements

**Q 1.** Rappeler l'expression de la résistance électrique  $R$  d'un conducteur cylindrique de conductivité  $\gamma$ , de longueur  $L$ , de section  $S$ , parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.

**Q 2.** Pour l'enroulement de cuivre de la figure 1, le courant circule de  $A$  vers  $B$ . Évaluer sa résistance électrique  $R_e$ . Citer deux inconvénients que présente l'existence de cette résistance pour un transformateur.

L'inductance propre de l'enroulement peut être mesurée grâce à un impédancemètre dont le schéma est celui de la figure 2. On utilise le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal de gain infini, alimenté en  $\pm 15$  V. La résistance  $R_{\text{ref}} = 1000,0 \Omega$  est une résistance de référence, l'impédance à mesurer est  $\underline{Z} = Z_r + jZ_i$ , où  $Z_r$  et  $Z_i$  sont des nombres réels. Le générateur impose la tension harmonique  $u_e(t) = U_0 \cos(\omega t)$ .

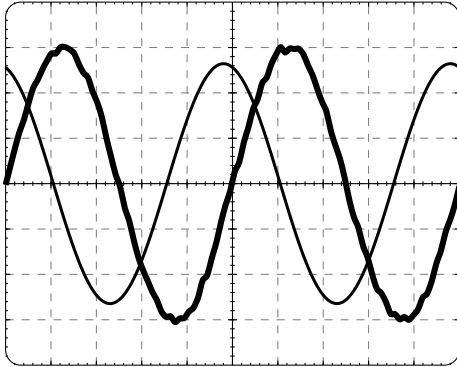


**Figure 2** Schéma d'un impédancemètre

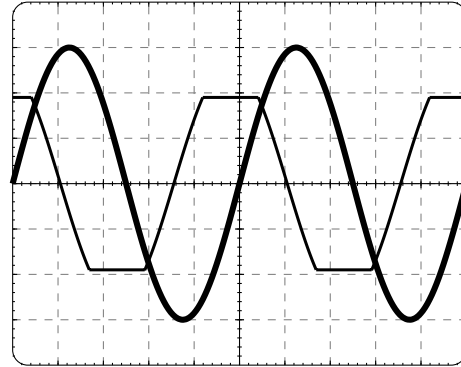
**Q 3.** Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{U}_s$  en fonction de l'amplitude complexe  $\underline{U}_e$ , de  $R_{\text{ref}}$  et de  $\underline{Z}$ .

La figure 3a donne les graphes des tensions  $u_e(t)$  et  $u_s(t)$ .

**Q 4.** Calculer  $Z_r$  et  $Z_i$ . En déduire la valeur  $L$  de l'inductance propre de l'enroulement ainsi que la valeur de  $R_e$ .



(a) Le gain vertical est 2 mV par carreau pour  $u_e$  et 2 V par carreau pour  $u_s$ .



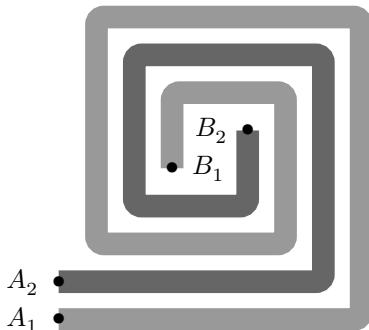
(b) Le gain vertical est 10 mV par carreau pour  $u_e$  et 1 V par carreau pour  $u_s$ .

**Figure 3** Oscillogrammes — La courbe en gras est la tension d'entrée  $u_e(t)$ , la courbe en trait fin la tension de sortie  $u_s(t)$ , la base de temps est 200 ns par carreau

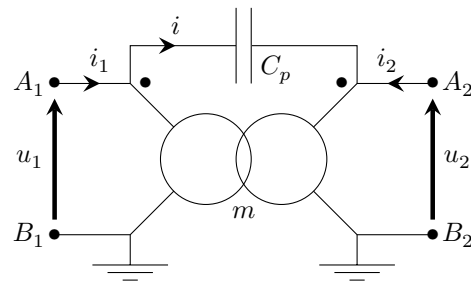
**Q 5.** L'amplitude de la tension d'entrée est portée à la valeur  $U_0 = 30$  mV. Préciser l'intérêt d'une telle augmentation d'amplitude. Proposer, en la justifiant, la forme prévisible pour le signal de sortie. Expliquer pourquoi la réduction de la résistance de référence  $R_{\text{ref}}$  est à envisager si on veut garder  $U_0 = 30$  mV.

**Q 6.** On choisit une résistance de référence plus faible,  $R'_{\text{ref}} = 100,00 \Omega$ . Les courbes obtenues sont représentées figure 3b. Interpréter quantitativement le phénomène observé.

Pour réaliser un transformateur, on dispose un enroulement primaire  $A_1B_1$  et un enroulement secondaire  $A_2B_2$  comme sur la figure 4a. L'enroulement primaire  $A_1B_1$  est identique à l'enroulement  $AB$  de la figure 1. Les deux enroulements sont constitués de conducteurs d'épaisseurs identiques. Leur proximité, qui permet d'obtenir un couplage magnétique fort, a l'inconvénient de présenter un couplage électrostatique représenté par une capacité de couplage  $C_p$  (figure 4b). Le rapport de transformation pour le transformateur complet (enroulements et matériau ferromagnétique, non représenté) est  $m = 0,9$ .



(a) Enroulements primaire et secondaire



(b) Modélisation du transformateur complet

**Figure 4** Enroulements et modélisation

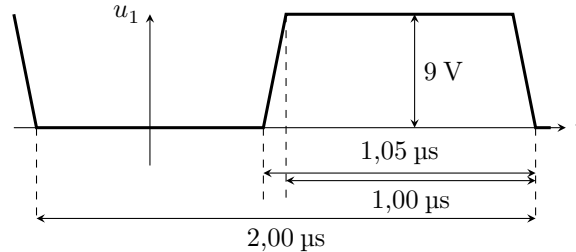
**Q 7.** Estimer, en précisant la démarche, la capacité  $C_p$  à partir de l'expression de la capacité d'un condensateur plan et de la géométrie des enroulements (figure 1 et figure 4a). Le milieu magnétique qui remplit l'espace

entre les enroulements, non représenté sur la figure 4a, possède une permittivité relative  $\varepsilon_r = 5 \times 10^4$ . Que penser de cette valeur de permittivité relative par rapport à celle de milieux usuels ?

La modélisation de la figure 4b est celle d'un transformateur idéal où l'on a ajouté un condensateur.

**Q 8.** Établir l'expression de l'intensité  $i$  en fonction de  $C_p$ ,  $m$  et  $\frac{du_1}{dt}$  pour une intensité de sortie nulle,  $i_2 = 0$ . En déduire l'expression de  $i_1$  en fonction de  $C_p$ ,  $m$  et  $\frac{du_1}{dt}$ . Toujours avec le modèle du transformateur idéal, quelle serait la valeur de  $i_1$  en l'absence de la capacité parasite si  $i_2 = 0$  ?

La tension d'entrée est périodique, de la forme donnée figure 5.



**Figure 5** Forme du signal d'entrée  $u_1$

**Q 9.** Calculer la valeur de l'intensité maximale  $i_1$  dans les conditions de la question précédente. Quels sont les effets de ce courant ? Pourquoi ce défaut est-il particulièrement important pour les variations rapides de tension ?

### I.B – Le matériau magnétique

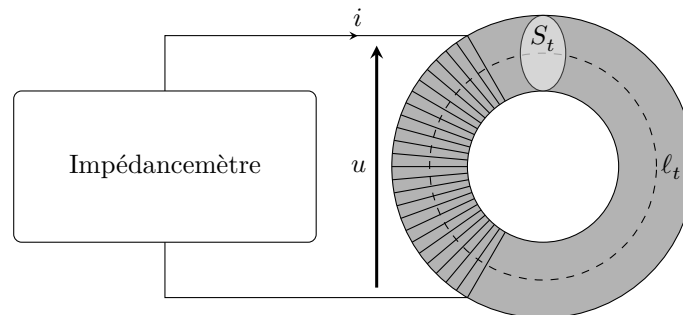
Le rôle du matériau magnétique est de canaliser les lignes de champ magnétique. Cependant, il présente l'inconvénient d'être à l'origine de pertes énergétiques.

**Q 10.** Dans le modèle de Bohr, un électron possède une trajectoire circulaire autour d'un noyau atomique immobile. Le moment cinétique de l'électron est  $\sigma_e = \|\vec{\sigma}_e\| = \hbar$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Établir l'expression du moment magnétique  $\mu_e = \|\vec{\mu}_e\|$  de cet atome, en fonction de  $\hbar$ , de la charge élémentaire  $e$  et de la masse de l'électron  $m_e$ . Effectuer l'application numérique.

**Q 11.** Un matériau ferromagnétique de masse molaire  $M$ , de masse volumique  $\rho$ , est formé d'atomes de moment magnétique  $z\vec{\mu}_e$  où  $z \in \mathbb{N}$ . Quelle est l'expression de l'aimantation de saturation  $M_{\text{sat}}$ , valeur de l'aimantation du matériau quand tous les moments magnétiques sont alignés et de même sens ? Calculer la valeur  $M_{\text{sat}}(\text{Fe})$  pour le fer pour lequel  $z = 4$ .

**Q 12.** En reprenant la valeur précédente de  $M_{\text{sat}}$ , quel serait le moment magnétique à saturation  $m_a$  d'un cube de fer de côté  $150 \mu\text{m}$  ? Quelle serait l'intensité  $I$  parcourant une boucle circulaire de diamètre  $150 \mu\text{m}$  de moment magnétique  $m_a$  ? Commenter.

Pour mesurer la perméabilité magnétique, on utilise un impédancemètre équipé d'un dispositif de caractérisation de matériaux ferromagnétiques, sous la forme d'un bobinage de  $N_t$  spires enlaçant un tore formé de ce matériau. Le tore possède une longueur moyenne  $\ell_t$  et une section  $S_t$  (figure 6).



**Figure 6** Tore de mesure d'impédance

Le milieu ferromagnétique est étudié dans son domaine linéaire et sa perméabilité magnétique relative est notée  $\mu_r$ . On suppose que les lignes de champ adoptent la symétrie de révolution du tore. L'impédancemètre génère des signaux harmoniques de pulsation  $\omega = 2\pi f_0$  avec  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ .

**Q 13.** On suppose les normes des champs d'excitation magnétique  $\vec{H}$  et magnétique  $\vec{B}$  uniformes dans le tore. À quelle condition sur la géométrie du tore cette hypothèse est-elle justifiée ?



**Q 14.** En travaillant en coordonnées cylindriques, d'axe l'axe de révolution du tore, justifier que  $\vec{H} = H\vec{e}_\theta$  et  $\vec{B} = B\vec{e}_\theta$ .

**Q 15.** Exprimer les champs  $H$  et  $B$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $\mu_r$ ,  $N_t$ ,  $\ell_t$  et  $i$ . Préciser les orientations choisies.

**Q 16.** En déduire l'expression de l'impédance  $\underline{Z} = \frac{u}{i}$ . Y a-t-il dissipation d'énergie dans le matériau ?

Pour décrire plus complètement les propriétés du matériau ferromagnétique, on généralise la relation  $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$  à une relation entre champs complexes  $\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\mu_r}\underline{\vec{H}}$  où  $\underline{\mu_r}$  est la perméabilité relative complexe et l'on pose  $\underline{\mu_r} = \mu'_r - j\mu''_r$  où  $\mu'_r$  et  $\mu''_r$  sont des réels positifs.

**Q 17.** Exprimer la puissance moyenne  $P_c$  consommée dans le tore en fonction de la valeur efficace  $I_{\text{eff}}$  de l'intensité  $i$  et des caractéristiques du milieu.

**Q 18.** Dans le cadre d'un matériau de perméabilité relative complexe, tracer l'allure du cycle  $B(H)$  du matériau ferromagnétique. Évaluer le champ magnétique rémanent  $B_r$  et l'excitation coercitive  $H_c$ . On prendra les valeurs des paramètres données en fin de problème ainsi que les valeurs  $\mu'_r = 10^3$ ,  $\mu''_r = 4$  et l'intensité maximale dans la bobine  $I_{\text{max}} = 12$  A.

**Q 19.** Calculer la puissance moyenne  $P_{\text{diss}}$  dissipée dans le tore ferromagnétique. Quelle est la nature de cette perte ?

## II Le transformateur piézoélectrique

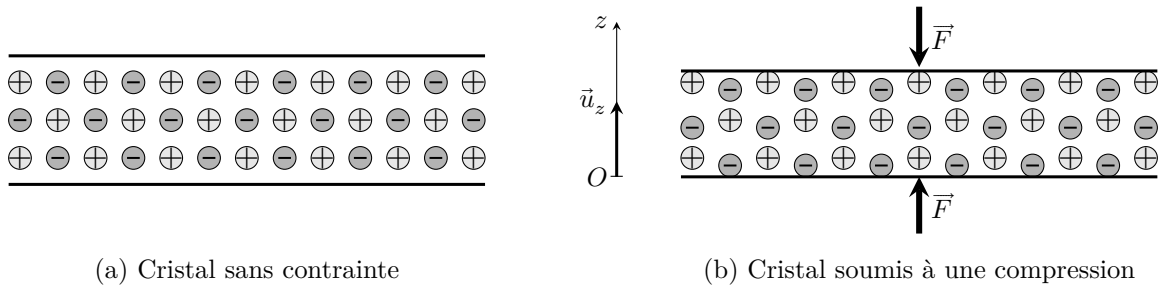
Aucune connaissance préalable de l'effet piézoélectrique n'est nécessaire pour répondre aux questions de cette partie.

À partir des années 1990 ont été développées des classes de transformateurs compacts de gains en tension élevés. Leur principe repose sur la piézoélectricité, une propriété de certains matériaux comme le quartz ou les céramiques de titano-zirconates de plomb (PZT).

### II.A – L'effet piézoélectrique

Les matériaux piézoélectriques ont la faculté de faire apparaître un champ électrique sous l'effet d'une déformation mécanique (effet direct). Réciproquement, ces matériaux se déforment lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique (effet inverse).

On considère un milieu cristallin ionique, isolant, homogène à l'échelle mésoscopique, mais dont les porteurs de charge, cations et anions, forment deux réseaux se déformant différemment sous l'effet de forces de compression (figure 7). Sans contrainte (figure 7a), la densité de charge est partout nulle. La permittivité relative du milieu est notée  $\varepsilon_r$ .



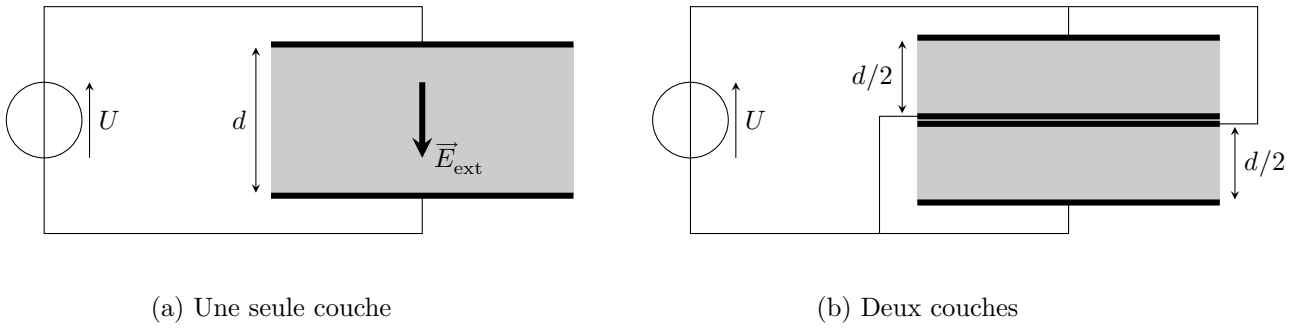
**Figure 7** Cristal piézoélectrique

**Q 20.** Quel est le signe de la charge de la face inférieure qui apparaît en cas de compression (figure 7b) ? On note  $\sigma$  la densité surfacique de charge correspondante. Dans le cas d'un milieu illimité dans les directions orthogonales à  $Oz$ , en détaillant le raisonnement effectué, établir l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  entre les deux faces en fonction de  $\sigma$  et des constantes électriques.

L'effet inverse est obtenu en appliquant un champ électrique  $\vec{E}_{\text{ext}}$  uniforme à un échantillon de matériau placé entre les armatures d'un condensateur. La déformation engendrée est proportionnelle au champ électrique appliqué.

La figure 8a représente un échantillon de matériau piézoélectrique parallélépipédique, d'épaisseur  $d$ , placé entre les armatures d'un condensateur. La figure 8b représente un échantillon à deux couches : un couple d'électrodes, isolées l'une de l'autre, est inséré entre deux couches de matériau, d'épaisseur  $d/2$ .

**Q 21.** Exprimer le champ électrique  $\vec{E}_2$  dans le cas des deux couches de la figure 8b, en fonction du champ  $\vec{E}_{\text{ext}}$  de la figure 8a. Généraliser au cas de  $N$  couches d'épaisseur  $d/N$  et exprimer  $\vec{E}_N$ . Exprimer enfin  $\vec{E}_N$  en fonction de la tension  $U$ , de l'épaisseur totale  $d$  et de  $N$ . Quel est l'avantage de ce système multicouche ?



**Figure 8** Matériau piézoélectrique placé dans un champ électrique

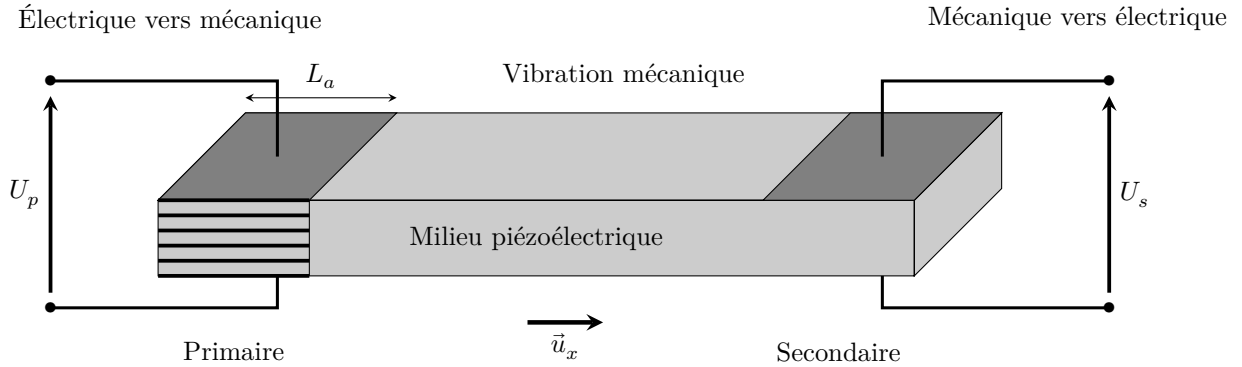
## II.B – Propagation de la déformation

Le champ électrique  $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$  appliqué au matériau provoque une variation  $\delta$  de sa largeur  $L_a$  telle que

$$\delta = \beta E_z,$$

où  $\beta$  est une constante dépendant du matériau. À l'inverse, une variation  $\delta$  de la largeur provoque l'apparition d'une composante du champ électrique  $E_z$  (effet direct) telle que

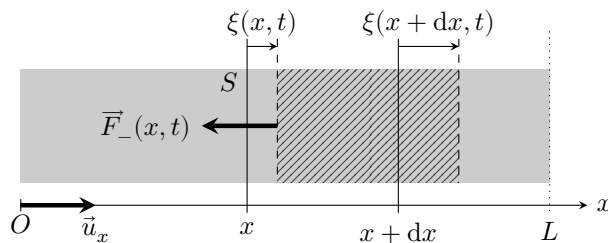
$$E_z = \frac{\delta}{\beta}.$$



**Figure 9** Principe du transformateur piézoélectrique — Au primaire, toutes les connexions aux électrodes multicouches n'ont pas été représentées

**Q 22.** On considère le schéma du transformateur de la figure 9. Le primaire est formé de  $N$  couches, le secondaire d'une seule. Si l'amplitude de la déformation au secondaire est identique à celle du primaire, quel est le rapport  $m$  de transformation en tension ? Ce transformateur fonctionnerait-il pour des signaux stationnaires ?

Une tension harmonique  $U_p(t) = U_0 \cos(\omega t)$  entraîne ainsi une déformation de même pulsation du matériau, déformation qui se propage selon l'axe  $Ox$ . Le matériau a la forme d'un barreau de section constante  $S$ . Parmi les modes de vibration possibles, on s'intéresse au mode longitudinal. La déformation longitudinale est représentée par le déplacement  $\xi(x, t)$  de la tranche située à l'abscisse  $x$  au repos (figure 10). On s'intéresse à un modèle aux faibles déformations.



**Figure 10** Propagation d'une onde acoustique longitudinale dans un barreau piézoélectrique

On considère le système matériel compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  quand le milieu est au repos, de masse  $dm = \rho S dx$  où  $\rho$  est la masse volumique du matériau (partie hachurée sur la figure 10). La force  $\vec{F}_-(x, t)$  exercée par le matériau en deçà de  $x + \xi(x, t)$  sur le système s'exprime par

$$\vec{F}_-(x, t) = -SK \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x$$

où  $K$  est une constante caractéristique du matériau.

**Q 23.** Quelle est la dimension de la constante  $K$  ? Exprimer la force  $\vec{F}_+(x + dx, t)$  exercée sur le système par la partie du matériau située au-delà de  $x + dx$ . En déduire la force résultante  $d\vec{F}_r$  sur le système à l'ordre un en  $dx$ .

**Q 24.** En assimilant la quantité de mouvement du système à  $dm \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) \vec{u}_x$ , établir l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

Donner l'expression de la constante  $c$  en fonction de  $K$  et  $\rho$ . Quel est le nom de cette équation ?

Les vibrations engendrées par le déplacement en  $x = 0$  se propagent dans le barreau, dans les deux sens, sous forme d'ondes planes harmoniques. On note  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  le vecteur d'onde.

L'extrémité en  $x = L$  du barreau est libre. En  $x = 0$ , l'amplitude forcée est donnée par  $\xi(0, t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ . La solution plane harmonique complexe s'exprime selon

$$\xi_p(x, t) = \underline{A} \exp(j(\omega t - kx)) + \underline{B} \exp(j(\omega t + kx)).$$

**Q 25.** Déterminer les constantes complexes  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  en fonction de  $\xi_0$ ,  $k$  et  $L$ . En déduire que l'amplitude complexe est de la forme

$$\xi_p(x, t) = \frac{\xi_0}{\underline{D}} \exp(j\omega t) \left[ \exp(-jkx) + \exp(-jk(2L - x)) \right]$$

et exprimer le dénominateur  $\underline{D}$ . Donner la signification physique de chaque terme de cette expression. De quel déphasage  $\Delta\varphi$  s'accompagne la réflexion de l'onde de déplacement ?

**Q 26.** En déduire les fréquences  $f_n$  de résonance du barreau en fonction de  $c$ ,  $L$  et d'un entier  $n$  non nul. Calculer la fréquence minimale  $f_0$  pour une céramique PZT de longueur  $L = 2$  cm. Que devient l'amplitude des vibrations aux fréquences de résonance ? Quel est l'inconvénient de la résonance pour un matériau solide ?

En réalité des phénomènes dissipatifs affectent la propagation de l'onde dans le milieu. On les modélise en prenant en compte une force supplémentaire

$$d\vec{f}_d = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) dm \vec{u}_x$$

sur le système de masse  $dm$  considéré auparavant.  $\tau$  est une constante.

**Q 27.** Établir la nouvelle équation des ondes.

Les solutions planes harmoniques complexes de l'équation précédente s'écrivent

$$\xi(x, t) = \underline{X}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$$

où  $\underline{X}_0$  est une constante complexe et  $\underline{k} = k' - jk''$  avec  $k'$  et  $k''$  des constantes réelles vérifiant  $|k''| \ll |k'|$ .

**Q 28.** Établir la relation de dispersion. Exprimer  $k''$  en notant que  $k' \simeq \frac{\omega}{c}$ .

**Q 29.** Qualitativement, quelles sont les modifications qu'apportent les phénomènes dissipatifs sur les fréquences de résonance et sur les amplitudes à ces fréquences ?

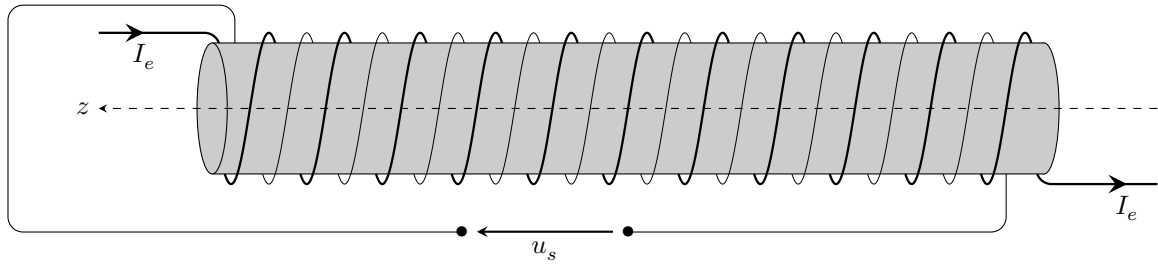
**Q 30.** Dans la figure A du document réponse, sont décrites des simulations de fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique alimentant une résistance de charge  $R_c$ . Analyser qualitativement et quantitativement ces graphes de façon à

- donner les valeurs des puissances d'entrée et de sortie et la puissance perdue lorsque la puissance de sortie est maximale. Commenter ;
- déterminer si les valeurs de la tension de sortie et la puissance de sortie sont en accord.

### III Mesures de champs magnétiques avec un capteur Fluxgate

L'élément magnétique sensible d'un capteur *Fluxgate* est un noyau magnétique doux qui est saturé périodiquement par un signal fourni par une bobine d'excitation. Cette saturation périodique provoque une discontinuité du signal mesuré aux bornes d'une bobine de mesure, ce qui donne le nom de ces capteurs (*Fluxgate* signifie littéralement en français « vanne de flux »).

Dans toute cette partie, on se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires magnétique.



**Figure 11** Fluxgate

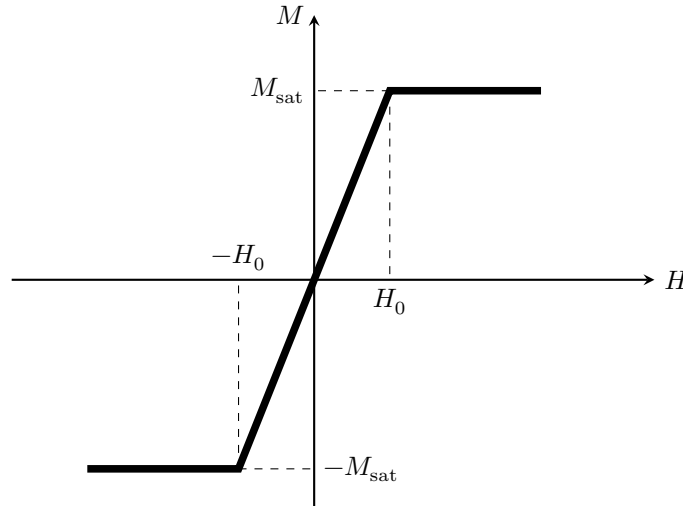
La figure 11 représente les éléments essentiels du capteur. Un barreau cylindrique ferromagnétique doux, de perméabilité relative  $\mu_r$ , de longueur  $\ell$ , de diamètre  $D$ , est enlaccé par deux enroulements. L'enroulement d'excitation (en trait gras), formé de  $N_f$  spires (densité linéique de spires  $n$ ), est parcouru par une intensité d'excitation sinusoïdale  $I_e(t) = I_{0e} \cos(\omega t)$ . On mesure la tension  $u_s(t)$  aux bornes de l'enroulement de mesure (en trait fin) qui compte  $N_f$  spires également. On néglige tout effet dû à un courant minime susceptible de circuler dans cet enroulement de mesure. On suppose que les spires sont circulaires, uniformément réparties sur le cylindre et que les champs sont uniformes dans le barreau.

**III.A** – Dans cette sous-partie, il n'y a pas de champ extérieur.

**Q 31.** Exprimer le champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$  dans le barreau. On détaillera la méthode utilisée.

**Q 32.** Dans le cas où le milieu magnétique se comporte linéairement, exprimer le champ magnétique  $\vec{B}$  en fonction de  $I_e$ ,  $n$ ,  $\mu_0$  et  $\mu_r$ . En déduire l'expression de la tension  $u_s(t)$  en fonction de  $I_{0e}$ ,  $\omega$ ,  $n$ ,  $N_f$ ,  $D$  et des constantes du milieu.

Le matériau ferromagnétique est caractérisé par la courbe d'aimantation  $M(H)$  simplifiée donnée sur la figure 12. On pose  $\frac{M_{\text{sat}}}{H_0} = \mu_r - 1$  et  $\mu_r = 4000$ .



**Figure 12** Courbe  $M(H)$ , où  $M = \vec{M} \cdot \vec{u}_z$  et  $H = \vec{H} \cdot \vec{u}_z$

**Q 33.** Sachant que  $I_{0e}$  est tel que la valeur maximale de l'excitation magnétique  $H_{\text{max}} = 2H_0$ , exprimer  $u_s(t)$  dans les deux domaines, linéaire et saturé.

**Q 34.** Représenter sur la figure B du document réponse les graphes des fonctions  $B(t) = \vec{B} \cdot \vec{u}_z$  et  $u_s(t)$ .

**III.B** – Le fluxgate est désormais placé dans un champ d'excitation extérieur  $\vec{H}_{\text{ext}} = H_{\text{ext}} \vec{u}_z$  uniforme et constant créé par une source extérieure au dispositif. Le courant d'excitation  $I_e(t)$  est inchangé.

**Q 35.** Quelle est l'expression de  $\vec{H}$  dans le barreau ? À l'aide des graphes de  $B(t)$  et de  $u_s(t)$  fournies figure C du document réponse, déterminer quelle inégalité est vérifiée par la valeur de  $H_{\text{ext}}$  :

- $H_{\text{ext}} > H_0$  ;
- $0 < H_{\text{ext}} < H_0$  ;
- $-H_0 < H_{\text{ext}} < 0$  ;
- $H_{\text{ext}} < -H_0$ .

**Q 36.** Toujours à l'aide des graphes de la figure C, estimer numériquement la valeur du rapport  $\frac{H_{\text{ext}}}{H_0}$ .

La détection et la mesure de  $H_{\text{ext}}$  sont effectuées grâce à une analyse spectrale du signal  $u_s(t)$ . On donne dans le tableau 1 les amplitudes complexes  $\underline{A}_n(H_{\text{ext}})$  pour  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  du spectre des signaux  $u_s(t)$  dans quatre cas :  $H_{\text{ext}} = 0$ ,  $H_{\text{ext}} = H_0/10$ ,  $H_{\text{ext}} = -H_0/10$  et  $H_{\text{ext}} = H_0/5$  pour le fondamental et les harmoniques  $n = 2$  à 5, soit pour les fréquences  $f_n = n f_1$ . Les amplitudes sont déterminées grâce à la fonction `rfft` de Python qui calcule la transformée de Fourier discrète d'un échantillon de points.

| fréquences                 | $f_1$             | $f_2$             | $f_3$              | $f_4$             | $f_5$             |
|----------------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| $H_{\text{ext}} = 0$       | $0,16 - 25,506j$  | $-0 + 0,006j$     | $-0,192 + 10,198j$ | $-0,001j$         | $-0,098 + 3,124j$ |
| $H_{\text{ext}} = H_0/10$  | $0,16 - 25,409j$  | $-0,035 + 2,787j$ | $-0,187 + 9,901j$  | $0,002 - 0,094j$  | $-0,084 + 2,664j$ |
| $H_{\text{ext}} = -H_0/10$ | $0,16 - 25,41j$   | $0,035 - 2,775j$  | $-0,187 + 9,903j$  | $-0,002 + 0,092j$ | $-0,084 + 2,667j$ |
| $H_{\text{ext}} = H_0/5$   | $0,158 - 25,113j$ | $-0,069 + 5,458j$ | $-0,171 + 9,052j$  | $0,002 - 0,084j$  | $-0,041 + 1,319j$ |

**Tableau 1** Amplitudes  $\underline{A}_n$  du spectre de Fourier discret selon les fréquences pour quatre valeurs de  $H_{\text{ext}}$

**Q 37.** Quel signal issu de la décomposition de Fourier discrète permet de mesurer  $H_{\text{ext}}$  avec le maximum de sensibilité ? Peut-on connaître le signe de  $H_{\text{ext}}$  ? Le signal qui détecte la présence du champ extérieur  $H_{\text{ext}}$  lui est-il proportionnel ?

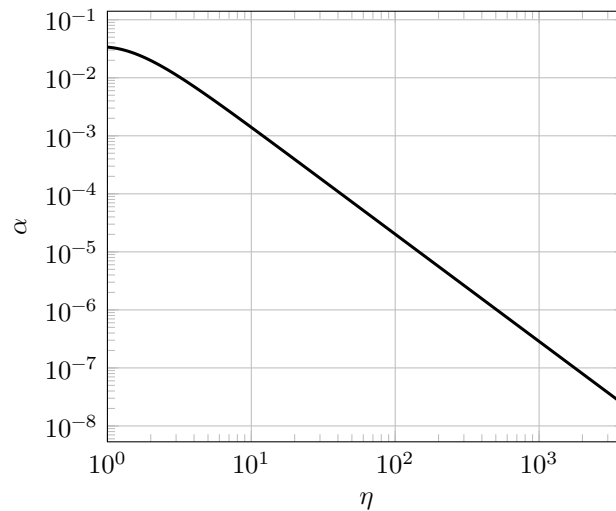
La longueur finie du barreau a une influence sur le champ d'excitation existant dans le barreau. Le champ d'excitation dans le matériau  $\vec{H}_r$  est donné en fonction du champ appliqué  $\vec{H}_{\text{ext}}$  par la relation

$$\vec{H}_r = \vec{H}_{\text{ext}} - 4\pi\alpha\vec{M}$$

où  $\alpha$  est une fonction du rapport  $\frac{\ell}{D}$ .

**Q 38.** Exprimer  $H_r = \vec{H}_r \cdot \vec{u}_z$  en fonction de  $H_{\text{ext}}$ ,  $\mu_r$  et  $\alpha$ , dans le domaine de linéarité du matériau. En déduire l'expression de  $H_r$  en fonction du champ magnétique extérieur  $B_{\text{ext}}$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_r$  et  $\alpha$ .

On donne figure 13 le graphe de la fonction  $\alpha(\eta)$  où  $\eta = \frac{\ell}{D}$  et les caractéristiques d'un fluxgate dans le tableau 2.



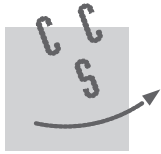
**Figure 13** Coefficient  $\alpha$  en fonction de  $\eta$ , rapport de la longueur sur le diamètre d'un barreau

|                                         |         |
|-----------------------------------------|---------|
| Diamètre du barreau                     | 2,25 mm |
| Longueur du barreau                     | 13,0 mm |
| Nombre de spires                        | 646     |
| Bruit $i_b$ de l'intensité d'excitation | 55 nA   |

**Tableau 2** Caractéristiques d'un fluxgate

**Q 39.** En considérant qu'un signal est détectable si  $|H_r|$  dépasse de 10 % le champ d'excitation  $H_b$  provoqué par le bruit  $i_b$  de l'intensité d'excitation  $I_e$ , quelle est la plus petite valeur  $B_{\text{min}}$  du champ magnétique extérieur détectable par le fluxgate dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2 ?

• • • FIN • • •



|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

Signature \_\_\_\_\_

[illegible][illegible]

Épreuve : Physique-chimie 2 PSI

Feville 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

 / 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

## Constantes générales

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$
$$\mathcal{N}_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$
$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$
$$m_e = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$$
$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$
$$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$$
$$\gamma_{Cu} = 5,9 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$$
$$\rho_{\text{Fe}} = 7,87 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$
$$M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$
$$\rho_{\text{PZT}} = 7,8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$
$$K_{\text{PZT}} = 2 \times 10^{11} \text{ SI}$$
$$N_t = 500$$
$$S_t = 0,6 \text{ cm}^2$$
$$\ell_t = 12,5 \text{ cm}$$

Ne rien écrire

dans la partie barrée

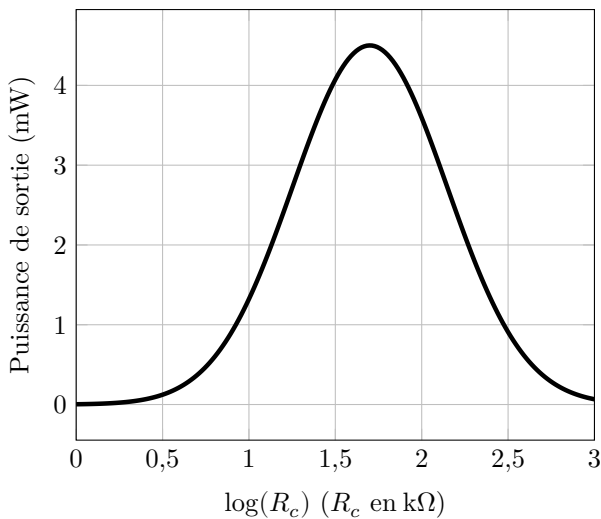
P066-DR/2023-03-20 11:54:20

## Question 30

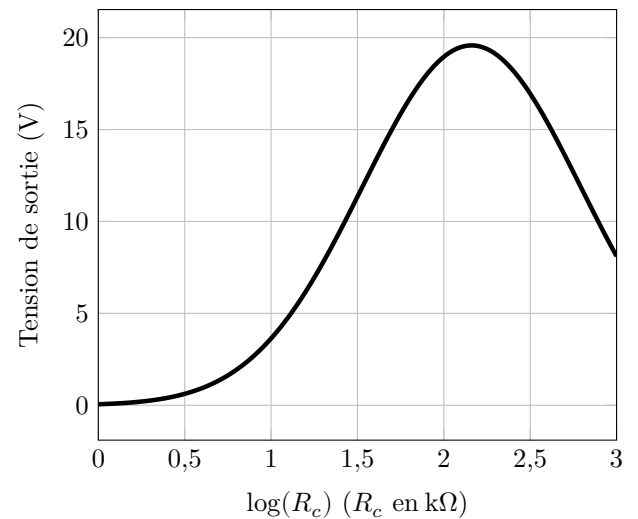
Sur la figure A, sont représentés la puissance, le rendement, la tension efficace de sortie et l'intensité efficace d'entrée en fonction de  $R_c$  pour une tension en entrée d'amplitude efficace 20 V. Pour chaque résistance  $R_c$ , on cherche la fréquence de résonance donnant le maximum de puissance et on détermine les autres grandeurs (tension, rendement, intensité) à cette fréquence.

Les pertes se traduisent aussi dans le niveau de puissance atteignable en sortie du transformateur. Nous avons mesuré ainsi une puissance maximale de sortie de 4,5 mW qui correspond ainsi à une densité de puissance de  $3,6 \text{ mW} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

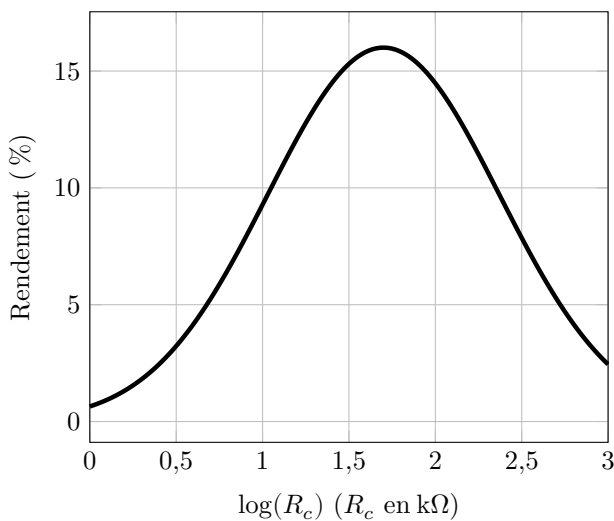
D'après *Thomas Martinez. Étude d'un transformateur piézoélectrique à onde progressive et de son application aux convertisseurs de puissance. Autre. Université Paris Saclay (COMUE), 2019. Français. NNT: 2019SACLN047. tel-0240618.*



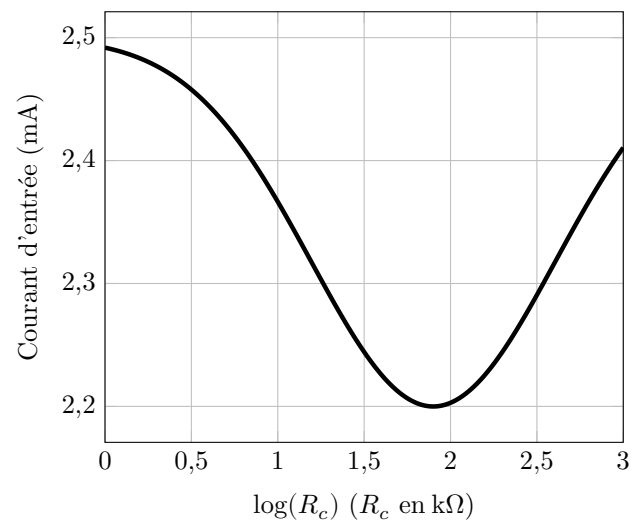
(a) Puissance de sortie



(b) Tension de sortie



(c) Rendement en puissance



(d) Courant d'entrée

**Figure A** Dépendance de la puissance de sortie, du rendement, de la tension de sortie et du courant d'entrée à la valeur de la résistance de charge  $R_c$  pour une tension d'entrée de 20 V (amplitude efficace)

Question 34

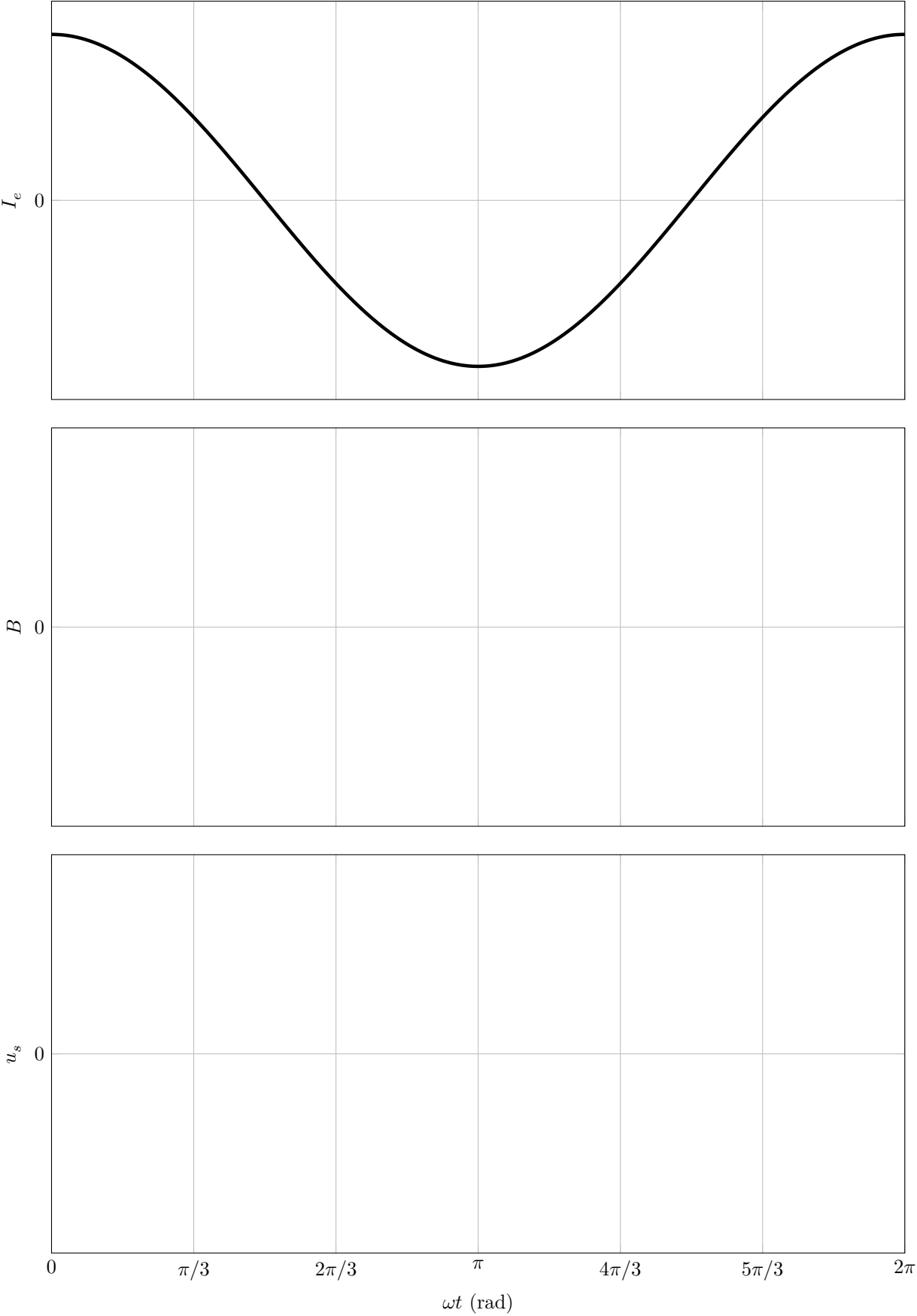
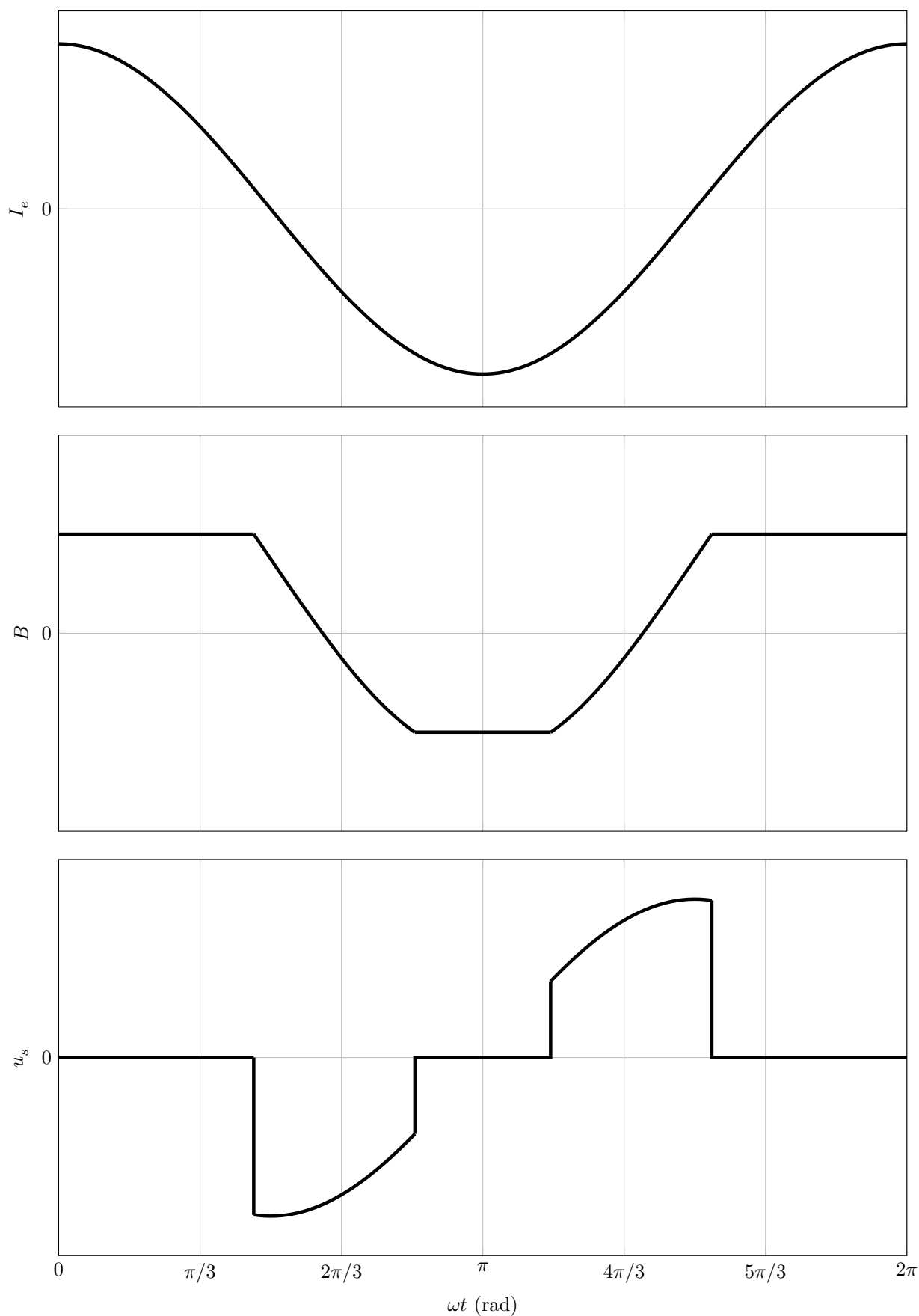


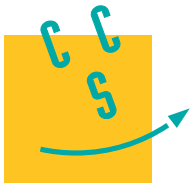
Figure B Graphes à compléter



Questions 35 et 36



**Figure C** Graphes en présence d'un champ magnétique extérieur



## À propos de la structure de la Terre

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure 1 :

- au centre, le noyau forme 17 % du volume terrestre et se divise en :
  - la graine (ou le noyau interne), essentiellement constitué de fer solide,
  - le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide ;
- dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81 % du volume terrestre ;
- en surface, la croûte solide représente moins de 2 % du volume terrestre.

Le problème aborde divers phénomènes et modèles en relation avec cette structure.

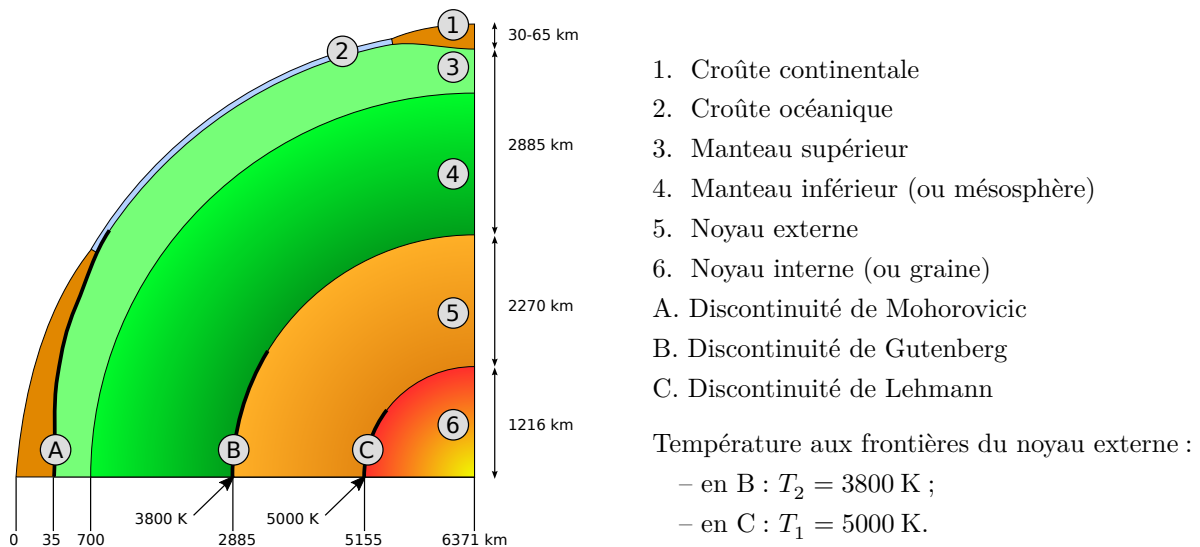


Figure 1 Structure de la Terre. D'après Wikipédia.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

On définit l'unité imaginaire  $i$ , nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

Un formulaire et certaines données numériques, qui complètent celles de la figure 1, sont disponibles en fin d'énoncé.

## I Des informations sur la structure de la Terre issues des ondes

Des informations sur la structure interne de la Terre sont obtenues par l'analyse des ondes sismiques qui s'y propagent suite aux grands séismes qui ont lieu dans la croûte solide. Ces ondes sont de natures variées :

- volumiques : elles peuvent alors être transversales (ondes S) ou longitudinales (ondes P) ;
- surfaciques : elles sont les plus destructrices et ne sont pas étudiées ici.

### I.A.1) Ondes longitudinales dans les fluides et solides homogènes

On considère une onde sonore se propageant de façon unidimensionnelle suivant un axe  $(Ox)$  dirigé par  $\vec{e}_x$  fixe dans un fluide homogène, de masse volumique  $\mu_0$  et de pression  $P_0$  à l'équilibre. Les grandeurs caractéristiques du fluide ne dépendent que de la position  $x$  et du temps  $t$ . Lors du passage de cette onde, le fluide subit une petite perturbation locale.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique. La masse volumique s'écrit  $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ , la pression  $P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$  et la vitesse  $\vec{v}(x, t) = v_1(x, t) \vec{e}_x$ . Les grandeurs  $\mu_1(x, t)$ ,  $P_1(x, t)$  et  $v_1(x, t)$ , associées à l'onde, sont des infiniment petits du premier ordre.

L'accélération d'une particule de fluide est donnée par la dérivée particulaire  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ . Les effets de la viscosité et de la pesanteur sont négligés et le référentiel d'étude est galiléen. L'évolution du fluide est supposée isentropique et on note  $\chi_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s$  son coefficient de compressibilité isentropique, où  $V$  est le volume d'une particule de fluide.

**Q 1.** On rappelle que l'équation locale de conservation de la masse s'écrit  $\partial \mu / \partial t + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$ . En la linéarisant par rapport aux variables  $\mu$  et  $v_1$  dans le cadre de l'approximation acoustique, établir l'équation aux dérivées partielles liant les variations temporelles de  $\mu_1(x, t)$  aux variations spatiales de  $v_1(x, t)$ .

**Q 2.** Écrire la projection sur  $\vec{e}_x$  du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide. Toujours dans le cadre de l'approximation acoustique, la linéariser par rapport à la vitesse et à la surpression.

**Q 3.** Établir une relation linéaire entre  $P_1(x, t)$  et  $\mu_1(x, t)$ .

**Q 4.** En déduire l'équation aux dérivées partielles, de propagation, satisfaite par  $P_1(x, t)$  et expliciter l'expression de la célérité  $c$  des ondes longitudinales de pression dans le fluide.

**Q 5.** Déterminer l'expression de la célérité  $c_1$  de ces ondes dans l'air (assimilé à un gaz parfait) en fonction de sa température  $T_0$ , de son rapport  $\gamma$  entre capacités thermiques à pression et volume constants, de sa masse molaire moyenne  $M_{\text{air}}$  et de la constante des gaz parfaits  $R$ . Faire l'application numérique pour  $T_0 = 293 \text{ K}$ ,  $\gamma = 1,40$ ,  $M_{\text{air}} = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Q 6.** Déterminer à présent la célérité  $c_2$  de ces ondes dans l'eau liquide à 293 K avec  $\chi_s = 4,90 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  et  $\mu_0 = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

La théorie précédente s'étend aux ondes longitudinales dans les solides isotropes dans le cadre de l'élasticité linéaire. On considère un barreau solide cylindrique d'axe  $(Ox)$ , de volume  $V$  constant, de longueur  $\ell$  et de section  $\Sigma$ . On définit pour ce barreau :

— la force par unité de surface, dite contrainte mécanique interne ( $T_c$  en Pa), qui est l'analogue de  $-P_1$  ;

— le module d'Young  $E$  du matériau tel que  $\frac{1}{E} = \frac{1}{\ell} \left( \frac{\partial \ell}{\partial T_c} \right)_s$ .

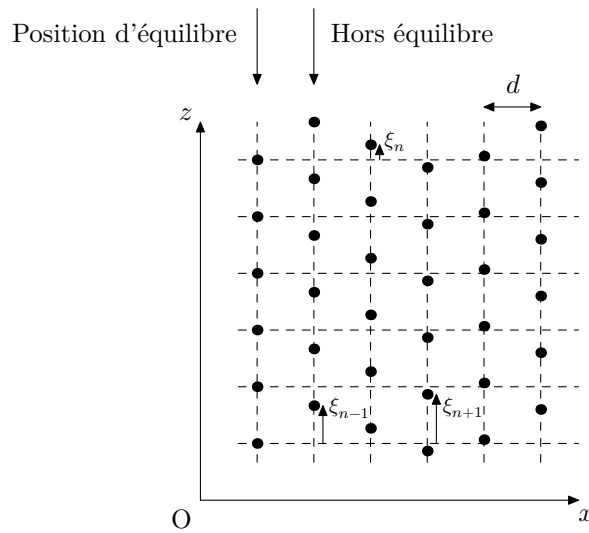
**Q 7.** En déduire l'expression de la célérité  $c_\ell$  des ondes longitudinales de compression-dilatation dans le barreau en fonction de  $E$  et de la masse volumique  $\mu$ . La calculer pour le fer à 293 K et sous pression atmosphérique sachant que, dans ces conditions,  $E = 196 \text{ GPa}$  et  $\mu_{\text{Fe}} = 7,87 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Q 8.** Proposer une interprétation physique pour les différences observées entre les célérités des ondes longitudinales  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_\ell$ .

### I.A.2) Ondes transversales dans un solide homogène

On étudie ici les ondes élastiques de déformation transverse se propageant suivant l'axe  $(Ox)$  d'un solide cristallin réduit à deux dimensions dans un plan  $(Oxz)$ , comme représenté à la figure 2. On considère les vibrations élastiques transversales de plans atomiques parallèles supposés identiques et de masse  $m$ . On note  $d$  la distance suivant l'axe  $(Ox)$  entre deux plans atomiques successifs. On suppose qu'au passage de l'onde transversale, chaque plan se déplace en bloc dans la direction  $(Oz)$ . On note alors  $\xi_n$  l'écart du plan de rang  $n$  à sa position d'équilibre.

On admet, pour simplifier, que le plan de rang  $n$  est soumis uniquement aux forces de rappel élastique de la part de chacun de ses deux plans plus proches voisins. La force exercée par le plan de rang  $n+1$  sur le plan de rang  $n$  est ainsi de la forme :  $\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = C(\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)) \vec{e}_z$ .



**Figure 2** Représentation schématisque des déplacements atomiques.

**Q 9.** Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle du déplacement du plan de rang  $n$  en fonction notamment de  $\xi_{n-1}(t)$ ,  $\xi_{n+1}(t)$  et  $\xi_n(t)$ .

On cherche des solutions de la forme  $\xi_n(t) = \underline{A} \exp(i(nkd - \omega t))$  en notation complexe où  $k$  est une constante réelle,  $\omega$  une constante réelle strictement positive et  $\underline{A}$  une constante complexe non nulle.  $\vec{k} = k \vec{e}_z$  est le vecteur d'onde et  $\omega$  la pulsation temporelle.

**Q 10.** Obtenir la relation de dispersion entre  $k$  et  $\omega$ . L'écrire sous la forme  $\omega = f(k, d, \omega_0)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{C/m}$ .

**Q 11.** Tracer l'allure de la courbe donnant  $\omega$  en fonction de  $k$  pour  $k \in ]-\pi/d, \pi/d[$ . Montrer que le cristal se comporte comme un filtre passe-bas dont on déterminera la pulsation de coupure  $\omega_c$ .

**Q 12.** Établir les expressions littérales de la vitesse de phase  $v_\varphi$  et de la vitesse de groupe  $v_g$  en fonction de  $k$ ,  $\omega_0$  et  $d$  pour  $k \in ]0, \pi/d[$ .

On se place à présent dans le cadre de l'approximation des milieux continus où la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes transversales est très grande devant  $d$ .

**Q 13.** Dédurre la célérité  $c_t$  des ondes transversales dans le cadre de cette approximation en fonction de  $d$ ,  $C$  et  $m$ .

La célérité  $c_t$  peut également être explicitée dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire selon la relation  $c_t = \sqrt{L/\mu}$  où interviennent des grandeurs macroscopiques du solide : son module de cisaillement  $L \approx 0,4E$  (en Pa) et sa masse volumique  $\mu$ .

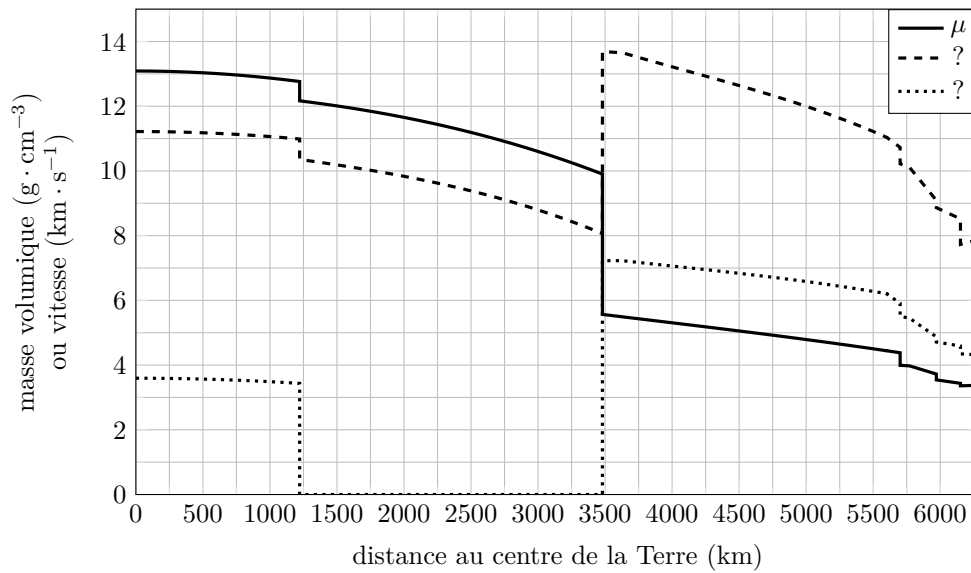
**Q 14.** Discuter la relation  $c_t = \sqrt{L/\mu}$  compte tenu du résultat de la question précédente. Calculer  $c_t$  pour le fer à 293 K et à pression atmosphérique.

### I.B – Ondes P et S dans la Terre et modèle PREM

Les ondes de volume dans la Terre, modélisée comme un milieu tridimensionnel élastique linéaire, sont de deux types :

- les ondes P de compression-dilatation de nature longitudinale. Elles peuvent se propager dans les milieux solides et fluides. Leur vitesse est donnée par  $v_P = \sqrt{(K + 4L/3)/\mu}$  où  $\mu$  est la masse volumique et  $K$  et  $L$  sont deux coefficients positifs appelés respectivement module d'incompressibilité et module de cisaillement (exprimés en Pa). Ces trois grandeurs sont caractéristiques du milieu traversé. Le module de cisaillement est généralement considéré comme nul dans les fluides où il est négligeable devant le module d'incompressibilité ;
- les ondes S de cisaillement. Elles ne se propagent effectivement que dans les solides. Leur vitesse est donnée par  $v_S = \sqrt{L/\mu}$ .

L'analyse de temps de parcours des ondes P et S, enregistrées en différents points du globe après de grands séismes, a permis de calibrer un modèle radial de la Terre dit modèle PREM (Preliminary Reference Earth Model). Il permet notamment de préciser, en fonction de la distance au centre de la Terre, les vitesses  $v_P$  et  $v_S$  et la masse volumique  $\mu$ .



**Figure 3** Profils de la masse volumique et des vitesses des ondes P et S dans le modèle PREM. D'après Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. *Preliminary reference Earth model*. Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 25, n° 4, p. 297-356.

**Q 15.** En explicitant la démarche, attribuer aux vitesses des ondes P et S les profils en tirets ou en pointillés de la figure 3. Discuter la cohérence de cette figure avec la structure interne de la Terre décrite dans l'introduction du sujet.

## II Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

### II.A – Préliminaire : l'analogie électrostatique-gravitation

**Q 16.** En utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, montrer que ce dernier, noté  $\vec{g}$ , vérifie l'équation locale  $\text{div } \vec{g} = -4\pi G\mu$  où  $G$  est la constante universelle de gravitation et  $\mu$  la masse volumique locale. En déduire l'énoncé du théorème de Gauss de la gravitation (analogue du théorème de Gauss de l'électromagnétisme).

### II.B – Un premier modèle gravimétrique fruste de la Terre

Dans ce premier modèle, on assimile la Terre à une boule  $T_h$  de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$  uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté  $\vec{g}_{T_h}$ . On note  $\mu_0$  la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique en chacun de ses points).

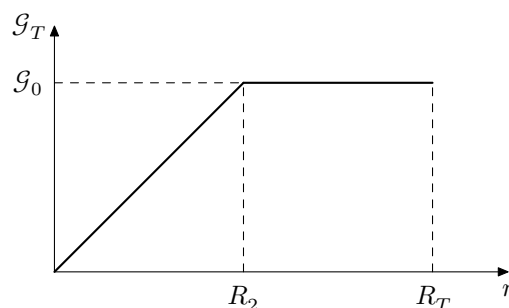
**Q 17.** Déterminer le champ gravitationnel  $\vec{g}_{T_h}$  en tout point de l'espace en introduisant un système de coordonnées adapté.

**Q 18.** Tracer sa norme en fonction de la distance  $r$  au centre  $O$ .

**Q 19.** Calculer sa valeur  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre.

### II.C – Un second modèle gravimétrique (noyau + manteau) de la Terre

Le modèle précédent est fruste puisqu'il ne tient pas assez compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre  $O$  et de rayon  $R_T$  avec une répartition de masse à symétrie sphérique de centre  $O$  ; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme  $\mathcal{G}_T$  du champ gravitationnel interne en fonction de la distance  $r$  au centre  $O$  présente l'allure précisée à la figure 4.



**Figure 4** Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau).

On distingue deux parties dans ce modèle (noyau + manteau) : la discontinuité de Gutenberg définie à la figure 1 correspond à la distance  $r = R_2$ .

On note toujours  $\mu_0$  la masse volumique moyenne de la Terre.

**Q 20.** Justifier que la valeur de  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport à celle évaluée à la question Q 19.

**Q 21.** Déterminer la distribution de masse volumique  $\mu(r)$  pour la Terre dans ce modèle. L'exprimer en fonction de  $R_T$ ,  $R_2$  et  $\mu_0$  dans le noyau et en fonction de  $R_T$ ,  $M_T$  et  $r$  dans le manteau.

**Q 22.** Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique  $\mu(r)$  en précisant les valeurs numériques remarquables. Discuter les similitudes et les différences de ce modèle avec le profil de masse volumique donné par le modèle PREM sur la figure 3.

### III Composition chimique de la graine

**Q 23.** Préciser le type de liaison à l'origine de la cohésion du cristal de fer.

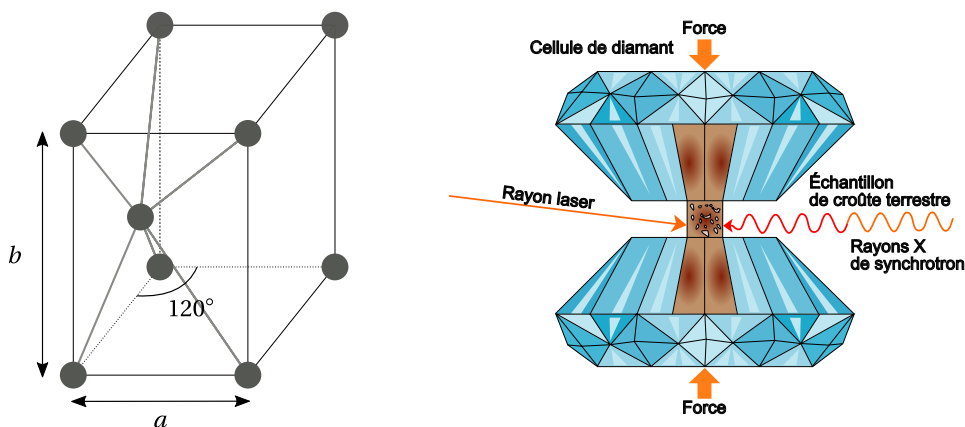
À pression atmosphérique, le fer existe à l'état solide sous plusieurs variétés allotropiques dont le fer  $\gamma$  pour  $912^\circ\text{C} < T < 1394^\circ\text{C}$ . Le fer  $\gamma$  cristallise dans une structure cubique à faces centrées.

**Q 24.** Représenter la maille du réseau cubique à faces centrées. Déterminer et calculer la compacité de la maille.

**Q 25.** Déterminer le rayon atomique  $r_{\text{Fe}_\gamma}$  du fer à pression ambiante pour la variété allotropique fer  $\gamma$  sachant que sa densité vaut  $d_{\text{Fe}_\gamma} = 7,87$ .

À la pression régnant dans la graine (noyau interne), le fer cristallise dans une autre variété allotropique, appelée fer  $\epsilon$ , de structure hexagonale compacte représentée à la figure 5, à gauche. La maille est un prisme droit à base losange, caractérisée par les paramètres de maille  $a$  et  $b$ . Elle contient huit atomes aux sommets et un à l'intérieur.

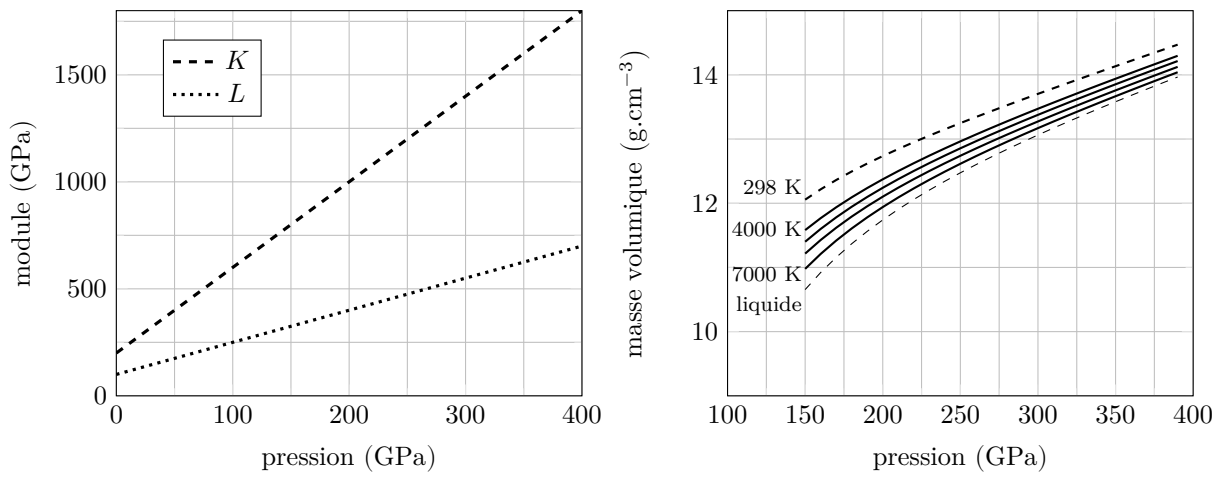
La pression dans la graine varie entre 330 et 350 GPa et la température est au-delà de 5000 K. La technologie de la presse à cellule de diamant, couplée à un chauffage par laser, ainsi qu'à des ondes de chocs, permet de chauffer et comprimer un échantillon de fer pour le placer dans des conditions proches de celles régnant dans la graine (figure 5, à droite). L'échantillon est alors éclairé par un faisceau synchrotron de rayons X dont la diffraction renseigne sur sa structure cristalline, sa masse volumique et les vitesses des ondes mécaniques qui s'y propagent. Connaissant ces vitesses, on peut en déduire les modules élastiques  $K$  et  $L$ . Les résultats sont présentés à la figure 6.



**Figure 5** Gauche : représentation schématique de la maille hexagonale compacte.  
Droite : représentation schématique d'une enclume à diamants (source Wikipédia).

**Q 26.** En vous appuyant sur les résultats présentés à la figure 6, ainsi que sur les profils de masse volumique et de vitesses prévus par le modèle PREM en figure 3, montrer que le noyau ne peut pas être constitué que de fer pur et que la prise en compte d'éléments plus légers est nécessaire.

Un élément dont le rayon atomique est proche de celui du fer pourra se substituer à ce dernier dans la maille pour former un alliage par substitution. Au contraire, un élément dont le rayon est assez petit pour venir se loger dans un site interstitiel vacant sans déformer la maille formera un alliage par insertion. Des éléments satisfaisant à ces conditions présenteront une forte affinité pour le fer solide.



**Figure 6** À gauche, modules d'incompressibilité  $K$  et de cisaillement  $L$  dans le fer  $\varepsilon$  en fonction de la pression. À droite, masse volumique du fer  $\varepsilon$  en fonction de la pression à différentes températures. D'après Mao H. et al., 1998. *Elasticity and Rheology of Iron above 220 GPa and the Nature of the Earth's Inner Core*. Nature. Vol. 396, p. 741-743 et d'après Fiquet G. et al., 2007. *A new thermal equation of state for iron at megabar pressure*. American Geophysical Union. Fall Meeting, abstract DI24A-05.

D'autre part, les structures hexagonale compacte et cubique à faces centrées étant deux structures compactes, leurs sites interstitiels tétraédriques et octaédriques sont de mêmes dimensions.

On supposera que la phase haute pression est soumise à une pression isotrope. De fait, les paramètres de maille et les rayons atomiques sont réduits d'un même facteur. On raisonnera donc ensuite par commodité sur la maille à pression ambiante.

Hypothèse : lors de la cristallisation du noyau formant la graine, certains éléments légers seraient expulsés des cristaux de fer formés, ce qui enrichirait la base du noyau liquide en ces éléments légers<sup>1</sup>.

**Q 27.** Il est communément admis que le noyau est constitué d'environ 80 % de fer pur associé à 10 % de nickel, les 10 % restant étant des éléments plus légers (essentiellement le silicium (Si) et l'oxygène (O)). Montrer que l'hypothèse précédente est en adéquation avec la structure de la maille du fer à haute pression.

## IV Aspects thermiques au sein du noyau de la Terre

On définit le flux géothermique moyen  $\Phi_Q$  comme étant le flux thermique total issu de l'intérieur du globe terrestre à la surface de la Terre. Il est d'environ  $4 \times 10^{13}$  W et on estime qu'un quart de ce flux (soit  $1 \times 10^{13}$  W) est issu du noyau terrestre (le reste étant produit essentiellement dans le manteau). Ce flux thermique issu du noyau est appelé flux thermique profond et est noté  $\Phi_{th,pr}$ . Il résulte de trois contributions :

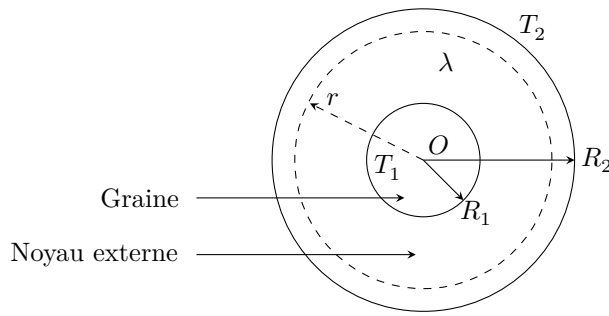
- environ 90 % correspondent au flux thermique initial  $\Phi_{th,i}$  ( $9 \times 10^{12}$  W) : il est associé au refroidissement progressif du noyau profond qui libère sous forme thermique l'énergie (gravitationnelle et cinétique) accumulée pendant la phase d'accrétion initiale de la Terre ;
- environ 10 % correspondent au flux thermique de différenciation, noté  $\Phi_{th,d}$  ( $1 \times 10^{12}$  W) : c'est l'énergie libérée par la cristallisation du noyau externe liquide à l'interface avec la graine solide.
- le reste, environ 0,06 %, provient des désintégrations radioactives au sein du noyau (la teneur en éléments radioactifs y étant très faible).

L'étude dans cette partie sera intégralement effectuée en régime stationnaire de transferts thermiques.

### IV.A – Transferts thermiques dans le noyau externe

Le noyau terrestre, constitué de la graine et du noyau externe, est assimilé à une masse sphérique. Le noyau externe est le siège de transferts thermiques modélisés uniquement par de la conduction thermique avec une conductivité thermique, notée  $\lambda$ , uniforme et constante. On pose  $T(r = R_1) = T_1$  la température à la surface de la graine solide et  $T(r = R_2) = T_2 < T_1$  la température à la surface supérieure du noyau externe. La figure 7 explicite les notations, en complément de la figure 1 qui intègre des données utiles.

<sup>1</sup> On rend compte de ce processus, comme dans la partie V, par la notion de coefficient de partage des éléments légers entre les phases liquide et solide du fer, ce qui traduit l'affinité qu'a l'élément pour le fer solide ou le fer liquide.



**Figure 7** Schématisation du noyau terrestre.

**Q 28.** Exprimer le flux thermique  $\Phi_{th}(r)$  traversant par conduction, dans le sens radial croissant, la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r \in [R_1, R_2]$  en fonction de  $\lambda$ ,  $r$  et  $\frac{dT}{dr}(r)$ .

**Q 29.** Expliquer pourquoi il est raisonnable de considérer ce flux thermique indépendant de  $r$  dans le noyau externe. En déduire l'expression de la conductivité thermique  $\lambda$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et du flux thermique profond  $\Phi_{th,pr}$ .

**Q 30.** Estimer la valeur de la conductivité thermique  $\lambda$  dans ce modèle.

Des mesures sur le fer liquide et ses alliages envisagés pour la constitution du noyau externe, effectuées dans ses conditions de température et de pression élevées, fournissent des valeurs de conductivité thermique d'au plus  $1 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Q 31.** Conclure à propos des mécanismes de transfert thermique réels dans le noyau externe.

#### IV.B – Croissance de la graine

Le noyau se refroidissant, la graine voit son rayon croître très lentement par cristallisation du liquide à sa surface.

On considère, dans le noyau externe, une pellicule sphérique d'épaisseur  $dr$ , au contact de la graine. Cette pellicule fluide a une température uniforme égale à la température du solide de la graine avec laquelle elle est en contact. Sa pression est supposée uniforme et constante de même que sa masse volumique qui sera prise égale à  $\mu_N = 1 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On néglige tout mouvement convectif au cours du processus de cristallisation. À l'instant  $t$ , l'interface entre la graine et le noyau externe est repérée par  $r(t) = R_1$ . On suppose qu'entre  $t$  et  $t + dt$ , cette pellicule se cristallise, l'interface progressant ainsi, de façon homogène et isotrope, de  $r$  à  $r + dr$ .

On estime actuellement que le taux de croissance du rayon de la graine est  $\tau = dr/dt \approx 0,3 \text{ mm/an}$ .

**Q 32.** Montrer que le taux de croissance de la graine s'écrit

$$\tau = -\frac{\Phi_{th,d}}{4\pi R_1^2 \mu_N \Delta_{sol} h}$$

où  $\Delta_{sol} h$  est l'enthalpie massique de solidification du fluide du noyau externe dans les conditions de température et de pression qui règnent à l'interface.

**Q 33.** En déduire une estimation de la valeur de  $\Delta_{sol} h$ . Discuter le résultat sachant que l'enthalpie massique de solidification du fer à température et pression ambiante est de  $-270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

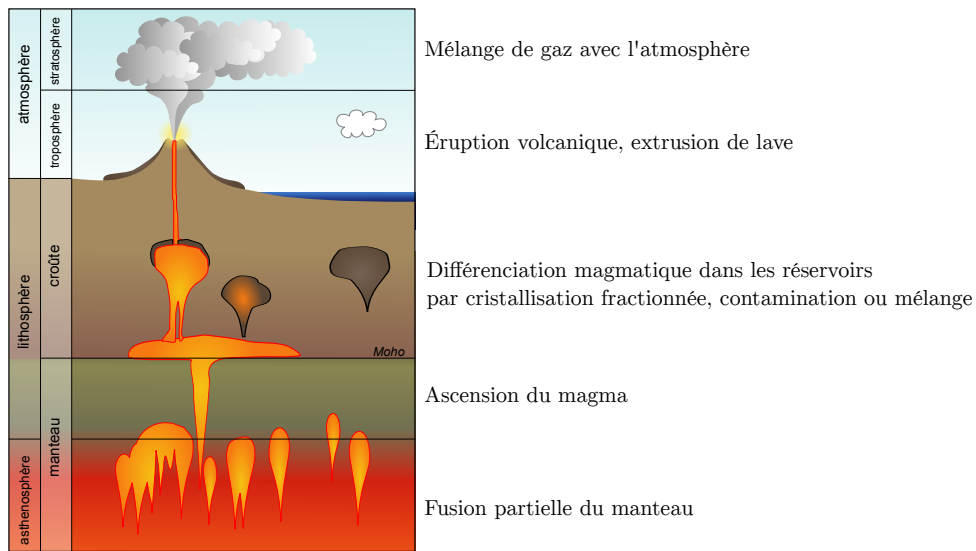
## V Coefficient de partage et type de volcanisme

Les magmas sont issus de la fusion partielle des roches du manteau, qui conduit à la formation d'un premier magma appelé magma primaire. Celui-ci cristallise par un refroidissement lent dans la chambre magmatique alimentant un volcan (figure 8). Lors de la cristallisation, les éléments chimiques se répartissent entre la phase solide en formation et la phase liquide, selon leur compatibilité avec les réseaux cristallins des solides formés. Ainsi, les minéraux cristallisent graduellement en quittant le liquide magmatique résiduel et modifient localement sa composition chimique : on parle de différenciation du magma par cristallisation fractionnée.

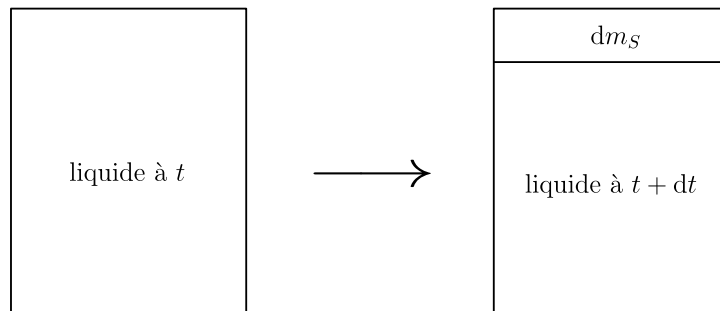
#### V.A – Loi de Rayleigh

On propose de caractériser ce processus de cristallisation par le modèle suivant : on étudie l'évolution de la masse de liquide lors de l'étape de cristallisation ayant lieu entre  $t$  et  $t + dt$  (figure 9). On notera  $m_L(t)$  la masse de liquide restant à l'instant  $t$ . Par ailleurs, on note  $m_L^i(t)$  et  $m_L^i(t + dt)$  les masses respectives d'élément  $i$





**Figure 8** Magnétisme et volcanisme. D'après Wikipédia.



**Figure 9** Processus de cristallisation entre  $t$  et  $t + dt$ .

dans la phase liquide à  $t$  et à  $t + dt$  et  $m_S^i(t + dt)$  la masse d'élément  $i$  dans la masse  $dm_S$  de magma solide qui cristallise entre  $t$  et  $t + dt$ .

On note  $w_L^i$  et  $w_S^i$  les fractions massiques respectives de l'élément dans les phases liquide et solide, exprimées ici en parties par million (ppm) avec  $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = 1 \text{ mg} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**Q 34.** Exprimer  $m_L^i(t)$ ,  $m_L^i(t + dt)$  et  $m_S^i(t + dt)$  en fonction de  $w_L^i(t)$ ,  $w_L^i(t + dt)$ ,  $w_S^i(t + dt)$ ,  $m_L(t)$ ,  $m_L(t + dt)$  et  $dm_S$ .

On utilise la notion de coefficient de partage solide-liquide de l'élément  $i$ , noté  $D_i$ , pour caractériser ce transfert de l'élément  $i$  de la phase liquide vers la phase solide. Ce coefficient est d'autant plus grand que l'élément a une grande compatibilité avec le réseau cristallin de la phase solide. Il est défini par  $D_i = \frac{w_S^i(t + dt)}{w_L^i(t)}$ . On le suppose constant sur chaque étape de différenciation considérée.

On note  $m_{L,0}$  la masse initiale de liquide magmatique avant différenciation et  $f = \frac{m_L}{m_{L,0}}$  le degré de différenciation. La fraction massique initiale de l'élément  $i$  dans la phase liquide est notée  $w_{L,0}^i$ .

**Q 35.** En traduisant la conservation de la matière totale, puis la conservation de l'élément  $i$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , établir une relation entre  $D_i$ ,  $\frac{dm_L}{m_L}$  et  $\frac{dw_L^i}{w_L^i}$ . En déduire la loi dite de Rayleigh :

$$w_L^i(t) = \beta f^{D_i-1}$$

où on exprimera  $\beta$  en fonction des données du problème.

### ***V.B – Validation de l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée***

Dans la suite de cette partie, on veut valider l'hypothèse que le magma actif dans la formation des volcans de la Chaîne des Puys, près de Clermont-Ferrand, suit effectivement un processus de cristallisation fractionnée.

Le volcanisme lié à la Chaîne des Puys a débuté il y a environ 100 000 ans et a présenté quatre périodes majeures : entre  $-100\,000$  et  $-90\,000$  ans ; entre  $-75\,000$  et  $-70\,000$  ans ; entre  $-45\,000$  et  $-30\,000$  ans et entre  $-13\,500$  et  $-9\,000$  ans. On dispose d'un ensemble d'échantillons de roches volcaniques éjectées lors de ces

périodes d'activité, chacune étant donc relative à un stade plus ou moins avancé de différenciation du magma au moment de l'éruption. Le Rubidium (Rb) et le Thorium (Th) sont présents à l'état de traces dans les liquides et les roches magmatiques. Ils se caractérisent par une forte affinité pour le liquide magmatique dans lequel ils forment des structures très stables et, au contraire, sont incompatibles avec la plupart des mailles cristallines. Leurs coefficients globaux de partage dépendent peu de la nature des phases minérales du solide qui cristallise. Il est d'autre part possible de doser la teneur en Rb et Th dans des échantillons de roches. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.

|                       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $w(\text{Rb})$ en ppm | 5,21 | 6,52 | 6,81 | 8,51 | 12,8 | 13,5 | 15,8 | 17,9 | 21,3 | 22,1 |
| $w(\text{Th})$ en ppm | 37,5 | 46,7 | 47,8 | 57,1 | 90,6 | 90,9 | 110  | 130  | 152  | 157  |

**Tableau 1** Extrait des données relatives à l'évolution de la fraction massique en Rb en fonction de celle en Th en parties par million (ppm) dans différents produits volcaniques de la Chaîne des Puys. D'après Villemant B., 1985. *La différenciation des séries volcaniques : géochimie des éléments tracés dans les séries du Massif Central et d'Italie centrale*. Thèse de doctorat. Université Paris VI.

On suppose que le résultat de mesure est bien décrit par une variable aléatoire de densité normale avec une incertitude-type sur les fractions massiques de la forme  $u(w) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} w$  où  $\Delta = 5 \%$ .

Les produits volcaniques éjectés lors d'une éruption sont représentatifs de la composition du liquide magmatique dont ils sont issus à un moment donné dans l'histoire de la différenciation de ce liquide.

**Q 36.** Montrer que, pour deux éléments  $i$  et  $j$  dont les coefficients de partage vérifient  $D_i \ll 1$  et  $D_j \ll 1$ , le rapport  $w_L^i/w_L^j$  est constant.

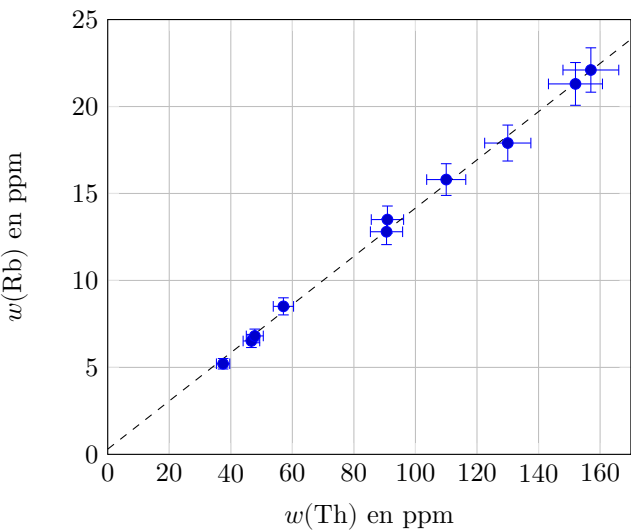
On se propose d'utiliser une procédure Monte-Carlo pour valider l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée. Le code en langage Python correspondant est fourni en annexe 1 ; des informations complémentaires sont précisées en annexe 2.

**Q 37.** Décrire en quelques lignes le principe d'une simulation Monte-Carlo en faisant le lien avec les variables A, X, a et u\_a du code proposé en annexe 1. On commentera en particulier précisément le rôle des lignes 25, 36 et 38.

On obtient après une exécution du code Python de l'annexe 1 dans l'interpréteur l'affichage suivant :

La pente a est 0.1386273960033664 d'incertitude-type 0.0049036710758989  
L'ordonnée à l'origine b est 0.2983346169365785 ppm d'incertitude-type  
0.3494478625397468 ppm

On obtient également le graphique de la figure 10 où l'incertitude élargie à 95 % de confiance est donnée par  $U = 2u$ ,  $u$  étant l'incertitude-type.



**Figure 10** Tracé de  $w(\text{Rb})$  en fonction de  $w(\text{Th})$  avec des barres d'incertitudes élargies à 95 % de confiance.

**Q 38.** Expliquer en quoi ce résultat permet de conclure sur la validation de l'hypothèse de processus de cristallisation fractionnée.

## V.C – Caractérisation du type de volcanisme de la Chaîne des Puys

Une fois ce processus de cristallisation fractionnée validé, on cherche désormais à décrire le type de volcanisme (explosif ou effusif) de la Chaîne des Puys.

Les premiers cristaux à se former dans la chambre magmatique sont les olivines, qui sont riches en magnésium et en fer, et pauvres en silice. Les cristaux d'olivine se séparent du liquide magmatique, ce qui l'appauvrit en magnésium et en fer et l'enrichit en silice.

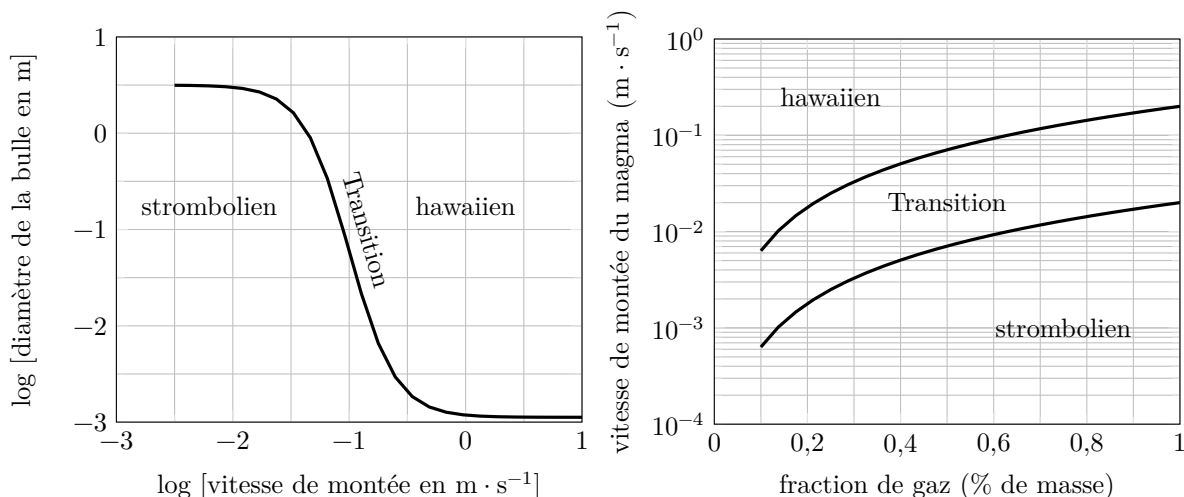
Pour les volcans soumis à des processus de cristallisation fractionnée, le magma se différencie en s'enrichissant progressivement en silice, ce qui fait augmenter sa viscosité. Au contraire, les magmas qui ne suivent pas ce processus ont des viscosités qui restent faibles. D'autre part, en profondeur, le magma à haute pression peut contenir de grandes quantités de gaz, sous forme dissoute, qui vont former des bulles de gaz lors de la remontée du magma. Pour les volcans de la Chaîne des Puys, les magmas sont très riches en gaz dissous.

On distingue typiquement deux grands types d'éruptions :

- les éruptions de type hawaïien, effusives, où la lave s'écoule progressivement à partir du cratère ;
- les éruptions de type strombolien qui se caractérisent par une dynamique éruptive explosive produisant des coulées pyroclastiques dévastatrices (on parle de nuées ardentes comme celle qui ravagea Pompéi en 79 après J.C. lors d'une éruption du Vésuve). La figure 11 montre une nuée ardente observée sur les pentes du Stromboli.



**Figure 11** Éruption de type strombolien (source : Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia).



**Figure 12** D'après Parfitt E. A., Wilson L., 1995. *Explosive volcanic eruptions-IX. The transition between Hawaiian-style lava fountaining and Strombolian explosive activity*. Geophysical Journal International. Vol. 121, n° 1, p. 226-232.

**Q 39.** En exploitant la figure 12, décrire précisément les caractéristiques du magma (taille des bulles, vitesse de remontée du magma, abondance de gaz) pour les deux types d'éruptions (stromboliens et hawaïiens).

**Q 40.** En déduire le lien entre la viscosité et le caractère explosif ou effusif de l'éruption, puis à quel type de volcanisme se rattachent les volcans de la Chaîne des Puys.

# Formulaire et données

## Formulaire

Le gradient en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \xi = \frac{\partial \xi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

La divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

## Données

|                                      |                                                                                 |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| Masse molaire du fer                 | $M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$                          |
| Masse molaire du silicium            | $M_{\text{Si}} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$                            |
| Masse molaire de l'oxygène           | $M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$                             |
| Numéro atomique du fer               | $Z = 26$                                                                        |
| Constante d'Avogadro                 | $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                                    |
| Constante universelle de gravitation | $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| Rayon de la Terre                    | $R_T = 6371 \text{ km}$                                                         |
| Masse de la Terre                    | $M_T = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$                                         |

Rayons atomiques à pression et température ambiantes :

|                             |                                  |
|-----------------------------|----------------------------------|
| Rayon atomique du nickel    | $r_{\text{Ni}} = 125 \text{ pm}$ |
| Rayon atomique de l'oxygène | $r_{\text{O}} = 60 \text{ pm}$   |
| Rayon atomique du silicium  | $r_{\text{Si}} = 110 \text{ pm}$ |

## Annexe 1 – Code Monte Carlo

```
1  # Importation des bibliothèques
2  import numpy as np  # Commandes de calculs numériques
3  import numpy.random as rd  # Commandes de générateurs aléatoires
4  import matplotlib.pyplot as plt  # Commandes de tracés
5
6  # Liste des valeurs des fractions massiques w en Rb en ppm
7  Rb = [5.21, 6.52, 6.81, 8.51, 12.8, 13.5, 15.8, 17.9, 21.3, 22.1]
8  # Liste des valeurs des fractions massiques w en Th en ppm
9  Th = [37.5, 46.7, 47.8, 57.1, 90.6, 90.9, 110, 130, 152, 157]
10
11 # Régression linéaire
12 # Calcul de la pente et de l'ordonnée à l'origine
13 # de la droite  $w(Rb) = a \cdot w(Th) + b$ 
14 a, b = np.polyfit(Th, Rb, 1)
15
16 # Incertitude-types sur les fractions massiques en Rb et Th
17 u_Rb = [0.05*y/np.sqrt(3) for y in Rb]
18 u_Th = [0.05*x/np.sqrt(3) for x in Th]
19 NbreTirages = 10000
20 A, B = [], []
21 A_carre, B_carre = [], []
22 for j in range(NbreTirages):
23     X = []
24     for i in range(len(Th)):
25         x = rd.normal(Th[i], u_Th[i], 1)[0]
26         X.append(x)
27     Y = []
28     for k in range(len(Rb)):
29         y = rd.normal(Rb[k], u_Rb[k], 1)[0]
30         Y.append(y)
31     a, b = np.polyfit(X, Y, 1)
32     A.append(a)
33     A_carre.append(a**2)
34     B.append(b)
35     B_carre.append(b**2)
36 am = sum(A)/NbreTirages
37 bm = sum(B)/NbreTirages
38 u_a = np.sqrt(sum(A_carre)/NbreTirages-am**2)
39 u_b = np.sqrt(sum(B_carre)/NbreTirages-bm**2)
40
41 # Affichage des résultats de la modélisation
42 print("La pente a est", am, "d'incertitude-type", u_a)
43 print("L'ordonnée à l'origine b est", bm, "ppm d'incertitude-type", u_b, "ppm")
44
45 # Tracé des données avec incertitudes élargies et du modèle affine
46 plt.errorbar(Th, Rb, xerr=2*np.array(u_Th), yerr=2*np.array(u_Rb), capsize=3, fmt="o")
47 plt.plot([0, 170], [bm, am*170+bm], 'k--')
48 plt.axis([0, 170, 0, 25]) # Limites du tracé
49 plt.xlabel("w(Th) en ppm") # Légende des abscisses
50 plt.ylabel("w(Rb) en ppm") # Légende des ordonnées
51 plt.grid() # Grille
52 plt.show() # Affichage
```

## Annexe 2 – Quelques fonctions et opérations Python disponibles

Fonctions :

- `range(n)` renvoie la séquence des `n` premiers entiers (de 0 à `n-1`) ;
- `np.sqrt(x)` renvoie  $\sqrt{x}$ .

Opérations sur les listes :

- `len(L)` donne le nombre d'éléments de la liste `L` ;
- `L.append(e)` ajoute l'élément `e` à la fin de la liste `L` ;
- `L[i]` renvoie le `i`-ième élément de la liste `L` ;
- `sum(L)` renvoie la somme des éléments de la liste `L`.

Opérations sur les tableaux numpy (`np.array`) :

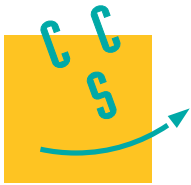
- `len(A)` : taille du tableau `A` dans sa première dimension (nombre d'éléments pour un vecteur, nombre de lignes pour une matrice) ;
- `np.random.normal(a, u_a, N)` renvoie un tableau unidimensionnel de taille `N` contenant `N` valeurs aléatoires suivant une loi normale de valeur moyenne `a` et d'écart-type `u_a` ;
- `np.polyfit(L1, L2, 1)` renvoie un tuple contenant la pente et l'ordonnée à l'origine issues d'une modélisation affine des éléments de `L2` en fonction de ceux de `L1`.

---

• • • FIN • • •

---





## À propos de l'environnement marin

Le problème comporte deux parties indépendantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

### Partie A – L'énergie thermique des mers

En 1869, dans son livre, *Vingt mille lieues sous les mers*, Jules Verne fait référence aux « eaux de surface et les eaux profondes des océans pour produire de l'électricité ». Cette idée d'utiliser la différence de température entre les eaux de surface et les eaux profondes afin de produire de l'électricité est appelée ETM (énergie thermique des mers) en français et OTEC (*Ocean Thermal Energy Conversion*) en anglais.

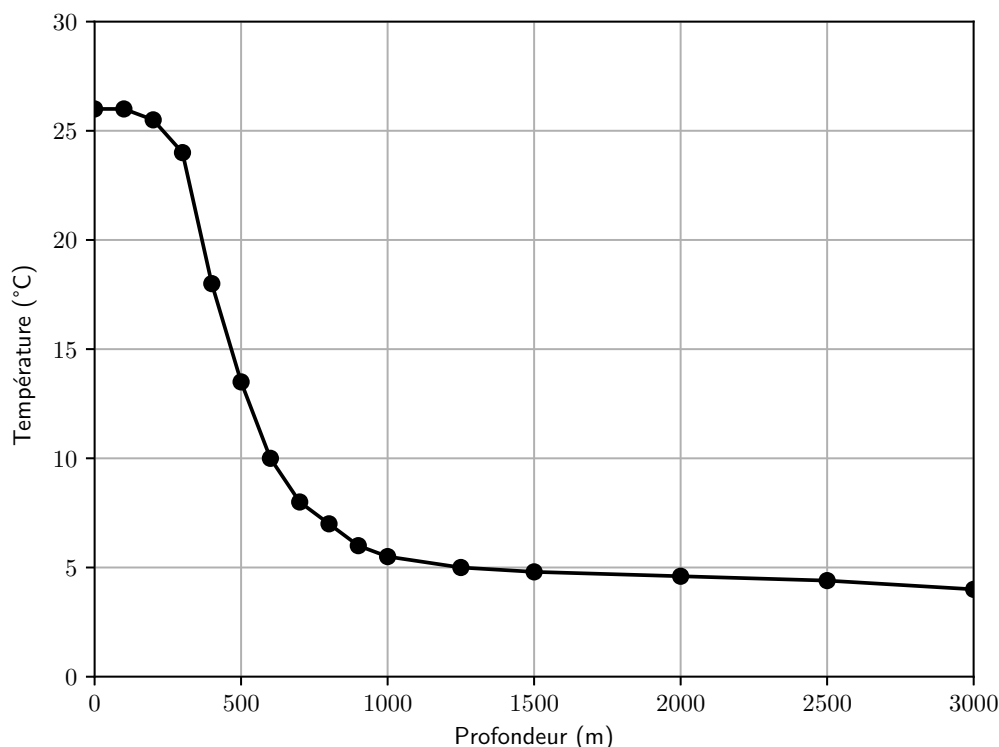
L'IFREMER considère que le coût du pompage des eaux profondes n'est rentable que pour une différence de température d'au moins  $20^{\circ}\text{C}$  entre l'eau de mer chaude prélevée à la surface et l'eau de mer froide prélevée en profondeur.

#### I Généralités

**Q 1.** Représenter le diagramme synoptique d'une machine ditherme produisant du travail en précisant les signes des différents échanges énergétiques.

**Q 2.** Exprimer et calculer le rendement de Carnot de cette machine fonctionnant entre des sources de températures  $T_c = 26^{\circ}\text{C}$  et  $T_f = 5^{\circ}\text{C}$ . Commenter le résultat.

On envisage l'installation d'une centrale ETM à La Réunion. Le profil de température de l'eau de l'océan autour de cette île est donné sur la figure 1.



**Figure 1** Température de l'eau de l'océan en fonction de la profondeur à La Réunion.

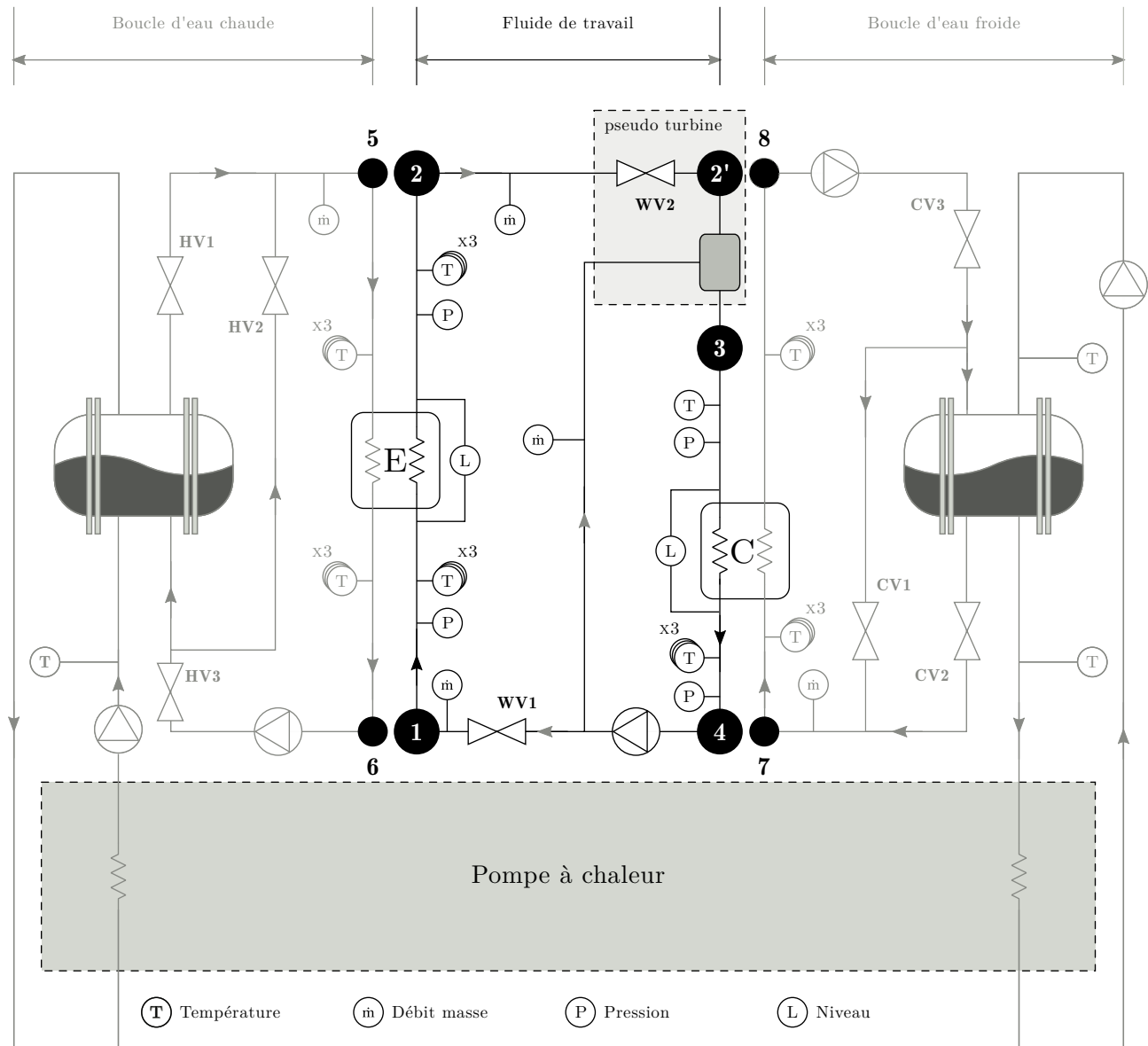
**Q 3.** Déterminer la profondeur à laquelle on devra prélever l'eau profonde pour qu'une installation à La Réunion soit rentable.



- Q 4. Estimer la pression  $P$  à cette profondeur en explicitant la démarche suivie et toute hypothèse effectuée.
- Q 5. Indiquer quelques avantages et quelques inconvénients d'une installation ETM.

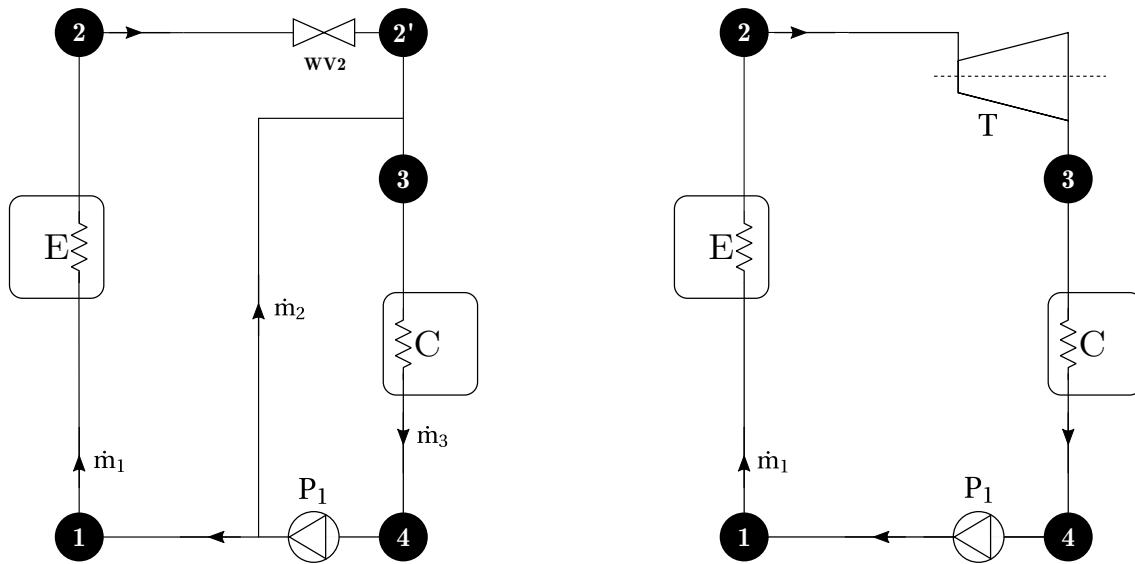
## II Centrale ETM en cycle fermé

Un prototype de centrale ETM est installé à La Réunion. Il n'est pas raccordé à l'océan et une pompe à chaleur simule les sources d'eau chaude et d'eau froide. L'ammoniac est le fluide de travail et son évolution est représentée sur la partie centrale de la figure 2. Le cycle réel de l'ammoniac est également représenté figure 3(a), ainsi qu'un cycle virtuel figure 3(b) expliqué ensuite.



**Figure 2** Schéma global du prototype ETM. Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

- L'ammoniac passe dans un évaporateur E adiabatique et isobare à double flux sous la pression de 9 bar où l'eau chaude le fait s'évaporer en vapeur juste saturante (point 1 à point 2).
- La vapeur produite est détendue de manière isenthalpique dans la vanne WV2 jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 à point 2'). Une petite quantité de liquide froid, prélevée avant la vanne WV1, est injectée dans la vapeur chaude de façon à diminuer sa température (désurchauffe isobare) (point 2' à point 3). Ces transformations (détente et désurchauffe) sont contrôlées de telle sorte qu'elles donnent les mêmes propriétés au fluide que s'il avait été soumis à une détente isentropique dans une turbine jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 au point 3 figure 3(b)).
- Le fluide de travail est ensuite condensé en liquide juste saturant par un condenseur C adiabatique et isobare à double flux grâce à l'eau froide (point 3 à point 4) puis ramené vers l'évaporateur avec une pompe à la pression de 9 bar (point 4 à point 1) en fonctionnement isentropique (la pompe est notée  $P_1$  sur la figure 3).



**Figure 3** Cycle réel (a) à gauche et cycle virtuel (b) à droite de l'ammoniac.  
Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

La centrale fonctionne en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique. Les liquides sont considérés comme incompressibles. Eau chaude et eau froide ont même débit massique. Les transformations isentropiques sont supposées adiabatiques et réversibles.

| Données    | Débit massique | Température d'entrée (en °C) | Température de sortie (en °C) |
|------------|----------------|------------------------------|-------------------------------|
| Eau chaude | $\dot{m}_e$    | $T_5 = 26$                   | $T_6 = 24,5$                  |
| Eau froide | $\dot{m}_e$    | $T_7 = 5$                    | $T_8$                         |

**Tableau 1** Données et notations relatives aux circuits d'eau.

On note  $x$  la fraction massique en vapeur de l'ammoniac. On donne le tableau suivant :

| Point $i$ | $T_i(^{\circ}\text{C})$ | $P_i(\text{bar})$ | $x_i$ | $h_i(\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1})$ | $s_i(\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1})$ |
|-----------|-------------------------|-------------------|-------|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1         | 12                      | 9                 |       | 240                                 | 1,15                                                  |
| 2'        |                         | 6                 |       |                                     |                                                       |

**Tableau 2** Quelques paramètres pour deux points du cycle.

Les diagrammes d'état de l'ammoniac, nommé R717 en tant que fluide frigorigène, sont fournis dans les documents réponses 1 et 2, respectivement dans les systèmes de coordonnées  $(P, h)$  et  $(T, s)$ .

**Q 6.** Sur les diagrammes  $(P, h)$  et  $(T, s)$  des documents réponses 1 et 2, mentionner les noms des courbes de saturation, puis indiquer la phase stable associée à chaque domaine. Faire apparaître le point critique que l'on définira et donner sa température et sa pression.

On utilise désormais les diagrammes des documents réponses 3 et 4 qui présentent des agrandissements de parties des diagrammes des documents réponses 1 et 2 sans les courbes isochores pour plus de lisibilité :

- le document réponse 3 contient le diagramme  $(P, h)$  sur lequel figurent en tirets et points alternés les isothermes graduées en degrés Celsius et en tirets les isentropes graduées en  $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$  ;
- le document réponse 4 contient le diagramme  $(T, s)$  sur lequel figurent en tirets et points alternés les isobares graduées en bars et en tirets les isenthalpes graduées en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

**Q 7.** Déterminer  $T_{\text{vap,HP}}$  et  $T_{\text{vap,BP}}$ , les températures de vaporisation aux pressions respectives de 9 bar et 6 bar.

**Q 8.** Déterminer les valeurs numériques des enthalpies massiques de vaporisation  $\Delta h_{\text{vap,HP}} = \Delta h_{\text{vap}}(9 \text{ bar})$  et  $\Delta h_{\text{vap,BP}} = \Delta h_{\text{vap}}(6 \text{ bar})$ .

**Q 9.** La compression isentrope entre les points 4 et 1 est représentée sur le diagramme  $(P, h)$  du document réponse 3. Justifier sa forme.

**Q 10.** La détente isenthalpe entre les points 2 et 2' est représentée sur le diagramme  $(T, s)$  du document réponse 4. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température  $T_2$ , l'enthalpie massique  $h_2$  et l'entropie massique  $s_2$ . Préciser sous quelle(s) phase(s) se trouve l'ammoniac au point 2'.

- Q 11.** La détente isentrope entre les points 2 et 3 est représentée sur le diagramme  $(P, h)$  du document réponse 3. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température  $T_3$ , l'enthalpie massique  $h_3$  et l'entropie massique  $s_3$ .
- Q 12.** Représenter sur les diagrammes  $(P, h)$  et  $(T, s)$  des documents réponses 3 et 4 le cycle effectué par l'ammoniac dans le dispositif ETM. On fera apparaître en particulier les points 1, 2, 2', 3, 4 et 1' (liquide juste saturant à 9 bar).
- Q 13.** Compléter le tableau du document réponse 5.
- Q 14.** En déduire la valeur de  $c_a$ , capacité thermique massique de l'ammoniac liquide.
- Q 15.** Expliquer pourquoi on utilise l'ammoniac comme fluide de travail et non de l'eau. Donner néanmoins un inconvénient de l'utilisation de l'ammoniac.
- Q 16.** Établir l'expression suivante du premier principe industriel dans le cas d'un système ouvert à une entrée et une sortie, en écoulement permanent avec un débit massique  $D_m$ , en explicitant bien toutes les hypothèses :
- $$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$
- où  $h_s$  désigne l'enthalpie massique de sortie,  $h_e$  l'enthalpie massique d'entrée,  $\mathcal{P}_u$  la puissance utile reçue par le système due aux pièces mobiles et  $\mathcal{P}_{th}$  la puissance thermique reçue par le système.
- En raison de la taille réduite du prototype, une véritable turbine capable de produire la puissance nécessaire n'était pas disponible. Néanmoins, en considérant le cycle virtuel représenté sur la figure 3(b), où la détente isentropique du point 2 au point 3 est attribuée à une turbine virtuelle, on peut calculer le rendement du cycle.
- Q 17.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{th,E,R}$  et  $\mathcal{P}_{th,E,V}$ , les puissances thermiques reçues par l'ammoniac au niveau de l'évaporateur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.
- Q 18.** Exprimer, en fonction des températures,  $\mathcal{P}_{th,ec}$ , la puissance reçue par l'eau chaude au niveau de l'évaporateur (cf. figure 2).
- Q 19.** En déduire l'expression et la valeur numérique de  $\dot{m}_e$ .
- Q 20.** Justifier que l'évolution de l'ammoniac traversant la vanne WV2 est isenthalpique.
- Q 21.** Au niveau du surchauffeur, situé entre les points 2' et 3, donner une relation entre  $\dot{m}_1$ ,  $\dot{m}_2$  et  $\dot{m}_3$ . Calculer  $\dot{m}_3$ .
- Q 22.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{C,R}$  et  $\mathcal{P}_{C,V}$ , puissances reçues par l'ammoniac au niveau du condenseur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.
- Q 23.** Exprimer dans le cas réel  $\mathcal{P}_{ef}$ , la puissance reçue par l'eau froide au niveau du condenseur, puis en déduire la valeur de  $T_8$ .
- Q 24.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{T,V}$ , puissance utile reçue par l'ammoniac dans la turbine T entre les points 2 et 3 du cycle virtuel. Commenter son signe.
- Q 25.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{P_1,R}$  et  $\mathcal{P}_{P_1,V}$ , puissances utiles reçues par l'ammoniac au niveau de la pompe  $P_1$  lors des cycles respectivement réel et virtuel.
- Q 26.** Déduire de l'étude précédente le rendement  $\eta_V$  du cycle virtuel.
- Q 27.** Le rendement obtenu est surestimé. Proposer des justifications.

## Partie B – Naissance et propagation de la houle

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l'océan, on observe, sous certaines conditions, la formation de vagues qui se propagent. Cette partie étudie la naissance des oscillations de la surface de l'eau sous l'effet du vent.

L'eau (fluide (1)) et l'air (fluide (2)) sont considérés comme des fluides parfaits, homogènes et incompressibles, de masses volumiques respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

L'espace est rapporté à un repère de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . À l'état de repos, l'eau occupe l'espace compris entre  $z = 0$  et  $z = -h$  et qui est infini selon les directions  $Ox$  et  $Oy$ ; la quantité  $h > 0$  désigne la hauteur d'eau au repos par rapport au fond solide. L'eau est surmontée de l'air atmosphérique (figure 4).

On supposera pour simplifier que les écoulements dans l'air et l'eau sont invariants par toute translation selon  $Oy$  et que le mouvement des fluides s'effectue parallèlement à un plan vertical.

On désigne par  $U\vec{u}_x$  la vitesse uniforme et constante de l'air associée au vent dans un état de base non perturbé et la présence de petites oscillations de la surface induit celle d'une perturbation. Le champ des vitesses dans l'air devient alors  $\vec{V}_2 = U\vec{u}_x + \vec{v}_2$  où  $\vec{v}_2 = v_2(x, z, t)\vec{u}_x + w_2(x, z, t)\vec{u}_z$  traduit l'effet de perturbation. Les composantes scalaires de la perturbation  $\vec{v}_2$ , ainsi leurs dérivées spatiales et temporelles, sont des infiniment petits du premier ordre.

À partir de l'état de base de repos, en présence des petites oscillations de la surface, l'eau subit également une perturbation dont le champ des vitesses est noté  $\vec{v}_1 = v_1(x, z, t)\vec{u}_x + w_1(x, z, t)\vec{u}_z$ . De même, les composantes scalaires de  $\vec{v}_1$ , ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles, sont également des infiniment petits du premier ordre.

La surface à l'air libre de l'eau, d'équation  $z = 0$  au repos, présente alors une petite déformation et on note  $\eta(x, t)$  le déplacement vertical du point d'abscisse  $x$  par rapport à la position de repos que l'on considérera comme un infiniment petit du premier ordre, ainsi que ses dérivées spatiales et temporelles.

On suppose de plus que les écoulements dans les deux fluides sont irrotationnels ce qui permet de définir les potentiels des vitesses  $\varphi_1(x, z, t)$  et  $\varphi_2(x, z, t)$  tels que  $\vec{v}_1 = \text{grad}(\varphi_1)$  et  $\vec{V}_2 = \text{grad}(Ux + \varphi_2)$ .

Enfin, on note  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur (de norme  $g$ ) et  $p_1(x, z, t)$  et  $p_2(x, z, t)$  les champs de pression respectivement dans les fluides (1) et (2). On suppose le champ de pression continu au passage de la surface à l'air libre de l'eau (effet de tension superficielle négligé).

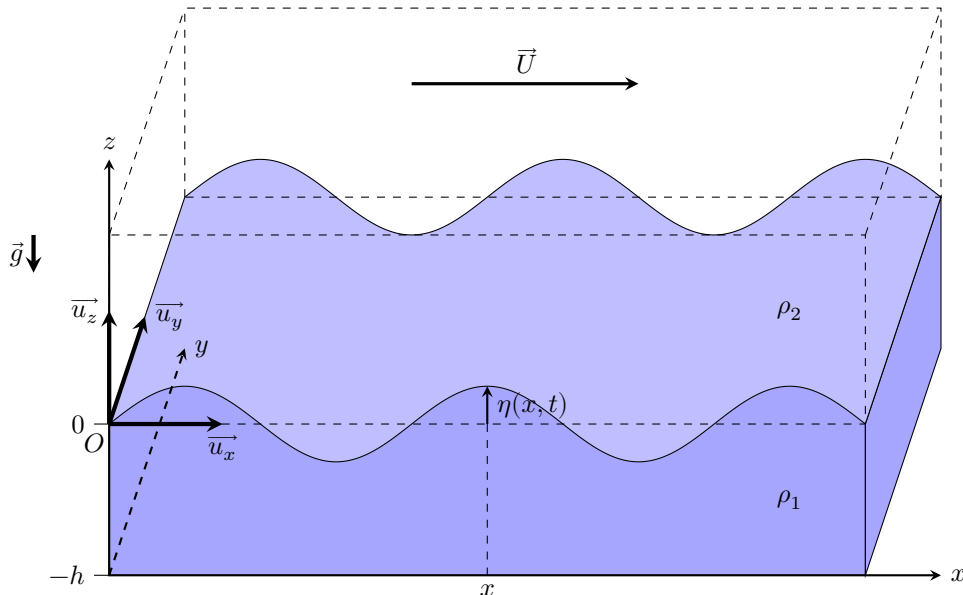


Figure 4

### III Mise en équation et linéarisation

**Q 28.** En tenant compte de l'incompressibilité des fluides, montrer que  $\Delta\varphi_1 = 0$  et  $\Delta\varphi_2 = 0$ .

L'écoulement du fluide (1) respecte l'équation d'Euler, équation aux dérivées partielles d'écriture similaire à celle de l'équation de Navier-Stokes sans terme de viscosité :

$$\rho_1 \frac{D\vec{v}_1}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p_1 + \rho_1 \vec{g}$$

**Q 29.** Montrer que la linéarisation de cette équation, en ne conservant que les termes en vitesse d'ordres inférieurs ou égaux à 1, conduit à l'égalité :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz = C_1(t),$$

où  $C_1(t)$  est une fonction du temps.

**Q 30.** De même, écrire l'équation d'Euler vérifiée par le champ des vitesses  $\vec{V}_2$  en tout point du fluide (2). Montrer que la linéarisation de cette équation, en ne conservant que les termes en vitesse d'ordres inférieurs ou égaux à 1, conduit à l'égalité :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz = C_2(t),$$

où  $C_2(t)$  est une fonction du temps.

On choisit pour la suite une pression de référence  $p_{\text{réf}}$  telle que les champs de pression dans les fluides s'écrivent :

$$\begin{cases} p_1 = p_{\text{réf}} - \rho_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + gz \right) \\ p_2 = p_{\text{réf}} - \rho_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + gz \right) \end{cases}$$

## IV Conditions limites

**Q 31.** Exprimer les composantes de  $\vec{v}_1$  en fonction de  $\varphi_1$ . Dédurre d'une condition limite satisfaite en  $z = -h$  par le champ des vitesses une condition sur la fonction  $\varphi_1$ .

**Q 32.** Exprimer les composantes de  $\vec{v}_2$  en fonction de  $U$  et  $\varphi_2$ . Dédurre d'une condition limite lorsque  $z \rightarrow +\infty$ , en supposant l'écoulement d'air non perturbé loin de la surface de l'eau, des conditions limites sur la fonction  $\varphi_2$ .

La coordonnée verticale  $z_s(x, t)$  des points situés sur la surface vérifie  $z_s(x, t) = \eta(x, t)$ . Lors du démarrage des petites oscillations, leur vitesse verticale  $w_i(x, \eta(x, t), t)$  peut être assimilée à  $w_i(x, 0, t)$  où  $i \in \{1, 2\}$ . Dans chaque milieu  $i$ , on peut donc écrire l'égalité  $w_i(x, 0, t) = \frac{D\eta}{Dt}$ .

**Q 33.** Dédurre de cette égalité, après linéarisation, deux équations au premier ordre, l'une faisant intervenir  $\eta$  et  $\varphi_1$ , l'autre  $\eta$  et  $\varphi_2$ .

**Q 34.** Expliquer, sans calcul, comment obtenir l'équation suivante en précisant son origine physique et les éventuelles approximations effectuées :

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x, 0, t) + U \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right)$$

## V Condition de démarrage des oscillations

On cherche les solutions de l'ensemble des équations précédentes sous forme de représentations complexes :

$$\underline{\varphi}_1(x, z, t) = \underline{\phi}_1(z) \exp(j(\underline{\omega}t - kx)), \quad \underline{\varphi}_2(x, z, t) = \underline{\phi}_2(z) \exp(j(\underline{\omega}t - kx)) \quad \text{et} \quad \underline{\eta}(x, t) = \eta_m \exp(j(\underline{\omega}t - kx)),$$

où  $j^2 = -1$ ,  $k$  est une constante réelle positive,  $\underline{\omega} = \omega' + j\omega''$  est une constante complexe dont les parties réelle et imaginaire sont respectivement  $\omega'$  et  $\omega''$ ,  $\underline{\phi}_1(z)$  et  $\underline{\phi}_2(z)$  sont des fonctions de la variable  $z$  a priori complexes et l'amplitude  $\eta_m$  est une constante réelle non nulle.

**Q 35.** Établir l'équation différentielle satisfaite par  $\underline{\phi}_2(z)$ . En déduire la solution  $\underline{\phi}_2(z)$  uniquement en fonction de  $k$ ,  $z$  et de la constante  $\underline{\phi}_2^0 = \underline{\phi}_2(z=0)$  en tenant compte d'une condition limite établie précédemment.

**Q 36.** Établir l'équation différentielle satisfaite par  $\underline{\phi}_1(z)$ . En déduire que  $\underline{\phi}_1(z) = \underline{\phi}_1^0 \cosh(k(z+h))$  où intervient la constante  $\underline{\phi}_1^0 = \frac{\underline{\phi}_1(z=0)}{\cosh(kh)}$  en tenant compte d'une condition limite établie précédemment.

**Q 37.** Montrer que les deux équations établies à la question Q 33, traduisant les propriétés de la surface de séparation, conduisent aux deux égalités :

$$-k\phi_2^0 = j(\underline{\omega} - kU)\eta_m \quad \text{et} \quad k \sinh(kh) \phi_1^0 = j\underline{\omega}\eta_m.$$

**Q 38.** En utilisant l'équation de la question Q 34, établir la relation suivante notée V.1 :

$$\rho_1 \left[ \frac{(j\underline{\omega})^2}{\tanh(kh)} + kg \right] = \rho_2 \left[ kg - (j(\underline{\omega} - kU))^2 \right]. \quad (\text{V.1})$$

**Q 39.** Indiquer, justification à l'appui, quel doit être le signe de  $\omega''$  permettant, à partir de l'état de repos, le démarrage des oscillations de la surface de séparation en présence du vent de vitesse  $U$ .

**Q 40.** Montrer que, dans le cas limite d'une profondeur  $h$  infinie et en notant que  $\rho_2/\rho_1 \ll 1$ , le démarrage des oscillations s'observe lorsque la vitesse du vent  $U$  vérifie  $U^2 > \frac{g}{k} \frac{\rho_1}{\rho_2}$ .

**Q 41.** Toujours dans le cas limite d'une profondeur  $h$  infinie, calculer la longueur d'onde maximale observable lorsque la vitesse du vent vaut 100 km/h. Proposer en conséquence dans ce cas une discussion quantitative de l'approximation de profondeur infinie.

## VI Propagation de la houle sans vent

On revient désormais dans le cas où la profondeur  $h$  est quelconque, non nécessairement infinie. Lorsque le vent est tombé ou lorsque les vagues s'éloignent de la zone de tempête, la houle devient périodique : la relation V.1 établie à la question Q 38 se simplifie.

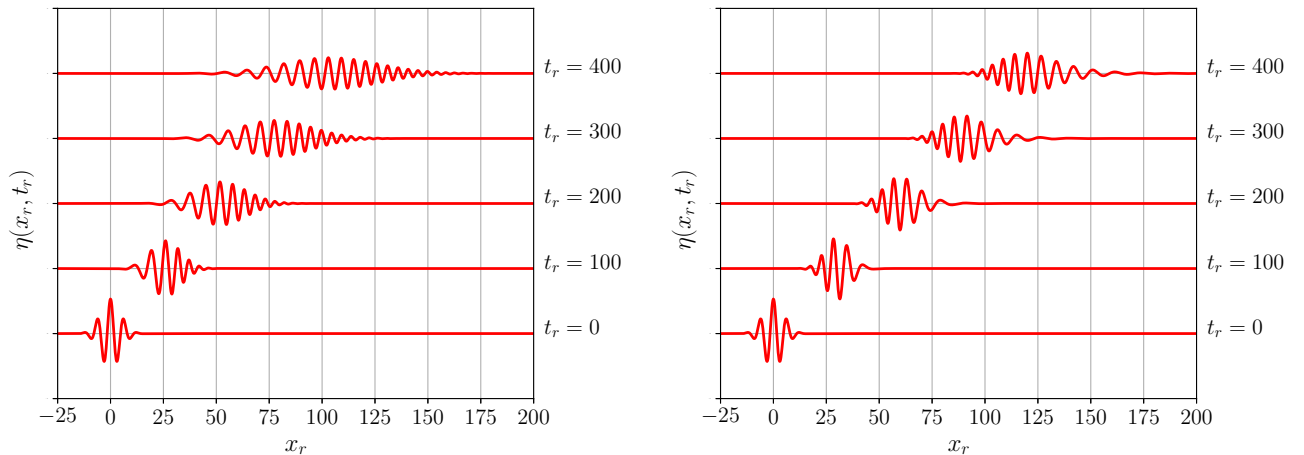
Lorsque  $U = 0$ , en présence d'une houle périodique, on pose  $\omega'' = 0$  et  $\underline{\omega} = \omega' = \omega$ .

**Q 42.** Le rapport des masses volumiques vérifiant  $\rho_2/\rho_1 \ll 1$ , montrer la relation de dispersion de l'onde associée à la houle sans vent s'écrit :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

**Q 43.** On parle de houle en eau profonde lorsque  $kh \gg 1$ . Simplifier dans ce cas la relation de dispersion précédente, puis calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de  $g$  et  $k$ . Indiquer, en justifiant, si le phénomène de propagation est dispersif.

On considère un paquet d'ondes gaussien centré autour d'une valeur  $k_0$  de  $k$  qui se propage selon la direction des  $x$  croissants. Les figures 5(a) et 5(b) représentent deux évolutions différentes envisagées pour ce paquet d'ondes lors de sa propagation. Chaque courbe  $i$  correspond au profil spatial de  $\eta(x, t_i)$  à l'instant  $t_i$ , l'abscisse et le temps étant représentés respectivement par leurs valeurs réduites  $x_r$  et  $t_r$  sans unités.



**Figure 5** Deux évolutions différentes d'un paquet d'ondes : cas (a) à gauche et cas (b) à droite.

**Q 44.** Justifications à l'appui, préciser si les figures 5(a) et 5(b) correspondent toutes deux à un phénomène de propagation dispersif et déterminer celle qui peut correspondre à la relation de dispersion de la houle en eau profonde.

**Q 45.** Au voisinage des rivages, pour des hauteurs d'eau suffisamment faibles, on peut adopter cette fois le modèle de la houle en eau peu profonde suivant la condition  $kh \ll 1$ . Simplifier dans ce cas la relation de dispersion de la houle sans vent, puis exprimer les vitesses de phase et de groupe.

Le document réponse 6 contient la figure du profil spatial à  $t_r = 0$  du même paquet d'ondes gaussien que celui étudié à la question Q 44.

**Q 46.** Compléter cette figure pour une houle en eau peu profonde en représentant le profil spatial à  $t_r = 300$  sachant que son centre est situé à l'abscisse réduite  $x_r = 150$ .

## VII Réfraction de la houle par la bathymétrie

Au voisinage des rivages, la houle est réfractée comme le montre la figure 6.

On se place dans le cas de la houle sans vent et en eau peu profonde introduit à la question Q 45.

Lorsque la profondeur varie, la célérité de l'onde varie. On note alors  $c_0$  la célérité pour une profondeur de référence  $h_0$ .

**Q 47.** Montrer que la vitesse de phase peut s'écrire  $c = \frac{c_0}{n(h)}$  où  $n(h)$ , fonction de  $h$  sans dimension, joue le rôle d'indice de réfraction. Exprimer  $n(h)$  en fonction de  $h$  et  $h_0$ .

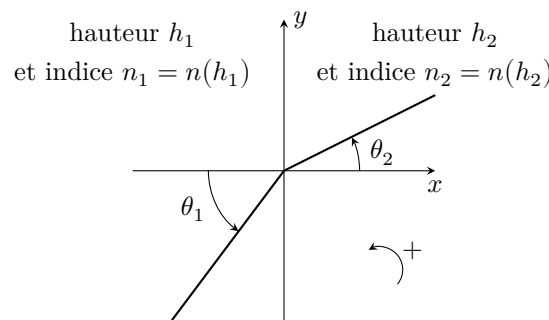
Lorsque le sol passe de façon discontinue en  $x = 0$  d'une hauteur  $h_1$  à une hauteur  $h_2$ , le changement de célérité entre ces deux milieux homogènes engendre un phénomène de réfraction qui suit une loi de Snell-Descartes.

En notant  $\theta_1$  l'angle d'incidence de l'onde plane de houle par rapport à la normale du plan d'équation  $x = 0$  séparant les deux domaines d'indices respectifs  $n_1$  et  $n_2$ , puis  $\theta_2$  l'angle de l'onde plane de houle réfractée (figure 7), la loi de Snell-Descartes s'écrit :

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2).$$



**Figure 6** Bahía San Juanico au Mexique. Crédits : Charles Chandler.



**Figure 7**

On étudie dans la suite le cas d'une variation continue de profondeur définie par le profil suivant, supposé invariant par toute translation selon la direction  $y$  :

$$\begin{cases} h(x) = h_0 & \text{pour } x \leq 0 ; \\ h(x) = h_0 - \beta x & \text{pour } x \in [0; \frac{h_0}{\beta}] . \end{cases}$$

$\beta$  est une constante positive sans dimension désignant la pente du fond en pourcentage.

On note que l'indice de réfraction vaut l'unité pour  $x \leq 0$ .

**Q 48.** Déterminer l'expression de l'indice de réfraction  $n(x)$  pour  $x \in [0; \frac{h_0}{\beta}]$  en fonction de  $x$ ,  $\beta$  et  $h_0$ .

Afin d'établir, pour  $x \in [0; \frac{h_0}{\beta}]$ , l'équation de la trajectoire de la houle correspondant à une ligne de champ du vecteur d'onde, en appliquant la loi de Snell-Descartes, on assimile le profil de profondeur continu à une succession de domaines homogènes de longueurs élémentaires  $dx$ , tels que la hauteur entre  $x - dx$  et  $x$  reste constante, égale à  $h(x)$ .

Selon la loi de Snell-Descartes, le passage d'un domaine à l'autre engendre une variation de l'angle d'incidence qui passe de la valeur  $\theta(x - dx)$  juste avant l'abscisse  $x - dx$  à la valeur  $\theta(x)$  juste après (figure 8). Les deux angles  $\theta(x)$  et  $\theta(x - dx)$  sont très proches et, dans un souci de clarté, la figure 8 ne respecte pas les échelles.



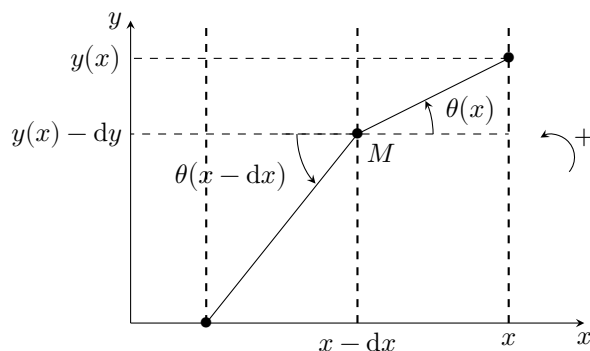


Figure 8

L'onde plane incidente qui se propage dans le domaine  $x < 0$  arrive en  $x = 0$  en un point  $M_0$  avec un angle d'incidence  $\theta_0$ .

**Q 49.** Montrer que pour tout  $x \in [0; \frac{h_0}{\beta}]$ , l'angle  $\theta(x)$  vérifie l'égalité :

$$\sin(\theta(x)) = \sin(\theta_0) \sqrt{1 - \beta \frac{x}{h_0}}.$$

**Q 50.** Montrer que la position  $y(x)$  de la trajectoire de l'onde réfractée passant par le point  $M_0$  de coordonnées  $(0,0)$  s'obtient à partir de la résolution d'une relation de la forme  $\frac{dy}{dx}(x) = f(x)$  où  $f(x)$  est une fonction à exprimer en fonction de  $x$ ,  $\beta$ ,  $h_0$  et  $\theta_0$ .

On souhaite tracer la trajectoire issue du point  $M_0$  de coordonnées  $(0,0)$  pour  $\theta_0 = \frac{2\pi}{5}$ ,  $\beta = 0,01$  et  $h_0 = 2$  m grâce à une résolution numérique.

On découpe pour ce faire l'intervalle  $[0; \frac{h_0}{\beta}]$  de l'abscisse  $x$  en  $N$  intervalles et on note le pas  $p = \frac{h_0}{N\beta}$ . Pour le  $n$ -ième intervalle, l'ordonnée en début d'intervalle est  $y_{n-1}$  et l'ordonnée en fin d'intervalle est  $y_n$ .

**Q 51.** Expliciter une relation de récurrence entre  $y_{n+1}$  et  $y_n$  faisant intervenir notamment le pas  $p$  et la fonction  $f$ , puis compléter les lignes 13 et 22 du programme Python du document réponse 7 en conséquence.

La trajectoire obtenue par cette résolution numérique est représentée dans le document réponse 8, après ajout des intitulés des axes.

**Q 52.** Compléter soigneusement le document réponse 8 de sorte à y faire apparaître quelques courbes équi-phases correspondant à la crête d'une vague pour divers instants. Commenter l'évolution de ces courbes équi-phases au cours de l'approche du rivage en relation avec les courbes d'iso-profondeur (ou courbes isobathes), ainsi qu'avec la figure 6.

## Données et formulaire

### Données numériques partie A

|                                              |                                                                                                            |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pression atmosphérique                       | $P^0 = 1,0 \times 10^5$ Pa                                                                                 |
| Accélération de la pesanteur                 | $g = 9,8$ m·s <sup>-2</sup>                                                                                |
| Masse volumique de l'eau de mer              | $\rho_1 = 1,0 \times 10^3$ kg·m <sup>-3</sup>                                                              |
| Capacité thermique massique de l'eau liquide | $c_e = 4,0 \times 10^3$ J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>                                                |
| Débits massiques de l'ammoniac               | $\dot{m}_1 = 4,0 \times 10^{-1}$ kg·s <sup>-1</sup> et $\dot{m}_2 = 5,0 \times 10^{-2}$ kg·s <sup>-1</sup> |

### Données numériques partie B

|                          |                                   |
|--------------------------|-----------------------------------|
| Masse volumique de l'air | $\rho_2 = 1,2$ kg·m <sup>-3</sup> |
|--------------------------|-----------------------------------|

### Formulaire

— Pour  $\varphi$  un champ scalaire,  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = \Delta \varphi$ .



— Pour  $\vec{v}$  un champ vectoriel,  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ .

— Dérivée particulière d'une grandeur intensive scalaire  $f(x, y, z, t)$  :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les coordonnées du champ des vitesses eulérien.

— Dérivée particulière d'une grandeur intensive vectorielle  $\vec{f}(x, y, z, t)$  :

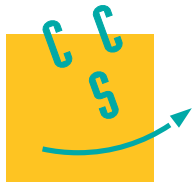
$$\frac{D\vec{f}}{Dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\right),$$

où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les coordonnées du champ des vitesses eulérien.

---

• • • FIN • • •

---



## Un bref aperçu des instruments du télescope spatial James Webb

Le télescope spatial James Webb (JWST) a été lancé le 25 décembre 2021. Il embarque à son bord 4 instruments dont le rôle est de photographier l'univers dans les longueurs d'onde comprises entre 0,6 et 28  $\mu\text{m}$ . Il a été conçu pour contribuer aux grands enjeux de l'astronomie moderne : quête des premières étoiles et galaxies, formation et évolution des galaxies et des systèmes planétaires, et mesure des propriétés physico-chimiques des objets célestes.

Ce sujet comporte trois parties indépendantes. La première partie analyse le principe de fonctionnement du réseau optique d'un spectromètre embarqué dans le JWST. La seconde partie aborde l'intérêt d'étudier l'univers dans le domaine infrarouge. La dernière partie s'intéresse à la nécessité de refroidir le télescope à des températures cryogéniques, et en particulier aux méthodes retenues pour y arriver.

Des données et des formulaires sont regroupés en fin d'énoncé.

### Partie A – Spectrométrie par un réseau à échelle

NIRspec (*Near-Infrared Spectrograph*) est l'un des quatre instruments du JWST, dont l'objectif est de mesurer le spectre d'objets célestes dans le domaine des proches infrarouges (0,6 à 5,0  $\mu\text{m}$ ).

Le chemin suivi par un faisceau lumineux dans l'instrument NIRspec est illustré dans la figure 1. Des miroirs plans permettent de dévier la lumière et des miroirs concaves permettent de faire converger la lumière, comme le ferait une lentille convergente. Au cours de son chemin, la lumière passe à travers un filtre et un réseau, avant d'être analysée par une caméra.

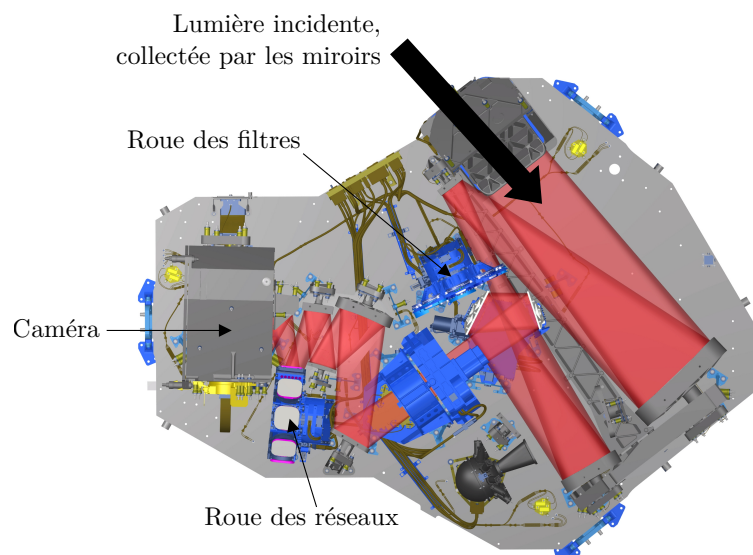


Figure 1 – Chemin optique du NIRspec [1]

**Q1.** Citer une raison qui justifie pourquoi, dans un télescope, il est préférable d'utiliser des miroirs concaves plutôt que des lentilles pour faire converger la lumière.

Les réseaux du NIRSpec sont des réseaux échelonnés (figure 2). Un réseau échelonné est un réseau de miroirs placés en « marches d'escalier ». On note  $h$  la hauteur de la marche et  $a$  l'espacement horizontal entre les centres  $M_i$  de deux

miroirs successifs. Le réseau est éclairé en incidence normale par une source lumineuse  $S$  ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , située à l'infini. Après avoir rencontré le réseau, les rayons lumineux sont diffractés dans toutes les directions. La caméra d'observation est située au point  $P$  à l'infini, faisant un angle  $\theta$  par rapport à la normale aux miroirs.

Par ailleurs, la hauteur  $h$  est largement exagérée sur le schéma de la figure 2. On considérera que  $\theta \in [-\pi/2 ; \pi/2]$  sans se préoccuper du fait que le rayon diffracté peut heurter la partie verticale de la marche voisine.

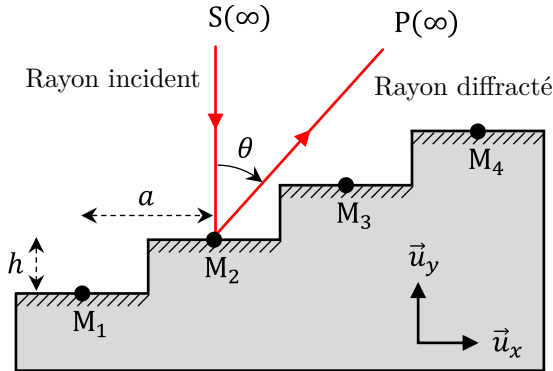


Figure 2 – Réseau échelonné

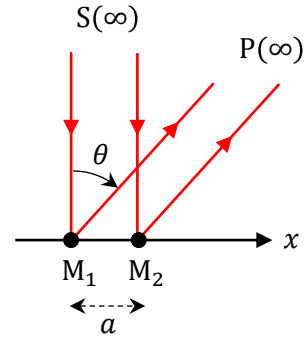


Figure 3 – Réseau de 2 miroirs ponctuels

Notation :

On notera  $\underline{s}(k) = A_k e^{i\phi_k}$  l'amplitude complexe de la  $k$ -ième onde (où  $i^2 = -1$ ) et on supposera par ailleurs que  $A_k = A_0 \forall k$  dans notre cas.

On notera de plus  $I_N$  l'intensité lumineuse pour des interférences à  $N$  ondes et  $I_{n,N}$  l'intensité normalisée, définie par :

$$I_{n,N} = \frac{I_N}{\max(I_N)}$$

## Interférences à deux ondes

On considère, dans un premier temps, un réseau de  $N = 2$  miroirs ponctuels  $M_1$  et  $M_2$ , espacés d'une distance  $a$  et d'une hauteur  $h = 0$  (figure 3).

- Q2.** Établir l'expression de la différence de marche  $\delta = (SM_1P) - (SM_2P)$  entre les rayons passant par  $M_1$  et  $M_2$  en fonction de  $a$  et  $\theta$ . En déduire l'expression du déphasage  $\phi$  correspondant en fonction de  $a$ ,  $\theta$  et  $\lambda$ .
- Q3.** Déterminer l'expression de l'intensité normalisée  $I_{n,2}(\phi)$  au point  $P$  en fonction de  $\phi$ , puis la tracer.

## Interférences à $N$ ondes

On considère à présent un réseau de  $N \gg 1$  miroirs ponctuels  $M_1$  à  $M_N$ , espacés d'une distance  $a$  et d'une hauteur  $h = 0$ .

- Q4.** Établir l'expression de la différence de marche  $\delta_k = (SM_1P) - (SM_kP)$  entre les rayons passant par le premier miroir et le  $k$ -ième miroir, en fonction de  $\delta$  et  $k$ . En déduire l'expression du déphasage  $\phi_k$  correspondant en fonction de  $\phi$  et  $k$ .
- Q5.** Déterminer l'expression de  $I_N(\phi)$  au point  $P$  en fonction de  $A_0$ ,  $N$  et  $\phi$ , puis justifier soigneusement que l'intensité normalisée  $I_{n,N}(\phi)$  s'écrit :

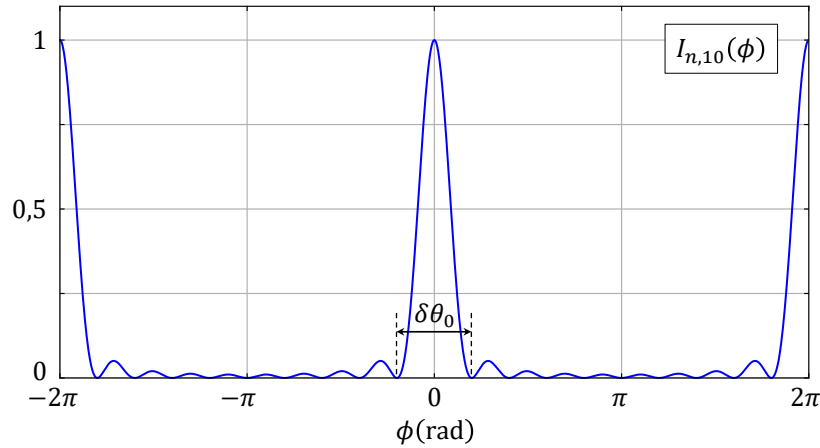
$$I_{n,N}(\phi) = \left( \frac{\sin(N\phi/2)}{N \sin(\phi/2)} \right)^2$$

L'allure de la fonction  $I_{n,N}(\phi)$  pour  $N = 10$  est donnée en figure 4. La fonction possède des « pics principaux » où l'intensité varie de 0 à 1, et des « pics secondaires » où l'intensité reste proche de 0. On note  $\theta_p$  l'angle du  $p$ -ième pic principal ( $p \in \mathbb{Z}$ ) et  $\delta\theta_p$  sa largeur angulaire, définie comme l'écart angulaire entre les deux zéros d'intensité qui l'entourent.

- Q6.** Déterminer l'expression de  $\sin(\theta_p)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $a$  et  $p$ .
- Q7.** Déterminer l'expression de  $\delta\theta_p$  en fonction de  $\lambda$ ,  $N$ ,  $a$  et  $\theta_p$ .

On note  $\theta_p^\lambda$  et  $\delta\theta_p^\lambda$  les angles  $\theta_p$  et  $\delta\theta_p$  pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée. Éclairé en lumière polychromatique, le réseau disperse chaque longueur d'onde comme étudié précédemment. On dit que le réseau peut résoudre deux longueurs d'onde voisines  $\lambda$  et  $\lambda + \delta\lambda$  si (avec  $p > 0$  et  $\delta\lambda > 0$ ) :

$$\theta_p^{\lambda+\delta\lambda} - \theta_p^\lambda \geq \frac{\delta\theta_p^\lambda}{2}$$



**Figure 4** – Graphe de  $I_{n,10}(\phi)$ . Attention : la définition de  $\delta\theta$  est illustrée sur le graphique, alors que les graduations de l'abscisse correspondent aux valeurs de  $\phi$  et non  $\theta$ .

- Q8.** Expliquer, en vous appuyant sur un schéma, ce que l'on observe lorsque ce critère n'est pas respecté.
- Q9.** Montrer que ce critère est respecté lorsque  $\delta\lambda \geq \delta\lambda_{\min}$ , où  $\delta\lambda_{\min}$  est à exprimer en fonction de  $\lambda$ ,  $p$  et  $N$ . En déduire l'expression du pouvoir de résolution du réseau, défini par :

$$P_r = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$$

## Interférences à une infinité d'ondes

Dans la suite, on se place dans le cas limite où  $N \rightarrow \infty$ . L'intensité diffractée  $I_{n,N}(\phi)$  tend alors vers la fonction  $I_{n,\infty}(\phi)$  :

$$I_{n,\infty}(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi = 2\pi p \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons  $[\lambda_{\min} ; \lambda_{\max}]$  la gamme de transparence en longueur d'onde du filtre optique utilisé. Soit un ordre  $p$  positif.

- Q10.** Établir une condition reliant  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  et  $p$ , pour que le spectre de l'ordre  $p$  ne se recouvre pas avec le spectre de l'ordre  $p + 1$ .

Les filtres disponibles sur la roue des filtres du NIRSpec sont :

| Nom du filtre                 | f070lp | f100lp | f170lp | f295lp |
|-------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_{\min}(\mu\text{m})$ | 0,70   | 0,97   | 1,66   | 2,87   |
| $\lambda_{\max}(\mu\text{m})$ | 1,27   | 1,89   | 3,17   | 5,27   |

- Q11.** Montrer que, peu importe le filtre choisi, la caméra doit toujours être placée en face de l'ordre  $p_0$  à déterminer.

## Prise en compte de la diffraction par les miroirs

On considère un miroir unique de taille  $a$ . Il est possible de montrer que l'intensité normalisée  $I_{n,\text{diff}}(\phi)$  au point P due à la diffraction par ce miroir vaut :

$$I_{n,\text{diff}}(\phi) = \left( \frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right)^2$$

**Q12.** Tracer  $I_{n,\text{diff}}(\phi)$ . Que retrouve-t-on lorsque la largeur  $a$  du miroir devient extrêmement grande devant la longueur d'onde  $\lambda$  ?

On admet que l'intensité normalisée totale  $I_{n,\text{tot}}$  en sortie du réseau comprenant une infinité de miroirs de taille  $a$  est égale au produit de l'intensité  $I_{n,\infty}$  due aux interférences et de l'intensité  $I_{n,\text{diff}}$  due à la diffraction par un miroir unique :

$$I_{n,\text{tot}} = I_{n,\infty} \times I_{n,\text{diff}}$$

**Q13.** Quel ordre est le plus lumineux ? Expliquer pourquoi ce n'est pas une situation souhaitable.

## Réseau à échelle

On considère finalement un réseau échelle, constitué d'une infinité de miroirs de taille  $a$ , dont les centres  $M_k$  sont espacés d'une distance  $a$  et d'une hauteur  $h$  (figure 2).

**Q14.** Montrer que la différence de marche  $\delta_e$  entre les rayons passant par les centres de deux miroirs adjacents est donnée par :

$$\delta_e = (SM_k P) - (SM_{k+1} P) = a \sin(\theta) + h[1 + \cos(\theta)]$$

On note  $\lambda_m$  la longueur d'onde moyenne du filtre optique utilisé et  $p_0$  l'ordre choisi à la question **Q11**.

**Q15.** Montrer qu'il est possible de choisir  $h$  afin que la direction du maximum de la diffraction corresponde à la longueur d'onde  $\lambda_m$  de l'ordre  $p_0$ . Commenter l'intérêt d'un réseau échelle par rapport à un réseau plan (cas où  $h = 0$ ), qu'il s'agisse d'un réseau en réflexion (étudié précédemment) ou d'un réseau en transmission (traditionnellement utilisé en TP).

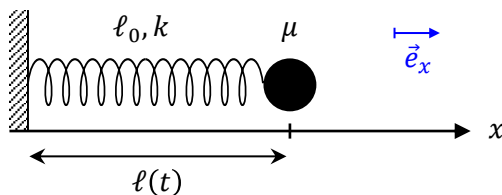
## Partie B – Absorption IR d'une molécule diatomique

Le JWST possède 4 instruments d'analyse de lumière, tous sensibles dans les longueurs d'onde infrarouges (0,6 à 28  $\mu\text{m}$ ). L'étude de ces longueurs offre de nombreux avantages par rapport aux longueurs d'onde du visible : étude de la formation des premières étoiles et galaxies, nuages de poussières interstellaires transparents aux IR mais opaques au domaine visible, étude de la composition de l'atmosphère d'exoplanètes, etc.

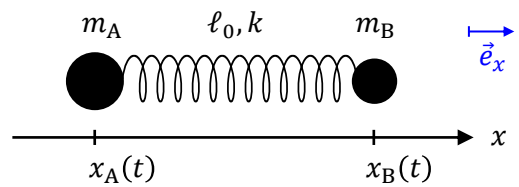
Cette partie s'intéresse à ce dernier point. Lorsqu'une planète passe devant son étoile, une partie de la lumière passe à travers l'atmosphère de la planète avant de nous parvenir. Le spectre de la lumière issue de l'étoile se retrouve alors modifié par les molécules de l'atmosphère, ce qui nous permet d'en déduire la composition de cette dernière.

### Approche classique

Soit une masse  $\mu$  supposée ponctuelle, accrochée à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixe (figure 5). On note  $k$  la constante de raideur et  $\ell_0$  la longueur à vide du ressort, que l'on suppose de masse nulle. La masse est soumise uniquement à la force de rappel élastique du ressort. Le référentiel d'étude du mouvement est supposé galiléen.



**Figure 5** – Système masse-ressort



**Figure 6** – Modélisation d'une molécule diatomique

**Q16.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\ell(t)$ . Introduire une pulsation propre  $\omega_0$ , à exprimer en fonction de  $k$  et  $\mu$ .

Considérons à présent une molécule diatomique AB. Notons  $m_A$ ,  $m_B$  les masses et  $x_A$ ,  $x_B$  les positions respectives des atomes A et B (figure 6). On modélise la liaison covalente qui les relie par un ressort de masse nulle, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Les atomes A et B sont soumis uniquement à la force de rappel élastique du ressort. Le référentiel d'étude du mouvement est supposé galiléen.

**Q17.** Montrer que la longueur de la liaison  $\ell(t) = x_B(t) - x_A(t)$  est solution de la même équation différentielle obtenue à la question **Q16**. Exprimer  $\mu$ , appelée masse réduite du système, en fonction de  $m_A$  et  $m_B$ .

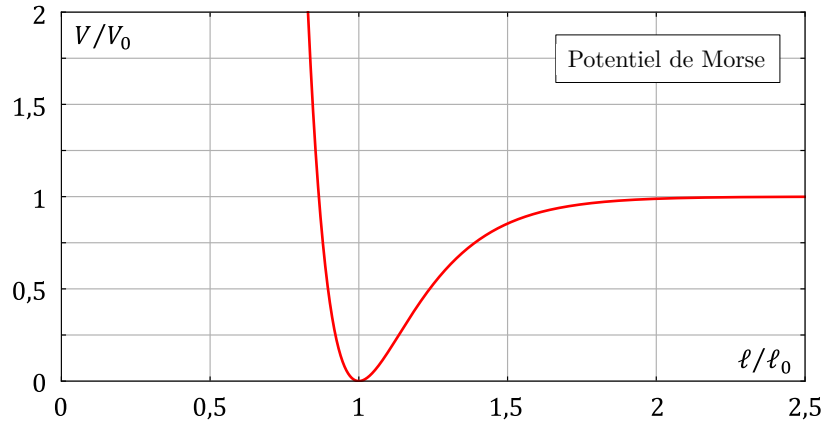
Dans la suite, les applications numériques seront faites pour la molécule de monoxyde de carbone CO. Cette dernière possède une bande d'absorption dans l'IR, où le maximum d'absorption a lieu pour une longueur d'onde  $\lambda = 4,67 \mu\text{m}$ . On suppose que la pulsation du maximum d'absorption correspond à la pulsation propre du modèle étudié.

**Q18.** Déterminer la constante de raideur  $k$  de la liaison covalente liant les atomes de carbone et d'oxygène. Commenter la valeur obtenue.

La modélisation par un ressort de la liaison covalente est en réalité une approximation harmonique de l'énergie potentielle d'interaction entre les atomes. Cette dernière est assez bien décrite par le potentiel de Morse, donné par :

$$V(\ell) = V_0 \left[ 1 - e^{-a(\ell - \ell_0)} \right]^2$$

où  $V_0$  et  $a$  sont des constantes positives. Le graphe de  $V(\ell)$  pour le monoxyde de carbone est donné ci-dessous.

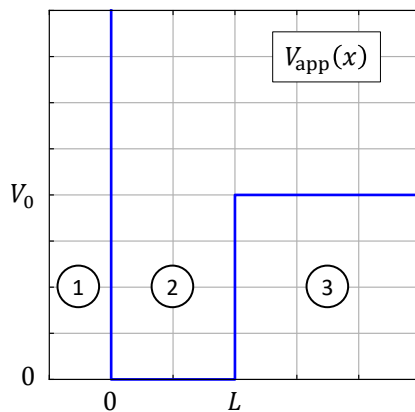


**Figure 7** – Potentiel de Morse :  $V/V_0$  en fonction de  $\ell/\ell_0$

**Q19.** Exprimer  $V_0$  en fonction de  $k$  et  $a$ . Faire l'application numérique et commenter la valeur obtenue.

**Q20.** Expliquer pourquoi une approche classique est insuffisante pour interpréter le fait que le monoxyde de carbone absorbe uniquement des longueurs d'onde proches de  $4,67 \mu\text{m}$ .

## Approche quantique



$$V_{\text{app}}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 & \text{Zone n°1} \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L & \text{Zone n°2} \\ V_0 & \text{si } x > L & \text{Zone n°3} \end{cases}$$

**Figure 8** – Potentiel de Morse approché

Considérons la fonction  $x \mapsto V_{\text{app}}(x)$  définie et représentée ci-dessus, dont le rôle est d'approximer le potentiel de Morse par une fonction constante par morceau.

Soit une particule ponctuelle de masse  $\mu$  soumise au potentiel  $V_{\text{app}}(x)$ . On note  $\underline{\psi}(x,t)$  la fonction d'onde complexe de la particule et  $E$  son énergie. On rappelle l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + V_{\text{app}}(x) \times \underline{\psi}(x,t) = i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}$$

On cherche des états stationnaires d'énergie  $E < V_0$  solutions de l'équation de Schrödinger. On pose donc :

$$\underline{\psi}(x,t) = \underline{\phi}(x) \times \underline{f}(t)$$

**Q21.** Montrer que  $\underline{f}(t)$  est solution de l'équation différentielle :

$$i\hbar \frac{f'(t)}{\underline{f}(t)} = A$$

où  $A$  est une constante. Justifier que  $A$  est homogène à une énergie. On admet que  $A = E$ , l'énergie de la particule. En déduire l'expression de  $\underline{f}(t)$  (on choisira la constante d'intégration égale à 1).

On pose :

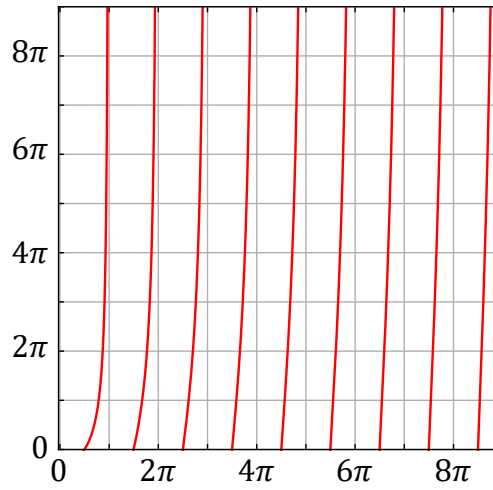
$$K = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad K' = \frac{\sqrt{2\mu (V_0 - E)}}{\hbar}$$

**Q22.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{\phi}(x)$  puis donner la forme générale des solutions dans les 3 zones de l'espace :  $\underline{\phi}_1(x)$ ,  $\underline{\phi}_2(x)$  et  $\underline{\phi}_3(x)$ .

**Q23.** En déduire que :

$$K'L = -\frac{KL}{\tan(KL)}$$

On donne ci-dessous l'allure de la courbe  $z \mapsto -z/\tan(z)$ .



**Figure 9** – Fonction  $z \mapsto -z/\tan(z)$

**Q24.** Justifier que les valeurs de  $KL$  solutions du problème s'obtiennent en analysant les points d'intersection entre la courbe  $z \mapsto -z/\tan(z)$  et un cercle centré sur l'origine du repère, de rayon  $R$  dont on donnera l'expression.

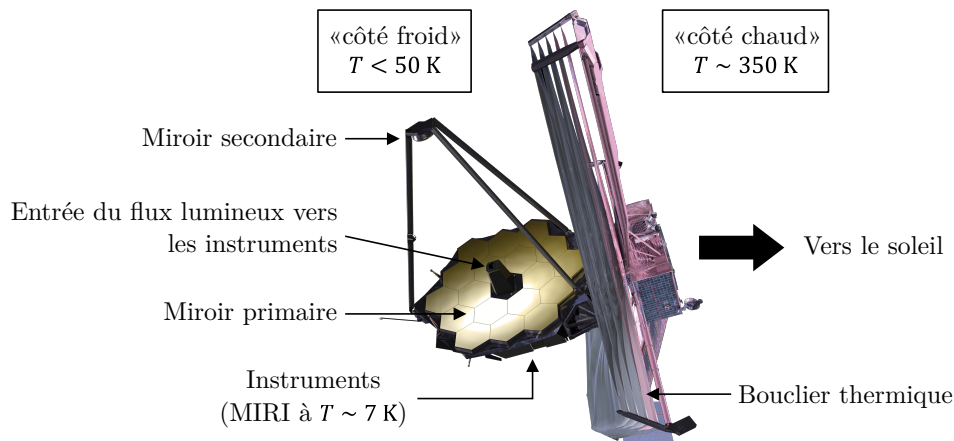
**Q25.** Estimer la valeur que doit valoir  $L$  afin que la transition énergétique entre l'état fondamental et le premier état excité corresponde à l'absorption d'un photon de longueur d'onde  $\lambda = 4,67 \mu\text{m}$ . Conclure sur la qualité de l'approximation de  $V(\ell)$  par la fonction continue par morceau  $V_{\text{app}}(x)$ .

## Partie C – Refroidissement du télescope

Tout corps émet un rayonnement d'origine thermique. Plus la température du corps est faible, moins le rayonnement est intense et plus le spectre se décale vers les grandes longueurs d'onde. Par exemple, un corps à 300 K émet principalement dans l'IR, autour de  $9,66 \mu\text{m}$ . Puisque les capteurs du télescope ont pour objectif de capter des signaux IR de faible intensité, ce dernier doit nécessairement être refroidi à une température  $T < 50 \text{ K}$  afin qu'il émette lui-même un signal IR plus faible que les signaux interstellaires qu'il souhaite détecter.

### I – Refroidissement passif par rayonnement

Le télescope possède un bouclier thermique (figure 10) composé de 5 fines couches réfléchissantes qui, ensemble, renvoient la majorité de la puissance thermique reçue par le soleil dans l'espace, permettant au côté protégé par le bouclier de se refroidir passivement, par rayonnement, jusqu'à une température  $T < 50 \text{ K}$ . Le bouclier divise ainsi le télescope en un « côté chaud » et un « côté froid ».



**Figure 10** – Bouclier thermique du JWST [2]

On suppose que tous les corps (le soleil, le télescope) émettent une puissance surfacique par rayonnement donnée par la loi de Stefan :  $\mathcal{P}_S = \sigma T^4$ , où  $T$  est la température du corps et  $\sigma$  la constante de Stefan.

**Q26.** Estimer la puissance thermique  $P_{sol}$  en provenance du soleil reçue par le JWST.

Le bouclier thermique, très performant, ne transmet au côté froid du télescope que  $P_t = 23$  mW. On souhaite étudier l'évolution temporelle de la température  $T(t)$  du « côté froid » du télescope. On note  $m$  la masse du système d'étude,  $S$  sa surface et  $c$  sa capacité thermique massique.

**Q27.** À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que  $T(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT}{dt} + a T^4 = b$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives à exprimer en fonction de  $P_t$ ,  $S$ ,  $m$ ,  $c$  et  $\sigma$ .

**Q28.** Donner l'expression de  $T_\infty$ , la température en régime permanent en fonction de  $a$  et  $b$ . En déduire par un raisonnement dimensionnel l'expression d'un temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $T_\infty$ ,  $a$  et  $b$ . Calculer les valeurs numériques de  $T_\infty$  (en Kelvin) et  $\tau$  (en jours).

Afin de mieux comprendre la dynamique du régime transitoire, nous allons résoudre l'équation différentielle de la question **Q27** numériquement avec Python.

**Q29.** On a ici une équation différentielle de la forme  $y'(t) = f(y)$ . En supposant que les paramètres  $a$  et  $b$  ont été préalablement définis, compléter la fonction suivante.

```
1 def f(y):
2     return # à compléter
```

On veut résoudre l'équation différentielle par la méthode d'Euler. On note  $dt$  le pas temporel et  $T0$  la température du télescope le jour de son lancement (pris comme instant initial).

**Q30.** Compléter la fonction suivante qui renvoie deux listes, l'une contenant les valeurs du temps entre 0 et 150 jours, l'autre les valeurs correspondantes de température, en utilisant exclusivement des fonctions standards de python sans importer aucun module supplémentaire.

```
1 def euler(f, dt, T0):
2     t = [0]
3     T = [T0]
4     # à compléter
5     return t, T
```

La figure 11 montre la superposition de la solution numérique obtenue par la méthode d'Euler (avec un pas de temps  $dt$  correctement choisi) ainsi que la courbe  $T(t)$  mesurée par un capteur de température.

**Q31.** Commenter la figure 11.



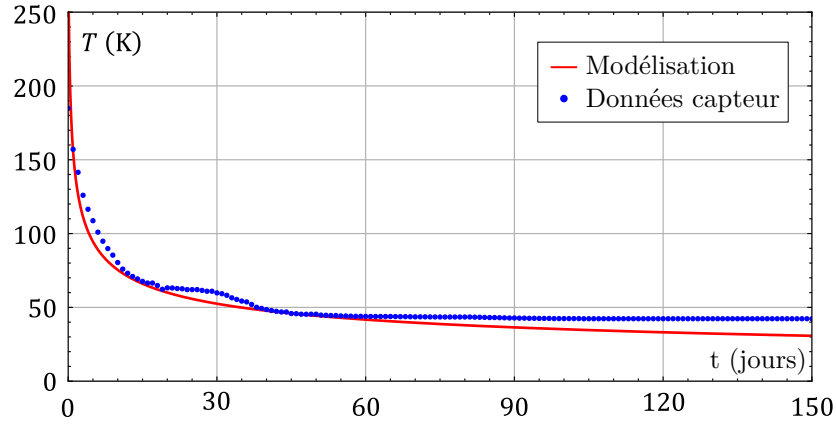


Figure 11 – Profil de température  $T(t)$  du côté froid du JWST [3]

## II – Refroidissement thermo-acoustique

MIRI (*Mid-Infrared Instrument*) est le seul des 4 instruments du JWST à être sensible aux IR moyens (5 à 28  $\mu\text{m}$ ), là où les trois autres détecteurs sont sensibles aux IR proches (0,6 à 5  $\mu\text{m}$ ). Il doit par conséquent être davantage refroidi que le reste du télescope, à une température proche de 7 K, afin que son rayonnement d'origine thermique ne perturbe pas ces mesures.

Dans cette partie, nous allons étudier une version simplifiée du système de refroidissement de MIRI, qui exploite l'effet thermo-acoustique.

### Solution en ondes stationnaires

On considère une enceinte cylindrique d'axe  $x$  et de longueur  $L$  aux parois rigides et indéformables ( $y$  compris aux extrémités). Le fluide dans l'enceinte est assimilé à un gaz parfait de coefficient de Laplace  $\gamma$ . Au repos, il est caractérisé par sa masse volumique  $\mu_0$ , sa pression  $p_0$ , sa température  $T_0$  et possède une vitesse moyenne nulle ( $v_0 = 0$ ).

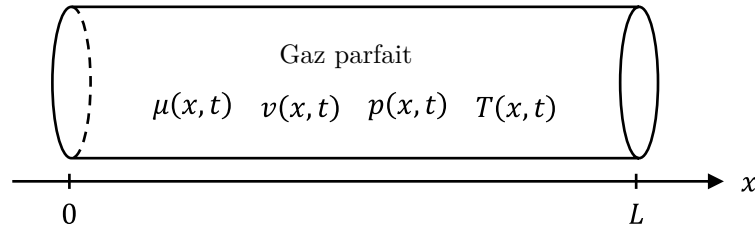


Figure 12 – Enceinte aux parois rigides de longueur  $L$

Une onde acoustique est générée dans l'enceinte. On néglige tous les phénomènes dissipatifs : conduction thermique longitudinale (selon  $x$ ) et viscosité. L'écoulement est donc isentropique. De plus, on suppose que la propagation d'ondes sonores ne modifie que faiblement les paramètres du milieu : les grandeurs indicées par l'indice 1 sont des infiniment petits d'ordre 1.

$$\begin{aligned}\mu(x, t) &= \mu_0 + \mu_1(x, t) & p(x, t) &= p_0 + p_1(x, t) \\ v(x, t) &= v_1(x, t) & T(x, t) &= T_0 + T_1(x, t)\end{aligned}$$

**Q32.** Rappeler les équations d'Euler et de conservation de la masse en fonction de  $\mu$ ,  $p$  et  $v$  dans le cas le plus général.

On rappelle l'expression du coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

**Q33.** Linéariser les trois relations précédentes (équations d'Euler, équation de conservation de la masse, expression du coefficient de compressibilité isentropique) et en déduire un système de 3 équations différentielles reliant  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$ .

**Q34.** En déduire l'équation différentielle de propagation à laquelle obéit la surpression  $p_1(x, t)$ . Donner l'expression de la célérité  $c$ .

L'onde générée est supposée sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . On peut montrer que  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $v_1$  et  $\mu_1$  prennent, en régime sinusoïdal établi, les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\mu_1}(x,t) &= \mu_1(x) e^{i\omega t} & \underline{p_1}(x,t) &= p_1(x) e^{i\omega t} \\ \underline{v_1}(x,t) &= i v_1(x) e^{i\omega t} & \underline{T_1}(x,t) &= T_1(x) e^{i\omega t}\end{aligned}$$

**Q35.** En notant  $p_a$  l'amplitude de l'onde de surpression, montrer que :

$$p_1(x) = p_a \cos(kx)$$

où  $k$  est à exprimer en fonction de  $\omega$ ,  $\mu_0$  et  $\chi_S$ .

On note  $v_a$  et  $T_a$  les amplitudes respectives des ondes de suritesse  $v_1(x)$  et de surtempérature  $T_1(x)$ .

**Q36.** Montrer que la pulsation spatiale  $k_n$  est quantifiée par un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer l'expression de  $k_n$ , puis tracer sur un même graphique  $p_1(x)/p_a$  et  $v_1(x)/v_a$  pour  $n = 2$ .

**Q37.** Rappeler la loi de Laplace reliant  $T$  et  $P$  et ses hypothèses d'application.

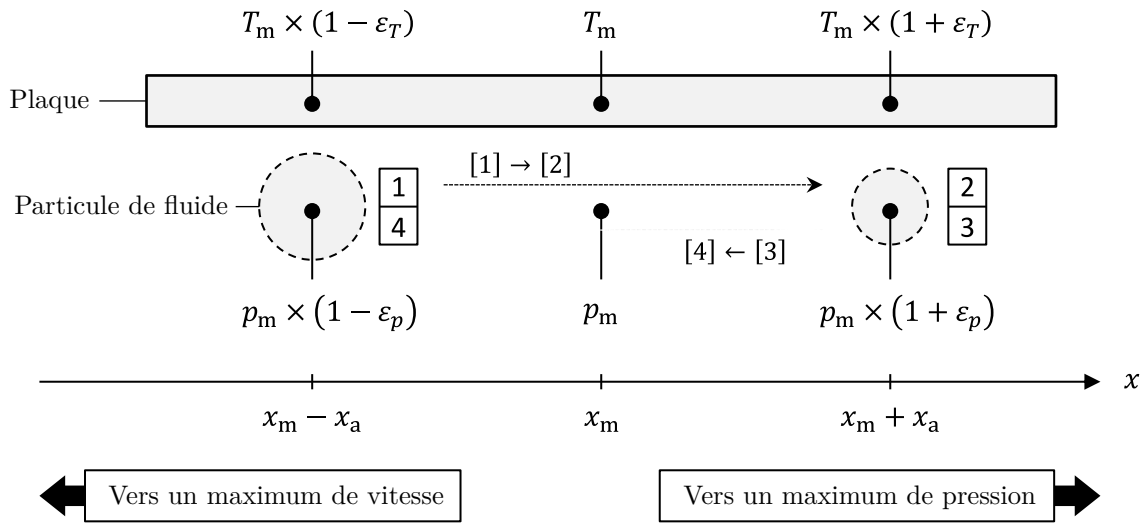
**Q38.** Déterminer  $T_1(x)$  et exprimer  $T_a$  en fonction de  $\gamma$ ,  $T_0$ ,  $p_0$  et  $p_a$ .

Dans la suite, nous allons voir comment l'introduction d'une plaque dans l'onde stationnaire permet de générer un flux de chaleur longitudinal (axe  $x$ ).

### Perturbation par une plaque : approche Lagrangienne

Considérons (cf. figure 13) une particule de fluide qui, sous l'effet de l'onde sonore, effectue des mouvements sinusoïdaux d'amplitude  $x_a$ , autour d'une valeur moyenne  $x_m$ , parallèlement à une plaque placée dans le plan  $(Oxz)$ . La position  $x_m$  est prise entre un maximum de  $v_1(x)$  et un maximum de  $p_1(x)$ .

On admet que la plaque possède une température non uniforme et stationnaire, maintenue par un dispositif extérieur non détaillé, nécessaire au fonctionnement de la machine.



**Figure 13** – Cycle thermodynamique d'une particule de fluide au voisinage de la plaque

On note  $p_m$  et  $T_m$  respectivement la pression du fluide et la température de la plaque au point  $x_m$ . On note  $p'_m = p'(x_m) > 0$  et  $T'_m = T'(x_m) > 0$  respectivement la dérivée spatiale de la pression du fluide et la dérivée spatiale de la température de la plaque au point  $x_m$ . L'amplitude  $x_a$  étant très faible, on peut montrer à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 que :

– la pression du fluide en  $x = x_m \pm x_a$  vaut :

$$p(x_m \pm x_a) = p_m \times (1 \pm \varepsilon_p) \quad \text{avec :} \quad \varepsilon_p = \frac{x_a p'_m}{p_m} \text{ un infiniment petit d'ordre 1}$$

Afin d'alléger les équations, on pose également :

$$\varepsilon'_p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varepsilon_p$$

- la température de la plaque en  $x = x_m \pm x_a$  vaut :

$$T(x_m \pm x_a) = T_m \times (1 \pm \varepsilon_T) \quad \text{avec : } \varepsilon_T = \frac{x_a T'_m}{T_m} \text{ un infiniment petit d'ordre 1}$$

Il est possible de modéliser le cycle thermodynamique que subit la particule de fluide en 4 étapes :

- [1]  $\rightarrow$  [2] compression adiabatique réversible par l'onde sonore ;
- [2]  $\rightarrow$  [3] thermalisation isobare avec la plaque ;
- [3]  $\rightarrow$  [4] détente adiabatique réversible par l'onde sonore ;
- [4]  $\rightarrow$  [1] thermalisation isobare avec la plaque.

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des positions, pressions et températures de la particule de fluide au cours du cycle. Les températures des points 2 et 4 sont obtenues à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 de la loi de Laplace sur les étapes [1]  $\rightarrow$  [2] et [3]  $\rightarrow$  [4].

| Point | Abscisse          | Pression                               | Température de la particule de fluide                                                                                       |
|-------|-------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | $x_1 = x_m - x_a$ | $p_1 = p_m \times (1 - \varepsilon_p)$ | $T_1 = T_m \times (1 - \varepsilon_T)$                                                                                      |
| 2     | $x_2 = x_m + x_a$ | $p_2 = p_m \times (1 + \varepsilon_p)$ | $T_2 = T_m \times \left[ 1 - \varepsilon_T + 2\varepsilon'_p - 2\varepsilon'_p \varepsilon_T + 2(\varepsilon'_p)^2 \right]$ |
| 3     | $x_3 = x_m + x_a$ | $p_3 = p_m \times (1 + \varepsilon_p)$ | $T_3 = T_m \times (1 + \varepsilon_T)$                                                                                      |
| 4     | $x_4 = x_m - x_a$ | $p_4 = p_m \times (1 - \varepsilon_p)$ | $T_4 = T_m \times \left[ 1 + \varepsilon_T - 2\varepsilon'_p - 2\varepsilon'_p \varepsilon_T + 2(\varepsilon'_p)^2 \right]$ |

On note  $c_v$  et  $c_p$  les capacités thermiques massiques du gaz respectivement à volume et pression constante.

- Q39.** Expliquer où se trouvent les sources chaude et froide, ainsi que d'où provient le travail mécanique reçu par la particule de fluide au cours d'un cycle.
- Q40.** Tracer, pour un fonctionnement réfrigérateur, le cycle thermodynamique dans un diagramme de Clapeyron (pression en fonction du volume massique).
- Q41.** Comparer les valeurs de  $T_2$  et  $T_3$  ainsi que  $T_1$  et  $T_4$  pour que le cycle soit bien frigorifique. En déduire que  $T'_m$  doit être inférieure à une valeur limite à déterminer.
- Q42.** Exprimer les chaleurs massiques  $q_{ij}$  reçues par la particule de fluide à chaque étape  $[i] \rightarrow [j]$  en fonction de  $c_p$  et des températures  $T_i$  et  $T_j$ . En déduire le travail massique total  $w_{\text{cycle}}$  reçu au cours d'un cycle en fonction de  $c_p$ ,  $T_m$ ,  $\varepsilon'_p$  et  $\varepsilon_T$ . Commenter l'expression obtenue.
- Q43.** Définir puis exprimer l'efficacité réelle puis celle de Carnot du cycle, respectivement en fonction de  $\varepsilon'_p$  et  $\varepsilon_T$ .

*L'ensemble des particules de fluides situées près de la plaque se relaient pour transporter, de proche en proche, la chaleur de l'extrémité froide vers l'extrémité chaude de la plaque. Un échangeur de chaleur permet de refroidir de l'hélium qui, après une détente de Joule-Thomson, atteint une température de l'ordre de 5 K. Un deuxième échangeur de chaleur permet finalement de refroidir MIRI à une température de l'ordre de 7 K.*

# Formulaires et données numériques

## Formulaire spécifique à la Partie A

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  un infiniment petit d'ordre 1

$$\sin(x + \varepsilon) \simeq \sin(x) + \varepsilon \cos(x)$$

Soit  $x \in ]-1 ; 1[$  et  $\varepsilon$  un infiniment petit d'ordre 1

$$\arcsin(x + \varepsilon) \simeq \arcsin(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - x^2}}$$

## Données et formulaire spécifiques à la Partie B

Vitesse de la lumière

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Constante de Planck réduite

$$\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Nombre d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Masse réduite de CO

$$\mu = 1,14 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Longueur d'onde absorbée par CO

$$\lambda = 4,67 \text{ } \mu\text{m}$$

Paramètre  $a$  pour CO

$$a = 2,27 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

Valeur de  $\ell_0$  pour CO

$$\ell_0 = 113 \text{ pm} = 113 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

## Données spécifiques à la Partie C.I

Constante de Stefan

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Température de surface du soleil

$$T_{sol} = 5,77 \times 10^3 \text{ K}$$

Rayon du soleil

$$R_{sol} = 696 \times 10^3 \text{ km}$$

Puissance solaire transmise au satellite

$$P_t = 23 \text{ mW}$$

Distance soleil – JWST

$$d = 151 \times 10^6 \text{ km}$$

Surface du bouclier thermique (une seule couche)

$$S_b = 240 \text{ m}^2$$

Masse du satellite (côté froid)

$$m = 6,0 \times 10^3 \text{ kg}$$

Capacité thermique massique du satellite (côté froid)

$$c = 1,6 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Surface du satellite (côté froid)

$$S = 150 \text{ m}^2$$

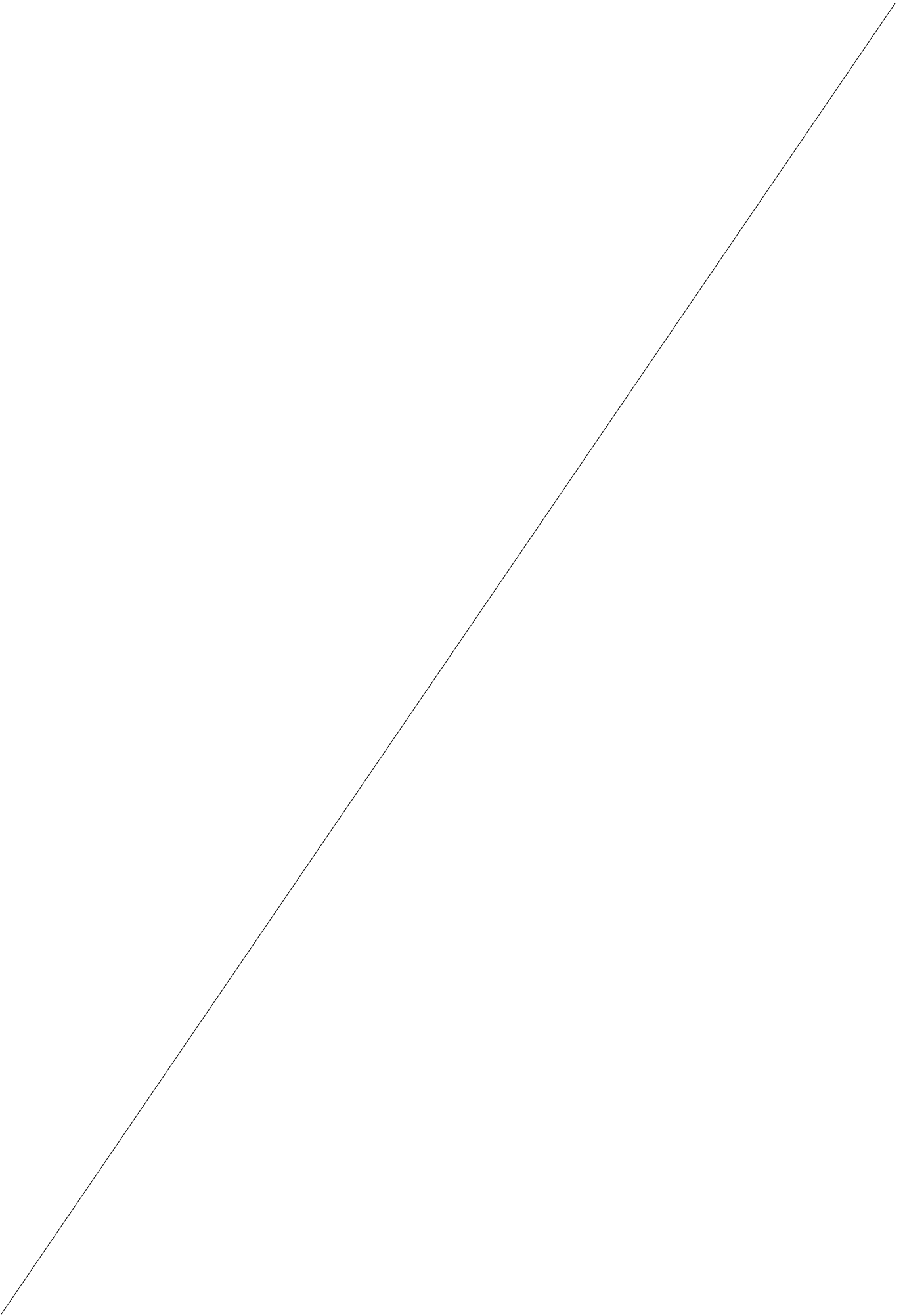
## Références

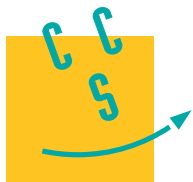
- [1] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NIRSpec-3.jpg>.
- [2] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:JWST\\_spacecraft\\_model\\_1.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:JWST_spacecraft_model_1.png).
- [3] <https://jwst.nasa.gov/content/webbLaunch/whereIsWebb.html>.

---

◇ Fin ◇

---





## Laser à électrons libres

Les lasers à électrons libres à rayons X (XFEL) produisent des rayons X cohérents en accélérant des électrons à travers des onduleurs, qui sont des systèmes permettant de moduler spatialement le champ magnétique. Ces lasers génèrent des impulsions lumineuses ultra-brèves, de l'ordre de la femtoseconde ( $10^{-15}$  s), permettant d'étudier des dynamiques atomiques et moléculaires à des échelles temporelle et spatiale très fines, et très intenses. Il existe une dizaine de XFEL à travers le monde. Dans ce sujet, nous nous intéressons plus particulièrement au XFEL européen, installé près de Hambourg en Allemagne, qui a commencé à fonctionner en 2017.

Un laser à électrons libres est schématiquement constitué de trois éléments schématisés à figure 1 :

- un canon à électrons, qui sert à générer un faisceau d'électrons ;
- un accélérateur linéaire, qui accélère les électrons à une vitesse très proche de la vitesse de la lumière ;
- un onduleur, dans lequel un champ magnétique oscillant spatialement dévie les électrons.

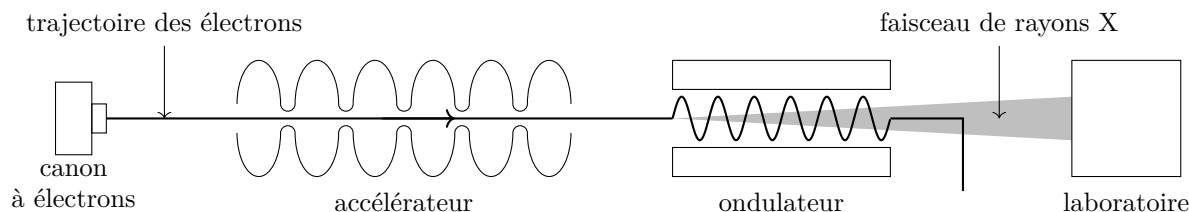


Figure 1 – Schéma d'un laser à électrons libres

Dans un laser à électrons libres les électrons ont une vitesse très proche de la vitesse de la lumière, un traitement rigoureux de leur mouvement nécessite alors de recourir aux concepts de relativité restreinte. Il est cependant possible d'obtenir des résultats approchés en adaptant simplement les équations de la mécanique classique. **La version adaptée des théorèmes est présentée dans la partie « Données et formulaire » située en fin de sujet. Au cours de cette épreuve, dans les questions portant sur l'étude du mouvement de l'électron dans le laser à électrons libres, il est suggéré aux candidats de n'utiliser que les théorèmes rappelés en fin de sujet, et de ne pas chercher à en formuler d'autres.**

Le problème comporte deux parties indépendantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par leur numéro souligné. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix, et de les illustrer par un schéma le cas échéant. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

### Partie A – L'accélérateur linéaire

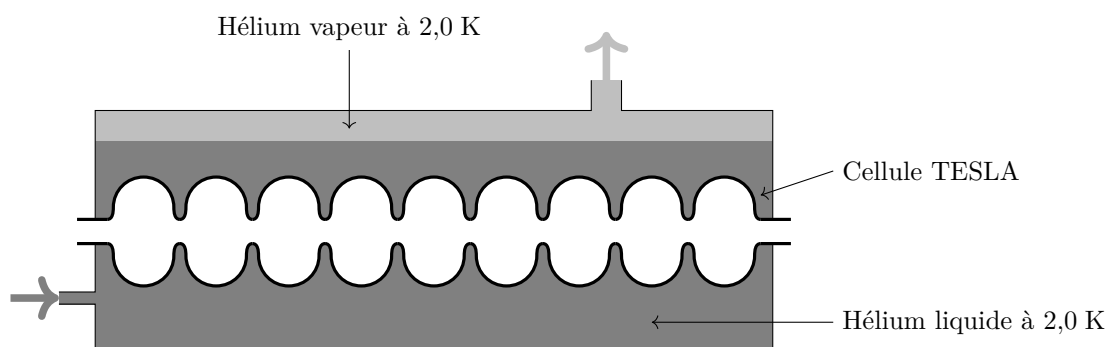
Dans un laser à électrons libres l'enjeu est d'accélérer des électrons à des vitesses très proches de la vitesse de la lumière en utilisant des champs électriques. Ces derniers sont générés dans des dispositifs appelées cellules TESLA dont une photographie est montrée à la figure 2. L'accélérateur du XFEL est constitué d'un grand nombre de ces cellules accélératrices. Dans cette partie, nous étudions successivement : le refroidissement d'une cellule TESLA, le champ électromagnétique dans une cellule ainsi que la dynamique d'un électron en son sein.



**Figure 2** – Photographie montrant une cellule TESLA du XFEL européen. *Source : wikipedia.*

## I – Puissance dissipée dans la cellule TESLA

La cellule TESLA est plongée dans un bain d'hélium liquide à la température de 2,0 K pour que ses parois soient maintenues dans un état supraconducteur. Pour des raisons qui seront explicitées plus loin, tout se passe comme si une certaine puissance thermique était générée à l'intérieur de la cellule. Cette puissance est transmise vers l'extérieur et vaporise l'hélium liquide qu'il est donc nécessaire de remplacer en permanence.



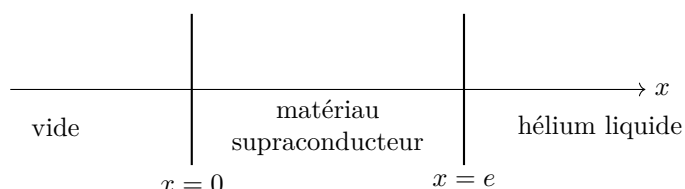
**Figure 3** – Schéma d'une cellule TESLA dans son bain d'hélium liquide. L'injection d'hélium liquide et l'évacuation de l'hélium vapeur sont indiquées par des flèches épaisses.

L'hélium entre à l'état liquide, à une température de 2,0 K et il sort à l'état gazeux à la même température. La pression est constante dans tout le volume d'hélium, égale à 31 kPa.

**Q1.** Le débit massique d'hélium liquide nécessaire pour maintenir un volume constant d'hélium liquide est de  $2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  [1]. En déduire la puissance dissipée dans les parois de la cellule.

## II – Température de la paroi interne de la cavité

La puissance thermique générée à l'intérieur de la cellule TESLA conduit à une élévation locale de la température de la paroi. Le but de cette section est d'estimer la température de la face interne de la cellule. En raison de la faible épaisseur de la paroi, on adopte une géométrie simple : cartésienne unidimensionnelle selon l'axe ( $Ox$ ). On considère que la paroi s'étend entre  $x = 0$  et  $x = e$ , avec  $e = 2,8 \text{ mm}$ . Du vide se trouve dans le demi-espace  $x < 0$ , tandis que de l'hélium liquide se trouve dans la partie de l'espace telle que  $x > e$ . On note  $T_s$  la température de la paroi en  $x = e$ . Il n'y a pas de puissance volumique dissipée dans le matériau. On note  $\kappa$  la conductivité thermique du matériau supraconducteur.



**Q2.** En raisonnant sur un élément de volume que l'on décrira précisément, établir l'équation de la diffusion dans le matériau supraconducteur en régime stationnaire.

En conséquence de la puissance thermique générée dans la cellule TESLA, il existe flux thermique dans le matériau orienté depuis le vide vers l'hélium liquide. On le modélise en considérant un vecteur densité de flux thermique non nul, uniforme et stationnaire entre  $x = 0$  et  $x = e$  :  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_x$  avec  $j_0 = 30 \text{ Wm}^{-2}$ .

**Q3.** Établir l'expression de la température dans la paroi en fonction de  $x$ ,  $\kappa$ ,  $j_0$ ,  $e$  et  $T_s$ .

Il existe une résistance thermique à l'interface entre le matériau supraconducteur et l'hélium liquide, en  $x = e$ , que l'on modélise par une relation linéaire entre le vecteur densité de courant et la différence de température entre la surface du matériau supraconducteur  $T_s$  et la température de l'hélium liquide  $T_f$  :

$$j_0 = h(T_s - T_f)$$

où  $h$  est une constante réelle positive, qui dépend en particulier de l'état de surface du matériau supraconducteur.

**Q4.** Établir l'expression de la température du matériau supraconducteur en  $x = 0$  en fonction de  $e$ ,  $\kappa$ ,  $h$ ,  $j_0$  et  $T_f$ . Faire l'application numérique pour les deux cas suivants :

- cas 1 : un matériau supraconducteur de mauvaise qualité (beaucoup d'impuretés chimiques et de défauts cristallographiques), avec un mauvais état de la surface en contact avec l'hélium (rugosité importante, nombreux défauts, impuretés chimiques) :  $\kappa = 2,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $h = 1,0 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- cas 2 : un matériau supraconducteur de bonne qualité (peu d'impuretés chimiques et bonne qualité cristallographique), avec un bon état de la surface en contact avec l'hélium (lisse, pas impuretés chimiques) :  $\kappa = 28 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $h = 2,4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### III – La cavité électromagnétique résonante

Dans cette partie, on s'intéresse au le champ électromagnétique régnant à l'intérieur de la cellule TESLA. Pour limiter la taille de l'accélérateur il n'est pas envisageable d'utiliser des champs électriques statiques. Afin de générer des champs de grande amplitude on exploite plutôt les résonances de la cellule TESLA qui se comporte comme une cavité. Dans cette section on étudie les modes propres du champ électromagnétique dans une cavité résonante.

On modélise une cavité électromagnétique résonante par une coquille cylindrique d'axe ( $Oz$ ), de rayon intérieur  $R$ , d'épaisseur  $e$ , de dimension infinie dans la direction ( $Oz$ ). La coquille cylindrique est constituée par un matériau supraconducteur. Du vide se trouve dans la cavité.

Soit  $M$  un point quelconque situé dans le vide à l'intérieur de la cavité, que l'on repère avec les coordonnées cylindriques. On admet que le champ électrique au point  $M$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{e}_z$$

et le champ magnétique s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{e}_\theta.$$

**Q5.** Montrer que  $E$  dans le vide vérifie l'équation suivante :

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

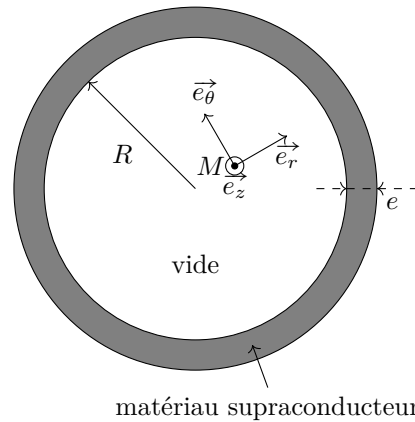
On cherche le champ électrique sous la forme d'une onde stationnaire :

$$E(r,t) = E_0 \xi(t) \psi(r),$$

où  $E_0$  est une constante homogène à un champ électrique et les fonctions  $\xi$  et  $\psi$  sont sans dimension.

**Q6.** Montrer que la fonction  $\xi$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - A \xi = 0,$$



**Figure 4**



et que la fonction  $\psi$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{A}{c^2} \psi = 0,$$

où  $A$  est une constante réelle. Justifier que  $A$  est strictement négative.

Pour la suite, on introduit  $\omega$  la pulsation de l'onde électromagnétique telle que  $A = -\omega^2$  et on introduit le vecteur d'onde  $\vec{k}$  dont le module vérifie  $k = \frac{\omega}{c}$  dans le vide. On admet que  $\xi$  et  $\psi$  s'écrivent sous la forme :

$$\xi(t) = -\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \psi(r) = J_0(kr) ;$$

où  $J_0$  est une fonction de Bessel d'ordre 1. La courbe représentative de  $J_0(x)$  en fonction de la variable  $x$  est donnée dans la partie « Données et formulaire ». On admet enfin que le matériau supraconducteur impose un nœud pour le champ électrique : le champ électrique s'annule donc en  $r = R$ .

- Q7.** Exprimer les trois plus petites pulsations  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  que peut prendre le champ électrique dans cette cavité résonante en fonction de  $R$ ,  $x_{01}$ ,  $x_{02}$ ,  $x_{03}$  et  $c$  ; où  $x_{01}$ ,  $x_{02}$  et  $x_{03}$  sont les trois premières valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction  $J_0$  s'annule.
- Q8.** Pour les cavités utilisées dans le laser à électrons libres européen  $\omega_1 = 2\pi \times 1,3 \cdot 10^9 \text{ rad.s}^{-1}$ . En déduire la valeur numérique de  $R$ .
- Q9.** Exprimer le champ magnétique dans la cavité pour la pulsation  $\omega_1$ , en fonction de la fonction  $J_1$ ,  $E_0$ ,  $c$ ,  $r$ ,  $\omega_1$ ,  $t$ , où  $J_1$  est la dérivée de la fonction  $J_0$ . On suppose que le champ magnétique a une valeur moyenne temporelle nulle.
- Q10.** On veut  $E_0 = 50 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$  pour la pulsation  $\omega_1$ . En déduire l'amplitude du champ magnétique en  $r = R$ . On pourra se servir de la courbe de la fonction  $J_1$ , disponible dans le formulaire, pour estimer la valeur de  $J_1(x)$  pour une valeur de  $x$  donnée.

Ainsi, il existe un champ magnétique qui varie au cours du temps à la frontière entre le vide et la paroi de la cavité. Ce champ magnétique variable induit des courants à la surface de la cavité supraconductrice. Le matériau supraconducteur présente une très petite résistance surfacique qui dissipe une partie de ces courants : c'est l'origine de la puissance thermique générée dans la cellule, dont les effets ont été étudiés aux questions **Q1** à **Q4**.

## IV – Choix du matériau supraconducteur

Il est indispensable de maintenir le caractère supraconducteur de la paroi de la cavité. En effet, en cas de perte de cette caractéristique la résistivité du matériau augmenterait brutalement tout comme les pertes par effet Joule des courants induits dans les parois. Cela conduirait, dans le meilleur des cas, à une diminution de l'amplitude du champ électrique accélérateur, et dans le pire des cas, à une destruction de la cavité à cause d'un échauffement trop violent.

Il existe deux causes de pertes de la supraconductivité :

- si la température du matériau dépasse une température critique  $T_c$  ;
- si le matériau est soumis à un champ magnétique dépassant un champ magnétique critique  $B_c$ .

Les valeurs numériques de  $T_c$  et de  $B_c$  dépendent de chaque matériau. Le tableau 1 donne les valeurs numériques pour différents matériaux.

| matériau (symbole)                                     | $T_c$ (K) | $B_c$ (mT) |
|--------------------------------------------------------|-----------|------------|
| Plomb (Pb)                                             | 7.1       | 80         |
| Niobium (Nb)                                           | 9.2       | 200        |
| YBaCuO ( $\text{Y}_{1.2}\text{Ba}_{0.8}\text{CuO}_4$ ) | 93        | 10         |

Tableau 1

- Q11.** En utilisant les applications numériques des questions **Q4** et **Q10**, indiquer le matériau qui vous semble le plus adapté pour les parois de la cavité supraconductrice.

## V – Mouvement d'un électron dans la cavité résonante

Nous allons maintenant étudier la dynamique d'un électron dans la cavité résonante.

**Q12.** Dans les cavités résonantes de l'accélérateur du laser à électrons libres, les électrons évoluent dans des champs électriques de l'ordre de  $10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ . Vérifier que le poids est alors bien négligeable devant la force électrique.

Dans toute la suite du sujet, on négligera alors le poids devant la force électrique.

Pour décrire le mouvement d'une particule dont la vitesse du même ordre que la vitesse  $c$  de lumière dans le vide il faut recourir à la relativité restreinte en introduisant le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où  $v$  est la norme de la vitesse de la particule.

**Q13.** Montrer que, lorsque  $v$  est proche de  $c$ , on peut écrire :

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, l'énergie cinétique d'une particule est  $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ , avec  $\gamma$  le facteur introduit à la question précédente.

**Q14.** Montrer que l'on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique lorsque  $v$  est petit devant  $c$ .

On donne dans le tableau 2 les valeurs de  $\gamma$  et  $1 - \frac{v}{c}$  pour des électrons à des valeurs d'énergie cinétique  $E_c$  typiques de celles d'un XFEL.

**Q15.** Calculer numériquement les valeurs manquantes (il n'est pas nécessaire de recopier tout le tableau).

| $E_c$ (eV)        | $1 \times 10^8$      | $1 \times 10^9$      | $5 \times 10^9$      | $1 \times 10^{10}$   | $2 \times 10^{10}$ |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|
| $\gamma$          | $2 \times 10^2$      | $2 \times 10^3$      | $1 \times 10^4$      | $2 \times 10^4$      |                    |
| $1 - \frac{v}{c}$ | $1,3 \times 10^{-5}$ | $1,3 \times 10^{-7}$ | $5,3 \times 10^{-9}$ | $1,3 \times 10^{-9}$ |                    |

**Tableau 2** – Valeurs numériques des grandeurs cinétiques pour un électron dans la cavité résonnante.

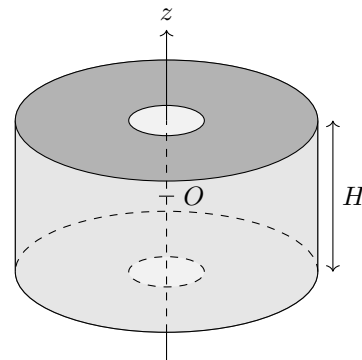
On constate ainsi que dans un laser à électrons libres, et en particulier dans l'accélérateur, les électrons ont une vitesse très proche de celle de la vitesse de la lumière dans le vide.

De façon plus réaliste que précédemment la cavité est désormais supposée finie selon l'axe  $z$  : deux plaques de matériaux supraconducteurs se trouvent en  $z = -\frac{H}{2}$  et  $z = +\frac{H}{2}$ . Deux petites ouvertures sur l'axe ( $Oz$ ) permettent à des particules d'entrer et de sortir de la cavité. Le champ électromagnétique est nul à l'extérieur. Par ailleurs, on admet que le champ électrique le long de l'axe ( $Oz$ ) s'écrit :

$$\vec{E}(r=0, t) = -E_0 \sin(\omega_1 t) \vec{e}_z$$

avec  $\omega_1 = 2\pi \times 1,3 \cdot 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $E_0 = 50 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ , comme vu précédemment.

Avant d'entrer dans la cavité les électrons sont accélérés à une vitesse très proche de  $c$  tel que l'on considérera  $\vec{v}(t=0) = c\vec{e}_z$ , conformément à la discussion menée dans les questions précédentes. On considère un électron qui entre dans la cavité à  $t=0$  en  $r=0, z = -\frac{H}{2}$ . Sous l'influence du champ électrique il est accéléré et son énergie cinétique varie. Néanmoins cette augmentation est suffisamment faible pour que l'on puisse continuer à considérer que sa vitesse reste constante et égale à  $c$ . Par contre, son énergie cinétique varie. Au terme de sa traversée de la cavité l'électron sort par l'ouverture en  $z = \frac{H}{2}$  à  $t = \frac{T_1}{2}$ , où  $T_1$  est la période temporelle du champ électrique.



**Figure 5**

**Q16.** Déterminer la valeur numérique de  $H$ .

**Q17.** En utilisant le théorème de la puissance cinétique adapté à la relativité restreinte donné dans la section « Données et formulaire », exprimer la variation d'énergie cinétique de l'électron lors de son passage dans la cavité en fonction de  $E_0$ ,  $\omega_1$ ,  $c$  et  $e$ . Faire l'application numérique.

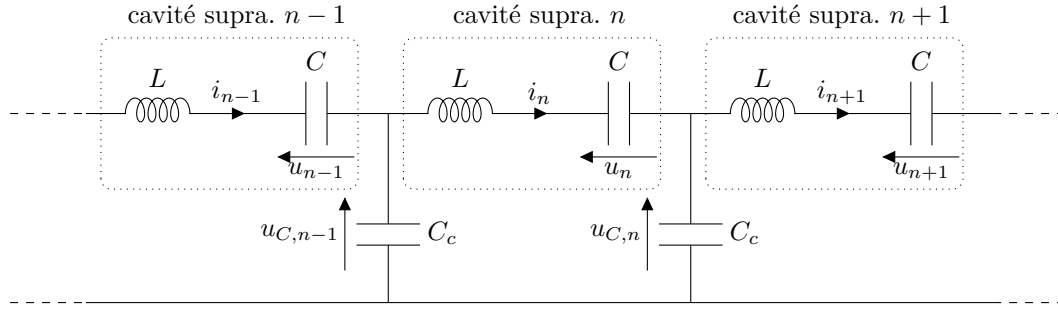
Pour l'accélérateur linéaire du XFEL, l'énergie cinétique des électrons passe de 1 GeV à 10 GeV.

**Q18.** Combien faut-il de cavités pour obtenir un tel changement d'énergie ? En déduire une estimation de la longueur de l'accélérateur linéaire du XFEL.

## VI – Couplage des cavités

Dans les faits et comme il peut être vu sur la figure 2, dans une cellule TESLA les cavités sont regroupées par neuf pour augmenter l'énergie cinétique de l'électron jusqu'aux valeurs voulues. La partie supérieure de la figure 7 en montre un schéma en coupe. Dans toute cette section on note  $(Oz)$  l'axe de symétrie de la cellule TESLA comme indiqué sur la figure 7.

Un champ électrique stationnaire est mis en place dans l'ensemble de la cellule afin de relier les neuf cavités. Pour caractériser ce champ, il est nécessaire d'établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans la cellule. Pour cela, on adopte une analogie électrocinétique. Chaque cavité est modélisée par un circuit  $LC$ . L'ouverture qui permet le passage des électrons d'une cavité à l'autre introduit un couplage : une variation du champ électrique dans une cavité entraîne une modification de celui dans ses voisines. Ce couplage est modélisé par un condensateur de capacité  $C_c$  entre deux circuits  $LC$  consécutifs.



**Figure 6** – Représentation schématique de l'analogie électrocinétique, *supra.* est une abréviation pour *supraconductrice*.

L'intensité  $i_k$  est l'analogue du champ électrique dans la cavité numéro  $k$ . On note  $H$  la longueur d'une cavité.

**Q19.** Établir la relation entre  $i_{n-1}$ ,  $i_n$ ,  $i_{n+1}$ , leurs dérivées et  $L$ ,  $C$  ainsi que  $C_c$ .

**Q20.** Montrer que dans cette chaîne d'oscillateurs harmoniques les pulsations  $\Omega$  dépendent des vecteurs d'onde  $k$  selon la relation de dispersion :

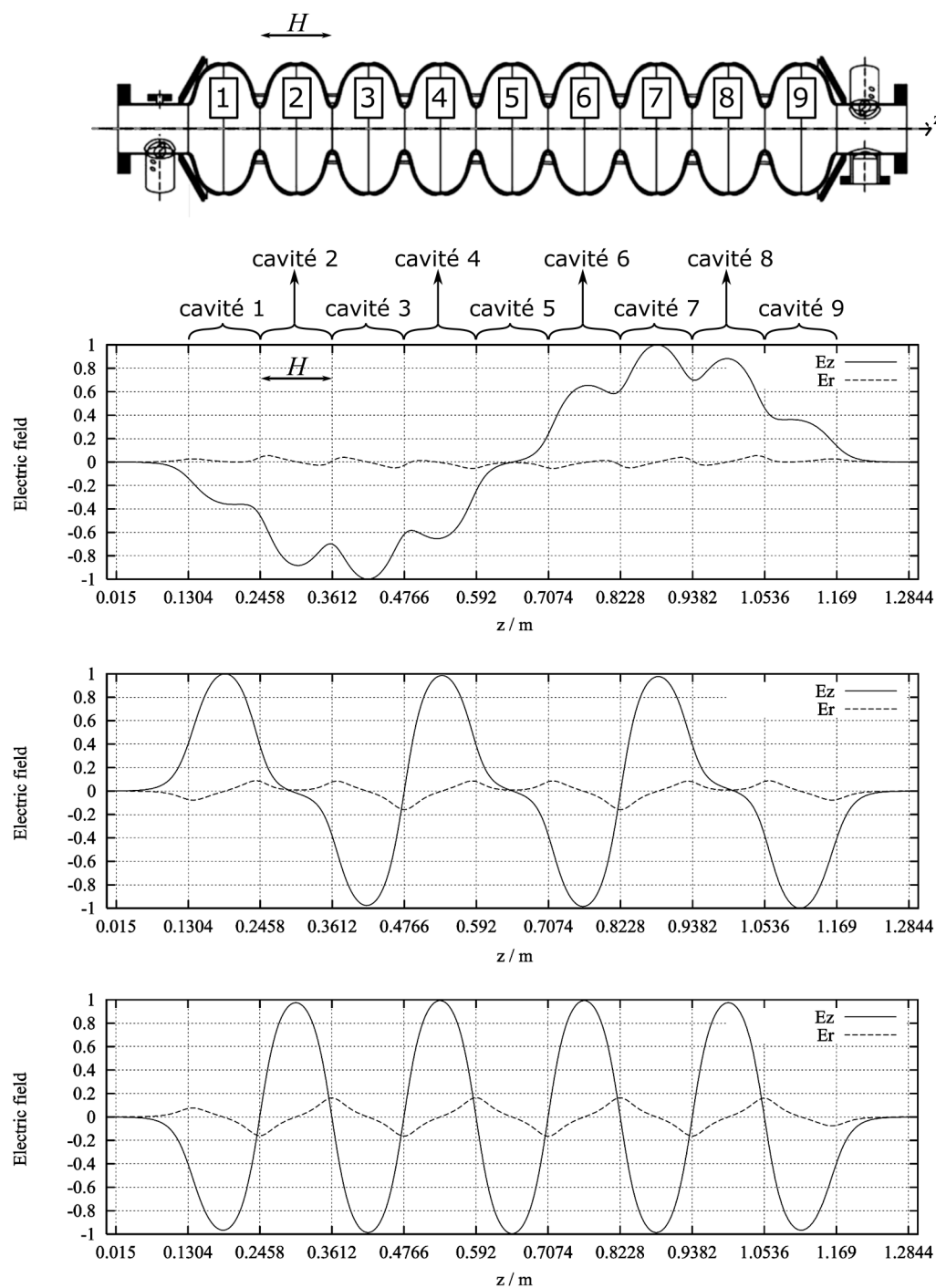
$$\Omega^2 = \Omega_a^2 (1 - \beta \cos(kH))$$

avec

$$\Omega_a^2 = \frac{1}{\Gamma L} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\Gamma}{C_c} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{C} + \frac{2}{C_c}.$$

Afin de vérifier que cette relation de dispersion établie à partir d'une équivalence avec un circuit électrique est également valable pour la chaîne de cavités supraconductrices on utilise les données de simulations présentées dans l'article [3]. Les simulations ont été réalisées avec un code dédié qui a permis de calculer le champ électromagnétique en tout point de la cellule. Les auteurs de la publication ont montré que la cellule des neuf cavités présente neuf modes propres pour le champ électromagnétique, dont les fréquences sont données dans le tableau 3.

On rappelle que l'axe  $(Oz)$  est confondu avec l'axe de la cellule TESLA. La figure 7 montre l'évolution de  $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e}_z$  en fonction de  $z$  pour trois de ces modes propres. On peut considérer qu'il y a un nœud de champ électrique aux deux extrémités de la cellule.



**Figure 7** – Figure en haut : schéma en coupe d’une cellule TESLA (d’après [2]), constituée de neuf cavités supraconductrices couplées ; l’axe  $z$  est indiqué sur ce schéma. Chaque cavité est numérotée de 1 à 9. Les trois courbes en dessous montrent l’évolution du champ électrique en fonction de  $z$  pour trois modes propres de la cavité. Les courbes en traits pleins sont les courbes qui nous intéressent : elles montrent la composante selon  $z$  du champ électrique. Les courbes en pointillées ne nous intéressent pas ici. La position de chaque cavité est indiquée sur les courbes à l’aide de leur numéro. D’après [3].

| mode | fréquence de résonance (GHz) | mode | fréquence de résonance (GHz) |
|------|------------------------------|------|------------------------------|
| 1    | 1,2756                       | 6    | 1,2924                       |
| 2    | 1,2776                       | 7    | 1,2955                       |
| 3    | 1,2807                       | 8    | 1,2976                       |
| 4    | 1,2845                       | 9    | 1,2983                       |
| 5    | 1,2885                       |      |                              |

**Tableau 3** – Fréquences de résonance des premiers modes des ondes stationnaires.

**Q21.** Afin de mieux comprendre ces résultats, on étudie, **uniquement dans cette question**, une corde vibrante de longueur  $L$ , fixée à ses deux extrémités. Sans justification, représenter l'allure de la corde pour les quatre premiers modes propres d'oscillation de la corde. Notons  $f_i$  la fréquence du mode propre numéro  $i$ . La suite des valeurs  $f_i$  est-elle croissante ou décroissante ?

**Q22.** Par analogie, à partir de la question précédente, indiquer à quelles fréquences de résonance correspondent les trois modes propres du champ électrique présentés à la figure 7. On pourra raisonner par analogie avec la corde vibrante étudiée à la question précédente. Soient  $k$  le vecteur d'onde de l'onde stationnaire et  $H$  la longueur d'une cavité supraconductrice dans la direction  $z$ , que vaut le produit  $kH$  ?

Sur la figure 1 présentée sur le document réponse, on a tracé le carré de la fréquence de résonance en fonction de la grandeur  $-\cos(kH)$  pour quatre autres modes propres.

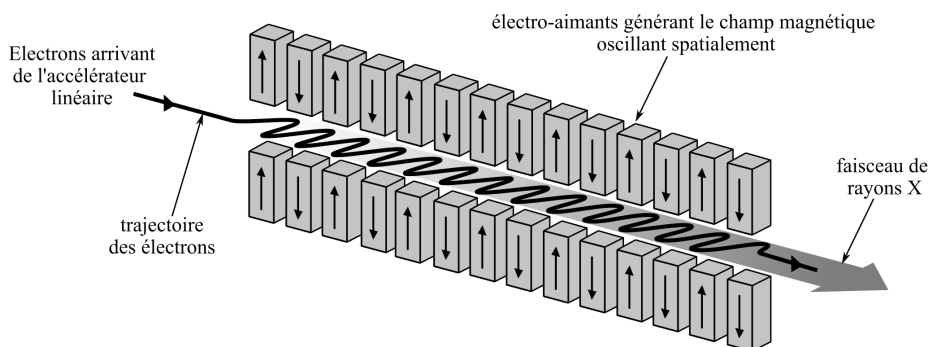
**Q23.** Ajouter sur ce graphique les trois points correspondant aux trois modes propres étudiés à la question précédente. La relation de dispersion donnée par l'équation **Q20** est-elle validée ? Si oui, que vaut le coefficient de couplage  $\beta$  pour la structure étudiée dans ces simulations ?

On choisit d'exciter une onde stationnaire sur le mode propre numéro 9, de fréquence  $f_9 = 1,2983$  GHz dans le tableau 3. L'origine du temps est choisie de manière à ce que la partie temporelle du champ électromagnétique s'écrive sous la forme  $\sin(2\pi f_9 t)$ . Sur la figure 2 du document réponse, quatre cavités de la cellule TESLA sont représentées à différents instants, indiqués au-dessus de chaque schéma ( $T_0$  représente la période temporelle du champ électromagnétique). La position d'un électron est indiquée par un point noir : cet électron avance dans la cellule au cours du temps, il traverse deux cavités lors d'une période du champ électromagnétique.

**Q24.** Compléter cette figure en traçant l'évolution de la composante du champ électrique selon l'axe ( $Oz$ ) en fonction de  $z$  sur les graphiques en dessous des cellules TESLA. Indiquer ensuite à l'aide d'un vecteur, la force électrique subie par l'électron, sur chaque schéma.

## Partie B – L'ondulateur

Après avoir été accélérés, les électrons abordent l'ondulateur qui est l'élément central du laser à électrons libres. Dans cette structure les électrons sont déviés par des champs magnétiques et suivent une trajectoire périodique dans l'espace : ils sont donc accélérés. Une particule chargée accélérée émet un rayonnement, ici sous forme d'impulsions ultracourtes de rayons X. Sur le dessin d'illustration de la figure 8, les électro-aimants de l'ondulateur sont schématisés par leur moment magnétique équivalent. Ils génèrent un champ magnétique oscillant dans l'espace. La trajectoire des électrons dans ce champ magnétique et le faisceau de rayons X émis sont également représentés sur la figure 8



**Figure 8** – Représentation schématique du fonctionnement de l'ondulateur.

### I – Trajectoire des électrons

En première approximation on considère que les champs magnétiques périodiques générés par les aimants peuvent s'écrire  $\vec{B} = B_0 \cos(k_u z) \vec{e}_y$  avec  $k_u = \frac{2\pi}{\lambda_u}$  où  $\lambda_u$  est la périodicité spatiale du champ. L'électron pénètre dans l'ondulateur en  $O$  à l'instant  $t = 0$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ . Dans ce qui suit on étudie le mouvement d'un électron dont la vitesse est très proche de la vitesse de la lumière :  $\gamma \gg 1$ .

**Q25.** Montrer que l'énergie cinétique de l'électron reste constante au cours du mouvement dans l'ondulateur. En déduire que la constante de Lorentz  $\gamma$  et que la norme de la vitesse de l'électron restent constantes.

**Q26.** Établir le système d'équations régissant mouvement de l'électron dans l'ondulateur. On négligera le poids devant la force magnétique.

La vitesse selon  $z$  oscille autour d'une valeur  $v_m$  : on a  $\dot{z} = v_m + \delta v_z$  avec  $\delta v_z$  une fonction périodique dans le temps, petite devant  $v_m$ . On commence par négliger  $\delta v_z$  devant  $v_m$ , ce qui permet d'écrire  $z(t) = v_m t$  et  $\dot{z} = v_m$ . **Attention :**  $\ddot{z} = \frac{d}{dt}(\delta v_z) \neq 0$ .

**Q27.** Montrer que :

$$x(t) = K \frac{1}{\gamma k_u} (1 - \cos(v_m k_u t))$$

et donner l'expression de  $K$  en fonction des paramètres du problème.

**Q28.** En considérant que  $\frac{K}{\gamma} \ll 1$ , utiliser un développement à l'ordre 1 en  $\frac{K^2}{\gamma^2}$  puis montrer que :

$$\dot{z}(t) = v_0 \left( 1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) + \frac{K^2 v_0}{4\gamma^2} \cos(2v_m k_u t).$$

**Q29.** Exprimer alors  $v_m$  en fonction de  $c$ ,  $K$  et  $\gamma$  uniquement, en utilisant la relation démontrée à la question **Q13**.

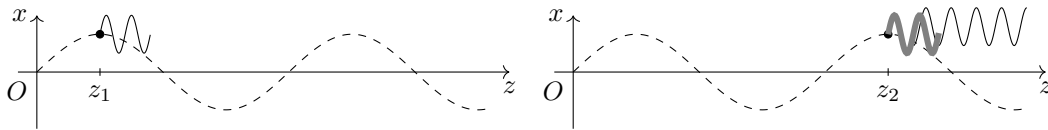
Le coefficient  $K$  qui apparaît dans les calculs est un paramètre important pour caractériser les lasers à électrons libres. Pour l'ondulateur SASE 1 du XFEL européen, on a  $K = 2$  et  $\lambda_u = 4,0$  cm.

**Q30.** En déduire la valeur numérique de la norme du champ magnétique. On pourra prendre  $v_m = c$  pour cette application numérique. Commenter.

## II – Rayonnement émis

Comme indiqué plus tôt, l'électron accéléré dans l'ondulateur émet une onde électromagnétique. Les ondes électromagnétiques qu'il émet au fur et à mesure de sa trajectoire dans l'ondulateur peuvent interférer. Nous allons étudier le résultat de ces interférences dans cette section.

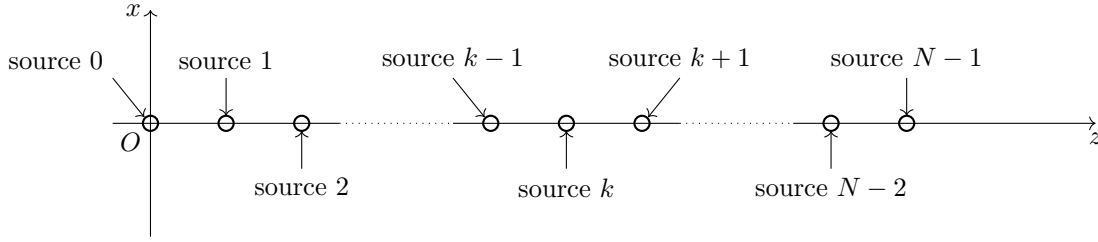
À l'instant  $t_1$ , l'électron se trouve en  $z = z_1$  lorsqu'il émet alors une onde électromagnétique. Sur le schéma de la figure 9, l'électron est représenté par un point, sa trajectoire est indiquée en pointillées, et l'onde qu'il est en train d'émettre est représentée très schématiquement en trait fin continu.



**Figure 9** – Représentation schématique de l'émission du rayonnement par l'électron à  $t_1$  et  $t_2$ .

À l'instant  $t_2$ , l'électron a parcouru une période de sa trajectoire sinusoïdale (voir la figure 9 à droite) : il se trouve en  $z_2 = z_1 + \lambda_u$  et rayonne alors une nouvelle onde électromagnétique. Cette onde qui est émise en  $t = t_2$  doit interférer constructivement avec l'onde qui a été émise par le même électron en  $t = t_1$ . Sur le schéma à droite de la figure 9 l'onde émise à l'instant  $t_1$ , qui s'est propagée, est dessinée en trait fin noir. L'onde qui est en train d'être émise à  $t = t_2$  est représentée en trait épais gris.

Pour modéliser le système, on considère un ensemble de  $N$  sources situées le long de l'axe ( $Oz$ ) (avec  $x = 0$ ), comme représenté sur la figure 10.



**Figure 10**

La  $p$ -ème source, qui se trouve en  $z_p = p\lambda_u$  émet une onde électromagnétique vers les  $z$  croissants que l'on écrit sous la forme :

$$s_p(z, t) = S_0 \cos \left( \alpha \times \left( t - p \frac{\lambda_u}{v_m} \right) - k \times (z - p\lambda_u) \right)$$

où  $S_0$ ,  $\alpha$  et  $k$  sont respectivement l'amplitude, la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique, et  $v_m$  est la vitesse moyenne de l'électron selon la direction  $z$ , trouvée à la question **Q29**.

**Q31.** Justifier l'expression de  $s_p$ .

On place un détecteur en un point  $M$  situé sur l'axe ( $Oz$ ) en un point de coordonnée  $z > N\lambda_u$ . Ce détecteur reçoit l'ensemble des ondes électromagnétiques émises par les sources. On introduit  $s_N(t)$  le signal total reçu par le détecteur :

$$s_{\text{tot},N}(t) = \sum_{p=0}^{N-1} s_p(z, t).$$

**Q32.** Montrer que l'amplitude de  $s_{\text{tot},N}$  s'écrit sous la forme :

$$S_{0,N} = S_0 \left| \frac{\sin \left( \frac{N}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha \lambda_u \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha \lambda_u \right)} \right|.$$

**Q33.** Montrer que l'amplitude de  $s_{\text{tot},N}$  est maximale pour les fréquences  $F_q$  telles que :

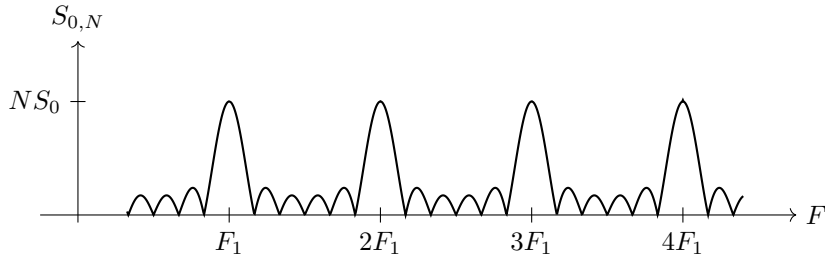
$$F_q = \frac{c}{\lambda_u} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}} q$$

où  $q$  est un entier naturel non nul.

Pour l'ondulateur SASE1 du XFEL européen, on a  $K = 2$  et  $\lambda_u = 4,0$  cm et les électrons ont une énergie cinétique égale à 17,5 GeV, ce qui correspond à  $\gamma = 3,4 \times 10^4$ .

**Q34.** En déduire la longueur d'onde correspondant à la plus petite fréquence d'interférences constructives  $F_1$ .

La figure 11 montre l'allure de  $S_{0,N}$  en fonction de  $F$ . Le tracé a été fait pour  $N = 6$ .



**Figure 11**

On admet que la largeur à mi-hauteur des pics principaux (ceux centrées autour des fréquences multiples de  $F_1$ ) est égale à :

$$\Delta F = \frac{F_1}{N}.$$

Pour l'ondulateur SASE1 du XFEL européen, dans les mêmes conditions qu'à la question précédente ( $K = 2$ ,  $\lambda_u = 4,0$  cm,  $\gamma = 3,4 \times 10^4$ ),  $\frac{\Delta F}{F_1} = 1,5 \times 10^{-3}$ .

**Q35.** En déduire la valeur de  $N$ . Commenter, en sachant que la longueur totale de l'ondulateur SASE1 du XFEL européen est de 175 m.

Dans cette partie, nous avons montré que  $F_1$  augmente avec  $\gamma^2$ . On justifie donc *a posteriori* le fait de chercher à accroître le facteur  $\gamma$  autant que possible dans l'accélérateur linéaire.

### III – Influence de l'onde émise sur le mouvement des électrons

Dans la partie précédente nous avons montré qu'un électron qui traverse l'ondulateur émet une série d'impulsions à la fréquence :

$$F_1 = \frac{c}{\lambda_u} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}}. \quad (1)$$

On aimerait exploiter ces impulsions de rayons X pour faire des mesures. Or, le flux d'électrons qui traverse l'ondulateur est continu et chaque électron émet son propre train d'impulsions. Ces trains d'impulsions ne sont pas en phase, ce qui fait qu'un observateur reçoit les rayons X en continu et non par des impulsions.

Le but de cette dernière partie d'étudier l'influence de l'onde électromagnétique émise par les électrons sur eux-mêmes. Pour étudier le mouvement des électrons dans l'ondulateur en prenant en compte l'onde électromagnétique qu'ils émettent, on peut montrer qu'il faut résoudre les deux équations différentielles couplées suivantes, portant sur les fonctions  $\varphi$  et  $\eta$  :

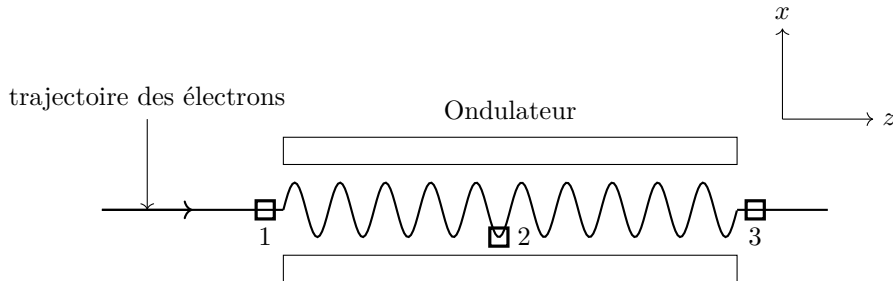
$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 2k_u c \eta \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{C^2}{2k_u c} \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

où  $C$  est une constante dépendant des paramètres de l'ondulateur. La signification physique des fonctions  $\varphi$  et  $\eta$  n'est pas importante. On donne les conditions initiales suivantes :  $\varphi(t = 0) = \varphi_0$  et  $\eta(t = 0) = \eta_0$ . Un traitement rigoureux du problème nécessite de recourir à des simulations numériques.

La méthode d'Euler est la procédure numérique la plus simple pour résoudre des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. On veut résoudre le système d'équations 2 entre  $t = 0$  et  $t = t_f$  avec un pas de calcul  $\delta t$ , ce qui donne  $N = \delta t / t_f$  points de calcul. Le schéma d'Euler explicite permet d'obtenir deux suites de valeurs ( $\varphi_i$ ) et ( $\eta_i$ ) qui approximent respectivement les fonctions  $\varphi(t)$  et  $\eta(t)$ .

**Q36.** Établir les relations de récurrence permettant d'obtenir les valeurs de  $\varphi_i$  et  $\eta_i$ .

À l'aide de méthodes numériques, on simule ainsi le mouvement des électrons dans l'ondulateur en prenant en compte leur interaction avec l'onde électromagnétique. Le schéma de la figure 12 montre la trajectoire des électrons dans l'ondulateur.

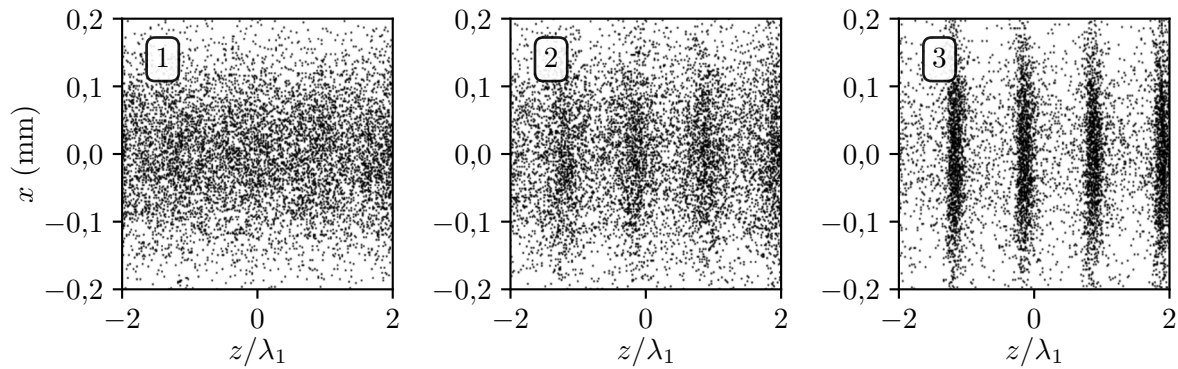


**Figure 12**

Le graphique numéroté 1 sur le schéma de la figure 13 montre la répartition spatiale des électrons à l'entrée de l'ondulateur. Chaque point représente un électron et les électrons se déplacent dans la direction des  $z$  croissants : on part d'un état où les électrons sont répartis uniformément au voisinage de l'axe de propagation. Le graphique numéroté 2 montre la distribution des électrons au milieu de l'ondulateur, et le graphique numéroté 3 leur distribution en sortie de l'ondulateur. Sur les trois graphiques,  $\lambda_1$  est la



longueur d'onde de l'onde électromagnétique générée par les électrons :  $\lambda_1 = \frac{c}{F_1}$ , où  $F_1$  est donné par la relation (1).



**Figure 13**

**Q37.** Décrire, en quelques phrases, la manière dont la distribution d'électrons évolue lors de la traversée de l'ondulateur, sous l'influence de l'onde électromagnétique émise.

**Q38.** Expliquer pourquoi ce changement de répartition spatiale des électrons permet de résoudre le problème qui a été introduit en début de cette partie.

## Données et formulaire

### Données numériques

|                                               |                                                                |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| enthalpie de vaporisation de l'hélium à 2,0 K | $\Delta_{\text{vap}} h = 23,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ |
| accélération de la pesanteur                  | $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$                       |
| charge élémentaire                            | $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$                           |
| vitesse de la lumière dans le vide            | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$           |
| masse de l'électron                           | $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$                        |

### Formulaire

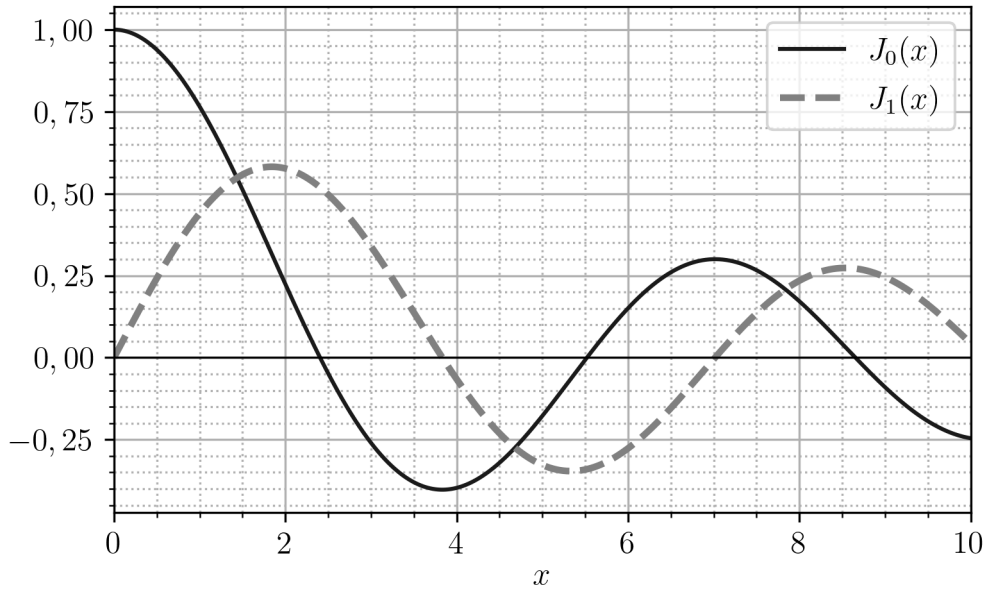
- $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$
- $\cos(2u) = 1 - 2 \sin^2(u)$
- $\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$
- opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

- opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Courbes représentatives des fonctions de Bessel  $J_0$  et  $J_1$ .



Les trois plus petites racines positives de la fonction  $J_0$  sont  $x_{01} = 2,405$ ,  $x_{02} = 5,520$  et  $x_{03} = 8,654$ . La fonction  $J_1$  est la dérivée de la fonction  $J_0$  :

$$J_1(x) = \frac{dJ_0}{dx}.$$

### Quelques résultats de relativité adaptés au problème étudié

Soit une particule chargée, de masse  $m$ , de charge  $q$ , se déplaçant dans une région où règne un champ électrique  $\vec{E}$ . On étudie le mouvement de la particule dans un référentiel donné, supposé galiléen, avec  $O$  un point fixe de ce référentiel. Notons  $\vec{v}$  son vecteur vitesse,  $v$  sa norme dans ce référentiel et  $\vec{F}_e$  la force électrique (dont l'expression est la même que celle utilisée en mécanique classique).

- On introduit le facteur relativiste de Lorentz  $\gamma$  de l'électron dans ce référentiel :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .
- L'énergie cinétique  $E_c$  de l'électron dans le référentiel d'étude s'écrit, dans le cadre de la relativité restreinte :  $E_c = (\gamma - 1)mc^2$
- Dans ce référentiel, la deuxième loi de Newton appliquée à la particule s'écrit :  $\frac{d\gamma m \vec{v}}{dt} = \vec{F}_e$ .
- Le théorème de la puissance cinétique s'écrit :  $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_e \cdot \vec{v}$ .
- Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire de la particule s'écrit :  $\Delta E_c = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{OM}$ .

Considérons maintenant une particule chargée notée  $M$ , de masse  $m$ , de charge  $q$ , se déplaçant dans une région où règne un champ électrique  $\vec{E}$ . On étudie le mouvement de la particule dans un référentiel donné, supposé galiléen, avec  $O$  un point fixe de ce référentiel. Notons  $\vec{v}$  sa vitesse,  $E_c$  son énergie cinétique,  $\gamma$  son facteur de Lorentz dans ce référentiel, et  $\vec{F}_m$  la force magnétique (dont l'expression est la même que celle utilisée en mécanique classique).

- la deuxième loi de Newton appliquée à la particule s'écrit  $\frac{d\gamma m \vec{v}}{dt} = \vec{F}_m$  ;
- le théorème de la puissance cinétique s'écrit  $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$ .

# Références

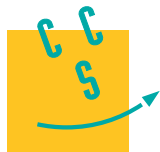
- [1] H LIERL, B PETERSEN et A ZOLOTOV. « Conceptual layout of the european x-fel linear accelerator cryogenic supply ». In : *Proceedings of LINAC*. 2004, p. 225-227.
- [2] Massimo ALTARELLI, Reinhard BRINKMANN et Majed CHERGUI. « The European X-ray free-electron laser. Technical design report ». In : (2007).
- [3] R WANZENBERG. « Monopole, Dipole and quadrupole Passbands of the TESLA-cell Cavity ». In : (2001).

---

◇ Fin ◇

---

P077 - 30 avril 2025 - 14:23:09 © ④ ⑤ ⑥



Numéro d inscription

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

**Signature**

**Nom**

[illegible]

Prénom

[illegible]

CONCOURS CENTRALE • SUPÉLEC

Épreuve : Physique 2 PC

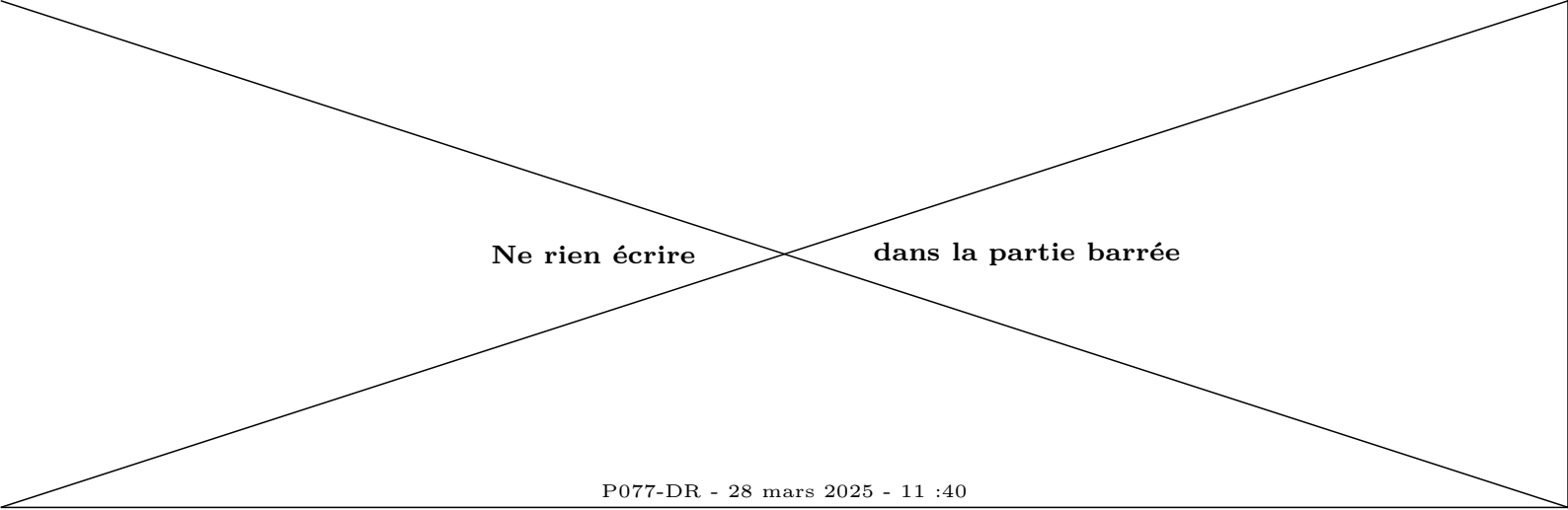
**Ne rien porter sur cette feuille avant d avoir complètement rempli l'entête**

## Feville

|  |   |  |
|--|---|--|
|  | / |  |
|--|---|--|

## Document réponse

*Les candidats doivent rendre ce document réponse avec leur copie, même s'ils ne l'ont pas utilisé*



Question Q23

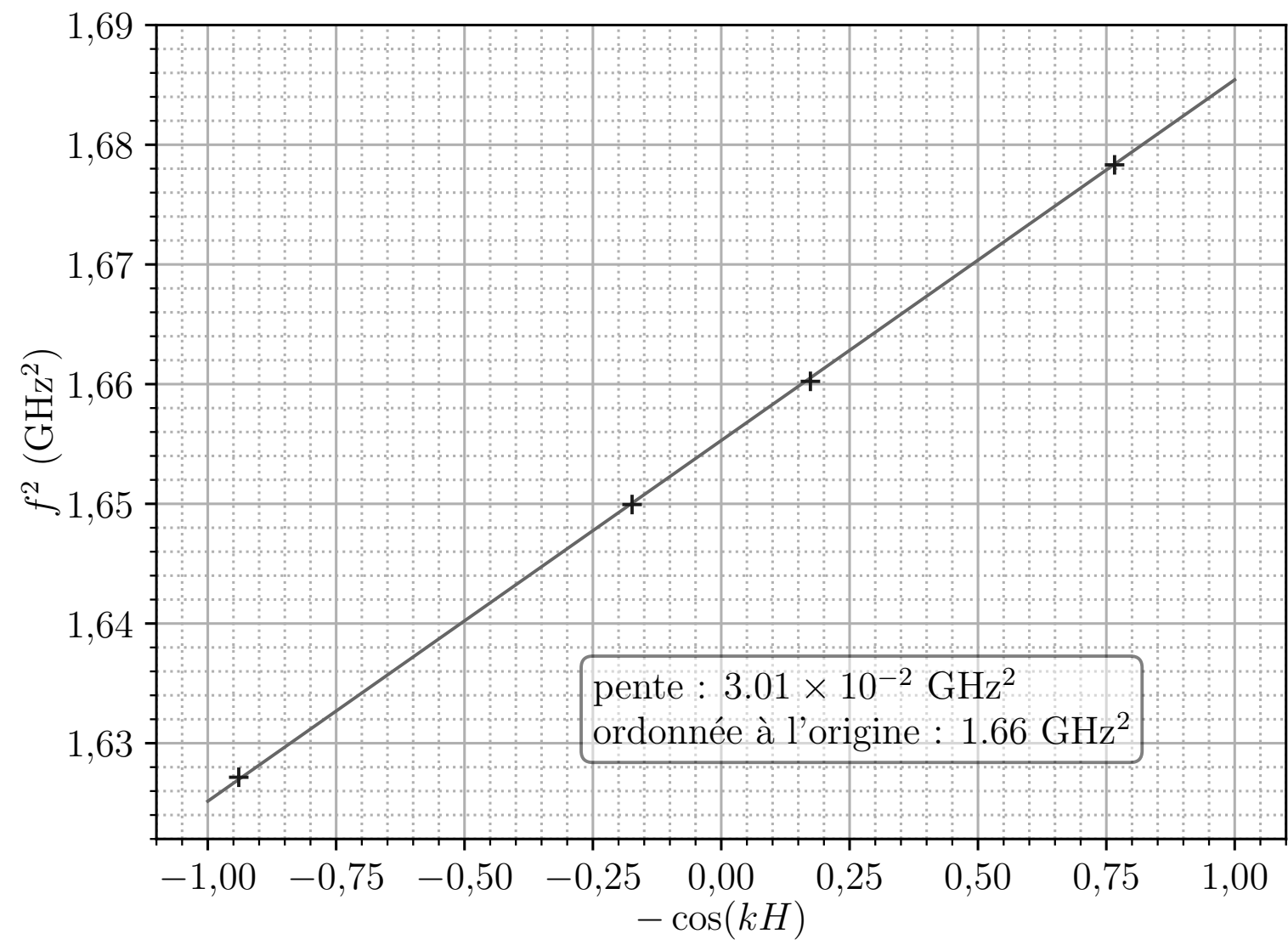
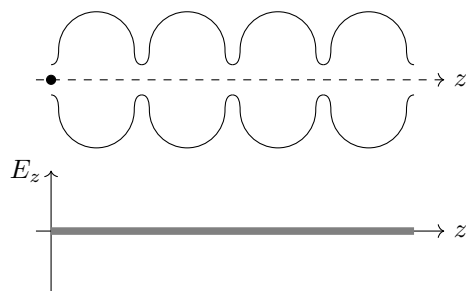


FIGURE 1 – Étude de la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans une cellule TESLA.

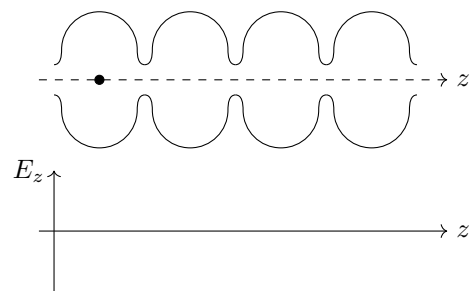
## Question Q24

$t = 0$

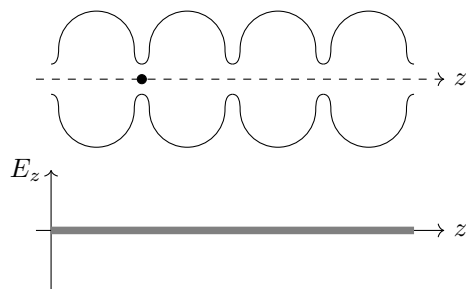


Le champ électrique est nul ici.

$t = \frac{T}{4}$



$t = \frac{T}{2}$



Le champ électrique est nul ici.

$t = \frac{3T}{4}$

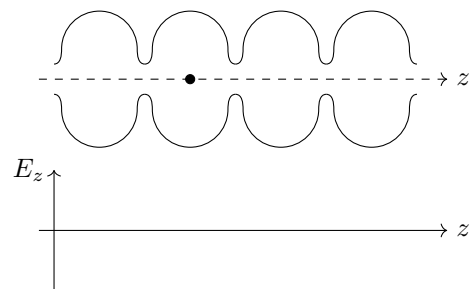
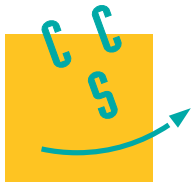


FIGURE 2 – Cavités TESLA à différents instants.



## DK6 : Un exemple de revalorisation

Le problème comporte 3 parties indépendantes. Certaines questions, moins guidées, sont repérées par leur numéro souligné. Elles ne sont pas *a priori* plus difficiles que les autres, mais demandent de prendre plus d'initiatives.

La centrale électrique DK6, sur le site du port industriel de Dunkerque (Hauts-de-France), produit de l'énergie électrique à partir de gaz naturel. De par sa conception et sa situation géographique, la centrale DK6 a la particularité de pouvoir revaloriser les fumées issues de la production d'acier, émises par l'usine sidérurgique voisine Arcelor-Mittal.

Le processus de revalorisation s'effectue en plusieurs étapes selon un cycle combiné de récupération de la *chaleur fatale* décrit en figure 1.

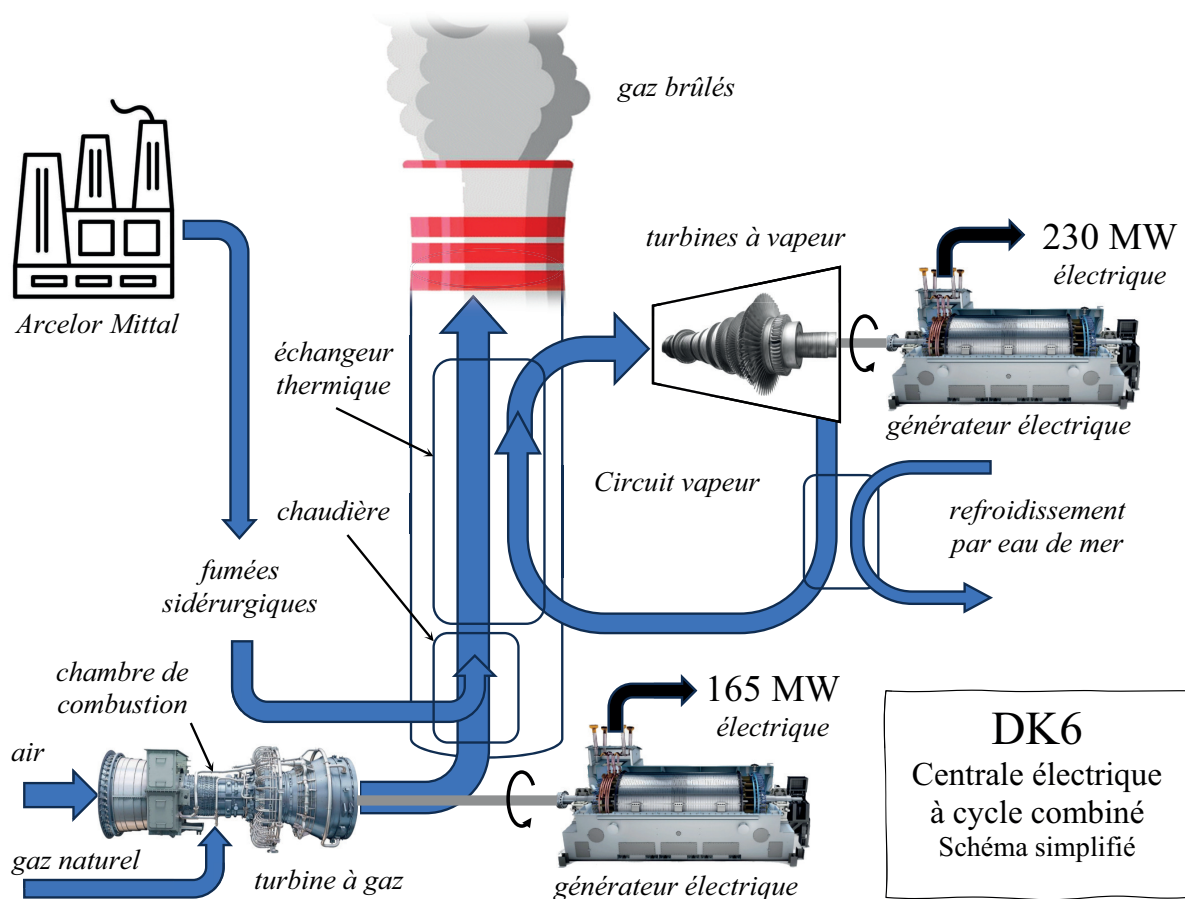


Figure 1 – Description d'une tranche de production

On réalise la combustion de gaz naturel avec de l'air sous pression dans une turbine à gaz reliée mécaniquement à un premier générateur électrique de 165 MW. Les gaz en sortie de la turbine à gaz servent à leur tour de comburant pour brûler les fumées sidérurgiques dans une chaudière. Les gaz brûlés passent enfin dans un échangeur thermique pour produire la vapeur d'eau qui alimente des turbines à vapeur reliées à un second générateur électrique de 230 MW. La centrale DK6 dispose de deux tranches de production identiques pour une puissance électrique totale de 790 MW.

Ce sujet propose une étude de la chambre de combustion de la turbine à gaz (partie A), le principe de fonctionnement d'une turbine à vapeur (partie B) et la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique par un alternateur synchrone (partie C). Les trois parties sont indépendantes entre elles.

Les données sont regroupées à la fin du sujet. Un document réponse est à rendre avec la copie.

## Partie A – La chambre de combustion de la turbine à gaz

La chambre de combustion de la turbine à gaz est alimentée par un gazoduc qui fournit du gaz naturel avec un débit massique constant  $D_{m,gn} = 9,66 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , sous une pression de 12 bar et une température  $T_0 = 298 \text{ K}$ . On assimile dans la suite le gaz naturel à du méthane pur ( $\text{CH}_4$ ). Le dioxygène nécessaire à la combustion est apporté par de l'air atmosphérique, comprimé sous une pression de 12 bar à la température de 298 K par un compresseur solidaire de l'axe de la turbine, avec un débit massique réglable noté  $D_{m,air}$ .

Le réacteur, parfaitement calorifugé, permet ainsi la combustion en continu et en régime stationnaire du méthane par le dioxygène de l'air à la pression constante de 12 bar. Les gaz issus de cette combustion sortent du réacteur à température élevée pour pouvoir faire tourner une turbine, dont le principe de fonctionnement sera étudié dans la partie suivante. Les aubes de la turbine sont recouvertes d'une fine couche de traitement en céramique qui les protège jusqu'à des températures de l'ordre de 1600 °C.

**Q1.** Écrire l'équation bilan de la combustion du méthane par le dioxygène, sachant que la réaction ne produit que de l'eau et du dioxyde de carbone sous forme gazeuse. On prendra un coefficient stœchiométrique unitaire pour le méthane.

Montrer que cette réaction est quantitative à 298 K puis calculer le pouvoir calorifique inférieur (PCI) du méthane, noté  $q_{gn}$ , défini comme l'énergie thermique par unité de masse de méthane libérée par la combustion du méthane sous pression constante à 298 K.

**Q2.** Déterminer le débit massique d'air  $D_{m0}$  permettant de réaliser la combustion dans les proportions stœchiométriques, puis la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th0}$  libérée par la réaction dans ces conditions.

**Q3.** Effectuer un bilan détaillé d'enthalpie et exprimer, en fonction de  $q_{gn}$  et des données, la température des gaz en sortie de la chambre de combustion pour un débit massique d'air  $D_{m0}$ . Commenter la valeur obtenue.

Lorsque la température de la chambre de combustion dépasse 1300 °C, les constituants de l'air commencent à réagir entre eux pour produire des oxydes d'azote. Ces oxydes d'azote, essentiellement NO et NO<sub>2</sub>, couramment appelés NO<sub>x</sub>, sont à l'origine de graves problèmes pour l'environnement et la santé.

**Q4.** On souhaite éviter la production et le rejet de NO<sub>x</sub> dans l'atmosphère. Justifier qualitativement que l'on peut diminuer la température de sortie en modifiant le débit d'air en entrée. Expliquer pourquoi, en pratique, le débit massique  $D_{m,air}$  est choisi supérieur à  $D_{m0}$ .

**Q5.** Exprimer le débit molaire de chaque espèce en sortie en fonction de  $D_{m,air}$ ,  $D_{m0}$  et des masses molaires dans le cas  $D_{m,air} > D_{m0}$ . On présentera les résultats dans un tableau. Les débits molaires des différentes espèces seront notés  $F_{\text{CH}_4}$ ,  $F_{\text{O}_2}$ ...

**Q6.** Exprimer, puis calculer, le débit massique d'air  $D_{m1}$  permettant à la turbine à gaz de fonctionner à sa température maximale tout en évitant la production de NO<sub>x</sub>.

Étant donné l'échauffement important des gaz dans la chambre de combustion, il faut tenir compte dans le calcul précédent de la dépendance avec la température de la capacité thermique molaire à pression constante des différents gaz (figure 2). La capacité thermique molaire à pression constante d'un gaz réel peut ainsi s'exprimer de manière empirique en fonction de la température par la *relation de Shomate* :

$$C_{pm}(T) = A + BT + CT^2 + DT^3 + \frac{E}{T^2},$$

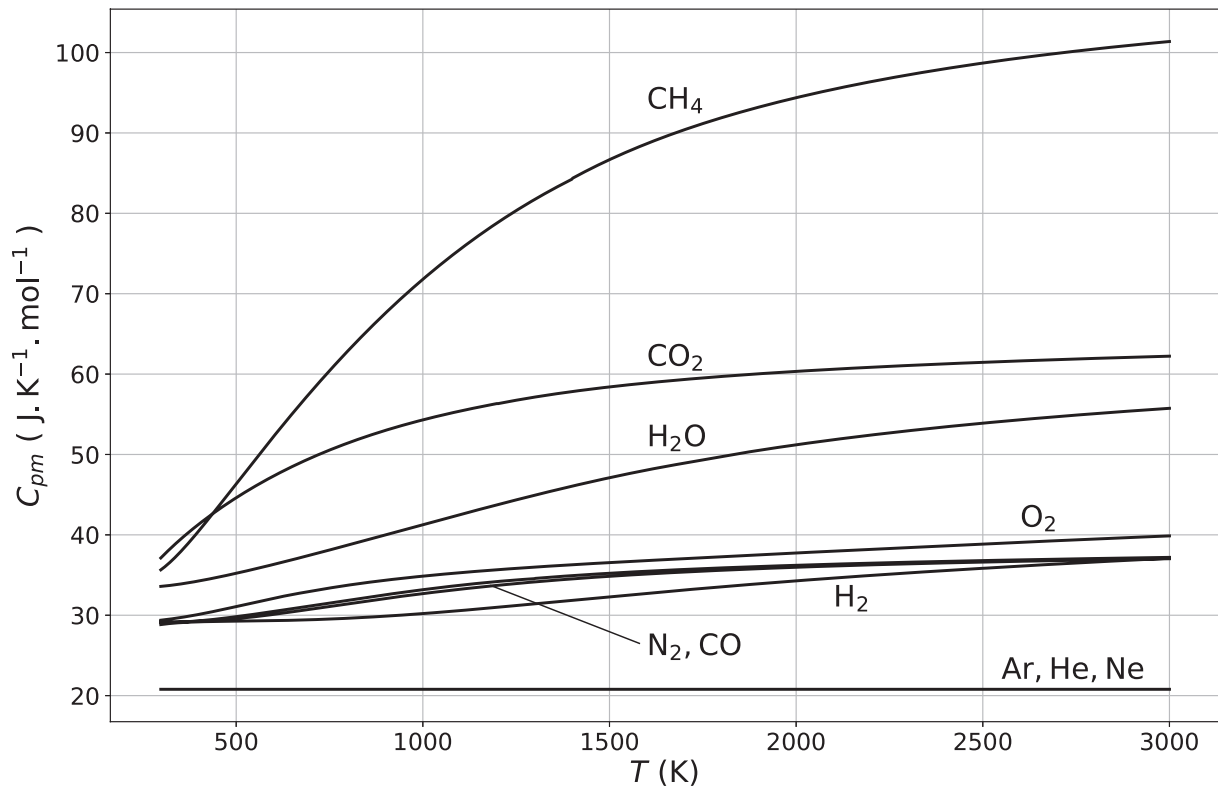
où les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont obtenus expérimentalement pour chaque gaz. La variation d'enthalpie de  $n$  moles de gaz entre les températures  $T_1$  et  $T_2$  s'exprime alors sous forme intégrale par la relation :

$$H(T_2) - H(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} nC_{pm}(T)dT.$$

Les capacités thermiques molaires à pression constante des différentes espèces seront notées  $C_{pm,\text{CH}_4}(T)$ ,  $C_{pm,\text{O}_2}(T)$ ...

**Q7.** Reprendre la question **Q6** pour établir, dans le cas où  $D_{m,air} > D_{m0}$ , la nouvelle relation donnant le débit massique d'air  $D_{m,air}$  en fonction de la température de sortie des gaz  $T_s$  en tenant compte de l'influence de la température sur les capacités thermiques molaires à pression constante, sous forme intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.





**Figure 2** – Capacités thermiques molaires de différents gaz en fonction de la température

Pour le débit  $D_{m,gn} = 9,66 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et la température  $T_0 = 298 \text{ K}$ , le calcul numérique de la température de sortie  $T_s$  des gaz brûlés en fonction du débit d'air  $D_{m,air}$  est effectué par un programme en Python, dont un extrait est présenté ci-après.

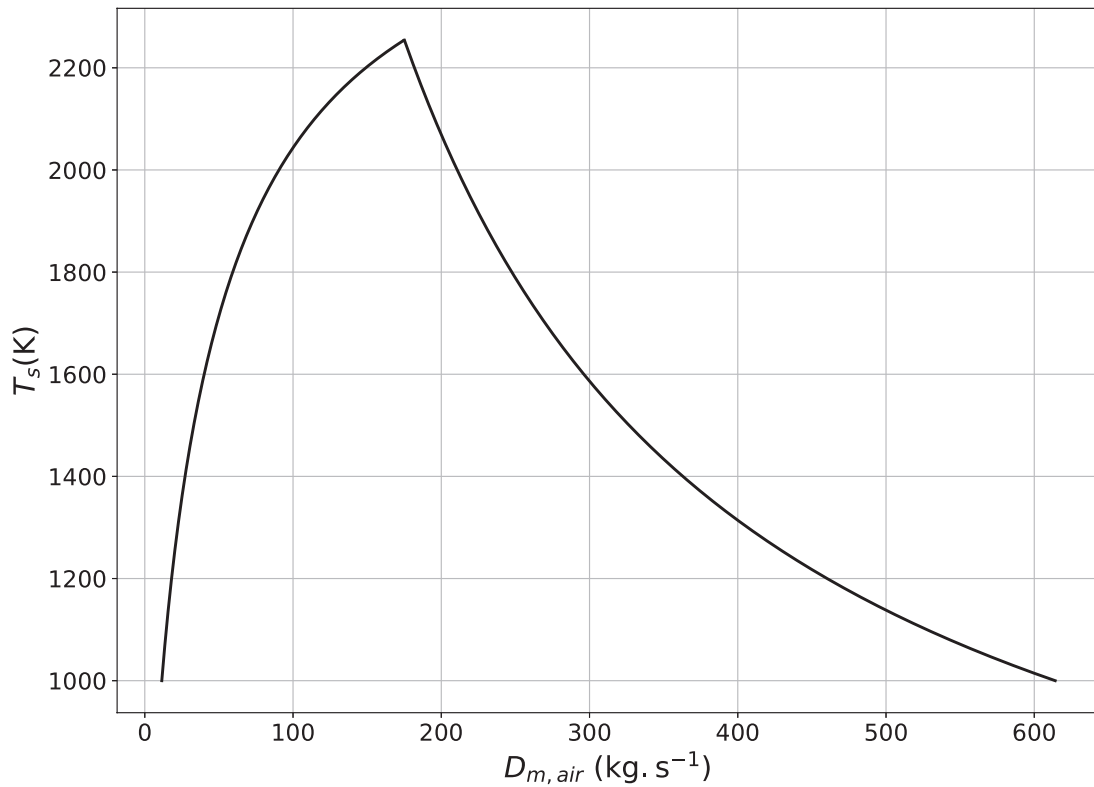
```

1      '''Extrait 1'''
2      # Coefficients A, B, C, D, E de la relation de Shomate des différents gaz
3      N2 = [28.98641, 1.853978e-3, -9.647459e-6, 16.63537e-9, 0.000117e6]
4      H2O = [-203.6060, 1523.290e-3, -3196.413e-6, 2474.455e-9, 3.855326e6]
5
6      '''Extrait 2'''
7      def Cpm(T, gaz):
8          A, B, C, D, E = gaz
9          return A + B*T + C*T**2 + D*T**3 + E/T**2
10
11     '''Extrait 3'''
12     def int_Cpm(gaz, T1, T2):
13         [A COMPLETER]
14
15     '''Extrait 4'''
16     plt.plot(Dm, T, 'k-', lw=2) # Tracé du graphe de Ts en fonction de Dm,air
17     plt.show()

```

**Q8.** Préciser l'unité des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ . Proposer un code Python permettant d'implémenter la fonction `int_Cpm(gaz, T1, T2)` qui prend pour arguments la liste `gaz` des coefficients de la relation de Shomate du gaz étudié et les températures  $T1$  et  $T2$ , puis qui renvoie une valeur numérique approchée de l'intégrale  $\int_{T_1}^{T_2} C_{pm}(T) dT$  obtenue par la méthode des rectangles utilisant  $N = 1000$  points de calcul.

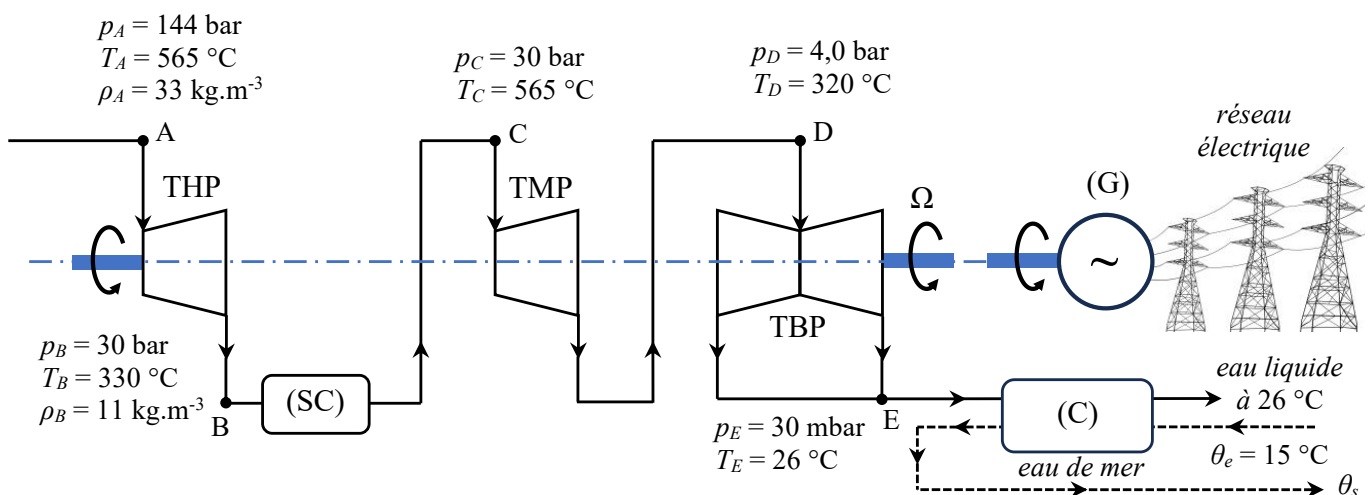
Le programme permet de tracer le graphe de la température de sortie des gaz en fonction du débit d'air d'entrée en tenant compte de la dépendance avec la température des capacités thermiques molaires à pression constante des différents gaz (figure 3).



**Figure 3** – Température de sortie  $T_s$  en fonction du débit massique d'air  $D_{m,air}$  à l'entrée

- Q9.** Décrire précisément le graphe obtenu en mettant en évidence des valeurs particulières pertinentes dont on commentera le sens physique. Déterminer la valeur réelle du débit massique d'air permettant de faire fonctionner la turbine à gaz à sa température maximale sans production de  $NO_x$  et comparer cette valeur au débit massique  $D_{m1}$  trouvé en question **Q6**. Ce résultat était-il prévisible? Déterminer alors le débit massique de gaz en sortie de la turbine.
- Q10.** Estimer le rendement thermodynamique de la centrale électrique DK6.

## Partie B – La turbine à vapeur



**Figure 4** – Circuit de vapeur dans les turbines

La turbine à vapeur est un élément essentiel du fonctionnement d'une centrale électrique thermique ou nucléaire, convertissant l'énergie de la vapeur sous pression en énergie mécanique. De la vapeur d'eau arrive dans la turbine sous haute pression et haute température et se détend à travers différents étages comportant une succession d'aubes fixes et d'aubes mobiles, provoquant la rotation de l'axe de la turbine à la vitesse angulaire  $\Omega = 3000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ , et entraînant par ailleurs le générateur électrique (G).

On cherche dans cette partie à évaluer précisément la puissance mécanique transmise par le fluide à l'arbre de la turbine et à comprendre le rôle des différents étages de détente.

La centrale électrique DK6 utilise un circuit de vapeur sèche traversant successivement une turbine haute pression (THP), un surchauffeur (SC), une turbine moyenne pression (TMP) et une turbine basse pression (TBP). Les turbines sont supposées parfaitement calorifugées et alignées sur le même axe de rotation. Pour éviter tout phénomène de corrosion, il ne doit jamais exister de liquide dans les turbines. En sortie de la turbine basse pression, le fluide, alors sous forme de vapeur juste saturante, traverse de façon isobare un condenseur (C) à circulation d'eau de mer. Le schéma de la figure 4 présente quelques caractéristiques de la vapeur aux différents points notés A, B, C, D et E du circuit. Le débit massique de vapeur dans le circuit doit être contrôlé et vaut  $D_m = 534 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .

Le sujet est accompagné d'un **document réponse** contenant le graphe de l'enthalpie massique de l'eau en fonction de son entropie massique, appelé diagramme de Mollier, sur lequel figurent également les courbes isobares, isothermes, isotitres et la courbe de saturation du mélange liquide-vapeur.

La centrale est étudiée en régime stationnaire.

## I – Étude globale de la turbine

**Q11.** Placer les points A, B, C, D et E - dont la pression et la température sont données sur la figure 4 - sur le diagramme de Mollier du document réponse et représenter l'évolution de la vapeur dans le circuit depuis l'entrée de la turbine haute pression jusqu'à la sortie de la turbine basse pression.

La vapeur entre dans un premier temps dans la turbine haute pression, dont les caractéristiques géométriques sont précisées sur le document 1, en fin de sujet.

**Q12.** Montrer en utilisant le diagramme de Mollier que la détente à travers la turbine haute pression peut être considérée comme isentropique. Déterminer la température que l'on obtiendrait en sortie de la turbine haute pression si la vapeur était un gaz parfait. Discuter la validité de l'hypothèse du gaz parfait dans ces conditions.

**Q13.** Déterminer l'expression puis la valeur de la vitesse débitante  $v_A$  de la vapeur à l'entrée de la turbine haute pression. En déduire la valeur de la vitesse  $v_B$  en sortie si la turbine gardait un diamètre constant. Justifier la nécessité de conserver une vitesse débitante à peu près constante dans la turbine. Indiquer comment réaliser cette condition en pratique.

**Q14.** Évaluer la puissance mécanique transmise à l'axe de rotation par la vapeur d'eau dans la turbine haute pression.

**Q15.** Calculer la puissance mécanique maximale transmise à l'axe de rotation si l'on utilisait une unique turbine réalisant une détente isentropique ?

Afin d'augmenter la puissance transmise à l'axe, on utilise à la fois un surchauffeur, qui permet de réchauffer la vapeur, et plusieurs turbines.

**Q16.** Déterminer la puissance thermique fournie par le surchauffeur, puis calculer la puissance mécanique totale transmise à l'axe de rotation en considérant l'ensemble du circuit de vapeur, constitué des trois turbines ainsi que du surchauffeur. Commenter la valeur numérique obtenue.

Dans la turbine moyenne pression (et à plus forte raison dans la turbine basse pression), la pression plus faible de la vapeur impose d'avoir des aubes plus grandes, ce qui augmente la surface de contact avec le fluide.

**Q17.** Estimer la puissance mécanique transmise à l'arbre de la turbine moyenne pression si l'évolution de la vapeur était adiabatique et réversible avec la même pression de sortie  $p_D = 4 \text{ bar}$  ? En déduire la puissance des pertes introduites par les frottements sur les aubes, que l'on appelle *pertes adiabatiques*.

Le condenseur en sortie de la turbine basse pression utilise une circulation d'eau de mer avec un débit volumique constant  $Q = 33.10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ . L'eau de mer est prélevée à une température moyenne  $\theta_e = 15^\circ \text{C}$ , puis rejetée en milieu naturel.

La réglementation impose de rejeter l'eau de mer avec une température maximale de  $30^\circ \text{C}$  pour ne pas perturber les écosystèmes marins. On suppose que toute la vapeur sortant de la turbine se liquéfie de manière isobare dans l'échangeur thermique parfaitement calorifugé.

**Q18.** Établir la relation donnant la température  $\theta_s$  de l'eau de mer rejetée par le condenseur en fonction des données utiles. Calculer  $\theta_s$  puis commenter la valeur numérique obtenue.

## II – Étude d'un étage de détente de la turbine haute pression

Afin de réduire les contraintes mécaniques exercées sur les aubes en rotation, la vapeur est détendue progressivement à travers une dizaine d'étages successifs dans chaque turbine. Chaque étage comporte un stator avec  $N = 80$  aubes fixes, qui agissent comme des tuyères en augmentant la vitesse de la vapeur, et un rotor constitué de 80 aubes en rotation qui convertissent toute ou partie de l'énergie cinétique de la vapeur en travail mécanique.

Les aubes de la turbine haute pression, réparties autour de l'axe de rotation de rayon  $R_0$ , sont très courtes comparées aux aubes des turbines moyenne et basse pression. On suppose donc que, dans toute la turbine haute pression, l'écoulement du fluide, supposé stationnaire, se fait dans une couche de faible épaisseur  $a$  autour de l'arbre de rotation et que la vapeur se comporte comme un gaz parfait en évolution isentropique.

On s'intéresse ici à l'étage d'entrée de la turbine haute pression que l'on se propose de modéliser sur le principe d'une turbine à réaction (figure 5).

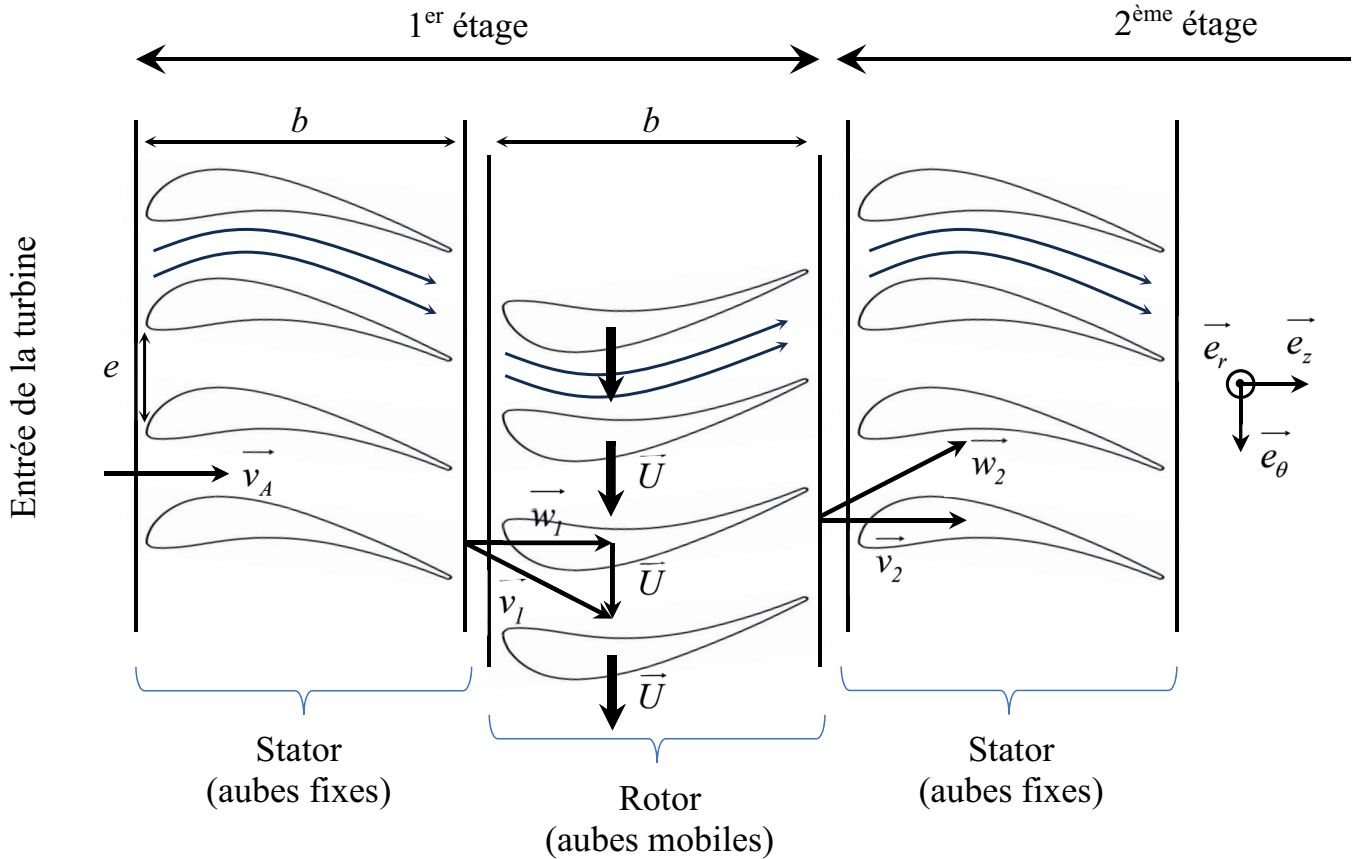


Figure 5 – Principe d'une turbine à réaction

Au premier étage de la turbine haute pression, le fluide entre à la vitesse  $\vec{v}_A$ , accélère dans le stator jusqu'à la vitesse  $\vec{v}_1$ , transmet un couple moteur au rotor et ressort de l'étage à la vitesse  $\vec{v}_2$ , les vitesses étant définies ici par rapport au stator.

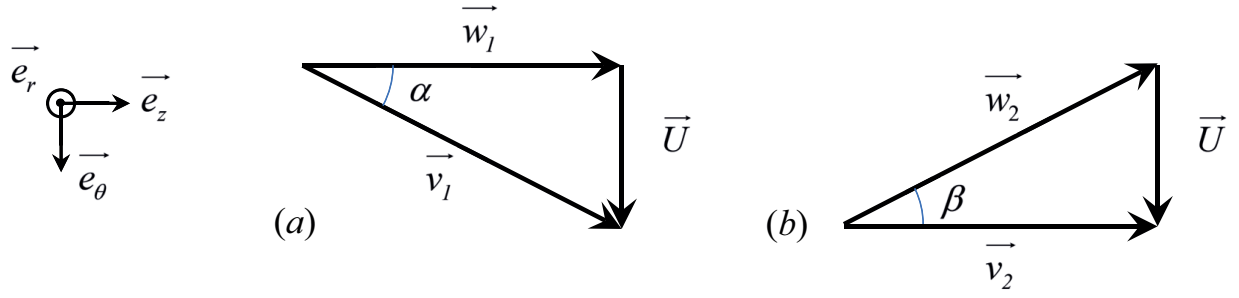
**Q19.** Établir un critère qualitatif portant sur des durées caractéristiques permettant de justifier que l'évolution du fluide dans le stator est bien adiabatique. On admettra dans la suite que ce critère est largement vérifié.

Au cours du passage de la vapeur à travers les aubes fixes du stator du premier étage de détente, la pression du fluide varie de  $\Delta p_1 = p_1 - p_A = -7,3$  bar.

**Q20.** Exprimer, au premier ordre en  $\Delta p_1$ , la variation de température  $\Delta T_1 = T_1 - T_A$  du fluide entre l'entrée et la sortie du stator. En appliquant le premier principe des systèmes ouverts dans le stator, déduire les expressions puis les valeurs numériques de la variation de température  $\Delta T_1$  et de la vitesse  $v_1$  de la vapeur à la sortie du stator du premier étage de détente de la turbine haute pression.

La vapeur, ainsi aspirée à travers le stator, gagne de la vitesse et arrive dans le rotor face aux aubes en rotation autour de l'axe principal à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ . La vitesse d'entrée du fluide par rapport à une aube en mouvement est donnée par la loi de composition des vitesses  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{U}$  où  $\vec{U} = R_0 \Omega \vec{e}_\theta$  désigne la vitesse locale de déplacement de l'aube située à la surface de l'arbre de rayon  $R_0$ . Dans une turbine à réaction, la géométrie et l'orientation des

aubes permettent d'obtenir une vitesse relative d'entrée axiale, de la forme  $\vec{w}_1 = w_1 \vec{e}_z$ . La relation géométrique entre  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_1$  et  $\vec{U}$  est connue par les ingénieurs turbiniers comme étant le triangle des vitesses (figure 6). On note  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{w}_1$ .



**Figure 6** – Triangle des vitesses (a) en entrée du rotor et (b) en sortie du rotor

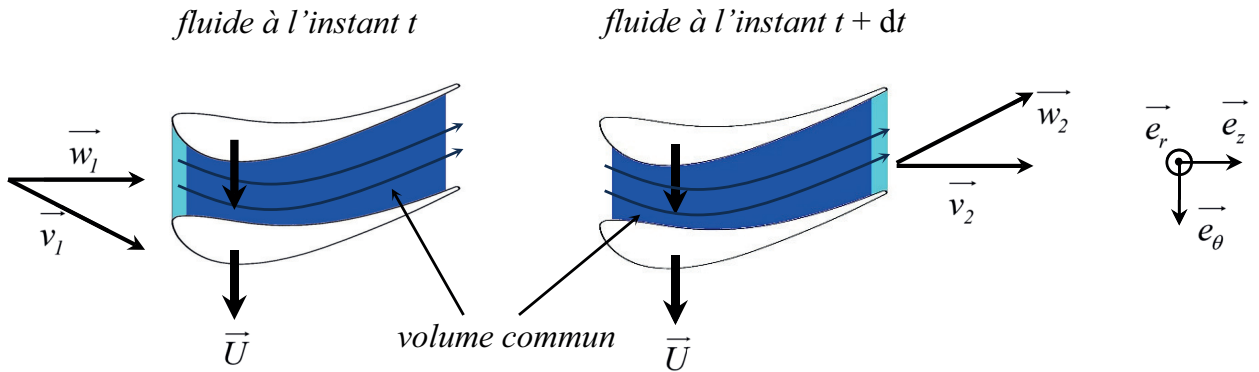
Dans une première approche, on peut considérer que le fluide agit sur chaque aube comme sur une aile d'avion. On a reporté sur le document 2 les caractéristiques aérodynamiques d'une aile de profil similaire à celui d'une aube du rotor obtenues par simulation numérique. On appelle  $C_L$  (respectivement  $C_D$ ) le coefficient de portance (respectivement de traînée) de l'aile intervenant dans la force de portance d'intensité  $\frac{1}{2}\rho C_L S v^2$  (respectivement dans la force de traînée  $\frac{1}{2}\rho C_D S v^2$ ), où  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $S$  la surface portante de l'aile et  $v$  la vitesse relative du fluide par rapport à l'aile.

Dans la configuration étudiée, le nombre de Reynolds vaut  $6.10^6$  et l'angle d'inclinaison vaut  $15^\circ$ .

**Q21.** Justifier la valeur de l'angle d'inclinaison choisi. À l'aide d'une démarche que l'on présentera avec soin, estimer la puissance mécanique transmise par le fluide au premier étage de la turbine haute pression, ainsi que le nombre  $n$  d'étages de détente, et évaluer la force axiale exercée sur le rotor. On utilisera les données du document 1.

En fait les ingénieurs tiennent compte dans leurs calculs du changement de direction de l'écoulement du fluide entre l'entrée et la sortie du rotor. On appelle ainsi  $\vec{w}_2$  la vitesse relative du fluide en sortie d'aubage et  $\vec{v}_2$  cette même vitesse mesurée par rapport au stator.

La forme des aubes utilisées impose une vitesse de sortie  $\vec{v}_2$  axiale de la forme  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_z$  avec  $\beta = \alpha$ , en notant  $\beta$  l'angle entre  $\vec{v}_2$  et  $\vec{w}_2$ .



**Figure 7** – Système constitué du fluide entre deux aubes du rotor entre  $t$  et  $t + dt$

**Q22.** On considère le système constitué du fluide circulant en régime stationnaire entre deux aubes du rotor entre les instants  $t$  et  $t + dt$  (figure 7). Effectuer pour ce système un bilan précis de moment cinétique par rapport à l'axe de rotation et déterminer le couple mécanique exercé par tout le fluide sur le rotor du premier étage en fonction de  $D_m$ ,  $R_0$  et  $U$ . En déduire que la puissance mécanique transmise au rotor s'écrit  $D_m U^2$  et faire l'application numérique.

Le modèle de la *turbine à réaction* ne rend pas tout à fait compte de la forme réelle des aubes d'une turbine à haute pression. En pratique, on définit le degré de réaction  $\varepsilon$  d'un étage de turbine par le rapport de la variation d'enthalpie massique du fluide à travers le rotor sur la variation d'enthalpie massique à travers l'étage { stator + rotor }. Le degré de réaction varie d'ailleurs généralement d'un étage à l'autre selon la taille et l'orientation des aubes. Dans une *turbine à action* parfaite, le degré de réaction est nul ( $\varepsilon = 0$ ) et le travail mécanique massique utile reçu par le fluide à travers un étage vaut  $-2U^2$ .

On modélise désormais la turbine haute pression par une turbine à action parfaite constituée de  $n$  étages de détente identiques et on suppose que la chute d'enthalpie massique du fluide à travers la turbine se répartit équitablement entre les différents étages.

**Q23.** Déterminer le nombre d'étages  $n$  de détente contenus dans la turbine haute pression.

**Q24.** Calculer la puissance mécanique totale réellement transmise à l'arbre à travers tous les étages de la turbine haute pression. Commenter.

## Partie C – Le générateur électrique

Le générateur entraîné par l'ensemble des trois turbines THP, TMP et TBP est une machine synchrone triphasée fonctionnant en alternateur.

Cette partie étudie le modèle d'un alternateur diphasé équivalent dont les caractéristiques au point nominal sont identiques à celles du modèle triphasé (Génératrice ALSTOM type 50WY23Z-109). Ces caractéristiques sont rassemblées dans un tableau figurant en fin de sujet.

On rappelle que toutes les grandeurs fournies relativement à des signaux sinusoïdaux sont données en valeurs efficaces.

On supposera que l'alternateur est une machine à pôles lisses taillée dans un matériau ferromagnétique idéal. L'entrefer étant de très faible épaisseur par rapport au rayon  $r$  du rotor, on supposera que tous les points de l'entrefer sont à la distance  $r$  de l'axe de rotation de la machine et repérés en coordonnées cylindriques  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  où  $O$  se situe au centre de la machine et appartient à l'axe de rotation ( $Oz$ ) du rotor.

### I – Paramètres de l'alternateur

**Q25.** Attribuer le caractère continu ou sinusoïdal aux courants circulant dans le stator et dans le rotor. Décrire l'organisation spatiale des circuits statorique et rotorique.

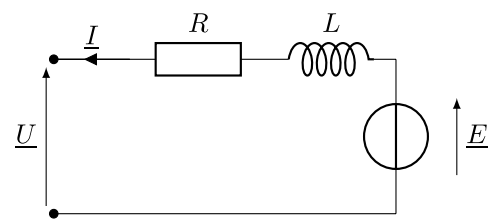
**Q26.** Rappeler l'expression de la puissance moyenne délivrée par les circuits statoriques. En déduire la valeur de la tension nominale aux bornes de chaque phase.

**Q27.** Rappeler les propriétés d'un matériau ferromagnétique idéal. Déterminer la direction du champ magnétique en un point  $M$  de l'entrefer.

Donner, en justifiant, la relation entre  $\omega$  la pulsation des courants et  $\Omega$  la vitesse de rotation du rotor.

Déduire la valeur numérique en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  puis en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$  de  $\Omega_n$ , vitesse de rotation du rotor en fonctionnement nominal.

**Q28.** Le schéma électrique d'une phase en fonctionnement alternateur est représenté en figure 8. On note  $R$  et  $X$  respectivement la résistance et la réactance synchrone du bobinage d'une phase définie par  $X = L\omega$  où  $L$  désigne son inductance propre. En fonctionnement alternateur, écrire l'équation électrique relative à une phase faisant apparaître  $R$  et  $X$  ; on notera respectivement  $\underline{E}$ ,  $\underline{U}$  et  $\underline{I}$  les représentations complexes de la force électromotrice, de la tension aux bornes de la phase et de l'intensité du courant circulant dans la phase.



**Figure 8** – Schéma électrique d'une phase

Afin de déterminer les paramètres de l'alternateur, on dispose de deux essais expérimentaux au cours desquels le rotor est entraîné par un moteur extérieur à la vitesse nominale  $\Omega_n$  :

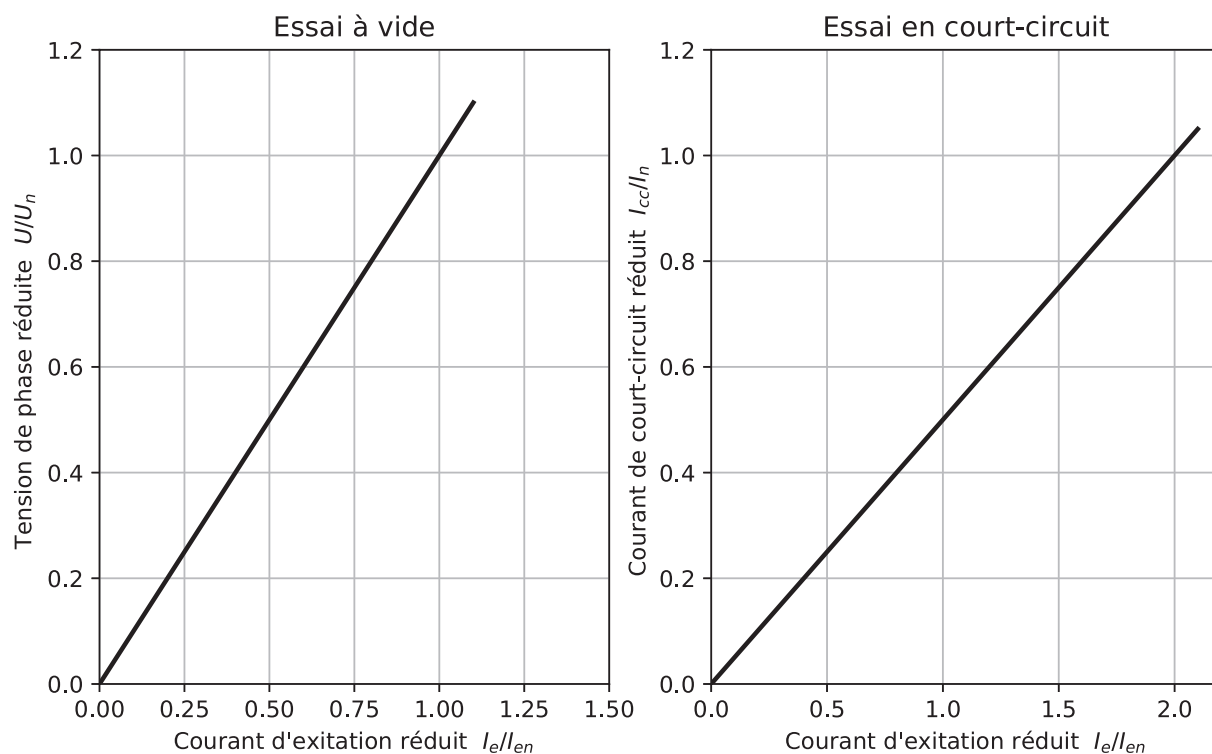
- un essai à vide dans lequel on relève la tension  $U$  aux bornes d'une phase en fonction du courant d'excitation  $I_e$  ;
- un essai en court-circuit dans lequel on court-circuite chaque phase et on relève  $I_{cc}$ , l'intensité circulant dans une phase en fonction du courant d'excitation  $I_e$ .

Les deux courbes obtenues sont représentées en figure 9.

**Q29.** En utilisant les résultats des deux essais, montrer que  $E = kI_e$  avec  $k = 25,6 \, \Omega$ . Calculer la valeur de  $X$  et commenter.

On s'intéresse à présent au fonctionnement nominal de l'alternateur dont les caractéristiques sont données dans le tableau. On considère que la charge nominale impose un retard du courant par rapport à la tension.

**Q30.** Représenter l'allure du diagramme de Fresnel associé à l'équation électrique d'une phase obtenue en question **Q28** en adoptant la tension  $\underline{U}$  pour origine des phases. En déduire l'expression ainsi que la valeur de  $E$  puis la valeur de  $I_e$ . On parle, dans cette situation, de chute de tension en charge. Interpréter.



**Figure 9** – Courbes issues des essais à vide (à gauche) et en court-circuit (à droite)

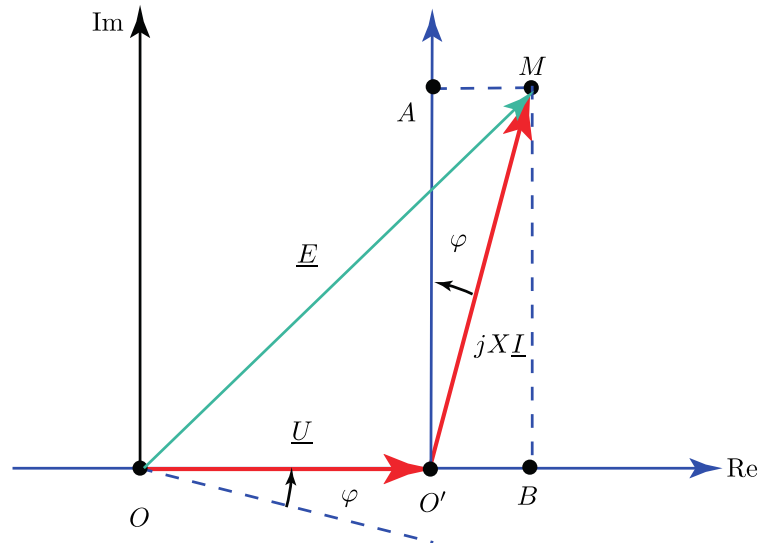
## II – Raccordement au réseau - compensateur synchrone

L'alternateur fournit de la puissance électrique au site industriel où il se trouve mais peut aussi être raccordé au réseau électrique qui impose la tension aux bornes des phases de l'alternateur et une fréquence constante. Une fois couplé à un grand réseau, un alternateur fait partie d'un système comprenant des centaines d'autres alternateurs. Il est alors impossible de préciser la nature de la charge électrique branchée aux bornes de cet alternateur en particulier.

On étudie ici les échanges de puissance entre l'alternateur et le réseau. Dans toute la suite, on néglige  $R$  devant  $X$  ainsi que toutes les pertes énergétiques. On considère de plus que les turbines imposent un couple constant au rotor de l'alternateur. L'alternateur est raccordé au réseau qui impose une tension  $U_n$  constante.

L'alternateur, alimenté par le courant d'excitation  $I_e$ , échange de la puissance avec le réseau et reçoit de la puissance mécanique de la part des turbines. On note  $\underline{I}$  la représentation complexe de l'intensité du courant de phase. Le fonctionnement n'est pas nécessairement nominal. Le facteur de puissance vaut  $\cos(\varphi)$  où  $\varphi = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I})$  représente le retard algébrique de phase du courant par rapport à la tension.

La figure 10 présente le diagramme de Fresnel d'une phase de l'alternateur raccordé au réseau dans le cas où  $\varphi > 0$ .



**Figure 10** – Diagramme de Fresnel de l'alternateur connecté au réseau dans le cas  $\varphi > 0$

- Q31.** Justifier que la puissance  $P$  délivrée par l'alternateur est imposée et reste constante. Montrer que la longueur du segment  $O'A$  sur la figure 10 est proportionnelle à  $P$  et préciser l'expression de la constante de proportionnalité. En déduire le lieu des points  $M$  relatifs au fonctionnement de l'alternateur. Comment peut-on en pratique agir sur les paramètres de l'alternateur pour déplacer le point  $M$  dans ces conditions ?
- Q32.** Montrer qu'il existe un point de fonctionnement  $M'$  de l'alternateur délivrant la même puissance avec le même courant de phase  $I$  que le point  $M$ . Préciser la relation liant les phases  $\varphi$  et  $\varphi'$  correspondantes. Déterminer alors l'expression puis la valeur  $E'$  de  $E$  permettant d'obtenir le point  $M'$ , ainsi que le courant d'excitation  $I'_e$ .

Sur le **document réponse** est reporté un réseau de courbes nommées *courbes de Mordey* donnant l'évolution du courant statorique  $I$  en fonction en fonction du courant d'excitation  $I_e$  pour un fonctionnement de l'alternateur à puissance moyenne constante.

- Q33.** Reporter, directement sur la figure 2 du document réponse, les positions des deux points  $M$  et  $M'$  associés au fonctionnement de l'alternateur à sa puissance nominale  $P_n$  sur le réseau de courbes de Mordey. Retrouver graphiquement les valeurs de  $E$  et  $E'$  correspondant aux points de fonctionnement  $M$  et  $M'$  de l'alternateur à sa puissance nominale  $P_n$ . Quelle est alors la relation entre les phases  $\varphi$  et  $\varphi'$  correspondantes ?

Un réseau électrique doit fournir une tension stable malgré la présence d'un grand nombre d'utilisateurs et la variété des utilisations. Afin de maintenir certaines constantes du réseau malgré les irrégularités d'utilisation, on utilise les machines synchrones en mode *compensateur synchrone* dans un but de régulation.

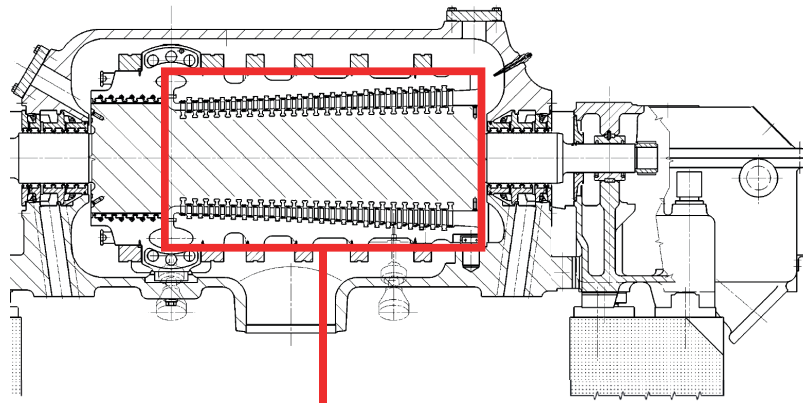
Elles sont alors connectées au réseau en tournant à vide, sans être entraînées par un actionneur extérieur.

- Q34.** Adapter le diagramme de Fresnel de la figure 10 afin de déterminer les deux valeurs de  $\varphi$  possibles lorsque l'alternateur tourne à vide sans entraîner de charge mécanique et sans recevoir de puissance mécanique.

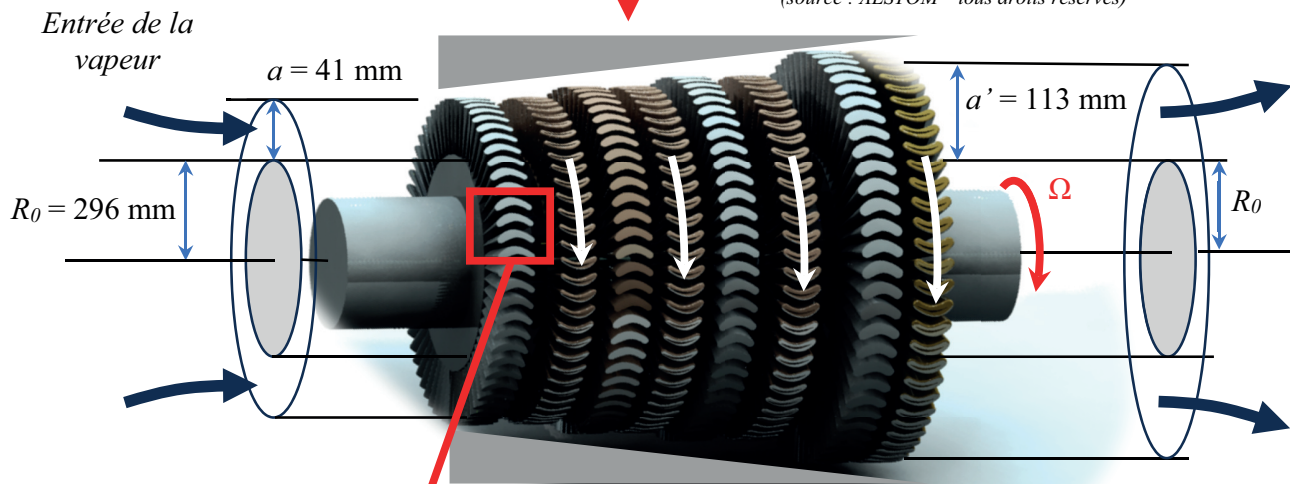
Déterminer les valeurs de  $E$  correspondantes dans le cas particulier où  $U = U_n$  et  $I = \frac{I_n}{10}$ , en prenant  $X = 2,3 \, \Omega$ . Préciser pour laquelle de ces deux valeurs, la machine se comporte comme un condensateur.



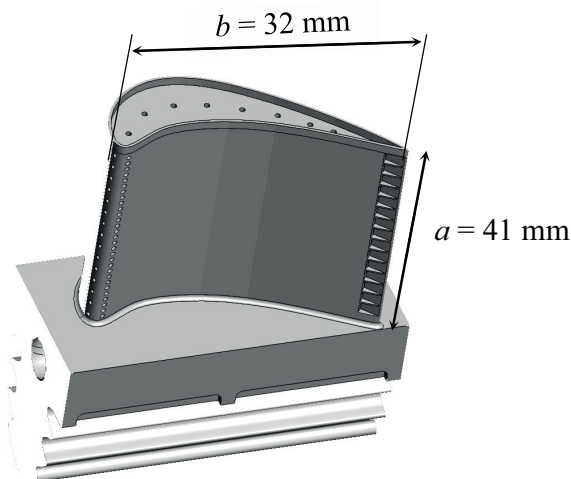
# Documents



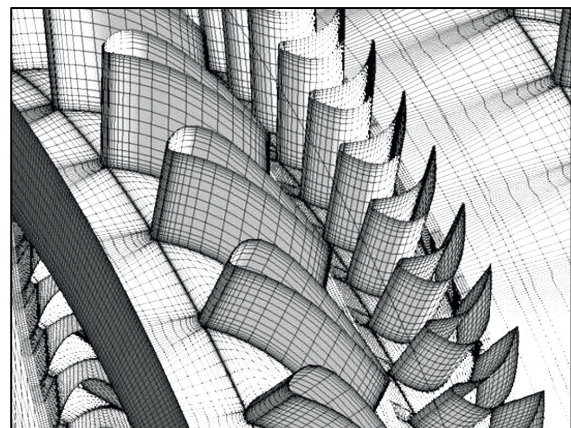
(a) Vue en coupe de la turbine HP de DK6  
(source : ALSTOM – tous droits réservés)



(b) Détail de la turbine HP. La vapeur circule entre les aubes des différents étages de détente

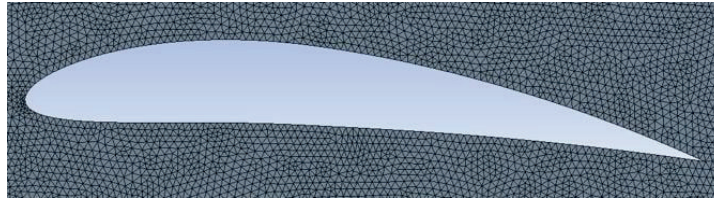


(c) Géométrie d'une aube de l'étage d'entrée

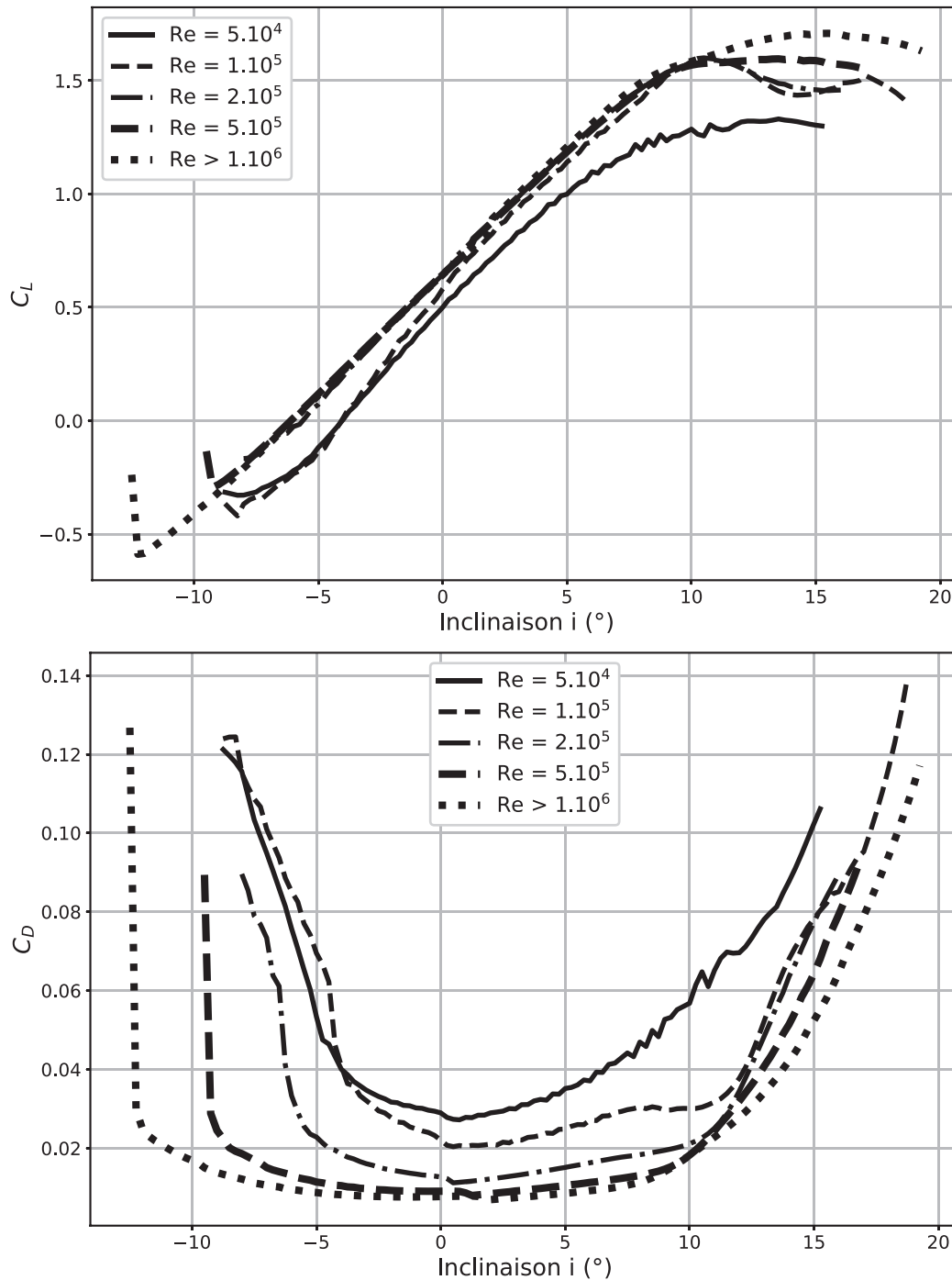


(d) Un étage de détente est constitué d'un stator et d'un rotor (simulation numérique)

## Document 1 : caractéristiques de la turbine haute pression



Profil NACA 6412 et maillage utilisé pour la simulation numérique



$C_L$  : coefficient de portance (*lift coefficient*) ;  $C_D$  : coefficient de traînée (*drag coefficient*)  
 $i$  : angle d'inclinaison de l'aile

## Document 2 : caractéristiques aérodynamiques du profil NACA 6412

(source : <http://airfoiltools.com>)

# Données

Nombre d'Avogadro :  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits :  $R = k_B \mathcal{N}_A = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masses molaires :  $M(\text{H}) = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{C}) = 12,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{N}) = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

L'air atmosphérique est constitué à  $\frac{4}{5}$  de diazote et à  $\frac{1}{5}$  de dioxygène en proportions molaires.

Enthalpie standard de formation et entropie molaire standard à 298 K :

| Espèce                                                           | $\text{CH}_{4(g)}$ | $\text{CO}_{2(g)}$ | $\text{O}_{2(g)}$ | $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ |
|------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|-------------------|----------------------------|
| $\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$             | -74,9              | -393,5             |                   | -241,8                     |
| $S_m^\circ (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$ | 186,2              | 213,8              | 205,0             | 188,7                      |

Capacités thermiques molaires à pression constante à 298 K :

| Espèce                                                        | $\text{CH}_{4(g)}$ | $\text{CO}_{2(g)}$ | $\text{CO}_{(g)}$ | $\text{O}_{2(g)}$ | $\text{N}_{2(g)}$ | $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ | $\text{H}_{2(g)}$ |
|---------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|
| $C_{pm} (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$ | 35,7               | 37,1               | 29,1              | 29,4              | 29,1              | 33,6                       | 28,8              |

Masse molaire de l'eau :  $M = 18,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

Rapport des capacités thermiques de la vapeur d'eau :  $\gamma = 1,30$

Capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Masse volumique de l'eau liquide :  $\rho_{eau} = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait :  $c_p = 2,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 26 °C :  $l_{vap} = 2,30 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Caractéristiques de l'alternateur diphasé au point nominal :

|                                                |                          |
|------------------------------------------------|--------------------------|
| Nombre de pôles                                | 2                        |
| Nombre de phases                               | 2                        |
| Puissance moyenne nominale                     | $P_n = 240 \text{ MW}$   |
| Courant de phase statorique nominal            | $I_n = 11,1 \text{ kA}$  |
| Facteur de puissance nominal                   | 0,85                     |
| Fréquence nominale des courants                | $f = 50 \text{ Hz}$      |
| Courant d'excitation rotorique nominal à vide  | $I_{en} = 498 \text{ A}$ |
| Tension d'excitation rotorique nominale à vide | $U_{en} = 92 \text{ V}$  |
| Résistance par phase                           | 0,9 $\Omega$             |

◇ Fin ◇

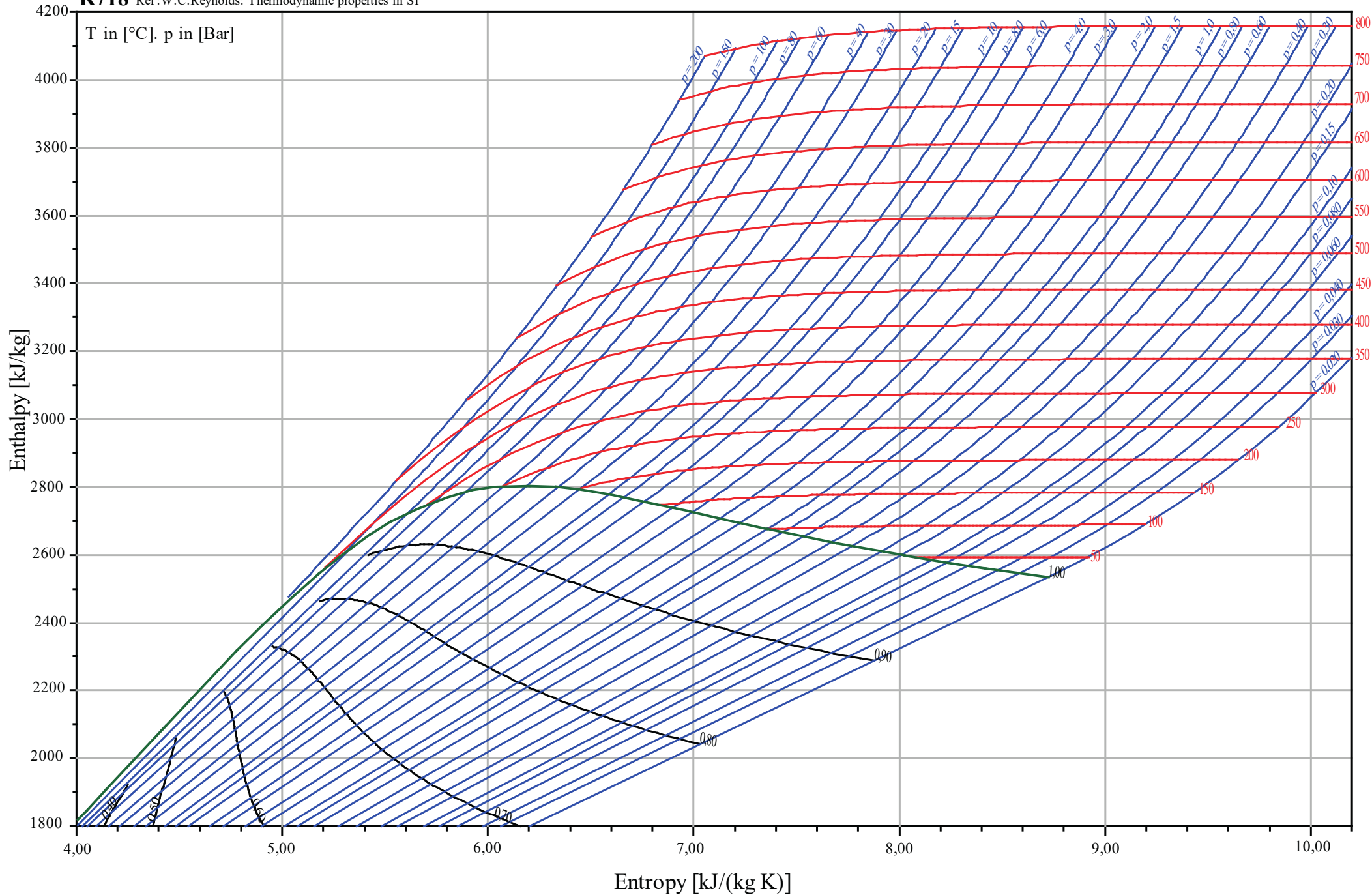


FIGURE 1 – Diagramme de Mollier de l'eau

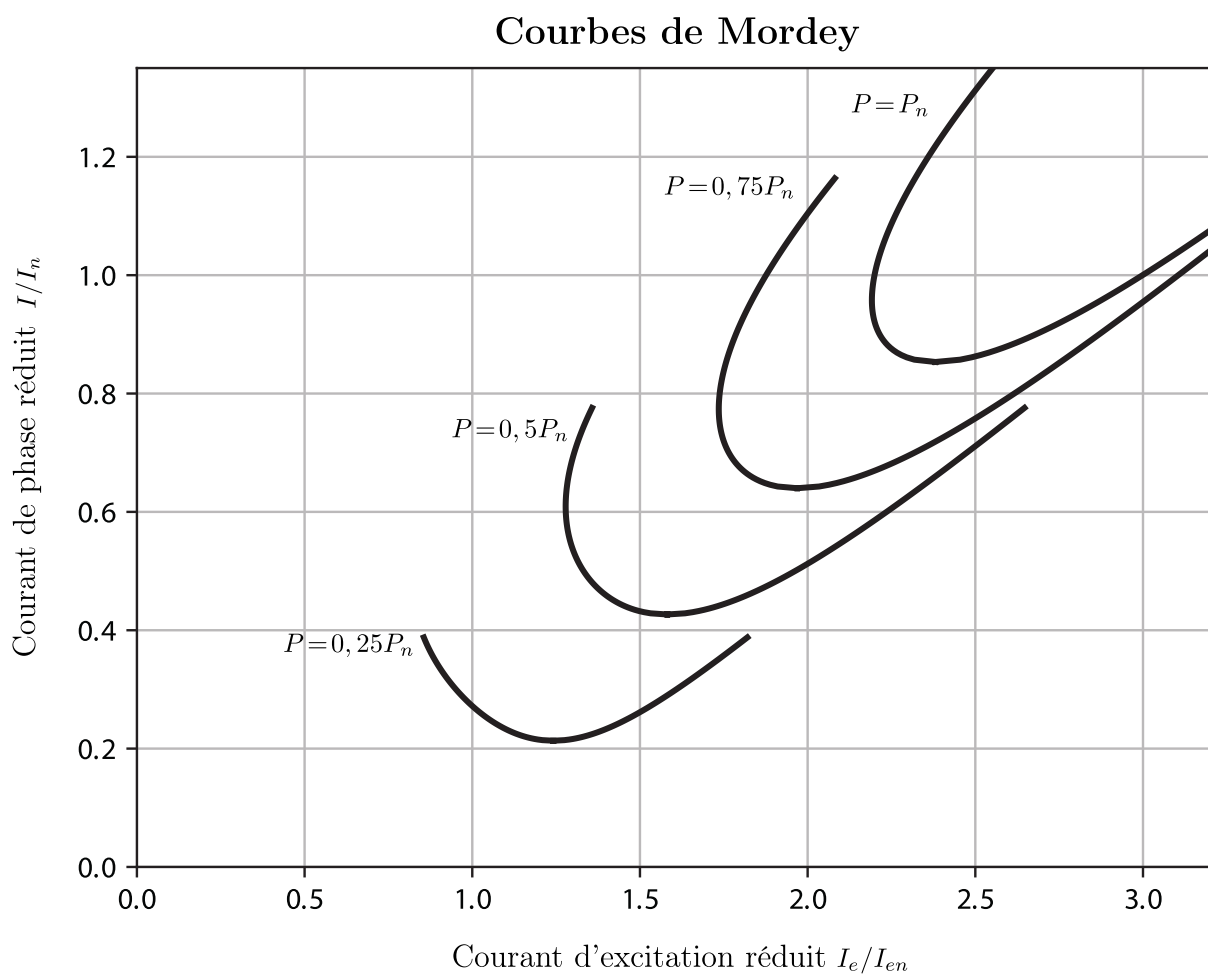
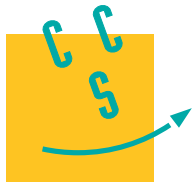


FIGURE 2 – Évolution du courant statorique en fonction du courant d'excitation à puissance constante



## Le vélo hybride : toujours électrique, même sans batterie

Le problème comporte 3 parties indépendantes qui abordent le fonctionnement des éléments du vélo hybride présentés figure 1. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé.

Certaines questions, repérées par leur numéro souligné, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour exploiter ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

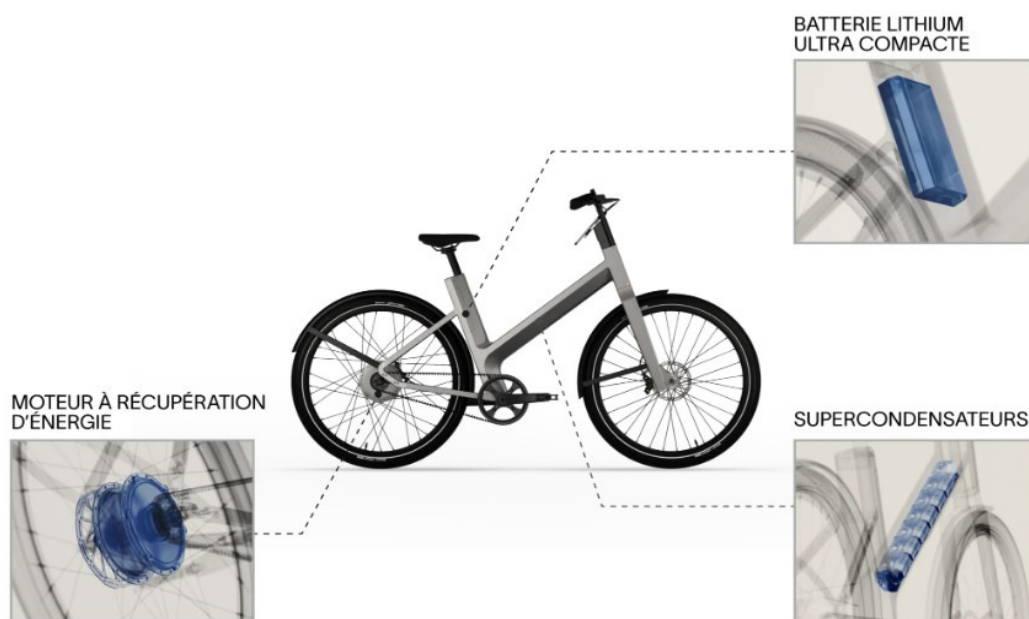


Figure 1 – Les différents éléments du vélo hybride.

Le vélo étudié associe des supercondensateurs, pour une récupération rapide de l'énergie, à une petite batterie lithium-ion de 80 Wh (650 grammes) pour améliorer l'autonomie. En ville, l'autonomie de ce vélo est celle d'un vélo classique doté d'une batterie de 400 Wh. Le vélo est équipé de roues de 26 pouces (rayon  $R_r = 0,35$  m).

L'articulation entre les supercondensateurs et la batterie lithium-ion du vélo hybride est présentée figure 2.

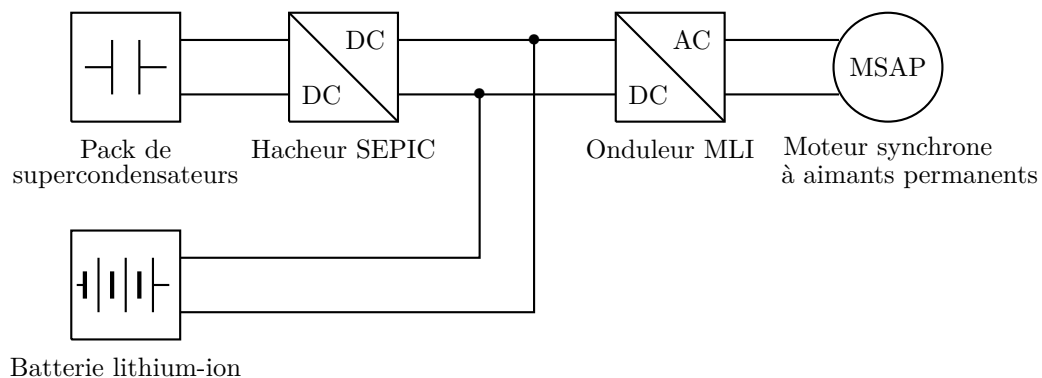
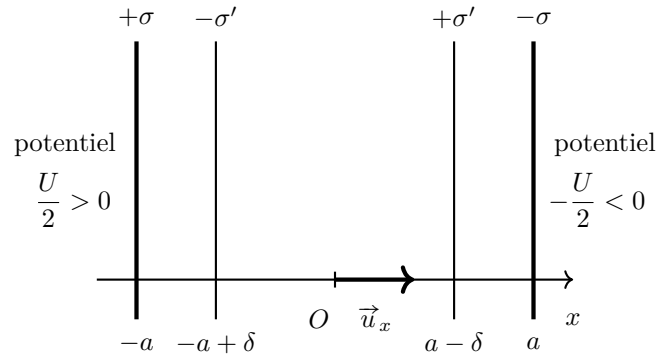


Figure 2 – Schéma de fonctionnement du vélo hybride.

## I – Le pack de supercondensateurs

Les supercondensateurs sont conçus pour stocker et restituer rapidement de l'énergie électrique, en quantité bien supérieure aux condensateurs usuels et avec des temps de réponse et des puissances échangées bien meilleurs que ce que permettent les batteries électrochimiques classiques.



**Figure 3** – Schéma du condensateur à double couche.

À la différence d'un condensateur usuel, les deux électrodes d'un supercondensateur ne sont pas séparées par un isolant mais par une solution contenant des ions. Lorsque le condensateur est déchargé, les ions sont répartis aléatoirement dans la solution. Lorsqu'il est chargé, les ions négatifs sont attirés vers l'électrode portant une charge positive et réciproquement, ce qui conduit à une accumulation d'ions au voisinage de chaque électrode formant une double couche électrochimique.

Dans toute la suite, on considère le supercondensateur comme un système purement unidimensionnel d'axe  $(Ox)$ , de surface transverse  $S$  et d'épaisseur totale  $2a$  ( $\sqrt{S} \gg a$ ). Les propriétés électromagnétiques du solvant de l'électrolyte sont analogues à celles du vide, mais avec une permittivité diélectrique  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  au lieu de  $\varepsilon_0$ .

### I.1 – Étude d'un supercondensateur

Compte tenu de la très faible épaisseur de la double couche électrochimique, on la modélise simplement par une distribution surfacique de charge  $\sigma'$ , distante des électrodes d'une distance  $\delta \ll a$  (voir figure 3). En pratique,  $\delta$  peut atteindre une dizaine de nanomètres alors que  $a$  peut difficilement être inférieure au micromètre. Ce modèle est appelé modèle de Helmholtz.

- Q1.** Déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}_p$  créé par un plan infini de densité surfacique de charge  $\sigma$ . En déduire le champ électrostatique  $\vec{E}$  entre les deux électrodes du condensateur double couche ( $-a < x < a$ ).
- Q2.** En raisonnant sur le potentiel électrostatique, montrer que

$$U = \frac{2a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma - \frac{2(a - \delta)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma'.$$

- Q3.** Justifier qu'en régime indépendant du temps, on a  $\sigma' = \sigma$ . En déduire l'expression de la capacité  $C_0$  du supercondensateur en régime indépendant du temps. Comparer  $C_0$  à la capacité d'un condensateur de même géométrie dans lequel la solution ionique serait remplacée par de l'air, de permittivité diélectrique  $\varepsilon_0$ .

### I.2 – Modèle électrocinétique du supercondensateur

Contrairement aux condensateurs usuels dont le temps de charge (ou de décharge) est essentiellement gouverné par la résistance du circuit extérieur, le temps de réponse des supercondensateurs, et donc la puissance maximale qu'ils peuvent délivrer, est dû au temps nécessaire pour former la double couche électrochimique par transport de charge au sein de l'électrolyte.

À l'instant initial  $t = 0$ , le supercondensateur est soumis à un échelon de tension  $U$  à ses bornes. Les doubles couches se forment progressivement, partant de  $\sigma'(t = 0) = 0$ . Les expressions des champs électriques sont celles calculées à la question **Q1**, avec  $\sigma' \neq \sigma$  *a priori*. On note  $\gamma$  la conductivité électrique de la solution, sachant que les doubles couches ( $-a < x < -a + \delta$  et  $a - \delta < x < a$ ) ne permettent pas le déplacement d'ions et sont donc isolantes.

- Q4.** Réaliser un bilan de charge entre  $t$  et  $t + dt$  pour le plan chargé se trouvant en  $x = a - \delta$  et montrer que sa charge  $q'$  vérifie

$$\frac{dq'}{dt} = \gamma \frac{\sigma - \sigma'(t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} S.$$



**Q5.** En déduire que

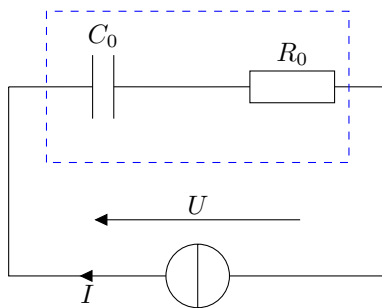
$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\delta\gamma}{a\varepsilon_0\varepsilon_r}\sigma' = \frac{\gamma}{2a}U.$$

Identifier un temps caractéristique  $\tau$  d'évolution de  $\sigma'$ . On modélise le supercondensateur par l'association d'un condensateur de capacité  $C_0$  en série avec une résistance  $R_0$ . Déterminer  $R_0$  en fonction des paramètres du problème.

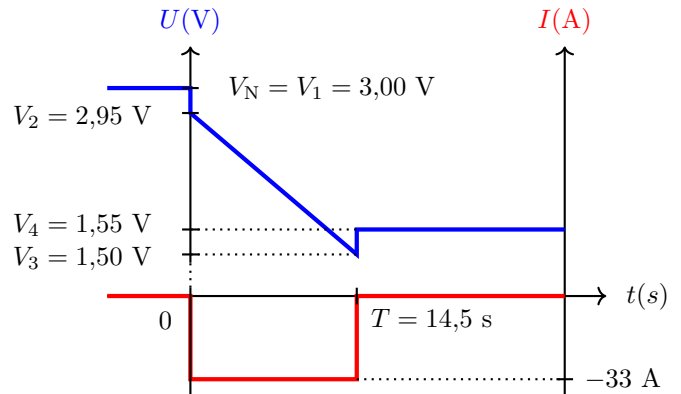
### I.3 – Dimensionnement du pack de supercondensateurs du vélo hybride

Pour déterminer expérimentalement les paramètres  $R_0$  et  $C_0$  du supercondensateur, on réalise le montage de la figure 4, dans lequel le supercondensateur est associé en série à une source idéale. On réalise un test de caractérisation dans lequel l'intensité  $I$  varie avec le temps comme indiqué sur la figure 5.

**Q6.** D'après les résultats du test de caractérisation présentés sur la figure 5, déterminer les valeurs numériques de  $R_0$  et  $C_0$ . On note  $V_N$  la tension nominale d'une cellule.



**Figure 4** – Modèle du supercondensateur.



**Figure 5** – Test de caractérisation en décharge. La courbe du haut représente les variations de la tension  $U$  et celle du bas les variations de l'intensité  $I$ .

Bien que les supercondensateurs puissent être totalement déchargés, il est d'usage de ne pas les décharger complètement au cours de leur utilisation. En effet, les faibles niveaux de tension ainsi que les forts courants associés (à puissance constante) peuvent complexifier la gestion du pack. Classiquement, la valeur minimale de tension est choisie à la moitié de la valeur nominale.



**Figure 6** – Un supercondensateur...

|                 |         |
|-----------------|---------|
| Masse           | 70 g    |
| Hauteur         | 62,7 mm |
| Diamètre        | 35,2 mm |
| Courant maximal | 33 A    |

**Figure 7** – ... et quelques unes de ses caractéristiques.

Le pack de supercondensateurs doit satisfaire aux exigences suivantes :

- le pack alimente un moteur synchrone à aimants permanents de 250 W sous une tension de 36 V ;
- sans utiliser la batterie lithium-ion, le pack de supercondensateurs doit permettre de franchir des dénivélés de 60 m avec un niveau d'assistance faible de 50 % (rapport de l'énergie fournie par le pack sur l'énergie fournie par le cycliste). Cela permet de se déplacer dans la grande majorité des villes de France.

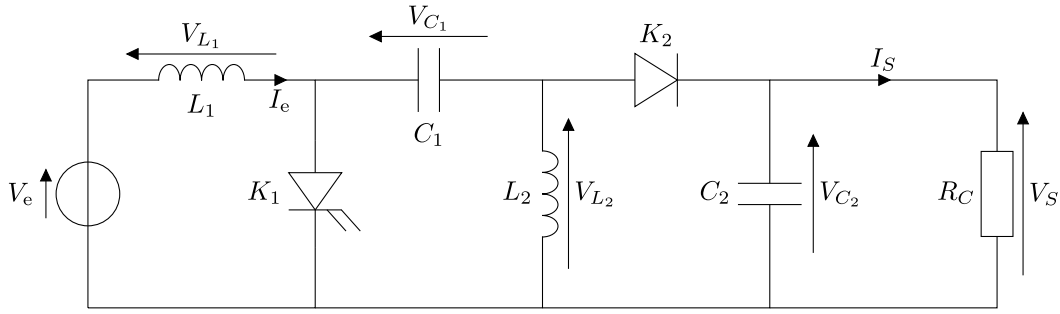
**Q7.** En explicitant les hypothèses simplificatrices réalisées, estimer le nombre de condensateurs que le pack doit comporter pour répondre aux exigences en respectant les contraintes mentionnées. Préciser l'assemblage nécessaire (en série et/ou en parallèle). Des données numériques utiles figurent à la fin de l'énoncé.



## I.4 – Interface entre les supercondensateurs et l'ensemble onduleur-moteur synchrone

Contrairement à la batterie lithium-ion, les supercondensateurs sont soumis à de fortes variations de tension. Cela impose l'utilisation d'un hacheur pour les connecter au reste de l'électronique du vélo.

Ce convertisseur est de type SEPIC (Single Ended Primary Inductor Convertor), représenté sur la figure 8.



**Figure 8** – Le convertisseur SEPIC.

On utilisera les caractéristiques de fonctionnement et hypothèses suivantes :

- les interrupteurs travaillent à la fréquence de découpage  $f = 300$  kHz et avec le rapport cyclique  $\alpha$  ;
- sur une période de fonctionnement, l'interrupteur  $K_1$  est fermé sur l'intervalle  $[0, \alpha T]$ , ouvert sur l'intervalle  $[\alpha T, T]$  et l'interrupteur  $K_2$  est ouvert sur l'intervalle  $[0, \alpha T]$ , fermé sur l'intervalle  $[\alpha T, T]$  ;
- chaque raisonnement sera mené dans l'hypothèse du régime périodique établi ;
- on considérera, sauf mention contraire, les composants de commutation comme idéaux ;
- la tension de sortie sera  $V_s = 36$  V ;
- la tension d'entrée  $V_e$  est celle aux bornes du pack de supercondensateurs. Elle est supposée constante. Sa valeur est comprise entre 27 V et 54 V ;
- l'intensité du courant de sortie est considérée constante. Sa valeur est  $I_s = 10$  A ;
- on tolère des ondulations relatives (par rapport aux valeurs moyennes) de 10 % pour l'intensité du courant d'entrée  $I_e$  et de 1 % pour la tension de sortie  $V_s$ .

**Q8.** À partir d'un bilan de puissance, calculer la valeur moyenne maximale du courant d'entrée :  $I_{e, \max}$ .

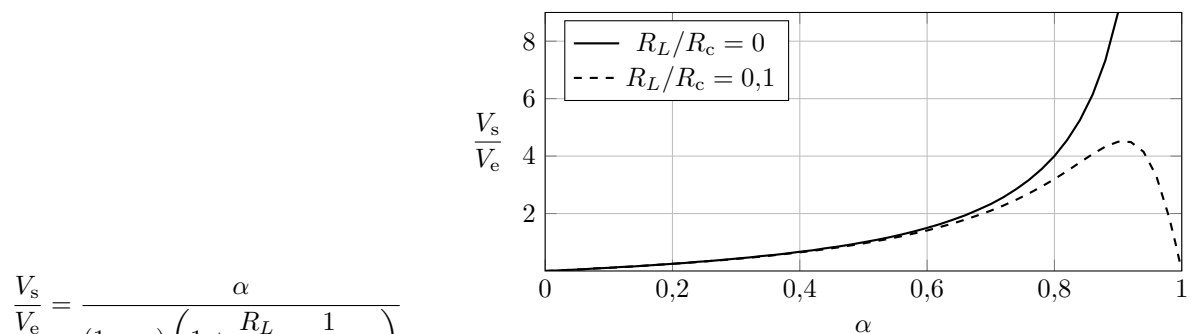
**Q9.** Montrer que les valeurs moyennes de  $V_{L_1}$  et  $V_{L_2}$  sont nulles. En déduire la valeur moyenne  $\langle V_{C_1} \rangle$  de la tension aux bornes du condensateur de capacité  $C_1$ .

Pour la suite, on considère que  $V_{C_1}(t) \simeq \langle V_{C_1} \rangle$ .

**Q10.** En utilisant les hypothèses précédentes, tracer le chronogramme de la tension aux bornes de la bobine d'inductance  $L_2$  :  $V_{L_2}(t)$ .

**Q11.** En déduire le gain du convertisseur  $\frac{V_s}{V_e}$  en fonction de  $\alpha$ . Quel est l'intérêt du convertisseur SEPIC ?

En réalité, ce gain est limité par les résistances internes des différents composants. En tenant compte de la résistance interne  $R_L = 0,1 R_c$  de la bobine d'inductance  $L_1$ , le gain devient



**Figure 9** – Gain en fonction du rapport cyclique.

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha) \left( 1 + \frac{R_L}{R_c} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \right)}$$

**Q12.** Calculer les deux valeurs extrêmes du rapport cyclique  $\alpha$  pour les valeurs extrêmes de la tension d'entrée  $V_e$ . Commenter ces résultats. Que se passerait-il si on laissait les supercondensateurs se décharger totalement ?

Dans les deux questions suivantes, on prendra les valeurs approchées  $\alpha = 0,4$  pour  $V_e = 54 \text{ V}$  et  $\alpha = 0,6$  pour  $V_s = 27 \text{ V}$ .

**Q13.** Calculer la valeur minimale de l'inductance  $L_1$  permettant que l'ondulation du courant d'entrée soit inférieure à 10 % de sa valeur moyenne  $I_e$ , quelle que soit la valeur de la tension d'entrée dans l'intervalle [27 V ; 54 V].

**Q14.** En supposant le courant de sortie  $I_s$  constant, calculer la valeur minimale de  $C_2$  permettant de limiter l'ondulation maximale de la tension de sortie  $V_s$  à 1 % de sa valeur moyenne, prise égale à 36 V, pour une tension d'entrée  $V_e = 36 \text{ V}$ .

## II – Le recyclage de la batterie lithium-ion

Grâce à l'utilisation des supercondensateurs et la récupération d'énergie, il n'y a plus besoin d'une énorme batterie. Celle du vélo hybride est ultra-compacte. L'intérêt écologique est de limiter le recours aux ressources rares. Le vélo hybride utilise 5 fois moins de lithium, nickel, cobalt et manganèse qu'un vélo électrique classique. La capacité de la batterie est limitée à 80 Wh contre 400 Wh pour un vélo sans supercondensateur.

Les métaux présents dans les batteries sont sujets à de fortes tensions sur le marché selon la situation géopolitique pouvant conduire à des risques majeurs d'approvisionnement. Il faut donc économiser leur utilisation mais aussi préparer le recyclage de la grande quantité de batteries lithium-ion des véhicules électriques qui arriveront sur le marché d'ici une dizaine d'années.

Plusieurs procédés de recyclage existent aujourd'hui, mais ils reposent sur la pyrométallurgie qui ne permet pas de récupérer tous les métaux et qui consomme beaucoup d'énergie.

Cette partie va s'intéresser à une voie nouvelle qui permettra de séparer les métaux : l'hydrométallurgie.

Le composant le plus difficile à recycler est l'électrode positive de type NMC111 de la batterie.

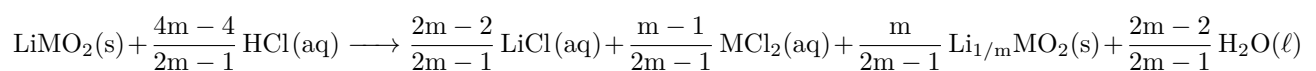
Sa formule chimique est  $\text{LiNi}_{1/3}\text{Mn}_{1/3}\text{Co}_{1/3}\text{O}_2(\text{s})$ .

### II.1 – La lixiviation

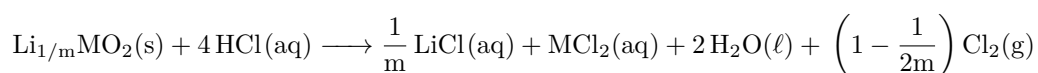
La première étape appelée « lixiviation » vise à mettre en solution l'électrode solide. Il convient d'en comprendre le mécanisme afin de l'optimiser.

On admet que Ni, Mn, et Co se comportent de la même manière, et qu'une phase intermédiaire  $\text{Li}_{1/m}\text{MO}_2(\text{s})$  ( $m > 1$ ,  $M = \text{Ni, Mn ou Co}$ ) se forme dans un mécanisme à deux étapes. Le NMC111 est noté  $\text{LiMO}_2(\text{s})$  par la suite. Les notations  $\text{HCl}(\text{aq})$ ,  $\text{LiCl}(\text{aq})$  et  $\text{MCl}_2(\text{aq})$  désignent respectivement les espèces ionisées ( $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$ ), ( $\text{Li}^+ + \text{Cl}^-$ ) et ( $\text{M}^{2+} + 2 \text{Cl}^-$ ).

- Première étape de délithiation :



- Seconde étape de dissolution :



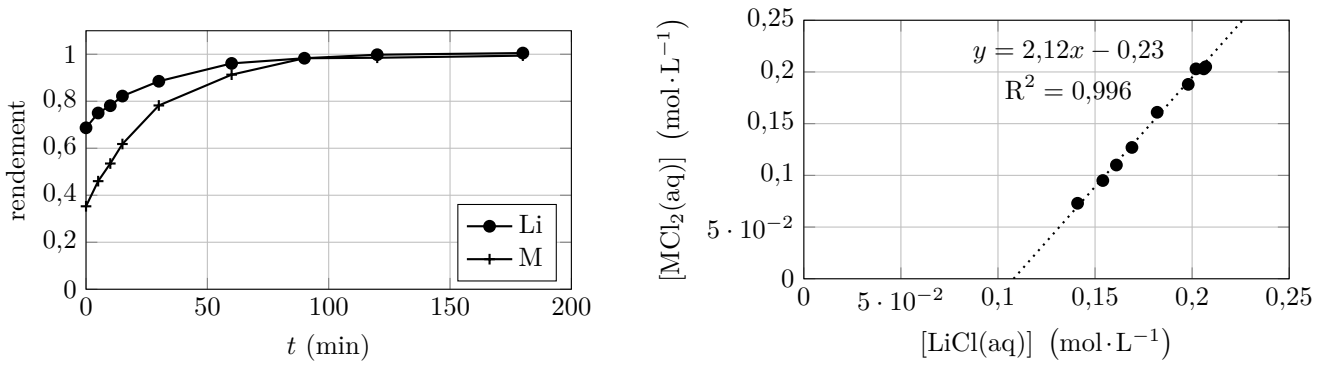
Ces deux réactions sont **totales**.

On note :

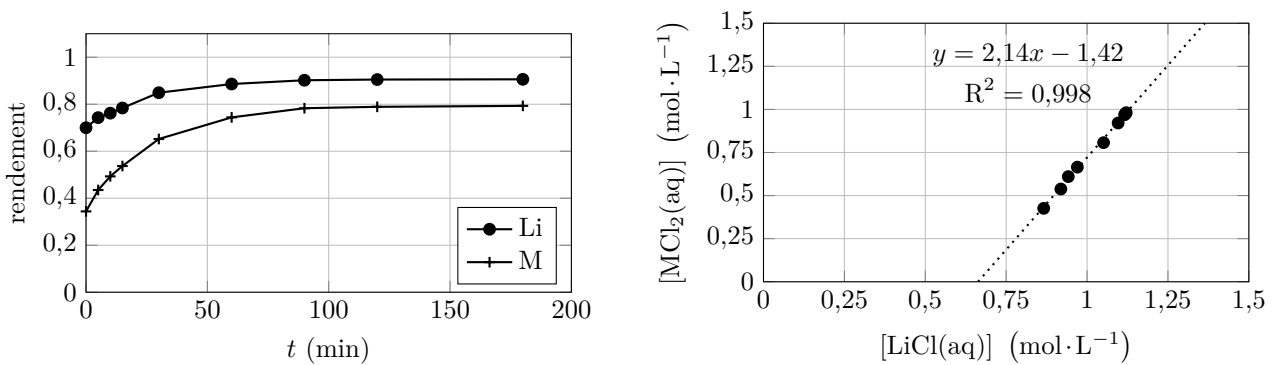
- $x_0 = \frac{n_0(\text{HCl})}{n_0(\text{NMC111})}$  le rapport entre les quantités initiales de HCl et de NMC111 ;
- $\frac{s}{l}$  le rapport initial solide/liquide pour le NMC111 dans le solvant aqueux. Ce rapport est exprimé, par la suite, en  $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$  avec  $s$  la masse initiale de NMC111 solide exprimée en gramme et  $l$  le volume de la phase aqueuse exprimé en litre.

Le rendement de lixiviation pour un réactif est le rapport entre la quantité de matière dissoute sous forme LiCl ou  $\text{MCl}_2$  après réaction et la quantité de matière initiale de  $\text{LiMO}_2(\text{s})$ .

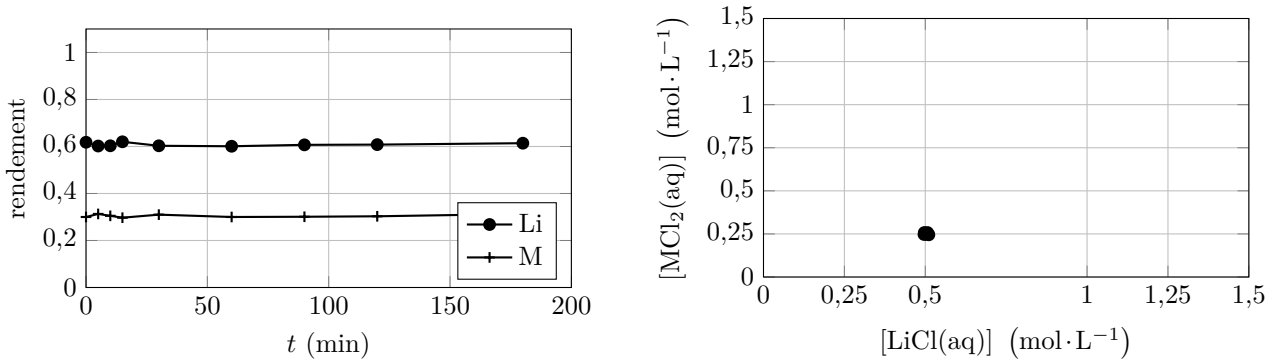
On réalise trois expériences en faisant varier les quantités initiales de NMC111 et HCl et donc le rapport  $x_0$ . Les résultats sont rassemblés dans les figures 10, 11 et 12.



**Figure 10** – Expérience A.  $\frac{s}{l} = 20 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{HCl}]_0 = 4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $T = 54 \text{ }^\circ\text{C}$ .



**Figure 11** – Expérience B.  $\frac{s}{l} = 120 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{HCl}]_0 = 4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $T = 54 \text{ }^\circ\text{C}$ .



**Figure 12** – Expérience C.  $\frac{s}{l} = 80 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{HCl}]_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $T = 54 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q15.** Justifier que les résultats expérimentaux indiquent que la première étape est instantanée et que la seconde est lente.

**Q16.** Justifier que l'on a  $m \approx 2,1$ .

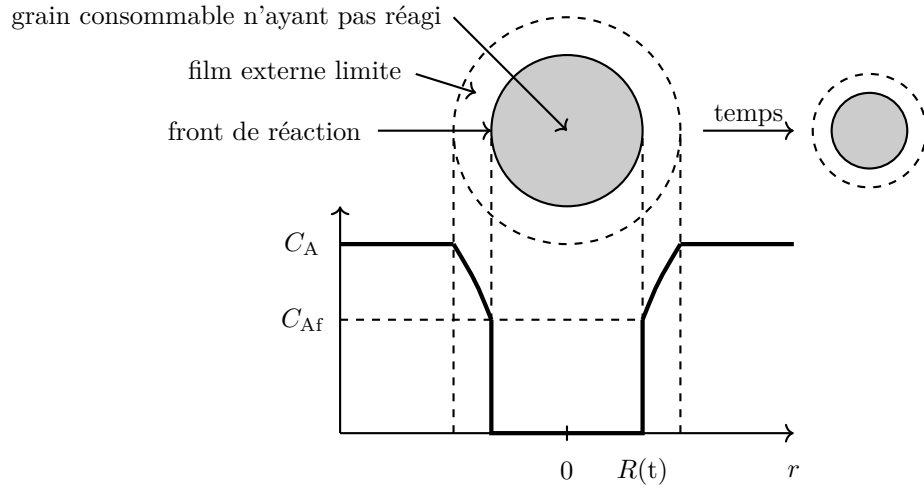
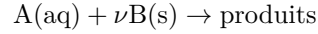
**Q17.** Exprimer  $x_0$  en fonction de la concentration initiale en acide chlorhydrique  $[\text{HCl}]_0$ , de la masse molaire  $M_{\text{NMC111}}$  et du rapport  $s/l$ .

Calculer  $x_0$  pour chaque expérience.

**Q18.** Déterminer la valeur critique  $x_1$  telle que si  $x_0$  est inférieur à  $x_1$ , la seconde étape ne se produit pas. Pour laquelle des trois expériences cette condition s'applique-t-elle? Calculer les rendements en lithium Li et en M pour cette expérience.

On étudie la cinétique de la seconde étape de dissolution. Il s'agit d'une réaction à solide consommable.

HCl est noté A(aq) et le  $\text{Li}_{1/n}\text{MO}_2(\text{s})$  est noté B(s) par la suite. Le bilan de cette étape est symbolisé par la réaction ci-dessous, dans lequel  $\nu$  représente un coefficient stœchiométrique :



**Figure 13** – Profil de concentration du réactif aqueux autour du grain consommable en fonction de  $r$  (des coordonnées sphériques).

Les éléments du modèle utilisé sont schématisés sur la figure 13. Les phénomènes physiques et chimiques mis en jeu lors de la réaction sont :

- le transport du réactif aqueux à travers le film externe limite des particules, généralement par convection ;
- la réaction chimique qui est localisée au niveau du front de réaction ;
- le transport des produits aqueux à travers le film externe limite.

Le modèle qui permet de représenter ces phénomènes porte le nom de modèle à grain rétrécissant. Dans une version simple, on suppose que tous les grains de solide sont des sphères de même rayon de départ  $R_0 = 15,0 \mu\text{m}$  et l'on étudie la décroissance de ce rayon  $R(t)$  au cours du temps.

Dans le cas général, la consommation des grains est contrôlée par les deux premiers phénomènes cités précédemment. Cependant, dans certains cas limites, il se peut que l'un des deux phénomènes soit beaucoup plus lent que l'autre et qu'il impose la vitesse de consommation des particules. On parle alors de phénomène limitant. Par exemple, si la réaction chimique est très lente par rapport au phénomène de convection, ce sera le phénomène limitant. La vitesse de consommation des particules sera contrôlée par la réaction chimique et on parlera de régime chimique.

On note  $F_A$  le flux molaire de A à travers le film externe limite parvenant au front de réaction. Ce flux s'exprime selon la loi phénoménologique de transfert

$$F_A = k_D S (C_A - C_{Af})$$

où

- $C_A$  désigne la concentration molaire du réactif aqueux A en dehors de la couche limite, supposée constante durant toute la dissolution du solide B ;
- $C_{Af}$  désigne la concentration en réactif aqueux A au niveau du front de réaction en  $r = R$  ;
- $k_D$  est la conductance de transfert à travers le film externe limite (exprimée en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ). En général,  $k_D$  augmente pour les grains de petite taille. On trouve dans la littérature la relation  $k_D = \frac{D}{R(t)}$ , avec  $D = 1,25 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- $S$  est la surface de la sphère de rayon  $R(t)$  du front de réaction.

**Q19.** Justifier qualitativement la loi phénoménologique liant  $F_A$  à  $k_D$ ,  $S$ ,  $C_A$ ,  $C_{Af}$ .

La réaction de consommation du produit B par réaction avec le réactif A est d'ordre 1 par rapport à l'espèce A et d'ordre 0 par rapport à l'espèce B. La quantité de matière de A consommée par unité de temps s'écrit

$$F_{AC} = k_C S C_{Af},$$

où  $k_C$  est une constante de vitesse de valeur  $k_C = 1,00 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- Q20.** On admet dans la suite que  $F_A = F_{AC}$ . Interpréter qualitativement cette relation. Montrer que  $F_A = -\frac{1}{\nu} \frac{dN_B}{dt}$ , où  $N_B$  est la quantité de matière du solide B.
- Q21.** Exprimer le flux  $F_A$  sous la forme  $F_A = \frac{C_A}{R_{\text{eq}}}$  avec  $R_{\text{eq}}$  une « résistance de diffusion » que l'on exprimera en fonction de  $D$ ,  $k_C$  et  $R$ .
- Q22.** Soit  $N_B(R)$  la quantité de matière du solide B comprise dans la boule de rayon  $R$ . Exprimer  $N_B(R)$  en fonction de  $\rho_B$ ,  $M_B$  et  $R$ , avec  $\rho_B$  la masse volumique de B et  $M_B$  sa masse molaire.
- Q23.** Dédurre des deux questions précédentes une équation différentielle à variables séparables portant sur l'évolution du rayon  $R$  de la sphère. Puis établir la relation suivante :

$$t = \tau_{\text{film}} \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right) + \tau_{\text{cin}} \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right) \right).$$

On exprimera :

- $\tau_{\text{film}}$  le temps caractéristique de transport dans la couche externe limite ;
  - $\tau_{\text{cin}}$  le temps caractéristique de consommation par la réaction chimique ;
- en fonction de  $\rho_B$ ,  $M_B$ ,  $R_0$ ,  $C_A$ ,  $D$ ,  $\nu$  et  $k_C$ .

- Q24.** Calculer numériquement le rapport  $\frac{\tau_{\text{cin}}}{\tau_{\text{film}}}$ . S'agit-il d'un contrôle cinétique ou convectif ?

## II.2 – La précipitation sélective

On souhaite séparer les ions cobalt(II)  $\text{Co}^{2+}$  et manganèse(II)  $\text{Mn}^{2+}$  en réalisant une précipitation sélective des hydroxydes métalliques.

- Q25.** Lorsqu'on dissout dans l'eau de l'hydroxyde de manganèse(II)  $\text{Mn}(\text{OH})_2(\text{s})$  jusqu'à saturation, la solution possède un pH égal à 9,9. Montrer que le produit de solubilité de l'hydroxyde de manganèse(II) est égal à  $\text{p}K_s = 12,6$ .

On dispose d'une solution contenant initialement des ions cobalt(II)  $\text{Co}^{2+}$  à la concentration  $C_0 = 0,069 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et des ions manganèse(II)  $\text{Mn}^{2+}$  à la même concentration  $C_0$ . On souhaite précipiter plus de 99 % du cobalt sans précipiter plus de 1 % du manganèse.

- Q26.** Écrire la condition de précipitation de chacun de ces solides. Puis exprimer le pH de début de précipitation en fonction du  $\text{p}K_s$  pour chacun des hydroxydes métalliques.
- Q27.** Effectuer l'application numérique pour chaque hydroxyde métallique et représenter les pH d'apparition des précipités sur un axe gradué.
- Q28.** Dans quel domaine de pH doit-on se placer pour précipiter sélectivement au moins 99 % de l'un des ions sans faire précipiter l'autre ? En déduire une méthode de séparation des cations métalliques considérés. Est-il possible également de précipiter sélectivement les ions  $\text{Ni}^{2+}$  ?

## III – Le moteur roue synchrone et son pilotage

Cette partie aborde l'élément central du vélo hybride. Il s'agit du moteur synchrone à aimants permanents. Il y a de nombreuses contraintes liées à l'utilisation de ce type de moteur pour cette application :

- faibles dimensions ;
- faibles vitesses de rotation ;
- couple important.

La commande du moteur est également soumise à des contraintes. Elle doit permettre de piloter le couple délivré par le moteur en évitant les à-coups nuisibles au confort d'utilisation. Une étude mécanique montre que le moteur doit pouvoir délivrer un couple de  $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

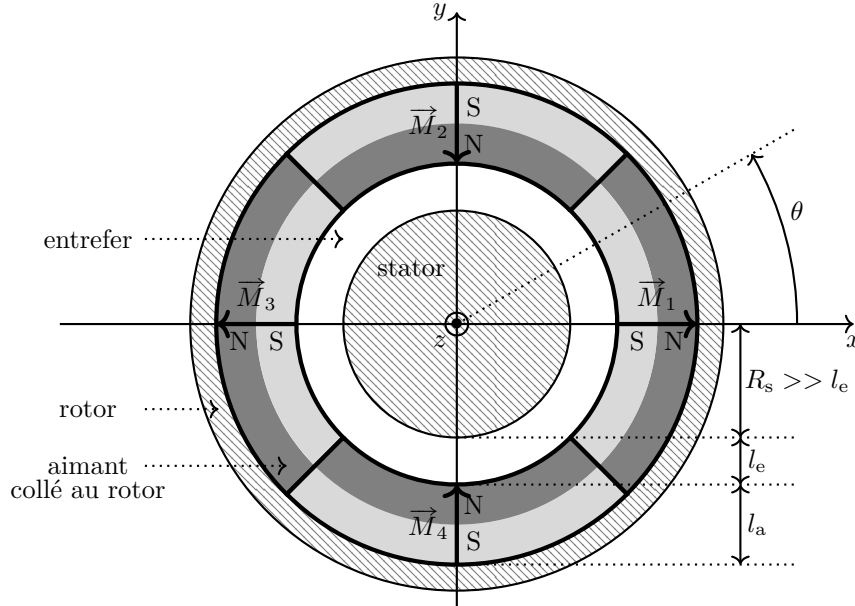
### III.1 – Dimensionnement du moteur roue synchrone à aimants permanents

Pour commencer, nous étudions un moteur dont le rotor comporte 2 paires d'aimants permanents. Les vecteurs aimantations de ces quatre aimants  $\vec{M}_i$  sont radiaux et ont la même norme  $M_0$ .

On rappelle que dans les aimants le lien entre  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{M}$  est  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .

En dehors des zones aimantées, le rotor et le stator (zones hachurées de la figure 14) sont réalisés dans un matériau ferromagnétique linéaire de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  infinie. Ils sont séparés par un entrefer d'épaisseur  $l_e$  constante et de perméabilité magnétique relative égale à 1. Le rotor, le stator et l'entrefer ont une hauteur  $h$ . Cette dimension transversale est considérée suffisamment grande pour négliger les effets de bords, c'est-à-dire que dans toute la suite on considèrera une invariance par translation selon l'axe ( $Oz$ ).

On considère tout d'abord que le rotor est fixe.



**Figure 14** – Moteur synchrone outrunner à 2 paires d'aimants permanents.

**Q29.** On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créé par le rotor. Recopier, sur la copie, le schéma du rotor et du stator. Tracer l'allure de la carte du champ magnétique, en justifiant. On orientera les lignes de champ. Pour s'aider, on pourra remplacer les quatre aimants par quatre spires de courant.

**Q30.** On note  $B_r(\theta) = \vec{B} \cdot \vec{e}_r$  la composante radiale du champ magnétique (où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ )) dans l'entrefer. Quelle est sa parité? Quelle est sa période? Tracer  $B_r(\theta)$  sur le domaine  $[-\pi, \pi]$ . On note  $B_M$  la norme de  $B_r(\theta)$ , considérée partout la même dans l'entrefer.

On crée un champ magnétique dans l'entrefer de norme  $B_M = 1,0$  T.

La géométrie exacte des aimants fait que l'on peut confondre  $B_r(\theta)$  avec le terme fondamental de son développement en série de Fourier, supposé d'amplitude égale à  $B_1 = \frac{4}{\pi} B_M$ . Le rotor tourne maintenant autour de l'axe ( $Oz$ ). Sa rotation est repérée par l'angle  $\theta_r(t)$  ( $\theta_r = 0$  sur la figure 14).

**Q31.** Montrer que la valeur du champ rotorique  $\vec{B}_r$  en tout point fixe de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  est donnée par  $\vec{B}_r(\theta, t) = B_1 \cos[2(\theta - \theta_r(t))] \vec{e}_r$ .

Les enroulements statoriques comportent  $p$  paires de bobines alimentées par des courants sinusoïdaux de pulsation  $\omega$  et créent dans l'entrefer un champ statorique tournant de la forme  $\vec{B}_s(\theta, t) = B_0 \cos(p\theta - \omega t) \vec{e}_r$ , avec  $B_0 = 1,0$  T.

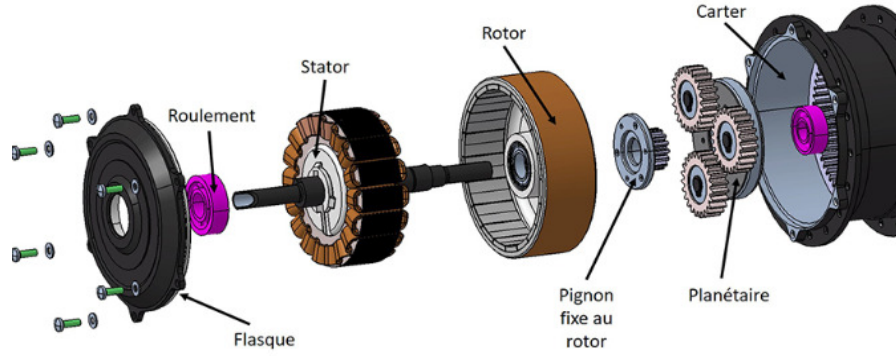
On note  $V_e = 2\pi R_s h l_e$  le volume de l'entrefer.

**Q32.** Calculer l'énergie magnétique  $\mathcal{E}_{em}$  contenue dans l'entrefer. Pour quelle valeur de  $p$  cette énergie est-elle fonction de l'angle  $\theta_r$ ? On suppose que  $p$  garde cette valeur par la suite.

**Q33.** Calculer le couple des actions électromagnétiques appliquées au rotor  $\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r}$ .

**Q34.** On suppose que le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ , c'est à dire que  $\theta_r(t) = \Omega t - \alpha$ . Pour quelle valeur de  $\Omega$  la valeur moyenne du couple est-elle non nulle?

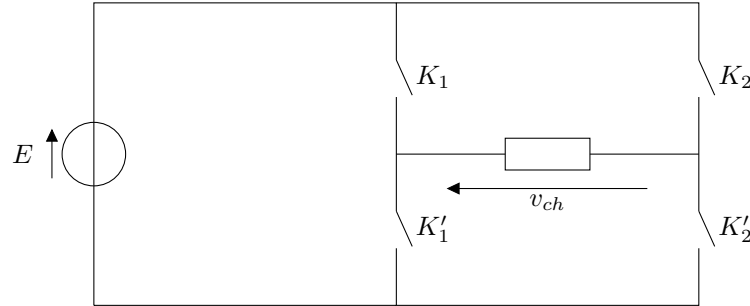
**Q35.** Calculer le couple maximal. Faire l'application numérique. Comment atteindre le couple maximal,  $\Gamma_{\max} = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$ , qui est la valeur nécessaire pour atteindre les performances visées ? Pour ces dimensions du moteur, on peut installer au maximum 8 paires de pôles.



**Figure 15** – Vue éclatée du moteur.

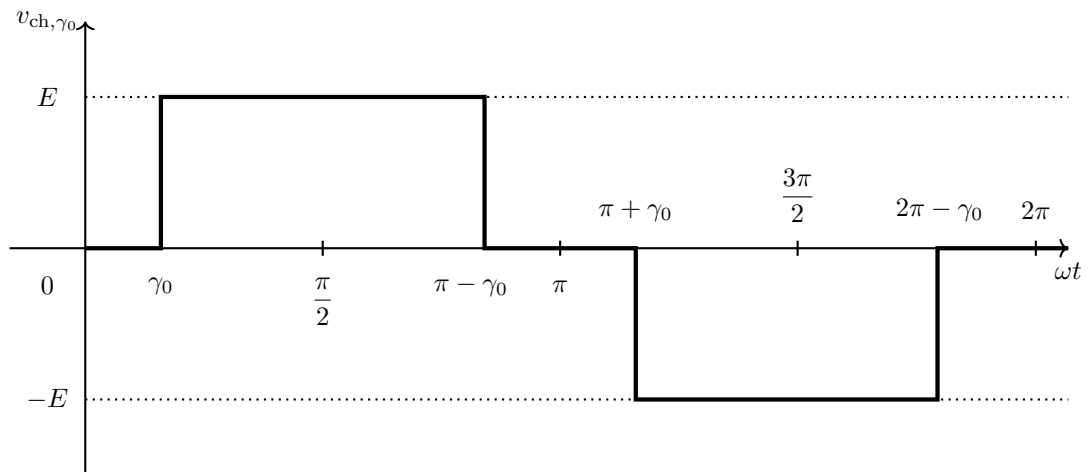
### III.2 – L'onduleur MLI

Le moteur est alimenté par un onduleur à commande MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion). Nous simplifions l'étude de l'onduleur par le schéma monophasé de la figure 16. La charge est constituée d'une des phases du stator.



**Figure 16** – Onduleur MLI.

Le fonctionnement des interrupteurs permet d'obtenir, aux bornes de la charge, la tension  $v_{\text{ch}}(t) = v_{\text{ch},\gamma_0}(t)$  en forme de créneaux à paliers nuls, représentée sur la figure 17. Ici, le but est que le signal  $v_{\text{ch}}(t)$  s'approche au mieux d'un signal sinusoïdal.



**Figure 17** – Signal de base.

Le développement en série de Fourier du signal  $v_{\text{ch},\gamma_0}(t)$ , de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , est donné par

$$v_{\text{ch},\gamma_0}(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1} \sin[(2p+1)\omega t] \quad \text{avec} \quad b_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \cos[(2p+1)\gamma_0] \quad \text{et} \quad \gamma_0 = 2\pi \frac{t_0}{T}.$$

**Q36.** Présenter sous la forme d'un tableau, les séquences possibles des états des interrupteurs  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K'_1$  et  $K'_2$  dans cet ordre, permettant d'obtenir  $v_{ch}(t)$ . Les états ouverts ou fermés seront systématiquement notés 0 ou 1. Sur une période  $T$ , la durée totale de fermeture, ou d'ouverture, de chacun des interrupteurs est  $\frac{T}{2}$ .

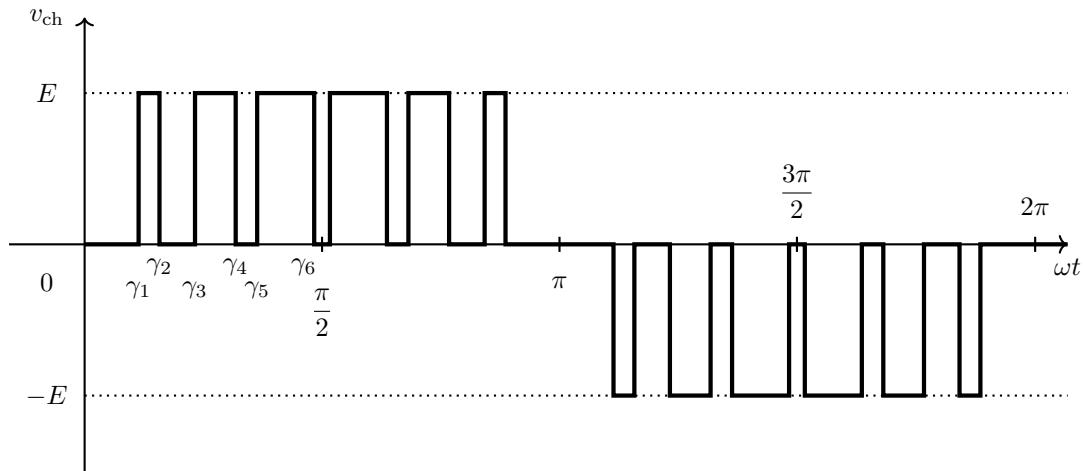
On définit le taux global de distorsion harmonique par

$$\tau_H = \frac{\sqrt{V^2 - V_f^2}}{V_f}$$

où  $V$  est la valeur efficace du signal  $v_{ch}(t)$  et  $V_f$  celle du fondamental.

**Q37.** Quelle valeur de  $t_0$  permet d'éliminer l'harmonique de rang 3 ( $p = 1$ ). Exprimer alors  $V$  et  $V_f$  en fonction de  $E$  et  $\gamma_0$  puis calculer numériquement le taux de distorsion.

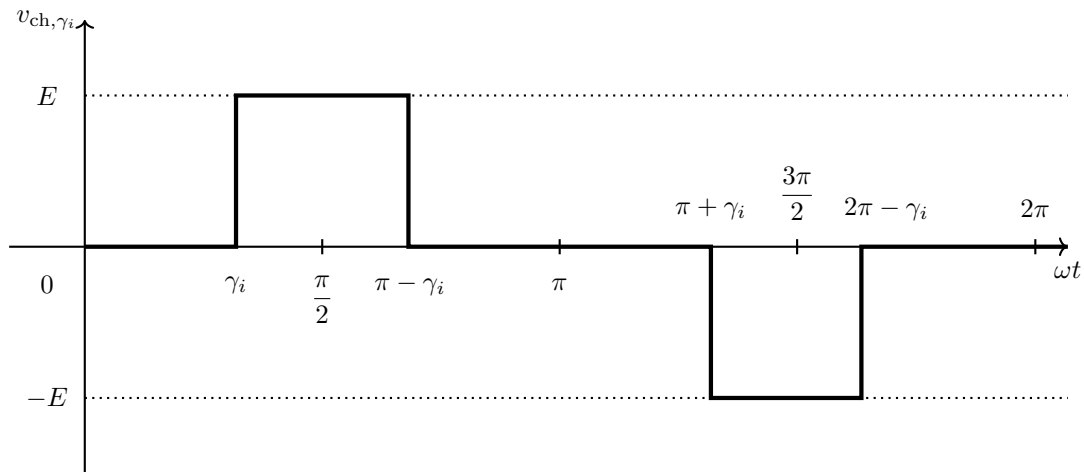
Ce taux de distorsion est trop important pour éliminer les à-coups dans le pédalier du vélo. Il est nécessaire d'éliminer davantage d'harmoniques du signal  $v_{ch}(t)$ . On adopte la commande représentée sur la figure 18.



**Figure 18** – Commande optimisée d'alimentation.

On souhaite fixer la valeur efficace de  $v_{ch}(t)$  à  $V = \frac{E}{\sqrt{2}}$  et faire en sorte que le premier harmonique non nul après le fondamental ( $p = 0$ ) soit celui de rang 13 ( $p = 6$ ).

**Q38.** Exprimer  $v_{ch}(t)$  comme une combinaison linéaire des  $v_{ch,\gamma_i}(t)$ ,  $i$  allant de 1 à 6.



**Figure 19** – Signal  $v_{ch,\gamma_i}(t)$ .

**Q39.** Montrer qualitativement que l'on peut choisir les 6 paramètres  $\gamma_{i=1,\dots,6}$  pour que l'harmonique de rang 13 soit le premier non nul et que  $V = \frac{E}{\sqrt{2}}$ . Écrire explicitement le système vérifié par les  $\gamma_i$  sans chercher à le résoudre.



# Données et formulaire

## Données numériques partie I

|                              |                                          |
|------------------------------|------------------------------------------|
| Masse du vélo                | $M_{\text{vélo}} = 20 \text{ kg}$        |
| Masse du cycliste            | $M_{\text{cycliste}} = 80 \text{ kg}$    |
| Accélération de la pesanteur | $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ |

## Données numériques partie II

|                            |                                                                |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Constante d'Avogadro       | $\mathcal{N}_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$         |
| Constante des gaz parfaits | $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Produit ionique de l'eau   | $K_e = 10^{-14}$                                               |
| Masse molaire du NMC111    | $M_{\text{NMC111}} = 97,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$     |

Données thermodynamiques à 298 K :

|                                    |                        |
|------------------------------------|------------------------|
| $\text{Co}(\text{OH})_2(\text{s})$ | $\text{pK}_{s_2} = 16$ |
| $\text{Ni}(\text{OH})_2(\text{s})$ | $\text{pK}_{s_3} = 16$ |
| $\text{Li}(\text{OH})(\text{s})$   | très soluble           |
| Produit ionique de l'eau           | $\text{pK}_e = 14$     |

## Données numériques partie III

|                                           |                                                             |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Perméabilité du vide                      | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Rayon du stator du moteur synchrone       | $R_s = 4,5 \text{ cm}$                                      |
| Hauteur du stator du moteur synchrone     | $h = 2,0 \text{ cm}$                                        |
| Largeur de l'entrefer du moteur synchrone | $l_e = 0,7 \text{ mm}$                                      |

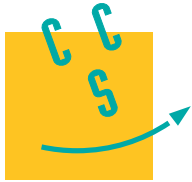
## Formulaire

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

---

◇ Fin ◇

---



## Autour des gouttes et des bulles

Le problème propose d'analyser trois phénomènes physiques autour des gouttes et des bulles. La première partie concerne le mécanisme d'évaporation d'une goutte d'eau. La deuxième partie traite de la technique d'enduction centrifuge qui permet de réaliser des films minces d'épaisseur contrôlée sur des substrats. Enfin, la troisième partie propose d'analyser une technique optique de suivi temporel de l'épaisseur d'une bulle. Ces 3 parties sont totalement indépendantes.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Un formulaire, des données numériques ainsi que les définitions de quelques fonctions Python sont regroupés en fin d'énoncé.

### Partie A – Évaporation d'une goutte d'eau

On envisage une goutte d'eau de masse volumique  $\mu_{\text{eau}}$ , placée dans une atmosphère humide. La pesanteur n'est ici pas prise en compte donc la goutte est sphérique, de rayon initial  $r_{g0} = 1$  mm. L'eau de la goutte s'évapore progressivement ce qui fait varier dans le temps le rayon  $r_g(t)$  de la goutte. On suppose que les molécules d'eau dans l'air sont transportées loin de la goutte par un mécanisme de diffusion, et on note  $D$  le coefficient de diffusion de l'eau dans l'air. L'air, de masse molaire  $M_{\text{air}}$ , et la vapeur d'eau, de masse molaire  $M_{\text{eau}}$ , suivent la loi des gaz parfaits et on note  $R$  la constante des gaz parfaits.

À la surface de la goutte, l'eau liquide de la goutte est à l'équilibre avec la vapeur d'eau qui l'entoure. Loin de la goutte, la température de l'air ambiant vaut  $T_\infty = 20$  °C et la pression partielle en eau est égale à  $p_\infty(T_\infty)$ . On définit l'humidité relative  $\mathcal{R}_H$  par le rapport de la pression partielle en eau  $p_\infty(T_\infty)$  sur la pression de vapeur saturante  $p_{\text{sat}}(T_\infty)$  loin de la goutte, à la température  $T_\infty$  :

$$\mathcal{R}_H = \frac{p_\infty(T_\infty)}{p_{\text{sat}}(T_\infty)} \leq 1 \quad (1)$$

### I – Évolution du rayon d'une goutte sphérique

On suppose dans cette partie que la transformation de la goutte se fait de façon isotherme : la température  $T_g$  de la goutte reste égale à la température  $T_\infty$  de l'air ambiant, homogène :  $T_g = T_\infty = T = 293,15$  K.

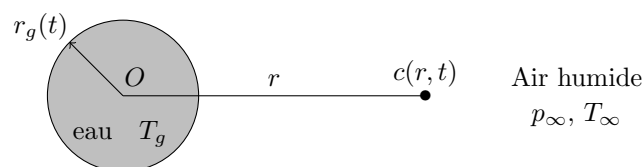


Figure 1 – Évaporation d'une goutte d'eau sphérique.

- Q1.** Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante. Préciser sa variation avec la température.
- Q2.** Justifier que le flux diffusif des molécules d'eau est à symétrie sphérique et que la concentration en masse de vapeur d'eau dans l'air  $c(\vec{r}, t)$  ne dépend que du rayon  $r$  et du temps  $t$ .

- Q3.** Énoncer la loi de Fick reliant la concentration en masse de vapeur d'eau  $c(r, t)$  et le vecteur densité de courant diffusif de masse  $\vec{j}_m$ . Citer les unités de chaque grandeur.
- Q4.** Établir une relation entre la concentration  $c(r, t)$  et la pression partielle en vapeur d'eau  $p(r, t)$ . Préciser alors les conditions aux limites vérifiées par  $c(r, t)$  en fonction notamment des pressions  $p_{\text{sat}}$  et  $p_{\infty}$ .

On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est-à-dire que la source du phénomène diffusif évolue de façon beaucoup plus lente que la durée d'établissement d'un régime stationnaire de la grandeur qui diffuse. On admet que, dans cette approximation,  $\vec{j}_m$  est à flux conservatif en l'absence de création ou de disparition de molécules d'eau.

- Q5.** Donner un critère quantitatif qui permettrait de confirmer la validité de cette approximation. *Nous vérifierons le respect de ce critère à la question Q9.*
- Q6.** Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, montrer que le flux de masse d'eau  $\phi_m$  sortant de la goutte a pour expression :

$$\phi_m = 4\pi r_g \frac{M_{\text{eau}} D p_{\text{sat}}(T)}{RT} (1 - \mathcal{R}_H) \quad (2)$$

- Q7.** Exprimer de deux manières la variation de masse de la goutte d'eau entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . En déduire l'équation d'évolution du rayon  $r_g(t)$  de la goutte :

$$r_g(t) \frac{dr_g(t)}{dt} = - \frac{M_{\text{eau}} D p_{\text{sat}}(T)}{\mu_{\text{eau}} RT} (1 - \mathcal{R}_H) \quad (3)$$

- Q8.** Déterminer la loi d'évolution du rayon de la goutte  $r_g(t)$ . Faire apparaître le temps  $t_0$  d'évaporation de la goutte.
- Q9.** *Application numérique :* La goutte a initialement un rayon  $r_{g0} = 1$  mm. Calculer sa durée de vie  $t_0$  dans le cas d'une atmosphère sèche ( $\mathcal{R}_H = 0$ ). Discuter alors de la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires utilisée dans cette partie.

## II – Température de la goutte

### II.1 – Mise en équation

L'évaporation de la goutte d'eau est un changement d'état liquide-gaz, ce qui conduit à une modification de la température  $T_g$  de la goutte par rapport à la température  $T_{\infty}$  de l'air loin de la goutte. On suppose que les transferts thermiques entre l'air ambiant et la goutte sont purement diffusifs et suivent la loi de Fourier, avec  $\lambda_{\text{air}}$  la conductivité thermique de l'air. On se place toujours en régime quasi-stationnaire.

- Q10.** Montrer qu'on peut supposer la température dans la goutte uniforme.
- Q11.** L'évaporation est-elle une transformation exothermique ou endothermique ? La température de la goutte est-elle plus grande ou plus petite que  $T_{\infty}$  ?
- Q12.** Montrer que le flux thermique reçu par la goutte s'écrit  $\phi_{\text{th,d}} = (T_{\infty} - T_g)/R_{\text{th,d}}$ . On exprimera  $R_{\text{th,d}}$  en fonction de la conductivité thermique  $\lambda_{\text{air}}$  de l'atmosphère et du rayon  $r_g$  de la goutte. Préciser l'unité dans le Système International de  $R_{\text{th,d}}$ .
- Q13.** Dans la situation où la température de la goutte est différente de la température ambiante  $T_{\infty}$ , l'expression du flux de masse (2) établi à la question **Q6** est légèrement modifiée :

$$\phi_m = 4\pi r_g \frac{M_{\text{eau}} D}{R} \left( \frac{p_{\text{sat}}(T_g)}{T_g} - \frac{p_{\infty}(T_{\infty})}{T_{\infty}} \right) \quad (4)$$

À partir d'un bilan d'énergie appliqué à la goutte, démontrer la relation suivante :

$$T_{\infty} - T_g = \frac{\Delta h_{\text{vap}} M_{\text{eau}} D p_{\text{sat}}(T_{\infty})}{\lambda_{\text{air}} R T_{\infty}} \left( \frac{p_{\text{sat}}(T_g)}{T_g} \frac{T_{\infty}}{p_{\text{sat}}(T_{\infty})} - \mathcal{R}_H \right) \quad (5)$$

où  $\Delta h_{\text{vap}}$  est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau,  $M_{\text{eau}}$  la masse molaire de l'eau,  $D$  le coefficient de diffusion moléculaire de l'eau dans l'air,  $\lambda_{\text{air}}$  la conductivité thermique de l'air,  $\mathcal{R}_H = p_{\infty}(T_{\infty})/p_{\text{sat}}(T_{\infty})$  l'humidité relative et  $R$  la constante des gaz parfaits.

## II.2 – Résolution numérique

Pour déterminer la température de la goutte, il faut pouvoir résoudre l'équation (5), ce qui nécessite de connaître le lien explicite entre la pression de vapeur saturante de l'eau et la température. La relation de Clausius-Clapeyron fournit, en supposant l'enthalpie massique de vaporisation  $\Delta h_{\text{vap}}$  indépendante de la température, une relation entre les pressions de vapeur saturante à deux températures différentes :

$$\frac{p_{\text{sat}}(T_g)}{p_{\text{sat}}(T_\infty)} = \exp \left[ \frac{\Delta h_{\text{vap}} M_{\text{eau}}}{R} \left( \frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_g} \right) \right] \quad (6)$$

Afin de résoudre l'équation (5) et obtenir la température  $T_g$  de la goutte, on écrit le programme Python présenté en figure 2. Celui-ci utilise la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize`.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import bisect
3
4 # Constantes :
5 R = 8.314 # constante des gaz parfaits (en J/K/mol)
6 D = 2.4e-5 # coefficient de diffusion moléculaire (en m**2/s)
7 Lambda = 2.6e-2 # coefficient de diffusion thermique (en W/m/K)
8 Dhv = 2.4e6 # enthalpie massique de vaporisation (en J/K/kg)
9 M = 18e-3 # masse molaire de l'eau (en kg/mol)
10 Ps = 2.34e3 # pression de vapeur saturante loin de la goutte (en Pa)
11 Tinf = 273+20 # température loin de la goutte (en K)
12 RH = 0.0 # taux d'humidité (compris entre 0 et 1)
13 # Deux constantes intermédiaires :
14 C1 = Dhv*D*M*Ps/(Lambda*R*Tinf)
15 C2 = Dhv*M/R
16
17 # à compléter :
18 def f(x):
19     return
20
21 a = # borne inférieure à compléter
22 b = # borne supérieure à compléter
23
24 tolerance = 1e-2
25 racine = bisect(f, a, b, xtol=tolerance)
26 print("Tg = ", racine, "K")
```

Figure 2 – Programme.

**Q14.** Compléter la fonction `f(x)` et proposer des valeurs pour les bornes de l'intervalle dans lequel on recherche la racine de `f(x)`.

Le programme fournit :  $T_g = 277.74403381347656$  K, ce qui donne un écart de température de 15 °C entre la goutte et l'air ambiant loin de la goutte.

## II.3 – Résolution approchée

Une résolution analytique peut être menée en modélisant de façon affine la relation entre la concentration en masse de vapeur saturante et la température :

$$c_{\text{sat}}(T) = c_{\text{sat}}(T_\infty) [1 - \alpha(T_\infty - T)] \quad (7)$$

où  $\alpha$  est une constante.

**Q15.** Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction de  $p_{\text{sat}}(T_\infty)$ ,  $p_{\text{sat}}(T_{\text{fus}})$ ,  $T_\infty$  et  $T_{\text{fus}}$  la température de fusion de l'eau à la pression atmosphérique. Faire l'application numérique.

**Q16.** Montrer alors que l'écart de température de la goutte par rapport à l'atmosphère loin de la goutte est égal à :

$$T_\infty - T_g = \frac{K}{1 + K\alpha} (1 - \mathcal{R}_H) \quad (8)$$

avec  $K$  une constante à déterminer en fonction des données de l'énoncé.

**Q17.** En déduire une valeur numérique de l'écart  $T_\infty - T_g$  pour une atmosphère sèche ( $\mathcal{R}_H = 0$ ). Commenter.

**Q18.** En prenant en compte la différence de température de la goutte avec l'air au loin, déterminer la nouvelle valeur du temps d'évaporation  $t'_0$  de la goutte et comparer à la valeur de  $t_0$  trouvée à la question **Q9**.

### III – Effets radiatifs

Nous avons jusqu'ici négligé les transferts thermiques par rayonnement mais la différence de température entre la goutte et l'atmosphère entraîne un flux thermique radiatif reçu par la goutte donné par la loi de Stefan :  $\phi_{th,rad} = \sigma \varepsilon (T_\infty^4 - T_g^4) S_{goutte}$  où  $\sigma$  est la constante de Stefan,  $\varepsilon = 0,96$  est l'émissivité de l'eau et  $S_{goutte}$  est la surface de la goutte.

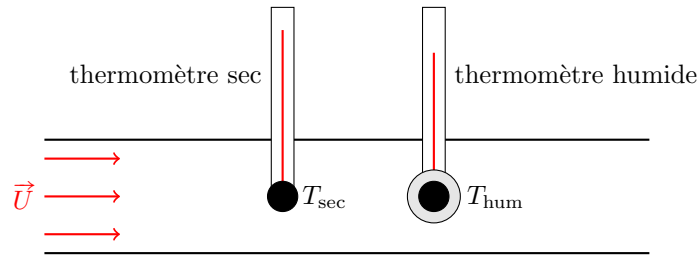
**Q19.** Sachant que  $|T_\infty - T_g|/T_\infty \ll 1$ , montrer qu'on peut écrire le flux thermique radiatif sous la forme :  $\phi_{th,rad} = (T_\infty - T_g)/R_{rad}$  où  $R_{rad}$  est la résistance radiative qui s'exprime en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T_\infty$  et  $r_g$  le rayon de la goutte.

**Q20.** Établir une condition sur le rayon de la goutte pour que le flux thermique diffusif  $\phi_{th,d}$ , calculé à la question **Q12**, soit prédominant par rapport au flux thermique radiatif  $\phi_{th,rad}$ .

### IV – Application : mesure du taux d'humidité

La mesure et le contrôle de l'humidité de l'air présentent un enjeu important en météorologie, en santé publique ou dans la conservation des œuvres d'art. Le psychromètre (*psuchron* signifiant froid en grec) est un appareil développé à la fin du 18<sup>e</sup> siècle pour mesurer le taux d'humidité à partir de la différence de température issue de la vaporisation d'une goutte.

Deux thermomètres sont placés côte à côte et plongés dans un courant d'air contrôlé de vitesse  $U$ . Le premier thermomètre, dit thermomètre humide, a son capteur recouvert de coton humide et mesure la température  $T_{hum}$  de l'eau qui s'évapore. Le second thermomètre, dit thermomètre sec, sert simplement à mesurer la température ambiante  $T_{sec}$ .



**Figure 3** – Psychromètre.

L'équation psychrométrique relie la différence des pressions partielles en vapeur d'eau dans l'air  $\Delta p = p_\infty(T_\infty) - p_{sat}(T_g)$  et la différence des températures  $\Delta T = T_\infty - T_g$  :

$$\Delta p = -\mathcal{A} p_{atm} \Delta T \quad (9)$$

avec  $\mathcal{A}$  le coefficient psychrométrique et  $p_{atm}$  la pression atmosphérique.

**Q21.** Exprimer l'humidité relative  $\mathcal{R}_H = p_\infty(T_\infty)/p_{sat}(T_\infty)$  en fonction de  $p_{sat}(T_g)$ ,  $p_{sat}(T_\infty)$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $p_{atm}$  et  $\Delta T$ .

On peut alors déterminer l'humidité relative à partir de la mesure de la température des deux thermomètres à condition de connaître le coefficient psychrométrique  $\mathcal{A}$ , les pressions de vapeur saturante étant déterminées par une loi empirique analogue à celle de Clausius-Clapeyron (6).

Pour prendre en compte la ventilation, le flux massique d'évaporation  $\phi_{vent}$  s'écrit :

$$\phi_{vent} = f_{ev} \phi_m \quad (10)$$

où  $\phi_m$  est le flux massique purement diffusif (équation (2)) et  $f_{ev} > 1$  est le coefficient de ventilation (ou nombre de Sherwood), croissant avec la vitesse  $U$  de l'écoulement de l'air autour de la goutte.

De manière analogue, le flux thermique convectif  $\phi_{th,conv}$  reçu par la goutte s'écrit

$$\phi_{th,conv} = f_h \phi_{th,d} \quad (11)$$

avec  $\phi_{th,d}$  le flux thermique purement diffusif (question **Q12**) et  $f_h > 1$  le coefficient thermique de ventilation.

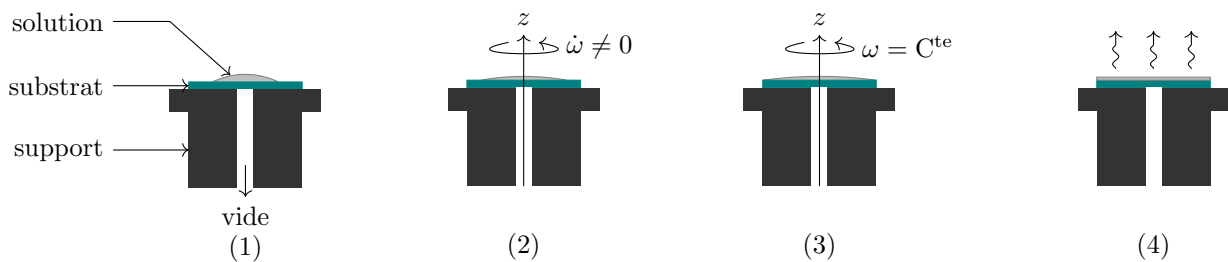
Dans la suite, on considérera que les deux coefficients de ventilation sont égaux :  $f_{ev} = f_h$ .

**Q22.** À l'aide des résultats précédents, établir une expression du coefficient psychrométrique  $\mathcal{A}$ . On introduira la température moyenne  $\bar{T}$ .

## Partie B – Spin coating

Pour déposer des films minces sur un substrat solide, la technique d'enduction centrifuge (*spin coating* en anglais) est souvent employée car elle permet de contrôler précisément l'épaisseur du film et d'obtenir des couches minces allant d'une dizaine de nanomètres à plusieurs micromètres d'épaisseur.

Le fonctionnement de la machine de spin coating est illustré sur la figure 4. La solution à étaler est déposée sur le substrat, une plaque de silicium par exemple, elle-même maintenue sur un support via un effet ventouse créé par une pompe à vide (étape 1). Le support est fixé à une tournette qui est mise en rotation autour d'un axe vertical suivant une séquence pré-réglée : accélération angulaire du substrat (étape 2) pour atteindre une vitesse angulaire de consigne  $\omega$ , provoquant l'étalement rapide de la goutte et son amincissement (étape 3). La tournette décélère ensuite après une durée de régime stationnaire choisie, et s'arrête. Le solvant de la solution s'évapore finalement, ce qui amincit davantage le film déposé sur le substrat (étape 4).



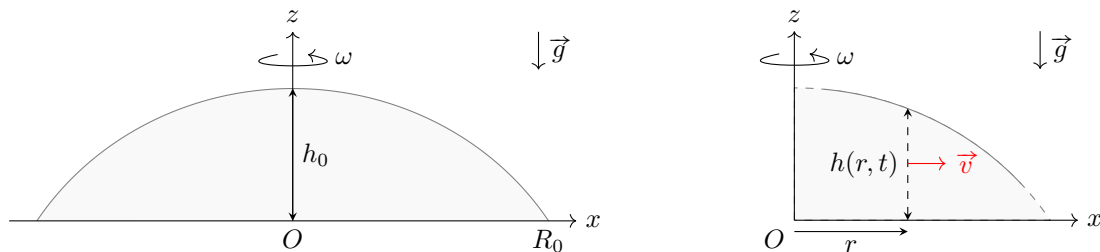
**Figure 4** – Étapes de la procédure d'enduction centrifuge.

On cherche dans cette partie à décrire le processus d'étalement de la goutte liquide sur le substrat pendant la phase de rotation stationnaire, et à déterminer une loi d'évolution de la hauteur de la couche liquide ainsi que celle du rayon de la goutte.

Pour toutes les applications numériques de cette partie, on s'appuiera sur les données d'une expérience de microphotolithographie dans le domaine des semi-conducteurs. La goutte est composée d'un liquide organique de masse volumique  $\mu = 1,06 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  et de viscosité dynamique  $\eta = 3,6 \times 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Le support tourne, en régime stationnaire, à la vitesse angulaire  $\omega = 2000$  tours par minute pendant une durée  $T = 30 \text{ s}$ .

### I – Équation de Stokes

Initialement, la goutte liquide est déposée au centre du substrat, de rayon  $R_{\max} = 10 \text{ cm}$ . La goutte possède une symétrie de révolution autour de l'axe de rotation du plateau ( $Oz$ ). Sa hauteur initiale au centre est notée  $h(r=0, t=0) = h_0 = 0,5 \text{ mm}$  et son rayon initial est  $R_0 = 5 \text{ mm}$ . On suppose la goutte initialement très aplatie :  $h_0 \ll R_0$  et on admet que l'interface entre la goutte et l'air reste de pente très faible. À la date  $t = 0$ , le plateau est mis en rotation uniforme autour de l'axe ( $Oz$ ) à une vitesse angulaire  $\omega$ .



**Figure 5** – Goutte liquide sur le substrat.

L'écoulement de la goutte est étudié dans le référentiel lié au plateau tournant. On paramètre le problème en coordonnées cylindriques en définissant le champ des vitesses dans la goutte sous la forme  $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, z, t)\vec{e}_r + v_\theta(r, \theta, z, t)\vec{e}_\theta + v_z(r, \theta, z, t)\vec{e}_z$ .

- Q23.** Interpréter chacun des termes présents dans l'équation de Navier-Stokes, rappelée en annexe à la fin de l'énoncé. On précisera les différentes forces volumiques  $\vec{f}_{\text{vol}}$  à considérer dans le référentiel lié au plateau tournant.
- Q24.** Montrer par une analyse en ordre de grandeur et une application numérique que le terme centrifuge est prépondérant par rapport au terme de Coriolis.
- Q25.** Justifier alors que la vitesse ne possède pas de composante orthoradiale :  $v_\theta = 0$  et que la norme de la vitesse ne dépend pas de  $\theta$ .
- Q26.** En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que celui-ci est principalement radial :  $\vec{v}(\vec{r}, t) \simeq v_r(r, z, t) \vec{e}_r$ .
- Q27.** Comparer par ordre de grandeur chacun des termes diffusifs présents dans  $(\Delta \vec{v}) \cdot \vec{e}_r$ . Montrer que l'un d'entre eux est dominant.
- Q28.** Rappeler la définition du nombre de Reynolds. L'évaluer numériquement et en déduire une simplification dans l'équation de Navier-Stokes.
- Q29.** Justifier que l'écoulement est quasi-stationnaire.

Étant donné la petitesse de la goutte, on pourra supposer que la pression y est uniforme. De plus, les effets de la pesanteur seront négligés dans la suite de cette Partie B.

- Q30.** En déduire l'équation différentielle suivante vérifiée par  $v_r$  :

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = -\frac{\mu \omega^2 r}{\eta} \quad (12)$$

- Q31.** Préciser la condition à la limite en  $z = 0$ . Justifier que la condition en  $z = h(r, t)$  est  $\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)_{z=h} = 0$ .

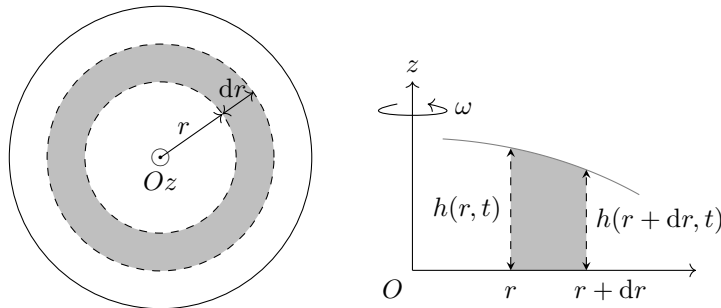
- Q32.** Exprimer le champ de vitesse  $v_r$ .

- Q33.** En déduire le débit volumique  $Q(r, t)$  sortant d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h(r, t)$  :

$$Q(r, t) = \frac{2\pi\mu\omega^2 r^2}{3\eta} h(r, t)^3 \quad (13)$$

## II – Bilan de masse

On définit un système ouvert représenté sur la figure 6, composé du liquide compris entre la surface du cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h(r, t)$  et la surface du cylindre de rayon  $r + dr$  et de hauteur  $h(r + dr, t)$ .



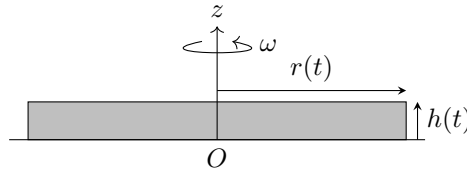
**Figure 6** – Bilan de masse. Vue de dessus et vue de profil.

- Q34.** Exprimer la variation  $d^2m(r, t)$  de la masse du système ouvert entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .
- Q35.** Exprimer la quantité de masse  $\delta m_e(r, t)$  entrant dans le système ouvert par la surface en  $r$  ainsi que la quantité de masse  $\delta m_e(r + dr, t)$  entrant par la surface en  $r + dr$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . En déduire la quantité de masse  $\delta^2 m_e$  qui entre dans le système ouvert entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . On exprimera les résultats en fonction de  $\mu$ ,  $dr$ ,  $dt$  et du débit volumique  $Q(r, t)$ .
- Q36.** Démontrer l'équation-bilan vérifiée par  $h(r, t)$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\mu \omega^2}{\eta} \left[ \frac{2}{3} h^3 + r h^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right] \quad (14)$$

### III – Loi d'évolution de $h(t)$ et $r(t)$

On adopte un modèle simplifié pour la forme de la goutte : elle possède initialement une forme cylindrique, avec une hauteur  $h_0$  et un rayon  $R_0$ . Au cours de son étalement, elle conserve sa forme cylindrique de sorte que la hauteur  $h(t)$  est uniforme et le rayon vaut  $r(t)$ , comme représenté sur la figure 7.



**Figure 7** – Modèle d'une goutte cylindrique.

**Q37.** En déduire la loi d'évolution de la hauteur  $h(t)$  de la goutte au cours du temps. On introduira un temps caractéristique  $\tau$ .

**Q38.** Déterminer le rayon de la goutte  $r(t)$ .

**Q39.** *Application numérique :* Calculer  $\tau$ . Quelle est l'épaisseur du film au bout de  $T = 30$  secondes ?

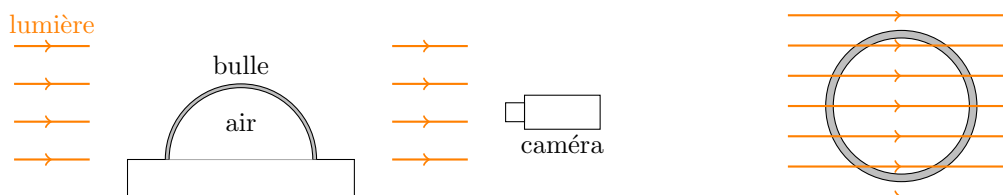
## Partie C – Mesure de l'épaisseur d'une bulle par interférométrie

Lorsqu'on injecte à l'aide d'une seringue de l'air sous la surface d'un bain d'huile de silicone très visqueuse ( $\eta = 2\,300$  Pa·s), on parvient à former une bulle quasiment hémisphérique, comme le montre la figure 8. La gravité provoque un drainage du liquide présent dans le film de la bulle, ce qui tend à l'amincir à son sommet et à l'élargir à sa base. La durée de vie de la bulle étant de quelques minutes, il est possible d'étudier par une méthode optique l'épaisseur de la bulle en fonction du temps et de la position angulaire  $\theta$  sur la bulle.



**Figure 8** – Photographie de la bulle d'huile de silicone, éclairée par une lampe à vapeur de sodium à l'arrière. La photographie a été prise 306 secondes après la formation de la bulle [1].

Des chercheurs de l'université de Boston ont réalisé une expérience de mesure interférométrique de l'épaisseur du film d'une bulle [1]. Elle est éclairée avec un faisceau de lumière parallèle issu d'une lampe à vapeur de sodium, de longueur d'onde dans le vide  $\lambda = 589,3$  nm. La lumière traverse alors l'avant et l'arrière de la bulle avant d'atteindre une caméra placée dans l'alignement de la source et de la bulle.

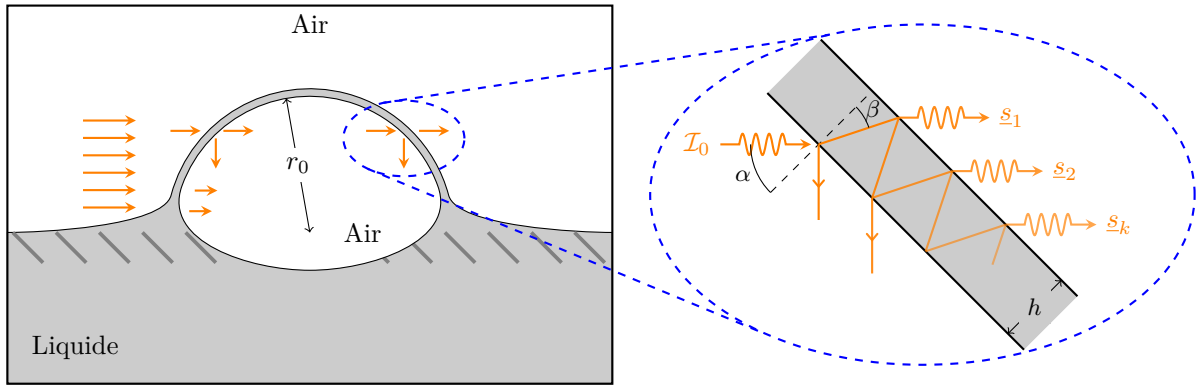


**Figure 9** – Schéma de l'expérience, vue de profil et vue en coupe sur le dessus.

Sur la figure 8, on observe la présence de franges d'interférences très fines et contrastées sur le pourtour de la bulle. Dans la mesure où le rayon de la bulle  $r_0 = 12$  mm est très grand devant l'épaisseur de la bulle  $h(\theta, t)$  (voir figure



12a), on peut modéliser localement le film comme une lame liquide à faces parallèles où les deux interfaces air-huile se comportent comme des miroirs réfléchissants. Une onde incidente subit alors de multiples divisions d'amplitude et les ondes transmises par le film interfèrent alors (voir figure 10).



**Figure 10** – Lame liquide à faces parallèles.

L'indice de l'huile est  $n = 1,4$  et on assimile l'air entourant la bulle au vide :  $n_{\text{air}} = 1$ . On note respectivement  $r$  et  $t$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique (supposés réels, positifs et inférieurs à 1). La conservation de l'énergie impose la relation  $r^2 + t^2 = 1$ .

On ne peut pas mesurer l'épaisseur du film directement avec les rayons rasants arrivant avec un angle d'incidence  $\alpha = 90^\circ$  sur la bulle car la lumière ne passe pas à travers le film. On mesure alors l'intensité lumineuse le long d'un arc de cercle de rayon  $99,5\% \times r_0$ . Pour tous les points sur cet arc, l'angle d'incidence des rayons incidents vaut  $\alpha = 84,2^\circ$ . On éclaire alors une lame liquide à faces parallèles avec une onde plane monochromatique sous une unique incidence  $\alpha$ . L'angle de réfraction dans la lame liquide est noté  $\beta$ . L'onde se propage dans la lame liquide et produit à chaque aller-retour un rayon émergent. Les rayons émergents sont tous parallèles entre eux et la caméra enregistre l'intensité lumineuse due à l'interférence de ces rayons à l'infini.

## I – Intensité transmise par la bulle

**Q40.** Proposer un montage expérimental permettant de réaliser un faisceau de lumière parallèle à partir d'une source spectrale étendue, d'un diaphragme et de lentilles.

**Q41.** Évaluer numériquement l'angle de réfraction  $\beta$  de la lumière dans le film de la bulle. La lumière pénètre-t-elle toujours dans la goutte ? En déduire l'angle d'émergence des rayons après leur transmission.

Chaque onde émergente s'écrit en notation complexe  $\underline{s}_k(\vec{r}, t) = S_k \exp[i(\omega t - \varphi_k(\vec{r}))] = \underline{S}_k(\vec{r}) \exp(i\omega t)$  où  $\underline{S}_k(\vec{r}) = S_k \exp(-i\varphi_k(\vec{r}))$  est l'amplitude complexe de l'onde émergente ayant subi  $2(k-1)$  réflexions dans la lame liquide à faces parallèles (voir figure 10). On prendra comme référence le rayon incident d'intensité  $\mathcal{I}_0$  :  $\underline{S}_0(\vec{r}) = s_0$ .

**Q42.** Exprimer le déphasage à l'infini  $\varphi$  entre deux rayons émergents successifs  $\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$  en fonction de  $n$ ,  $h$ ,  $\beta$  et  $\lambda$ .

**Q43.** Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{s}_k(\vec{r}, t)$  du rayon  $k$  en un point  $M$  à l'infini, en fonction de l'amplitude  $\underline{s}_1$  du rayon 1 transmis, du déphasage  $\varphi$  et du facteur de réflexion en amplitude  $r$ . En déduire l'expression de l'amplitude complexe de l'onde transmise :

$$\underline{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{s}_k = \frac{\underline{s}_1}{1 - r^2 \exp(-i\varphi)} \quad (15)$$

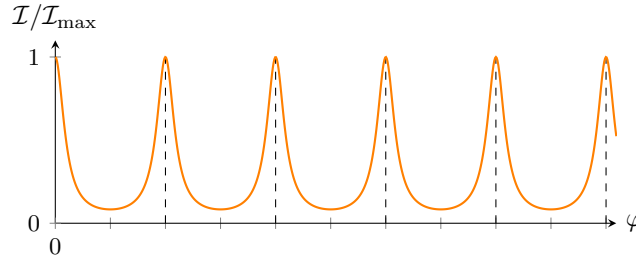
**Q44.** On considère qu'il existe une infinité de rayons émergents. Montrer que l'intensité lumineuse transmise  $\mathcal{I} = \underline{s} \times \underline{s}^*$ , où  $\underline{s}^*$  est le complexe conjugué de  $\underline{s}$ , s'exprime ainsi :

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{1 + m \sin^2(\varphi/2)} \quad (16)$$

avec  $\mathcal{I}_0$  l'intensité lumineuse incidente et  $m$  le facteur de finesse qu'on exprimera en fonction de  $r^2$ .

## II – Analyse des images

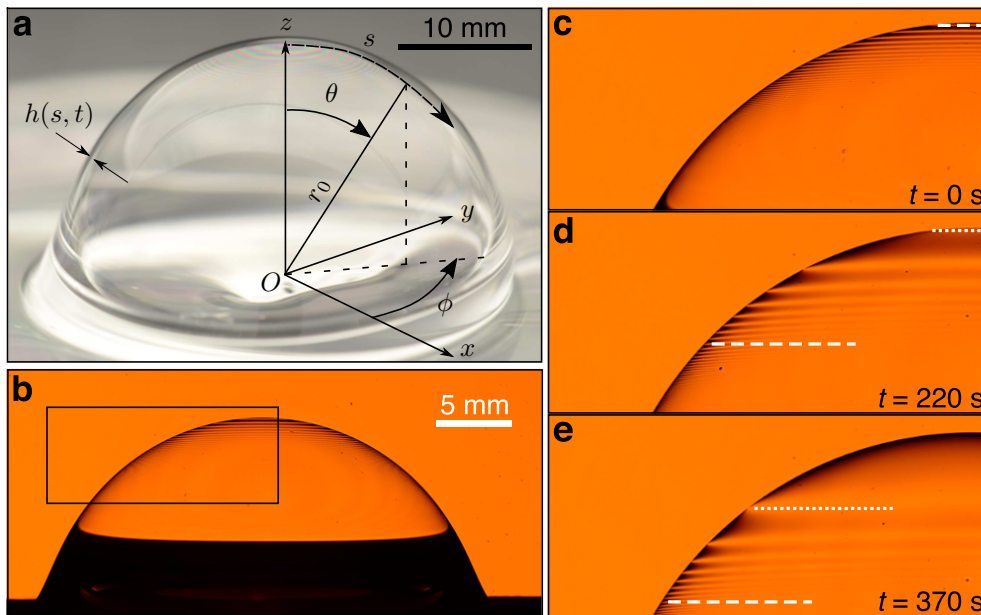
On représente sur la figure 11 la courbe représentative de l'intensité transmise en fonction du déphasage  $\varphi$ .



**Figure 11** – Fonction de transmission du film. Le tracé est réalisé avec  $m = 11$ .

- Q45.** Déterminer les valeurs de  $\varphi$  pour lesquelles l'intensité transmise maximale. On notera  $\mathcal{I}_{\max}$  ce maximum. Commenter.
- Q46.** En déduire l'expression des épaisseurs  $h$  du film de la bulle pour lesquelles on observe des franges brillantes, ainsi que la valeur numérique de l'écart d'épaisseur  $\Delta h$  de la lame entre deux franges brillantes.
- Q47.** Définir et exprimer le contraste  $\mathcal{C}$  des franges d'interférences en fonction du coefficient de réflexion  $r$ .
- Q48.** Au voisinage de  $\varphi = 0$ , déterminer les valeurs de  $\varphi$  telles que  $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}_{\max}/2$ . En déduire la largeur à mi-hauteur  $\Delta\varphi_{1/2}$  du pic de transmission en fonction du facteur de finesse  $m$  qu'on supposera grand devant 1.

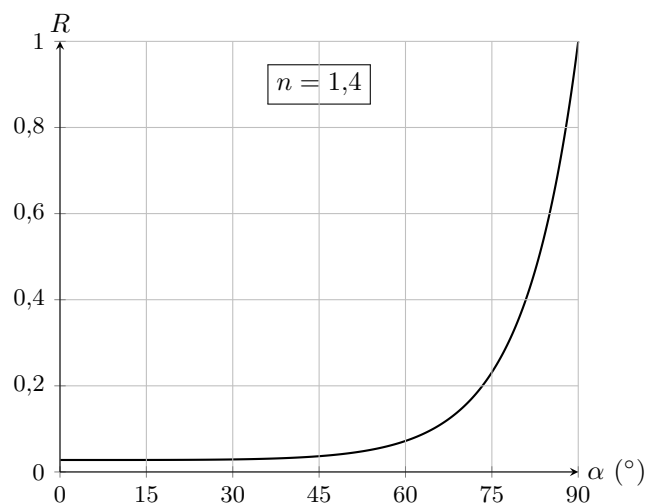
À partir de la forme hémisphérique de la bulle, la dynamique du drainage peut être analysée en utilisant les coordonnées sphériques  $(r_0, \theta, \phi)$  représentées sur la figure 12a.



**Figure 12** – Drainage de la bulle à la surface d'un bain d'huile. Ici, le rayon de la bulle est  $r_0 = 12$  mm et sa viscosité est  $\eta = 2300$  Pa·s [1].

Quand on forme la bulle à la surface de l'huile, celle-ci piège un film très fin de liquide d'épaisseur  $h(s, t)$  qui varie avec la longueur de l'arc  $s = r_0\theta$  et avec le temps  $t$ . Sur la figure 12b, on observe l'apparition de franges brillantes et sombres lorsque la bulle est éclairée avec une lumière monochromatique. À  $t = 0$  s (figure 12c), on repère une frange brillante apparaissant au sommet de la bulle; elle est marquée par la ligne blanche tiretée. À  $t = 220$  s (figure 12d), cette frange a glissé vers la base de la bulle tandis que la dernière frange brillante observable dans cette expérience apparaît au sommet avec une épaisseur minimale; elle est repérée par la ligne blanche pointillée. À  $t = 370$  s (figure 12e), les deux franges marquées sont descendues et un film noir apparaît au sommet, là où l'épaisseur du film est quasi nulle : la bulle est sur le point d'éclater.

La figure 13 présente le graphique du coefficient de réflexion de l'intensité lumineuse, noté  $R = r^2$ , en fonction de l'angle d'incidence  $\alpha$ , pour une lumière non polarisée.



**Figure 13** – Coefficient de réflexion en intensité  $R = r^2$  en fonction de l’angle d’incidence  $\alpha$ , pour une lumière non polarisée.

**Q49.** En vous appuyant sur vos réponses précédentes et les figures 12 et 13, expliquer précisément les observations faites lors de cette expérience : position, aspect des franges. Proposer un protocole permettant de déterminer l’épaisseur du film au cours du temps, pour tous les angles de colatitude  $\theta$ .

**Q50.** Le tableau 1 présente la position angulaire des franges brillantes sur le pourtour de la bulle, à la date  $t = 220$  s (voir la figure 12d). Au sommet, on observe la dernière frange brillante apparaître.

Montrer que la relation entre l’épaisseur  $h$  du film et l’angle  $\theta$  peut être modélisée par la loi :

$$h(\theta) = h_0 \cos^{-\ell}(\theta) \quad (17)$$

avec le nombre  $\ell > 0$  à déterminer.

| Numéro de la frange brillante | $\theta$ (°) |
|-------------------------------|--------------|
| 1                             | 0            |
| 2                             | 28,4         |
| 3                             | 35,2         |
| 4                             | 39,3         |
| 5                             | 42,0         |
| 6                             | 44,1         |
| 7                             | 45,8         |
| 8                             | 47,2         |
| 9                             | 48,3         |

**Tableau 1** – Position angulaire des franges brillantes à la date  $t = 220$  s [1]. À cette date, on voit apparaître au sommet la dernière frange brillante avant l’éclatement de la bulle.

# Données et formulaire

## Données numériques (Partie A)

|                                                                      |                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Coefficient de diffusion de l'eau dans l'air                         | $D = 2,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$                                      |
| Conductivité thermique de l'air                                      | $\lambda_{\text{air}} = 2,6 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| Conductivité thermique de l'eau liquide                              | $\lambda_{\text{eau}} = 0,61 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$               |
| Capacité thermique massique de l'eau liquide                         | $c_{\text{eau}} = 4,2 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$         |
| Enthalpie massique de vaporisation de l'eau ( $p = p_{\text{atm}}$ ) | $\Delta h_{\text{vap}} = 2,4 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$                      |
| Masse molaire de l'eau                                               | $M_{\text{eau}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$                                         |
| Masse molaire de l'air                                               | $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$                                         |
| Constante des gaz parfaits                                           | $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$                               |
| Pression de vapeur saturante de l'eau                                |                                                                                               |
| – à $T_{\text{fus}} = 273,15 \text{ K}$ :                            | $p_{\text{sat}} = 6,1 \times 10^2 \text{ Pa}$                                                 |
| – à $T_{\infty} = 293,15 \text{ K}$ :                                | $p_{\text{sat}} = 2,3 \times 10^3 \text{ Pa}$                                                 |
| Masse volumique de l'eau                                             | $\mu_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$                           |
| Masse volumique de l'air                                             | $\mu_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$                                       |
| Constante de Stefan                                                  | $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$              |
| Pression atmosphérique                                               | $p_{\text{atm}} = 1,013 \text{ bar}$                                                          |

## Formulaire

- Gradient en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

- Équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien en écoulement incompressible :

$$\mu \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \vec{f}_{\text{vol}} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

- Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Laplacien d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  en coordonnées cylindriques, projeté selon  $\vec{e}_r$  :

$$(\Delta \vec{A}) \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) - \frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}$$

- Laplacien d'une fonction scalaire  $f(r, t)$  en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

- Linéarisation de  $x \mapsto \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right)$  :

$$\sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

## Fonctions Python (Partie A)

- `np.exp(a)` crée un tableau de même forme que `a` dont les éléments sont les exponentielles des éléments de `a`.
- `bisect(f, a, b, xtol=tolerance)` détermine la racine de la fonction `f(x)` dans un intervalle compris entre `x=a` et `x=b`, avec une tolérance `xtol` pour la précision de la racine.

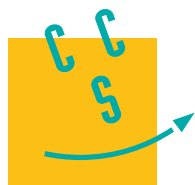
# Références

- [1] Casey BARTLETT et al. « Universal non-monotonic drainage in large bare viscous bubbles ». In : *Nature Communications* 14.1 (2023), p. 877.
- [2] Marie CORPART. « Évaporation de gouttes sur des fibres ». Thèse de doctorat. Université Paris-Saclay, déc. 2022.  
URL : <https://theses.hal.science/tel-04124399>.

---

◇ Fin ◇

---



## Création d'un synthétiseur analogique rudimentaire

Les synthétiseurs analogiques reposent sur un principe simple : à partir de quelques composants électroniques élémentaires – oscillateurs, filtres, amplificateurs – il est possible de générer une grande variété de sons, parfois d'une complexité étonnante.

Dès 1970, le Minimoog, présenté en figure 1, a marqué une étape décisive : l'un des premiers synthétiseurs portables, il intégrait un clavier numérique qui permettait d'associer directement chaque touche à la fréquence correspondante, facilitant ainsi son utilisation par les musiciens. La conception de tels dispositifs pose néanmoins plusieurs défis techniques : assurer une correspondance précise entre touches et fréquences, maintenir la stabilité des oscillateurs malgré les variations de température et protéger les circuits contre les contraintes électriques et thermiques.



**Figure 1** – Minimoog 44 touches sorti en 1970, l'un des premiers synthétiseurs analogiques portables équipés d'un clavier numérique.

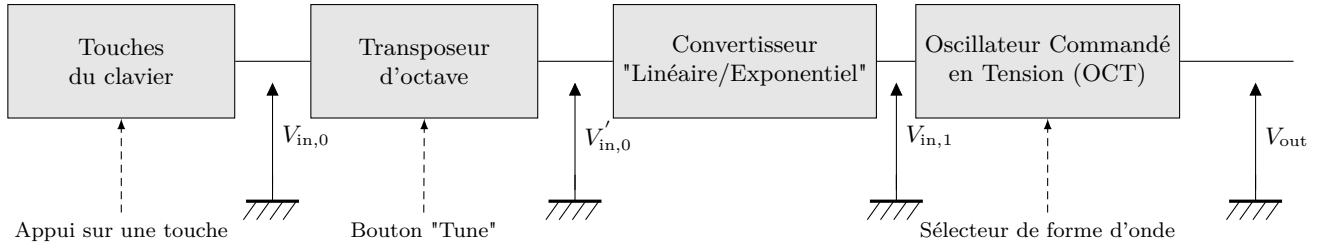
Dans ce sujet, on se place dans un cadre simplifié où l'on étudie la conception d'un synthétiseur analogique rudimentaire, en mettant en évidence ces problématiques de génération de signal, de contrôle thermique et de fiabilité des circuits imprimés.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Le problème comporte 3 parties indépendantes. Dans tout le sujet, les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) seront supposés d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle. En mode linéaire, leur gain est considéré comme infini. Le traitement des questions ne nécessite aucune connaissance théorique préalable des transistors et de la théorie musicale. Un formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé.

# Partie A – Création d'un synthétiseur analogique

Un synthétiseur analogique fonctionne en générant et en modulant des signaux électriques pour produire des sons variés. Deux éléments centraux composent un synthétiseur : un clavier permettant de choisir les notes produites et un oscillateur. Ce dernier permet de générer des signaux périodiques aux différentes fréquences audibles par l'humain. Dans cette partie, on cherche à concevoir une chaîne de génération sonore inspirée des synthétiseurs analogiques classiques. L'objectif est de produire un son dont la hauteur est déterminée par la tension générée par des touches de clavier d'un piano numérique, afin de simuler le fonctionnement d'un véritable clavier musical.



**Figure 2** – Extrait d'un diagramme simplifié de fonctionnement d'un synthétiseur analogique rudimentaire. L'utilisateur peut modifier le fonctionnement des blocs à l'aide des boutons du synthétiseur.

## I – Des touches de clavier à l'oscillateur

### I.1 – Convertisseur "Linéaire/Exponentiel"

Un clavier est constitué de touches sur lesquelles l'utilisateur appuie pour produire une note. Cette note est identifiée par sa fréquence fondamentale (par exemple, un  $\text{La}_3$  correspond à la fréquence de 440 Hz). Deux notes successives sont séparées d'un demi-ton, ce qui correspond à un rapport de fréquences de  $\sqrt[12]{2}$ . Deux notes séparées d'un octave sont séparées de douze demi-tons. Le  $\text{La}_4$  est par exemple situé à une octave au-dessus du  $\text{La}_3$ .

Lors d'un appui sur une touche, une tension de contrôle  $V_{\text{in},0}$  est générée et est, après ajustement, appliquée à l'Oscillateur Commandé en Tension (OCT). On prend comme base une tension de -5 V pour la fréquence associée au  $\text{La}_0$ . La tension générée augmente de 1 V pour le passage à l'octave supérieure. Par exemple, une tension de -1 V aura pour effet de créer un  $\text{La}_4$ .

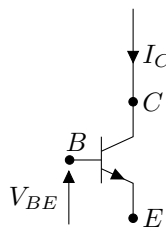
On suppose dans cette partie que le bloc "Transposeur d'octave" ne modifie pas le signal généré par les touches du clavier et on considère donc que  $V'_{\text{in},0} = V_{\text{in},0}$ . L'OCT quant à lui génère un signal périodique  $V_{\text{out}}$  dont la fréquence est proportionnelle à  $V_{\text{in},1}$ .

**Q1.** Expliquer la nécessité d'un bloc Convertisseur "Linéaire/Exponentiel" présenté figure 2. Déterminer la relation entre  $V_{\text{in},0}$  et  $V_{\text{in},1}$  sous la forme

$$V_{\text{in},1} = g(V_{\text{in},0}) \text{ avec } g(V_{\text{in},0}) = V_{\text{ref}} \exp(\alpha V_{\text{in},0}).$$

Évaluer numériquement la constante  $\alpha$ .

Une manière simple de reproduire analogiquement la fonction  $g$  est d'utiliser un transistor, comme représenté sur la figure 3.



**Figure 3** – Schéma de principe d'un transistor bipolaire (BJT) de type NPN.

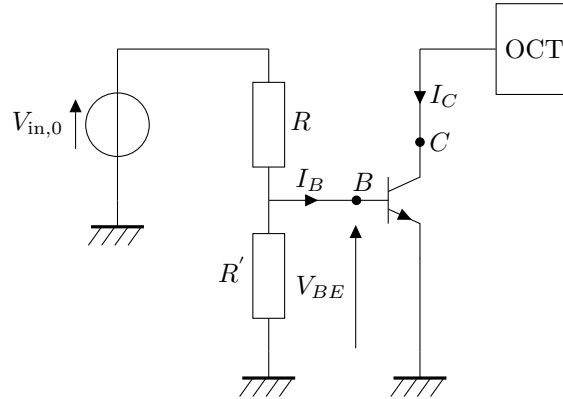
En appliquant une tension  $V_{BE}$  entre la base  $B$  et l'émetteur  $E$ , le courant au niveau du collecteur (point  $C$ ) s'écrit, par la relation d'Ebers-Moll approchée, sous la forme

$$I_C = I_S(T) \cdot \exp\left(\frac{V_{BE}}{v(T)}\right), \text{ en posant } v(T) = \frac{k_B T}{q}$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $q$  la charge électrique élémentaire et  $T$  la température. L'intensité  $I_S(T)$ , appelée courant de saturation inverse du transistor, double de valeur lorsque la température augmente de 10 °C. Il est possible, par un circuit non détaillé ici, d'obtenir une tension  $V_{in,1}$  proportionnelle à  $I_C$ .

**Q2.** Déterminer la variation de tension  $\Delta V_{BE}$  qui permet d'augmenter d'une octave la fréquence émise par l'OCT en fonction de  $v(T)$ . Calculer  $\Delta V_{BE}$  à 20 °C.

On ajoute, en amont du transistor, deux résistances  $R$  et  $R'$ . L'intensité  $I_B$  au niveau de la base du transistor est supposée négligeable par rapport aux autres intensités du circuit et sera prise nulle pour toute la suite.



**Figure 4** – Bloc "Linéaire/Exponentiel" simplifié, avec  $R = 56,0 \text{ k}\Omega$ , et  $R' = 1,00 \text{ k}\Omega$ .

**Q3.** Montrer que l'ajout des résistances permet de créer un bloc Convertisseur "Linéaire/Exponentiel", en considérant une température de travail de 20 °C.

## I.2 – Compensation de température

Le transistor utilisé pour la conversion linéaire/exponentielle chauffe lorsqu'il fonctionne, ce qui modifie ses propriétés physiques et peut entraîner une dérive de la fréquence de l'oscillateur, provoquant un désaccord progressif entre les notes du clavier. Une oreille humaine bien entraînée peut détecter une variation relative d'environ 0,0035 entre deux notes successives.

**Q4.** Avec des composants à 30 °C, analyser séparément comment les variations de  $I_S(T)$  et de  $v(T)$  influencent un  $\text{La}_3$  initialement joué à 20 °C.

Afin de résoudre ce problème, deux solutions, toutes deux utilisées en pratique, sont étudiées par la suite : rajouter des ailettes de refroidissement, ce qui sera étudié dans la Partie B, ou modifier le circuit électronique, ce que nous nous proposons de faire ici.

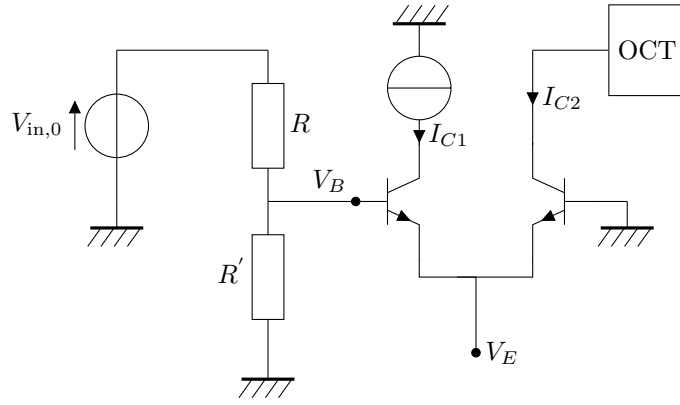
On complète le circuit électronique de la figure 4 en rajoutant un deuxième transistor comme représenté figure 5. Les émetteurs des deux transistors étant reliés, le courant de saturation inverse  $I_S(T)$  est identique pour chacun d'eux. Le courant  $I_{C1}$  est fourni par un générateur de courant d'intensité constante, tandis que  $I_{C2}$  est relié au bloc "OCT". La tension  $V_{in,1}$  est proportionnelle à  $I_{C2}$ .

**Q5.** Exprimer  $I_{C2}$  en fonction de  $I_{C1}$ ,  $V_B$  et  $v(T)$ .

**Q6.** Quelle amélioration présente ce circuit par rapport au circuit de la figure 4 ?

**Q7.** En prenant pour base un fonctionnement à 20 °C, calculer la variation de température acceptable pour le synthétiseur. Commenter.





**Figure 5** – Bloc "Linéaire/Exponentiel" à compensation de température.

Les constructeurs de synthétiseurs analogiques apportent une deuxième modification en remplaçant une ou plusieurs résistances par des thermistances CTP, des dipôles résistifs dont la résistance augmente avec la température. La relation résistance-température d'une thermistance usuelle utilisée dans les synthétiseurs est donnée par la formule :

$$R(T) = R_{T_0}(1 + K \times (T - T_0)),$$

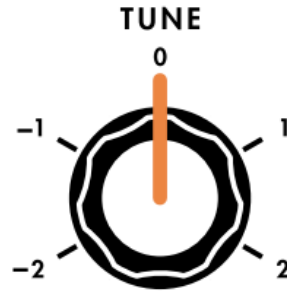
avec  $T_0$  une température de référence,  $R_{T_0}$  la résistance électrique à la température de référence, et  $K$  un coefficient nommé "CTP" (*Coefficient de Température Positif*) supposé indépendant de la température. On dispose de différents jeux de thermistances fournis avec la datasheet suivante :

| CTP ( $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )             | Précision CTP | Résistance $R_{20 \text{ °C}}$ à 20 °C ( $\Omega$ ) | Précision sur $R_{20 \text{ °C}}$ |
|----------------------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 500<br>600<br>700<br>800<br>900              | $\pm 20 \%$   | 500                                                 | $\pm 1 \%$                        |
| 1000<br>1200<br>1500<br>1800<br>2000<br>2200 | $\pm 15 \%$   | 500                                                 | $\pm 1 \%$                        |
| 2400<br>2700<br>2800<br>3000<br>3300         | $\pm 10 \%$   | 500                                                 | $\pm 1 \%$                        |
| 3600<br>3900<br>4200<br>4500                 | $\pm 10 \%$   | 500                                                 | $\pm 1 \%$                        |

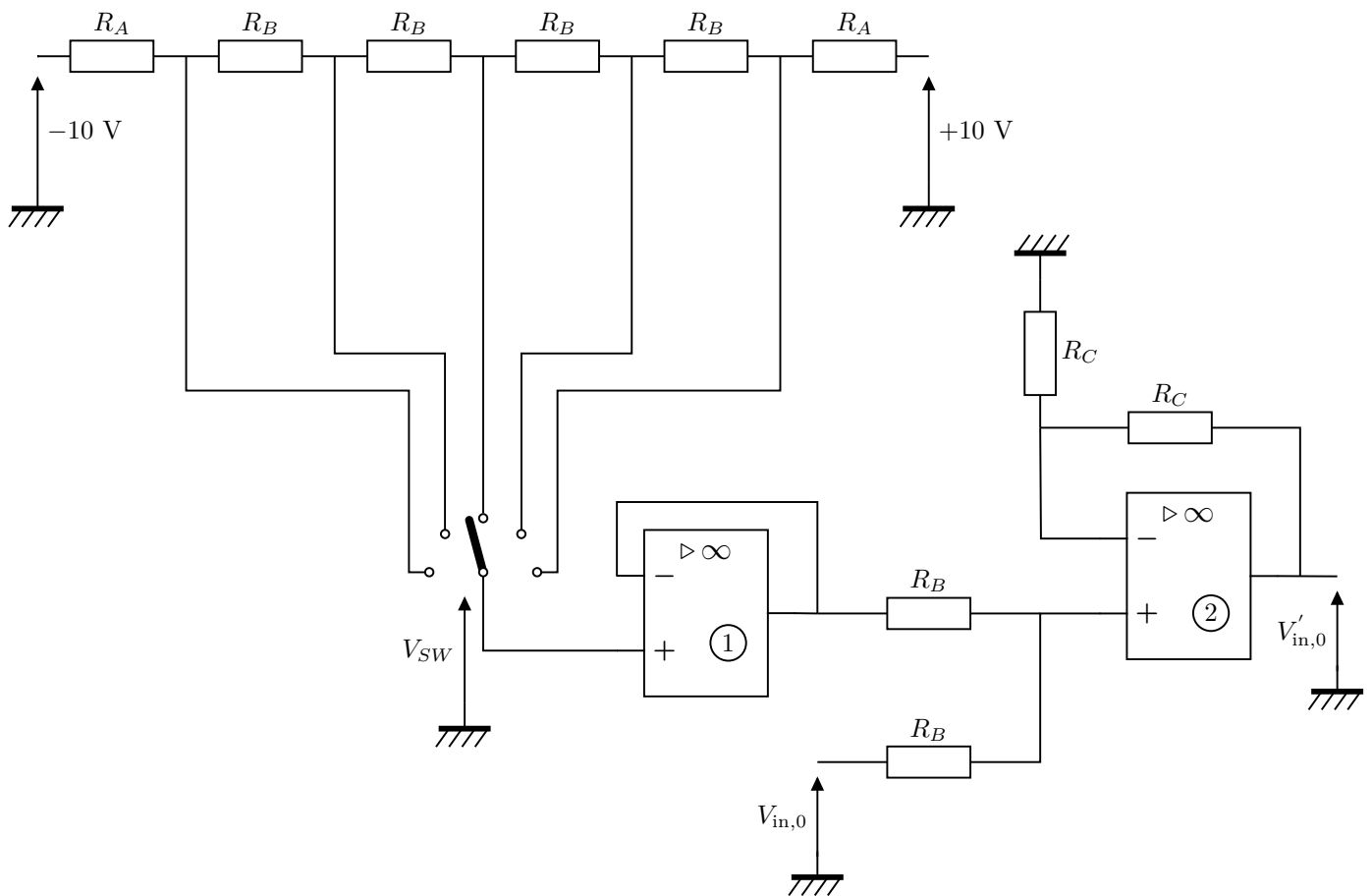
**Q8.** En considérant  $R' \ll R$  et en prenant toujours pour base un fonctionnement à 20 °C, proposer une modification du circuit présenté en figure 5 permettant de compenser au mieux possible la variation de température. Déterminer alors la variation de température acceptable pour le synthétiseur avec le nouveau circuit proposé. Conclure.

### I.3 – Transposition d’octave

En réalité, les synthétiseurs analogiques usuels n’ont pas un nombre de touches suffisant pour jouer sur 10 octaves (le synthétiseur Minimoog présenté figure 1 ne possède que 3 octaves et demie). Pour résoudre ce problème, le bouton "Tune" du Minimoog permet de changer la tension de contrôle associée à une touche du clavier en tournant le sélecteur sur cinq positions différentes (-2, -1, 0, 1 ou 2) et est relié à un circuit électronique présenté figure 7.



**Figure 6** – Bouton "Tune" du synthétiseur Minimoog.

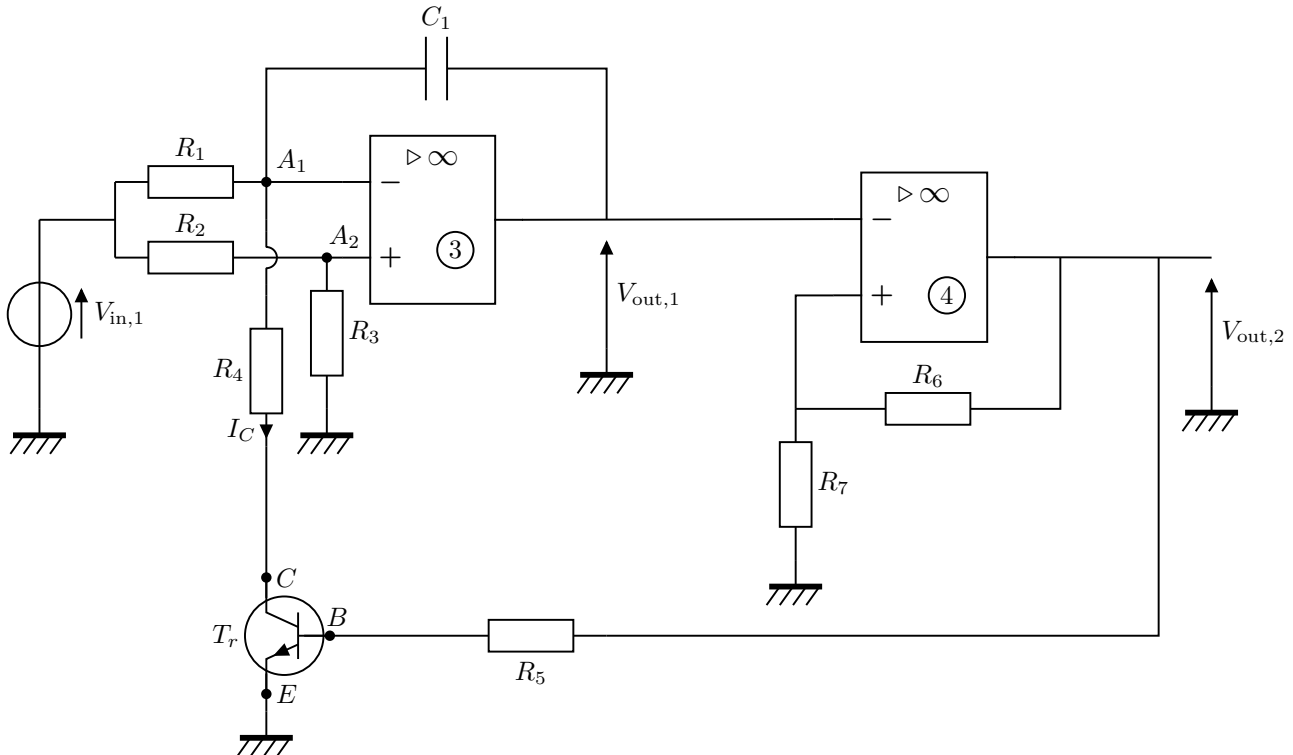


**Figure 7** – Schéma électrique simplifié d'un transposeur d'octave "3U Octave Transposer - Elby Design", avec  $R_B = 10,0 \text{ k}\Omega$  et  $R_C = 5,00 \text{ k}\Omega$ . La rotation du bouton « Tune » entraîne celle du commutateur.

- Q9.** Dans quel(s) régime(s) fonctionnent les deux ALI de la figure 7? Préciser dans ce cas le modèle de l'ALI idéal.
- Q10.** Déterminer la valeur de la résistance électrique  $R_A$  telle que la tension  $V_{SW}$  prenne successivement les valeurs -2 V, -1 V, 0 V, +1 V ou +2 V selon la position du commutateur.
- Q11.** Quel est le rôle de l'ALI (1) situé juste après le commutateur ?
- Q12.** Montrer que le montage de l'ALI (2) est un sommateur et que le circuit permet effectivement de modifier l'octave de la note jouée.

## II – Oscillateur commandé en tension

Un OCT, ou oscillateur commandé en tension (la dénomination la plus couramment utilisée est VCO pour *Voltage Controlled Oscillator*), est un circuit électronique capable de produire un signal périodique dont la fréquence dépend directement de la tension appliquée à son entrée. Ce type d'oscillateur est couramment utilisé, seul ou en plusieurs exemplaires, dans les synthétiseurs analogiques. La tension de commande est déterminée par la touche pressée sur le clavier, ce qui permet à l'oscillateur d'ajuster sa fréquence afin de produire les différentes hauteurs correspondant aux notes de la gamme musicale. Un exemple simplifié d'un OCT est présenté figure 8.



**Figure 8** – Schéma électrique d’un OCT classique.  $R_1$  et  $R_4$  sont reliées en  $A_1$  indépendamment de  $R_2$  et  $R_3$  qui sont reliées en  $A_2$ .

On note  $V_{\text{sat}}$  la tension de saturation des ALI, avec  $V_{\text{sat}} = 15$  V. La tension de commande  $V_{\text{in},1}$  est supposée constante et strictement positive.

**Q13.** En justifiant votre réponse, identifier le régime de fonctionnement de l'ALI ④. Quelle(s) conséquence(s) immédiate(s) cela engendre-t-il ?

Selon la valeur de la tension  $V_{BE}$  entre la base du transistor (point  $B$ ) et la masse (point  $E$ ), on peut distinguer deux phases de fonctionnement du transistor  $T_r$  :

- **phase active** : lorsque  $V_{BE}$  est positive, la jonction entre  $C$  et  $E$  est équivalente à un fil ;
- **phase bloquante** : lorsque  $V_{BE}$  est négative, le courant  $I_C$  en  $C$  est nul.

La résistance  $R_5$  sert à induire un courant suffisant à la base du transistor et n'intervient pas dans les calculs. On admet ainsi que les tensions  $V_{BE}$  et  $V_{out,2}$  sont toujours de même signe.

On suppose d'abord que le transistor fonctionne initialement en phase bloquante.

**Q14.** Déterminer  $V_{\text{out},1}(t)$  en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $V_{\text{in},1}$ ,  $t$  et d'une constante que l'on déterminera ultérieurement.

**Q15.** Déterminer, en fonction de  $V_{\text{sat}}$ ,  $R_6$  et  $R_7$  la tension positive de basculement  $V_{\text{haut}}$  de l'ALI ④ et sa tension négative de basculement  $V_{\text{bas}}$ . Représenter graphiquement l'évolution de  $V_{\text{out},2}$  en fonction de  $V_{\text{out},1}$ .

**Q16.** On suppose que  $V_{\text{out},1}(t=0) = -V_{\text{bas}} > 0$  à l'instant initial. En déduire l'instant  $t_1$  à partir duquel l'ALI (4) change d'état (bascule). Que se passe-t-il alors ?

**Q17.** Déterminer  $V_{\text{out},1}(t)$  pour  $t > t_1$  tant que l'ALI ④ reste dans le même état. Quelle condition sur  $R_4$  permet d'obtenir des oscillations symétriques ? On supposera cette condition vérifiée par la suite.

**Q18.** On suppose que  $R_6 = R_7$ . En déduire que la fréquence  $f$  de fonctionnement de l'OCT est donnée par

$$f = \frac{1}{2R_1C_1} \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{V_{in,1}}{V_{sat}}.$$

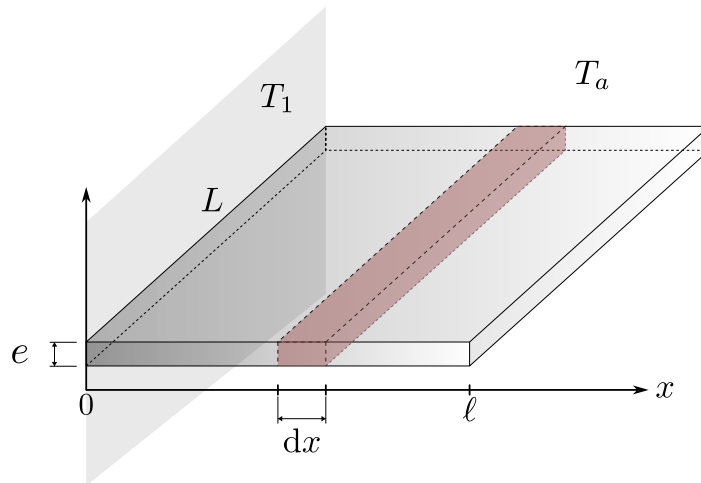
**Q19.** Représenter schématiquement les évolutions temporelles des tensions  $V_{out,1}$  et  $V_{out,2}$ .

**Q20.** La fiche technique des ALI utilisés indique une vitesse de balayage maximale de  $0,3 \text{ V}/\mu\text{s}$  en contre-réaction négative. Décrire ce que cela signifie et en déduire une borne supérieure de la fréquence de fonctionnement de l'OCT. Commenter.

## Partie B – Contrôle de température au sein d'un synthétiseur analogique

Les variations de température influent sur la stabilité des composants d'un synthétiseur analogique. L'utilisation d'ailettes de refroidissement sur les transistors permet de limiter ces effets. Ce sont de petits dissipateurs thermiques, généralement en aluminium, posés directement sur le transistor et qui augmentent la surface d'échange avec l'air. Cela permet d'évacuer plus efficacement l'énergie et de stabiliser la température des composants. Ces ailettes sont souvent couplées à des ventilateurs pour renouveler l'air en contact avec elles. Ce contrôle thermique est essentiel pour garantir la stabilité des fréquences associées aux notes du synthétiseur. Le dimensionnement correct de ces ailettes est important pour des raisons techniques mais aussi économiques.

On modélise une de ces ailettes par un pavé droit de longueur  $\ell$ , de largeur  $L$  et d'épaisseur  $e$ , avec  $e \ll \ell$  et  $e \ll L$ . On note  $\rho$  la masse volumique de l'ailette,  $c$  sa capacité thermique massique,  $\lambda$  sa conductivité thermique et  $T(x, t)$  le champ de température. La base de l'ailette en  $x = 0$  est reliée au transistor de température  $T_1$  supposée constante et on suppose que le contact thermique y est parfait. Partout ailleurs, l'ailette est en contact avec l'air à température  $T_a$  uniforme, avec  $T_a < T_1$ . On suppose que le gradient transverse de température est suffisamment faible pour que, sur la section droite d'abscisse  $x$ , la température  $T(x, t)$  puisse être considérée uniforme.



**Figure 9** – Modélisation d'une ailette en contact avec un transistor.

En régime permanent, la surface de l'ailette échange un transfert conducto-convectif avec l'air ambiant. Ce transfert est modélisé par la loi de Newton : la puissance thermique traversant une surface  $dS$  de l'interface s'écrit  $hdS(T_{S1} - T_{S2})$ , où  $h$  désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et  $T_{S1}$  et  $T_{S2}$  les températures de part et d'autre de l'interface. On considère comme système la tranche de l'ailette entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , comme représenté sur la figure 9.

**Q21.** Déterminer précisément la puissance fournie par le système à l'air au travers des échanges conducto-convectifs en fonction de  $h$ ,  $T_a$ ,  $T(x, t)$  et de paramètres géométriques.

**Q22.** En effectuant un bilan énergétique en régime stationnaire, prouver que le champ de température vérifie

$$\frac{d^2T}{dx^2}(x) - m^2T(x) = -m^2T_a$$

Exprimer  $m$  en fonction de  $h$ ,  $\lambda$  et  $e$ , en considérant  $m > 0$ .

**Q23.** Quelle condition limite le champ de température vérifie-t-il en  $x = 0$  ?

En ce qui concerne la condition limite en  $x = \ell$ , plusieurs possibilités peuvent être envisagées :

- Hypothèse 1 - L'ailette est supposée suffisamment longue selon l'axe  $\vec{u}_x$  pour pouvoir considérer  $m\ell \gg 1$  ;
- Hypothèse 2 - Le transfert thermique par diffusion est considéré nul en  $x = \ell$  ;
- Hypothèse 3 - Le transfert thermique en  $x = \ell$  se fait par conducto-convection.

**Q24.** Écrire, pour chaque hypothèse, la condition limite associée à  $T$  en  $x = \ell$ . Laquelle de ces hypothèses vous semble la plus réaliste ? Justifier.

**Q25.** Sous l'hypothèse 1, déterminer le champ de température  $T(x)$ . Exprimer ensuite  $\tilde{T}(x) = \frac{T(x) - T_a}{T_1 - T_a}$  en fonction de  $m$  et  $x$ , puis tracer  $\tilde{T}(x)$ .

On se place dans la suite sous l'hypothèse 2.

**Q26.** Déterminer  $\tilde{T}(x)$ .

**Q27.** Déterminer le flux thermique total  $\Phi$  évacué par l'ailette.

**Q28.** On pose  $\Phi_u$  le flux thermique qui serait évacué par l'ailette si sa température était en tout point égale à la température de la base  $T_1$ . Sans calcul, déterminer lequel de  $\Phi$  ou de  $\Phi_u$  est le plus élevé.

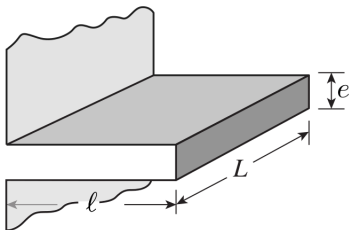
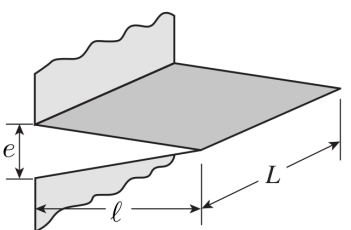
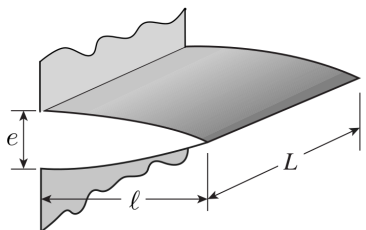
**Q29.** On définit le rendement thermique de l'ailette par  $\eta = \Phi/\Phi_u$ . Pourquoi peut-on assimiler cette grandeur à un rendement ?

**Q30.** Montrer alors que

$$\eta = \frac{\tanh(m\ell)}{m\ell},$$

avec  $\tanh$  la fonction tangente hyperbolique définie en fin d'énoncé.

Les calculs sous l'hypothèse 3 sont plus complexes, mais la formule précédente reste applicable en remplaçant  $\ell$  par  $\ell_c = \ell + e/2$ . Il est également possible de réaliser les mêmes calculs pour d'autres configurations d'ailettes. La figure 10 illustre ces différentes configurations géométriques ainsi que leur rendement thermique. Des contraintes techniques imposent que les ailettes intégrées aux synthétiseurs analogiques compacts aient des dimensions maximales de  $L = 20$  mm,  $\ell = 15$  mm et  $e = 2$  mm.

| Ailette rectangulaire                                                                                                       | Ailette triangulaire                                                                                                               | Ailette parabolique                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  $\eta = \frac{\tanh(m\ell_c)}{m\ell_c}$ |  $\eta = \frac{I_1(2m\ell)}{m\ell I_0(2m\ell)}$ |  $\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{(2m\ell)^2 + 1}}$ |

**Figure 10** – Différentes géométries d'ailettes (rectangulaire, triangulaire, parabolique) et expressions de leur rendement thermique. Les fonctions  $I_0$  et  $I_1$  correspondent aux fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

**Q31.** En vous aidant du formulaire en fin d'énoncé, déterminer la forme d'ailette permettant d'obtenir la dissipation thermique la plus efficace.

**Q32.** En complément des ailettes, des systèmes de ventilation peuvent être utilisés. Quel type d'écoulement d'air faut-il privilégier pour maximiser les échanges thermiques ? Justifier.

## Partie C – Protection par couches minces de composés du silicium

Dans les synthétiseurs analogiques, les circuits imprimés constituent le cœur électronique de l'instrument et doivent être protégés contre l'humidité, la poussière et l'oxydation afin de garantir leur stabilité et leur longévité. Pour cela, on utilise souvent des couches de protection minces déposées à la surface, comme du dioxyde de silicium  $\text{SiO}_2$  ou du nitrure de silicium  $\text{Si}_3\text{N}_4$ . On se propose d'étudier deux aspects de la chimie de chacun de ces composés.

### I – Thermodynamique et cinétique de formation du nitrure de silicium

**Q33.** Écrire l'équation-bilan de formation du nitrure de silicium à partir de silicium et de diazote, en prenant un coefficient stœchiométrique égal à 1 pour  $\text{Si}_3\text{N}_4$ . Montrer que cette réaction est quantitative à 298 K.

**Q34.** En introduisant les réactifs en proportions stœchiométriques dans un réacteur calorifugé sous 1 bar, déterminer la température finale. Conclure.

Dans les conditions expérimentales réelles, le silicium n'est jamais parfaitement pur : les poudres industriellement disponibles sont constituées d'un mélange de composés (voir formulaire en fin d'énoncé). On propose ici d'étudier la cinétique de formation du nitrure de silicium à partir de cette poudre. On place un échantillon contenant une masse  $W^0 = 834$  g de poudre de silicium dans un réacteur isotherme. Après chauffage de la poudre à la température souhaitée sous une atmosphère inerte d'argon, on fait circuler dans le four du diazote extrêmement pur (99,999 %). Afin de suivre l'avancement de la réaction, on mesure la masse  $W$  de l'échantillon au cours du temps (mesure thermogravimétrique) et on note  $\Delta W = W - W^0$  la variation de masse par rapport à l'instant initial (on supposera que le gaz n'introduit aucun changement significatif de masse). On définit le taux de nitruration par

$$\alpha = \frac{\Delta W_{\text{Si}}}{W_{\text{Si}}^0},$$

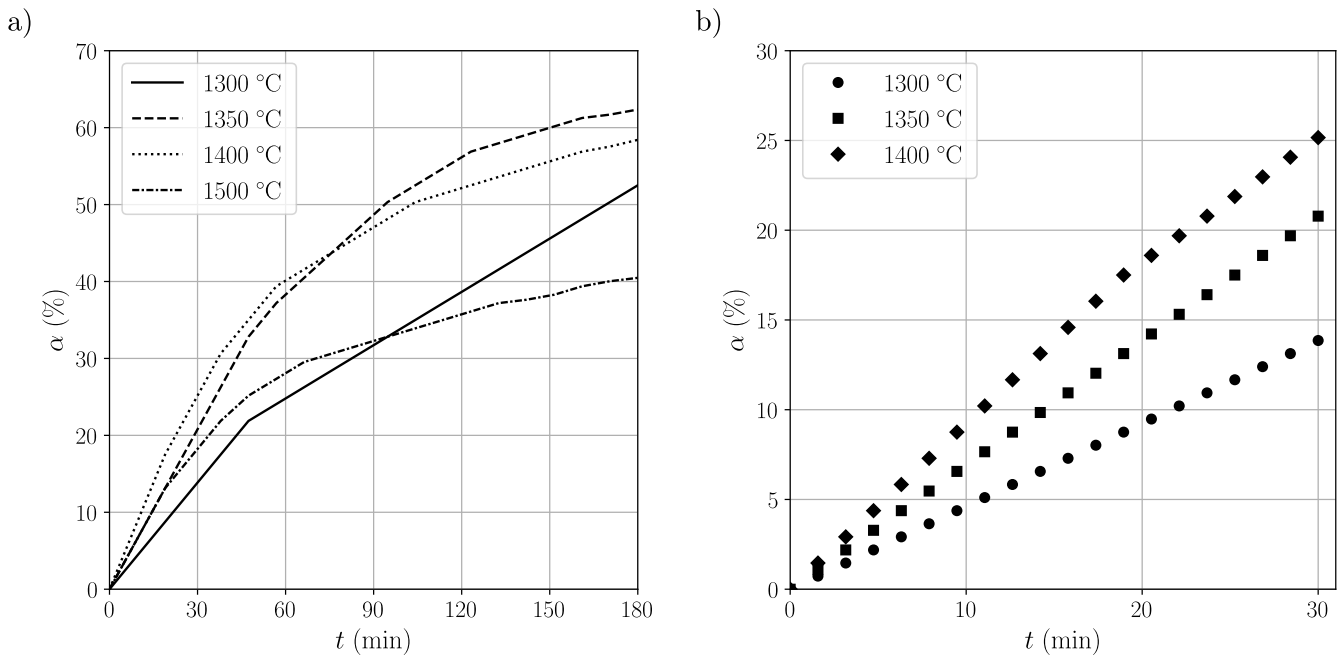
avec  $W_{\text{Si}}^0$  la masse initiale de Si dans l'échantillon, et  $\Delta W_{\text{Si}}$  la masse de Si consommée au cours de la réaction.

**Q35.** Montrer que

$$\alpha = \beta \frac{\Delta W}{W^0},$$

avec  $\beta$  un facteur numérique à identifier.

La figure 11 présente les résultats obtenus pour une gamme de température comprise entre 1300 et 1500 °C.



**Figure 11** – a) Taux de nitruration pour différentes températures du réacteur. b) Même courbe étudiée entre 0 et 30 minutes.

**Q36.** Expliquer pourquoi la nitruration du silicium cesse d'être favorisée au-delà d'une certaine température en citant deux phénomènes pouvant en être responsables.

On s'intéresse à la formation de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  au début de l'expérience. La figure 11-b) présente l'évolution du taux de nitruration jusqu'à  $t = 30$  min.

**Q37.** On suppose que la réaction de formation de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  aux temps courts ( $t \leq 30$  minutes) suit une loi d'ordre 0. Identifier l'expression de  $\alpha(t)$  en fonction notamment de la constante de vitesse  $k$  (en considérant la vitesse molaire de réaction).

**Q38.** Rappeler la loi d'Arrhénius. Définir clairement les grandeurs qui y apparaissent et préciser leurs unités.

**Q39.** À partir des résultats expérimentaux de la figure 11-b), déterminer numériquement les paramètres introduits dans la loi d'Arrhénius.

## II – Formation de dioxyde de silicium sur un circuit imprimé

On s'intéresse à la croissance d'une couche de dioxyde de silicium  $\text{SiO}_2$  sur un substrat de silicium  $\text{Si}$  par exposition à un oxydant (dioxygène gazeux ou vapeur d'eau) à haute température dans un four. On note respectivement  $C_g$ ,  $C_s$  et  $C_i$  la concentration molaire volumique d'oxydant dans le gaz, à la surface du dioxyde de silicium et à l'interface avec le silicium (figure 13). Le modèle de Deal-Grove suppose que le processus global de formation de  $\text{SiO}_2$  peut être décomposé en trois étapes successives :

- **Étape 1** - Transport de l'oxydant depuis le gaz ambiant jusqu'à la surface de  $\text{SiO}_2$ . Ce transport est modélisé par un coefficient de transfert  $h_g$  associé à un flux molaire surfacique

$$J_g = h_g(C_g - C_s),$$

- **Étape 2** - Diffusion de l'oxydant à travers la couche d'oxyde  $\text{SiO}_2$ , de flux molaire surfacique :

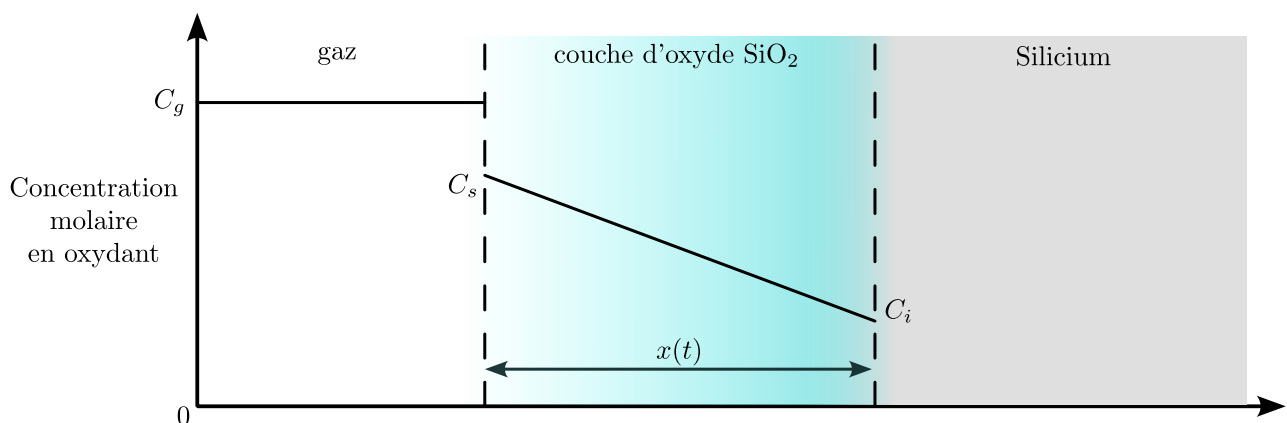
$$J_d = \frac{D}{x(t)}(C_s - C_i)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion de l'oxydant dans l'oxyde, et  $x(t)$  l'épaisseur du dioxyde de silicium.

- **Étape 3** - Réaction chimique à l'interface  $\text{Si}/\text{SiO}_2$ , de flux molaire surfacique

$$J_r = k_i C_i$$

où  $k_i$  est la constante de vitesse de réaction à l'interface associée à la formation de  $\text{SiO}_2$ .



**Figure 12** – Évolution de la concentration molaire en oxydant à proximité de la couche de silicium.

On se place en régime quasi-stationnaire. Les concentrations molaires  $C_g$ ,  $C_s$  et  $C_i$  seront toutes supposées constantes. Initialement, une fine couche de  $\text{SiO}_2$  d'épaisseur  $x_0$  est formée à la surface du silicium.

Lors de la formation de  $\text{SiO}_2$  en utilisant de la vapeur d'eau, un dégagement gazeux est observé.

**Q40.** Écrire la réaction de formation de  $\text{SiO}_2$  à partir de dioxygène, puis à partir de  $\text{H}_2\text{O}$ . Justifier le terme d'oxydant employé pour ces deux composés.

**Q41.** Quelle est l'unité de  $h_g$  ?

On définit  $N_v$  comme le nombre de moles d'oxydant consommés par unité de volume de  $\text{SiO}_2$  formé.

**Q42.** Déterminer  $N_v$  pour le dioxygène et pour la vapeur d'eau. Calculer le nombre de moles d'oxydant nécessaires à la formation de  $1 \text{ cm}^3$  de  $\text{SiO}_2$ .

**Q43.** Justifier que le flux molaire surfacique est uniforme dans l'ensemble de la structure. Démontrer alors que l'épaisseur  $x$  de la couche d'oxyde suit une loi de la forme

$$x^2(t) + A x(t) = B \times (t + \tau).$$

Identifier les constantes  $A$ ,  $B$  et  $\tau$  en fonction de  $N_v$ ,  $D$ ,  $h_g$ ,  $k_i$ ,  $C_g$  et  $x_0$ .

**Q44.** Exprimer  $x(t)$ . Identifier deux régimes de croissance de la couche de dioxyde en considérant le comportement asymptotique

$$t + \tau \ll \frac{A^2}{4B} \text{ puis } t + \tau \gg \frac{A^2}{4B}$$

Représenter alors de façon asymptotique l'évolution de  $x(t)$ .

**Q45.** Comparer le temps caractéristique de diffusion issu de l'étape 2 au temps caractéristique de croissance de la couche de  $\text{SiO}_2$ . Sous quelle condition peut-on se placer en régime quasi-stationnaire ?



# Données et formulaire

## Données numériques partie A

Constante de Boltzmann  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$   
 Charge électrique élémentaire  $q = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

## Données numériques partie B

Coefficient de transfert conducto-convectif  $h = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Propriétés de l'aluminium :

Capacité thermique massique  $c = 900 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$   
 Conductivité thermique  $\lambda = 215 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$   
 Masse volumique  $\rho = 2,70 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

## Données numériques partie C

Constante d'Avogadro  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$   
 Masse molaire du silicium  $M_{\text{Si}} = 28,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$   
 Masse molaire de l'azote  $M_{\text{N}} = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$   
 Masse molaire de l'oxygène  $M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$   
 Température de fusion du silicium  $T_{\text{fus}}(\text{Si}) = 1414 \text{ }^\circ\text{C}$   
 Température de fusion du nitrure de silicium  $T_{\text{fus}}(\text{Si}_3\text{N}_4) = 1900 \text{ }^\circ\text{C}$   
 Masse volumique du dioxyde de silicium  $\rho_{\text{SiO}_2} = 2,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Composition chimique de la poudre de silicium (pourcentage en masse) -

| Si    | Fe   | Cu   | Al   | Ti   | Zr    | V     | Mn    | O    | Cl   | C    | Ca    | P     | S     | N     |
|-------|------|------|------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 68,56 | 9,52 | 3,39 | 1,25 | 1,05 | 0,131 | 0,127 | 0,114 | 7,90 | 4,29 | 2,60 | 0,636 | 0,144 | 0,054 | 0,039 |

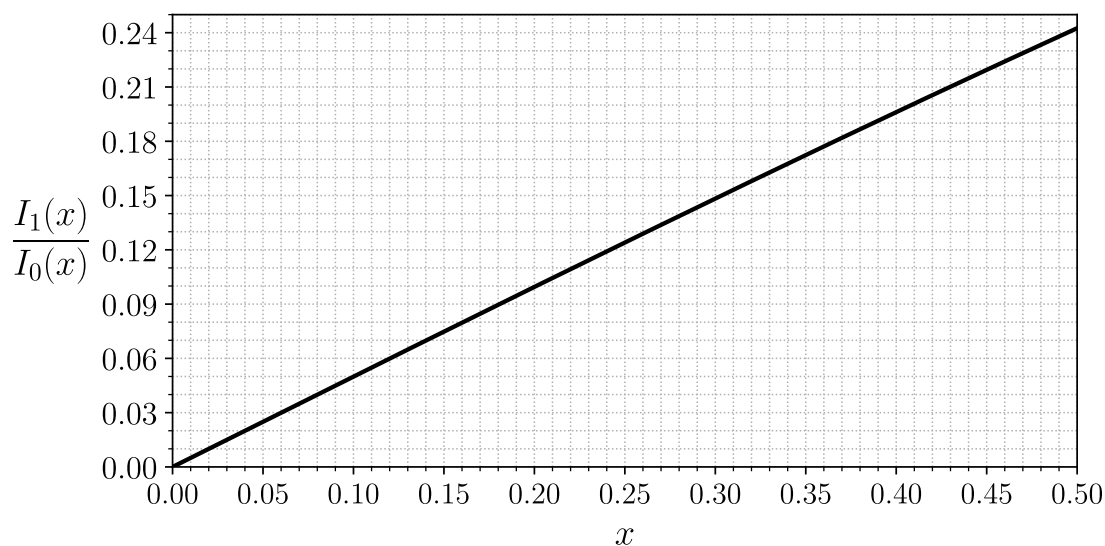
Grandeurs thermodynamiques standard à 298 K - On note  $\Delta_f H^\circ$  l'enthalpie molaire standard de formation,  $S_m^\circ$  l'entropie molaire standard et  $C_{pm}$  la capacité thermique molaire à pression constante

| Espèce                             | $\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol <sup>-1</sup> ) | $S_m^\circ$ (J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> ) | $C_{pm}$ (J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> ) |
|------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Si (s)                             |                                              | 18,8                                                   | 23,9                                                |
| N <sub>2</sub> (g)                 |                                              | 192                                                    | 29,1                                                |
| Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> (s) | -828                                         | 113                                                    | 99,5                                                |

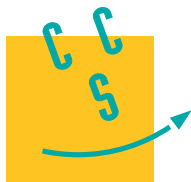
## Formulaire

Fonction tangente hyperbolique  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Rapport des fonctions de Bessel modifiées de première espèce  $I_1(x)/I_0(x)$  :



◇ Fin ◇



## Transferts, mesures et stockage d'énergie électrique

Le problème comporte 4 parties indépendantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

La transmission et la conversion d'énergie sont des domaines de recherche important, dont les applications sont nombreuses : recharges de batteries de véhicules électriques, d'électronique portable, implants médicaux, etc. Nous allons ici décrire des moyens de conversion d'énergie électrique entre deux systèmes et des moyens de mesure de la puissance transférée.

On utilise la notation complexe pour les grandeurs sinusoïdales :  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$  a pour image complexe  $\underline{u}(t) = \underline{U} \exp(j\omega t)$  où  $j^2 = -1$  et  $\underline{U} = U_0 \exp(j\varphi)$  est l'amplitude complexe ;  $U_0 = |\underline{U}|$  est le module de  $\underline{U}$  et  $\varphi = \arg(\underline{U})$  son argument. Le complexe conjugué de  $\underline{U}$  est noté  $\underline{U}^*$  :  $\underline{U}^* = U_0 \exp(-j\varphi)$ . La valeur efficace est notée  $U_{0,\text{eff}}$  telle que  $U_0 = \sqrt{2} U_{0,\text{eff}}$ .

On pourra utiliser la propriété suivante : pour  $x \geq 0$ ,  $a > 0$  et  $k > -1$ , la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2kax + a^2}$$

est positive et présente un maximum en  $x = a$ .

## Partie A – Transfert filaire

### I – Adaptation d'impédance

Un générateur électrique de force électromotrice (f.e.m.) constante  $e_0$  et de résistance interne  $r_i$  alimente un circuit récepteur d'impédance d'entrée équivalente à une résistance de valeur  $r_e$  (figure 1a).

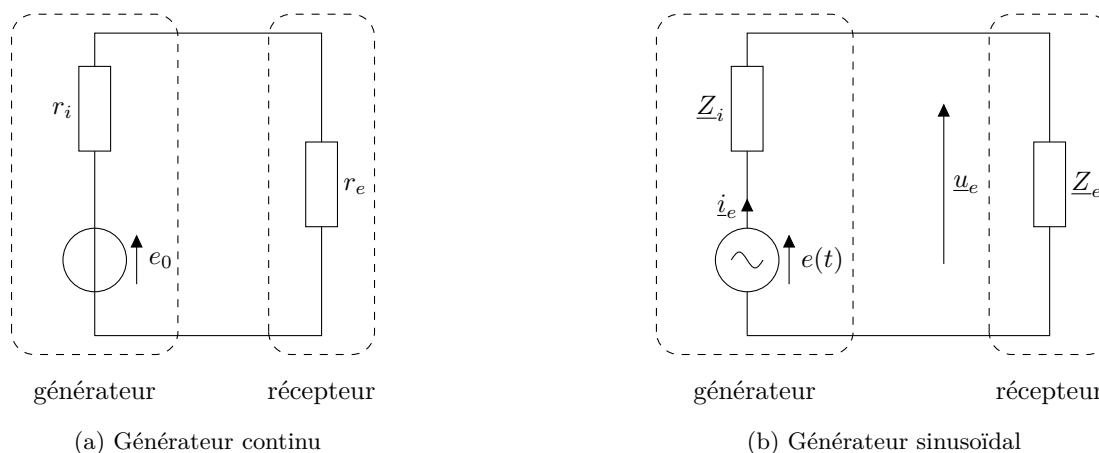


Figure 1 – Sources - Récepteurs

- Q1.** Établir l'expression de la puissance  $P_g$  fournie par le générateur au récepteur en fonction de  $e_0$ ,  $r_i$  et  $r_e$ . Pour quelle valeur de  $r_e$  cette puissance est-elle maximale,  $r_i$  et  $e$  étant fixés ? Donner dans ce cas l'expression de la puissance maximale  $P_{g,\max}$  en fonction de  $e_0$  et de  $r_i$ .

On se place à présent en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ . La f.e.m. du générateur sinusoïdal s'écrit  $e(t) = \sqrt{2} E_{0,\text{eff}} \cos(\omega t)$  et son impédance interne est le complexe  $\underline{Z}_i = Z_i \exp(j\varphi_i)$ . Le récepteur présente une impédance d'entrée complexe  $\underline{Z}_e = Z_e \exp(j\varphi_e)$  (figure 1b).

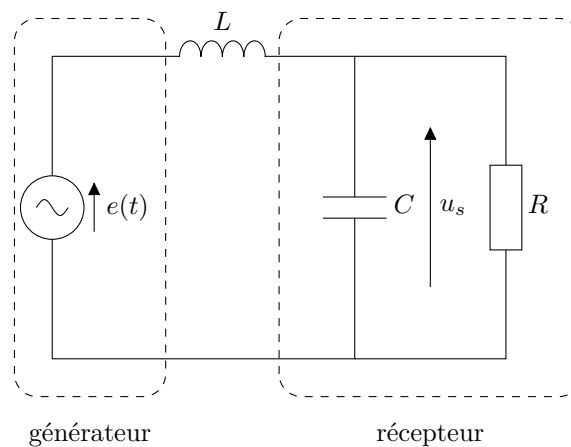
- Q2.** Donner les expressions de la tension complexe  $\underline{u}_e$  aux bornes d'entrée du récepteur et de l'intensité  $\underline{i}_e$  qui le traverse en fonction de  $\underline{e}$ ,  $\underline{Z}_i$  et  $\underline{Z}_e$ .
- Q3.** Quelle est l'expression de la puissance moyenne  $P_a$  consommée par le récepteur en fonction de  $Z_e$ ,  $\varphi_e$  et  $I_{e,\text{eff}}$  puis en fonction de  $E_{0,\text{eff}}$ ,  $Z_e$ ,  $Z_i$ ,  $\varphi_e$  et  $\varphi_i$  ?
- Q4.** En admettant que  $\varphi_i = -\varphi_e$ , déterminer, en fonction de  $Z_i$ , la valeur de  $Z_e$  qui rend la puissance moyenne  $P_a$  maximale. Donner l'expression de cette puissance maximale  $P_{a,\max}$ . Pour cette valeur  $P_{a,\max}$  de  $P_a$ , donner la puissance dissipée  $P_{\text{diss}}$  dans l'impédance interne du générateur. Commenter.

Dans les conditions de la question précédente, on dit qu'il y a « adaptation d'impédance ».

- Q5.** On désire alimenter de manière optimale un haut-parleur modélisé par une résistance  $r_e = 6 \Omega$  en série avec une bobine d'inductance  $\ell_e = 0,5 \text{ mH}$ , sous une fréquence  $f = 1 \text{ kHz}$ . Quel serait l'association de dipôles formant  $\underline{Z}_i$  respectant l'adaptation d'impédance ? On précisera la nature et la valeur associées aux dipôles.

## II – Transfert résonnant

Un récepteur est formé d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$  alimenté par un générateur de f.e.m.  $e(t)$  et d'impédance interne nulle. Le générateur et le récepteur sont reliés par l'intermédiaire d'une bobine d'inductance  $L$  (figure 2). La f.e.m. est sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $E_0 = \sqrt{2} E_{0,\text{eff}}$  :  $e(t) = \sqrt{2} E_{0,\text{eff}} \cos(\omega t)$ .



**Figure 2** – Récepteur  $RC$ .

- Q6.** Y a-t-il adaptation d'impédance entre le générateur et le récepteur du montage de la figure 2 ?
- Q7.** La tension  $u_s$  est la tension aux bornes de la résistance  $R$  de la figure 2. Établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}}$ . On écrira la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

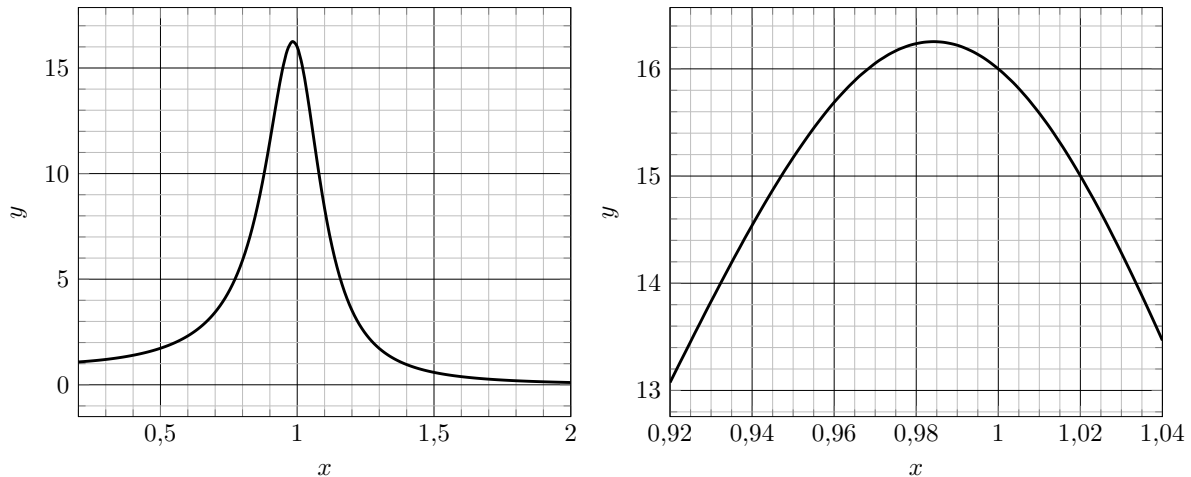
et on donnera les expressions de  $H_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

On s'intéresse au transfert de puissance entre la source de tension  $e(t)$  et le récepteur formé de la résistance  $R$  et de la capacité  $C$ .

- Q8.** Quel dipôle du récepteur consomme de la puissance ? En déduire l'expression de la puissance moyenne  $P_a$  consommée par le récepteur en fonction de  $U_{s,\text{eff}}$  et d'un des paramètres du récepteur. Montrer que la dépendance en fréquence de la puissance consommée est donnée par :

$$P_a = \frac{P_{a,0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}.$$

Exprimer  $P_{a,0}$  en fonction de  $E_{0,\text{eff}}$  et d'autre(s) paramètre(s).



**Figure 3** – Puissance consommée en fonction de la pulsation, en coordonnées réduites  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $y = \frac{P_a}{P_{a,0}}$ . Le graphe de droite est un agrandissement du graphe de gauche au voisinage de l'abscisse  $x = 1$ .

- Q9.** On a représenté figure 3, en coordonnées réduites, la puissance moyenne consommée par le récepteur. Pour quelle valeur de  $Q$  est-elle tracée ? Évaluer l'écart relatif  $\frac{\delta\omega}{\omega_0}$  entre la pulsation du maximum de puissance moyenne et  $\omega_0$ . Comment cet écart dépend-il de  $Q$  ? Justifier.
- Q10.** On se place dans les conditions de la figure 3. Quelle inductance  $L$  faut-il utiliser pour que le transfert de puissance soit maximal à la fréquence  $f_0 = 200$  kHz si  $C = 20$  pF ? Avec ces valeurs, on veut transférer une puissance  $P_{a,\text{max}} = 1$  kW pour  $E_{0,\text{eff}} = 100$  V. Quelle valeur de la résistance  $R$  doit-on utiliser ? Quel écart de fréquence est acceptable si la puissance ne s'écarte pas de plus de 10% de la valeur maximale ? Commenter, sachant que la capacité  $C$  est susceptible de grandes variations. Quelle solution proposeriez-vous ?

## Partie B – Transfert d'énergie sans contact

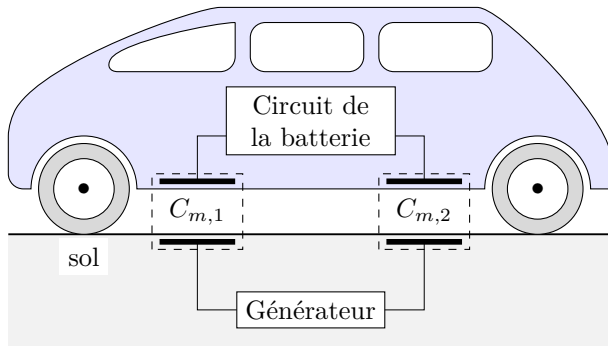
### I – Couplage capacitif

On désire recharger une batterie d'un véhicule électrique sans contact direct, c'est-à-dire sans fil entre le générateur et le récepteur formé du circuit de la batterie (figure 4a). Le générateur est fixé dans la chaussée tandis que le récepteur est lié au véhicule. Pour coupler les deux circuits, chacun est lié à un conducteur formant une armature d'un condensateur. Soient  $C_{m1}$  et  $C_{m2}$  les capacités de ces condensateurs, dits de couplage. Ils sont formés d'armatures carrées parallèles de cotés  $\ell$ . On note  $d$  la distance entre les armatures (figure 4b). Le milieu inter-armatures est de l'air.

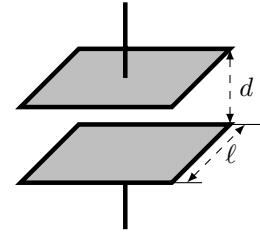
Sur la figure 5 sont représentées, en coupe, des équipotentielles d'un condensateur plan dont les armatures sont placées respectivement à  $V_0 = 100$  V et  $-V_0 = -100$  V. Ces équipotentielles sont calculées par résolution numérique de l'équation de Laplace.

- Q11.** Représenter, sur le document réponse qui reproduit la figure 5, le champ électrique  $\vec{E}$  aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Tracer et orienter les lignes de champ passant par ces points. Évaluer numériquement la norme du champ électrique en  $A$  et en  $C$ .

**Q12.** Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrique  $u_E$  en fonction du champ électrique  $\vec{E}$  et de la permittivité du vide  $\varepsilon_0$ . En admettant que le champ électrique est uniforme et localisé uniquement entre les armatures, déduire de l'expression de l'énergie emmagasinée  $U_E$  dans un condensateur l'expression de sa capacité  $C_0$  en fonction de  $d$ ,  $\ell$  et de  $\varepsilon_0$ . Calculer  $C_0$ .

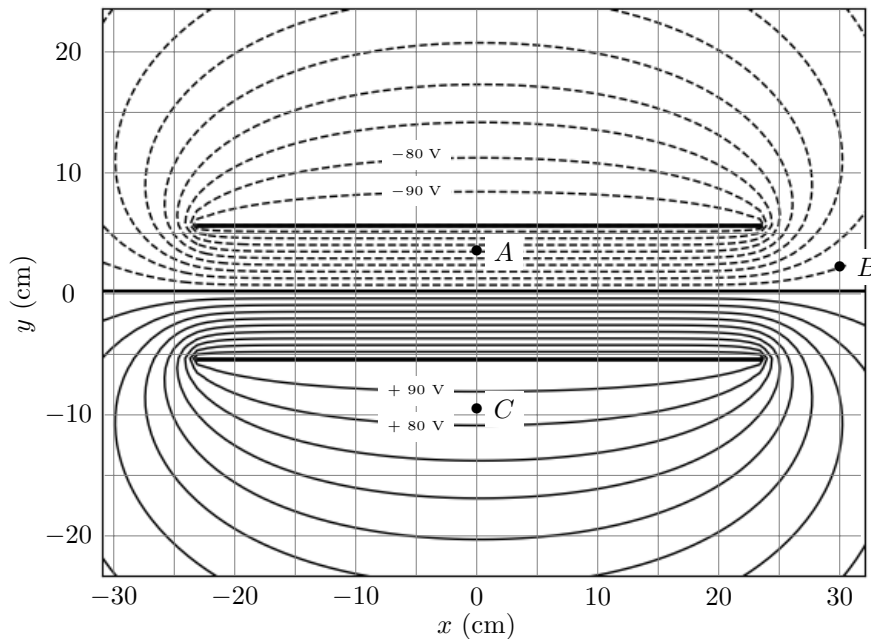


(a) Circuits couplés



(b) Armatures de la capacité de couplage  $C_{m1}$  (ou  $C_{m2}$ )

**Figure 4** – Couplage capacitif sans contact



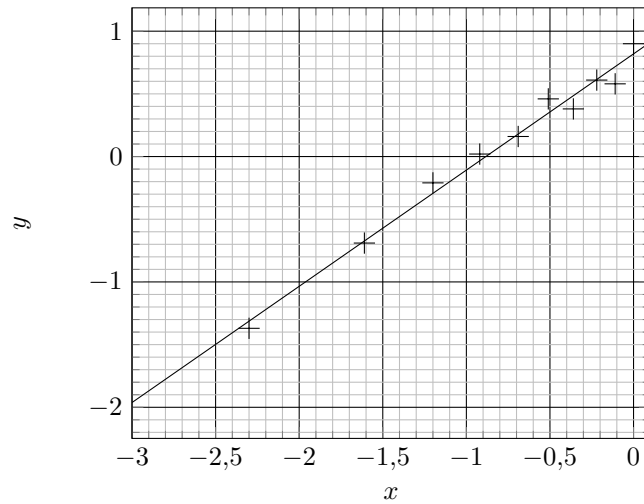
**Figure 5** – Topographie des équipotentiels entre les armatures d'un condensateur plan pour  $d = 11$  cm et  $\ell = 48$  cm. En trait plein les équipotentiels positifs, en pointillés les équipotentiels négatifs. Deux équipotentiels voisines sont séparées de 10 V.

**Q13.** Quand les effets de bord ne sont pas négligeables, la capacité  $C_{\text{réel}}$  du condensateur s'écarte de  $C_0$ . En se fondant par exemple sur la figure 5, justifier sommairement que  $C_{\text{réel}} > C_0$ .

On peut décrire  $C_{\text{réel}}$  par la loi suivante :

$$C_{\text{réel}} = C_0 \left( 1 + \kappa \left( \frac{d}{\ell} \right)^\beta \right).$$

Le graphe de la figure 6 est tracé pour dix mesures de  $d$  et  $C_{\text{réel}}$ . On pose  $x = \ln \frac{d}{\ell}$  et  $y = \ln \frac{C_{\text{réel}} - C_0}{C_0}$ . On dispose donc de deux listes de dix valeurs  $[x_0, x_1, \dots, x_9]$  et  $[y_0, y_1, \dots, y_9]$ .



**Figure 6** –  $y = \ln \frac{C_{\text{réel}} - C_0}{C_0}$  en fonction de  $x = \ln \frac{d}{\ell}$ . On a représenté la droite de régression d'équation  $y = 0,927x + 0,819$ .

**Q14.** À l'aide de ce graphe, évaluer les constantes  $\kappa$  et  $\beta$ . Calculer  $C_{\text{réel}}$  pour le condensateur de la figure 5.

Les incertitudes-types des valeurs  $y_i$ ,  $i \in \{0, \dots, 9\}$  sont toutes de valeur  $u_y = 0,05$ . Les incertitudes-types des valeurs  $x_i$  sont négligeables. On veut en déduire les incertitudes-types des paramètres  $\kappa$  et  $\beta$  par la méthode de Monte-Carlo pour  $N = 10000$  tirages. Le code Python partiel est donné ci-dessous.

```

1 import numpy as np
2
3 ## Mesures
4 x=np.array([-2.3, -1.61, -1.2, -0.92, -0.69, -0.51, -0.36, -0.22, -0.11, 0.0])
5 y=np.array([-1.2, -0.61, -0.23, 0.02, 0.2, 0.34, 0.48, 0.59, 0.73, 0.77])
6
7 ## Incertitude-type
8 u_y=0.05
9
10 ## Nombre de tirages aleatoires
11 N=10000
12
13 ## Initialisation des listes des pentes et ordonnées à l'origine
14 a,b=[],[]
15
16 ## Tirages aléatoires
17 for i in range(N):
18     Y_i=[]
19     for j in range(...):
20         Y_i.append(...)
21     a_i,b_i=...
22     a.append(a_i)
23     b.append(b_i)
24
25 ## Moyennes et écart-types des régressions linéaires
26 a_m,u_a=np.average(a),np.std(a,ddof=1)
27 b_m,u_b=np.average(b),np.std(b,ddof=1)
28
29 ## kappa et u_kappa
30 kappa=np.exp(b_m)
31 u_kappa=kappa*u_b
32
33 ## Affichage
34 print('kappa=',kappa,'u_kappa=',u_kappa)
35 print('beta=',a_m,'u_beta=',u_a)

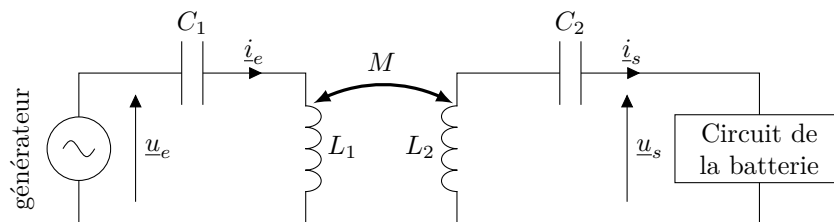
```

**Q15.** Compléter les lignes 19 à 21 en utilisant les informations figurant dans les données, en fin de sujet. Justifier les lignes 30 et 31 donnant la moyenne et l'écart-type du paramètre  $\kappa$ .

## II – Couplage magnétique

Le transfert d'énergie peut être réalisé par couplage magnétique, c'est-à-dire par inductance mutuelle. De nombreux dispositifs de rechargement sans fil utilisent cette technologie, que ce soit pour recharger des batteries d'objets mobiles ou plus particulièrement quand il faut éviter tout contact électrique, en milieu humide notamment, dans le cas de brosses à dents électriques par exemple.

Le générateur et la batterie à recharger sont couplées par deux bobines, la bobine primaire du côté du générateur et la bobine secondaire du côté de la batterie. On note respectivement  $L_1$  et  $L_2$  les inductances propres des bobines primaire et secondaire et  $M$  l'inductance mutuelle entre ces bobines (figure 7). On suppose que le coefficient de couplage est positif avec les orientations choisies. Le coefficient de couplage est  $\eta = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ . On prendra  $L_1 = 50 \mu\text{H}$ ,  $L_2 = 30 \mu\text{H}$  et  $\eta = 0,7$ , sous une fréquence  $f = 120 \text{ kHz}$ . Le générateur délivre la tension efficace  $U_{e,\text{eff}} = 9 \text{ V}$ .



**Figure 7** – Couplage magnétique.

**Q16.** Établir deux relations entre les grandeurs  $u_e$ ,  $u_s$ ,  $i_e$ ,  $i_s$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $M$  et  $\omega$ , traduisant le couplage magnétique entre les deux circuits. Les capacités  $C_1$  et  $C_2$  sont choisies de telle sorte que  $L_1 C_1 \omega^2 = L_2 C_2 \omega^2 = 1$  (cas idéal). En déduire une simplification des relations précédentes. Quel est le rôle des condensateurs ? Calculer  $C_1$ .

On considère que le circuit de la batterie est équivalent à une résistance  $R = 10 \Omega$ .

**Q17.** Représenter, dans un diagramme de Fresnel où l'intensité  $i_e$  forme la référence des phases, les quatre grandeurs  $i_e$ ,  $u_e$ ,  $u_s$  et  $i_s$  dans le cas des relations simplifiées de la question précédente. Quelle est la puissance  $P$  transférée à la batterie ?

**Q18.** On a pris  $C_1 = 40 \text{ nF}$ . Comment est modifié le diagramme de Fresnel précédent ? Si  $U_{e,\text{eff}}$  est fixée à la même valeur que dans le cas idéal, évaluer la variation de puissance transférée.

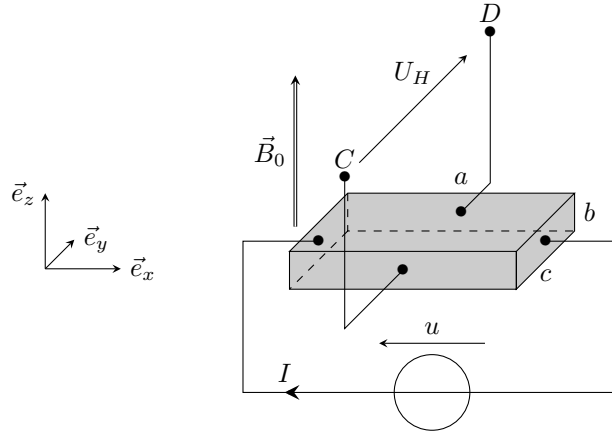
## Partie C – Mesures de puissances

La mesure de puissances électriques nécessite d'effectuer une opération non linéaire sur l'intensité  $i$  et la tension  $u$ , le produit  $u \times i$  de ces deux grandeurs. Nous allons étudier différentes méthodes utilisées pour réaliser cette multiplication.

### I – Multiplicateur à effet Hall

Une plaquette constituée d'un semi-conducteur, l'arséniure d'indium InAs, a la forme d'un parallélépipède de dimensions  $a \times b \times c$ . L'arséniure d'indium est un conducteur électrique mais n'a pas de propriétés magnétiques particulières, sa perméabilité magnétique relative est  $\mu_r(\text{InAs}) = 1$ . On donne  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 3 \text{ mm}$  et  $c = 0,5 \text{ mm}$ .

La plaquette est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  uniforme et constant orienté selon l'axe  $Oz$  (figure 8). On applique entre deux de ses faces une tension  $u$  créant une intensité  $I$  qui traverse la plaquette. On néglige le champ magnétique créé par le courant circulant dans la plaquette. Le semi-conducteur possède des porteurs de charge libres, de deux variétés différentes, indicées par  $i = \{1, 2\}$ , de masse  $m_i$ , de charge  $q_i$  et de densité volumique  $n_i$ . Soit  $\vec{E}$  le champ électrique régnant dans la plaquette. Lorsqu'il se déplace, un porteur de charge subit, en plus de la force de Lorentz, une force moyenne  $\vec{f}_i = -\lambda_i \vec{v}_i$  exercée par les charges environnantes, où  $\vec{v}_i$  est la vitesse du porteur de charge libre et  $\lambda_i$  une constante.



**Figure 8** – Plaquette de semi-conducteur

**Q19.** Exprimer la force de Lorentz  $\vec{f}_{L,i}$  subie par un porteur de charge libre de variété  $i$ . En admettant un régime de déplacement stationnaire, exprimer la vitesse  $\vec{v}_{i,s}$  du porteur de charge sous la forme

$$\vec{v}_{i,s} = \mu_i \left( \vec{E} + \vec{v}_{i,s} \wedge \vec{B}_0 \right)$$

où  $\mu_i$  est la mobilité du porteur. Donner la mobilité  $\mu_i$  en fonction de  $q_i$  et  $\lambda_i$ .

Dans l'arséniure d'indium, les porteurs de charge principaux sont les électrons libres, de charge  $-e$ , de mobilité  $\mu_e$ , de densité volumique  $n_e$ . On négligera par la suite toutes les autres variétés de porteurs de charge.

**Q20.** Montrer que l'on peut écrire

$$\vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + K_H \vec{j} \wedge \vec{B}_0 \right)$$

et exprimer  $\gamma$  et  $K_H$  en fonction des paramètres relatifs à l'arséniure d'indium, parmi  $e$ ,  $\mu_e$  et  $n_e$ .

On pose  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$  et  $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$ . Soit  $I$  l'intensité électrique traversant la plaquette selon l'axe  $x$ . La densité de courant  $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$  est supposée uniforme et constante dans la plaquette.

**Q21.** Pour l'arséniure d'indium,  $|K_H| = 9,98 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{C}^{-1}$ . En déduire la densité de porteurs  $n_e$  et la conductivité  $\gamma$ . Comparer cette valeur à celle d'un métal usuel. Pourquoi utilise-t-on un semi-conducteur plutôt qu'un métal ?

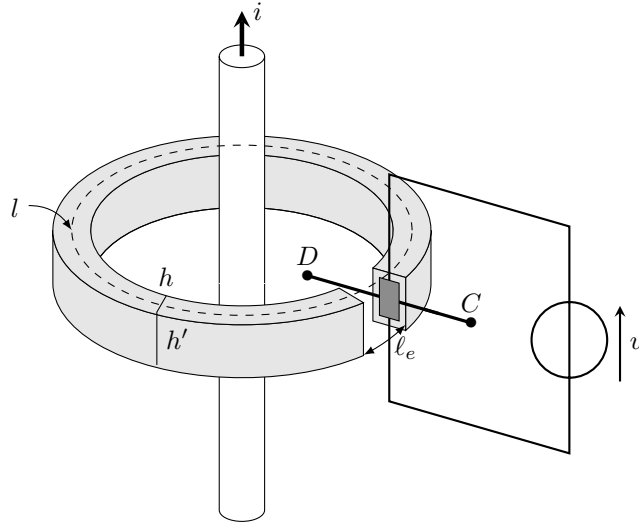
**Q22.** Montrer que  $E_y = K_H B_0 j_x$ . En déduire l'expression de la différence de potentiel  $U_H = V(D) - V(C)$ , dite tension de Hall, en fonction de  $K_H$ ,  $B_0$  et  $I$  et de paramètres géométriques. En déduire la relation

$$U_H = A_H B_0 u$$

et exprimer la constante  $A_H$  en fonction de  $K_H$ ,  $\gamma$  et de constantes géométriques.

La plaquette est insérée dans l'entrefer d'épaisseur  $\ell_e = 2 \text{ mm}$  d'un tore ferromagnétique doux, de perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 10^5$ , de périmètre moyen  $l = 50 \text{ mm}$ , de section rectangulaire  $h \times h'$ , telle que  $l \gg \ell_e$ ,  $l \gg h$  et  $l \gg h'$ . Le tore enlace un fil conducteur rectiligne parcouru par un courant d'intensité  $i$  (figure 9). Le champ magnétique traversant l'entrefer et dans lequel est plongée la plaquette est considéré uniforme.



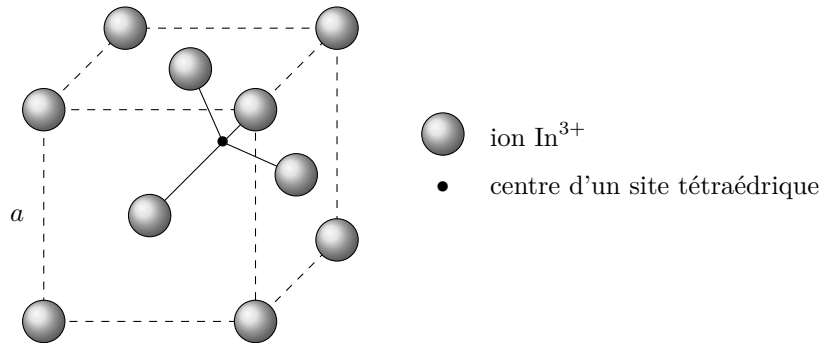


**Figure 9** – Mesure de  $u \times i$ . L'entrefer a été agrandi pour des raisons de clarté.

**Q23.** Montrer que la mesure de la tension  $U_H = V_D - V_C$  permet d'obtenir une valeur proportionnelle au produit  $u \times i$ . Évaluer la constante de proportionnalité notée  $\alpha$ . On peut aussi accéder expérimentalement à cette valeur. Décrire un protocole expérimental qui permettrait de mesurer  $\alpha$ .

## II – Le cristal

L'arséniure d'indium cristallise dans une configuration où les ions indium  $\text{In}^{3+}$  forment un réseau cubique à faces centrées (cfc) tandis que les ions arséniure  $\text{As}^{3-}$  occupent la moitié des sites tétraédriques de la structure cfc.



**Figure 10** – Représentation de la maille de l'arséniure d'indium.  
Par souci de clarté, seuls les ions  $\text{In}^{3+}$  visibles sont représentés.

- Q24.** Donner la population de la maille représentée sur la figure 10. Justifier l'électro-neutralité du cristal. Quelle est la coordinence As-In ?
- Q25.** Déterminer et calculer le paramètre de maille  $a$  en fonction des rayons ioniques  $r_{\text{In}^{3+}}$  et  $r_{\text{As}^{3-}}$ . En déduire l'expression de la masse volumique  $\rho_{\text{InAs}}$  et la calculer.

## III – Multiplicateur numérique à modulation d'amplitude

Il s'agit ici d'étudier un montage dont le schéma est donné figure 11, destiné à calculer le produit d'une tension  $u(t)$  et d'une intensité  $i(t)$ .

Le signal  $u(t)$  est échantillonné selon une période d'échantillonnage  $T_e$ , ce qui renvoie la suite de valeurs :

$$\{u_n = u(nT_e)\}, n \in \mathbb{N}$$

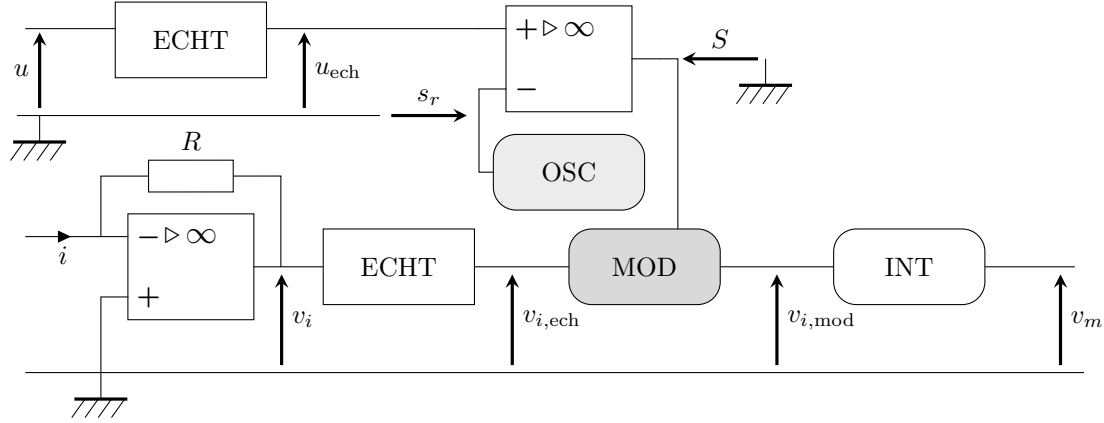
On note  $u_{\text{ech}}(t)$  le signal échantillonné, c'est-à-dire le signal tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e], u_{\text{ech}}(t) = u_n.$$

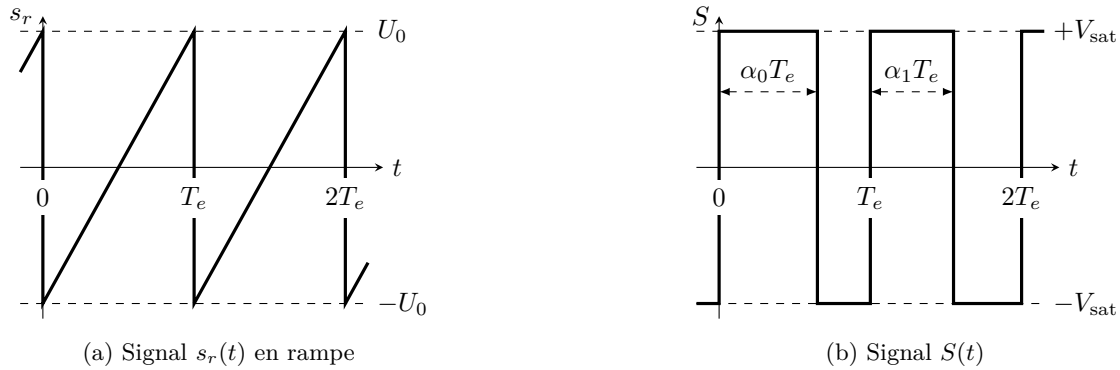
**Q26.** On considère que le spectre du signal  $u(t)$  est contenu dans l'intervalle de fréquence  $[0, F]$ . Rappeler la condition dite de Nyquist-Shannon permettant un échantillonnage satisfaisant de ce signal.

Un oscillateur OSC crée une tension périodique  $s_r(t)$  en rampe, de période  $T_e$ , variant entre les tensions  $-U_0$  et  $+U_0$  (figure 12a) telle que  $\forall t, |u(t)| < U_0$ . Cet oscillateur synchronise les deux échantillonneurs ECHT en imposant les intervalles d'échantillonnage  $[nT_e, (n+1)T_e]$ .

Le signal  $s_r(t)$  est comparé au signal  $u(t)$  grâce à un comparateur simple dont le signal de sortie est noté  $S(t)$  (figure 12b). Les ALI du montage sont idéaux. Les tensions de saturation sont notées  $\pm V_{\text{sat}}$ .



**Figure 11** – Montage multiplicateur numérique. (*ECHT désigne un échantillonneur, MOD le modulateur, INT l'intégrateur et OSC l'oscillateur.*) L'oscillateur synchronise les deux échantillonneurs mais les contacts entre ces circuits ne sont pas représentés.



**Figure 12** – Signaux

**Q27.** On a représenté figure 12b le signal  $S(t)$  sur les deux premiers intervalles de temps  $n = 0$  et  $n = 1$ . Pour chaque intervalle de temps  $[nT_e, (n+1)T_e]$ , la durée pour laquelle  $S(t) > 0$  est notée  $\alpha_n T_e$  où  $\alpha_n$  est le rapport cyclique. Exprimer  $\alpha_n$  en fonction de  $u_n$  et  $U_0$ .

L'intensité  $i(t)$  est appliquée à la seconde entrée du montage de la figure 11.

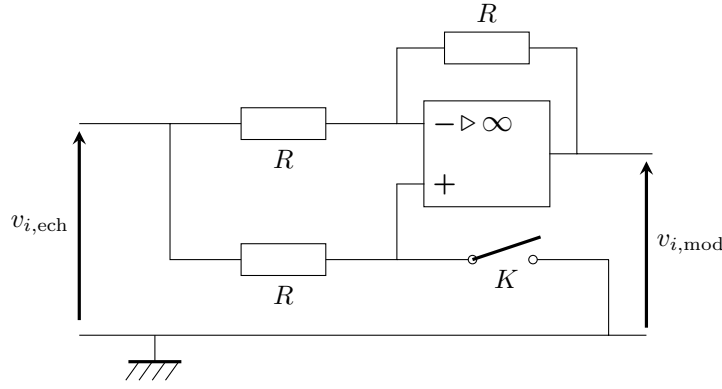
**Q28.** Exprimer la tension  $v_i(t)$  en fonction de  $i(t)$  et  $R$ . Quel est l'intérêt de ce montage ?

La tension  $v_i(t)$  est elle aussi échantillonnée selon les mêmes paramètres que la tension  $u(t)$  ; on obtient en sortie de l'échantillonneur la tension  $v_{i,\text{ech}}(t)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e], v_{i,\text{ech}}(t) = v_{i,n} = v_i(nT_e).$$

Le modulateur, schématisé figure 13, reçoit en entrée  $v_{i,\text{ech}}$ . L'interrupteur  $K$ , idéal, est commandé à l'ouverture et à la fermeture par le signal  $S$  :

$$K \begin{cases} \text{fermé si } S(t) > 0, \\ \text{ouvert si } S(t) < 0. \end{cases}$$



**Figure 13** – Modulateur

**Q29.** Le signal de sortie du modulateur est noté  $v_{i,mod}$ . Exprimer  $v_{i,mod}$  en fonction de  $v_{i,ech}$  selon la valeur du signal de commande  $S$ .

La tension  $v_{i,mod}(t)$  est ensuite intégrée sur un intervalle de longueur  $T_e$ .

**Q30.** Proposer le schéma d'un montage actif intégrant un signal d'entrée  $v_e(t)$  par rapport au temps. Donner l'expression de la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée.

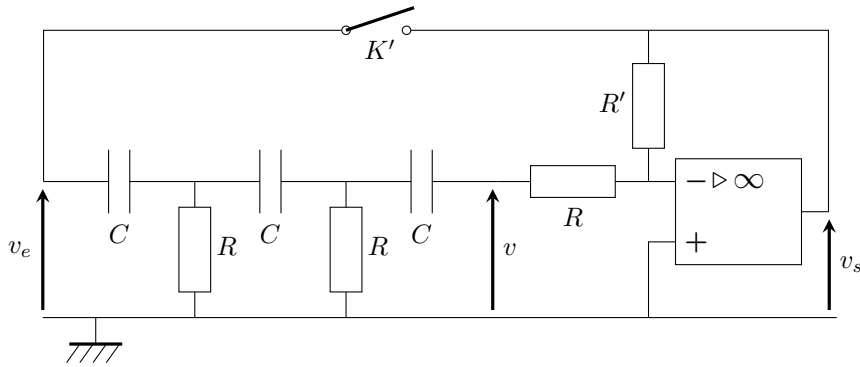
Soit  $v_{i,mod}(t)$  le signal d'entrée de l'intégrateur. Celui-ci fournit en sortie la tension

$$v_m(t) = -\frac{1}{\tau} \int_{nT_e}^t v_{i,mod}(u) du, \text{ pour } t \in ]nT_e, (n+1)T_e].$$

$\tau$  est une constante caractéristique de l'intégrateur, homogène à un temps.

**Q31.** Exprimer  $v_{m,n} = v_m((n+1)T_e)$  en fonction de  $u_n$ ,  $i_n = i(nT_e)$  et des différentes constantes du montage. Montrer que l'on a bien obtenu le résultat voulu à une constante multiplicative près.

Le signal périodique nécessaire au fonctionnement du circuit est généré par un oscillateur. On étudie ici un oscillateur dit « à réseau déphaseur », à trois cellules  $RC$  (figure 14).



**Figure 14** – Oscillateur à réseau déphaseur

La fonction de transfert des trois cellules  $RC$  est donnée par :

$$\underline{H} = \frac{v}{v_e} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(RC\omega)^2} + \frac{1}{jRC\omega} \left( 6 - \frac{1}{(RC\omega)^2} \right)}.$$

**Q32.** Préciser la nature de ce filtre.

**Q33.** Exprimer le gain  $G = \frac{v_s}{v}$  de l'amplificateur. Quand l'interrupteur  $K'$  est fermé, montrer que la tension  $v_s$  peut être sinusoïdale si  $G$  et  $\underline{H}$  vérifient une condition que l'on précisera. En déduire l'expression de la pulsation  $\omega_{osc}$  du signal  $v_s$  ainsi que la valeur numérique de  $G$ .

On pose  $v_s = A_{\text{osc}} \cos(\omega_{\text{osc}} t + \varphi_{\text{osc}})$ . Dans le circuit présenté figure 14, aucun paramètre ne permet de contrôler l'amplitude  $A_{\text{osc}}$ . Pour pallier ce problème, la résistance  $R'$  est remplacée par une résistance  $R_{\text{com}}$  commandée en tension selon l'une des deux expressions suivantes :

$$1) R_{\text{com}} = R_0 + \frac{r}{1 + \frac{A_{\text{osc}}}{V_0}} \quad 2) R_{\text{com}} = R_0 - \frac{r}{1 + \frac{A_{\text{osc}}}{V_0}},$$

où  $R_0$ ,  $r$  et  $V_0$  sont des constantes positives caractéristiques de la résistance commandée.

**Q34.** Quelle est l'expression de  $R_{\text{com}}$  qui permet de stabiliser les oscillations, et pourquoi ? En particulier, quelle valeur faut-il donner à  $r$  pour obtenir  $A_{\text{osc}} = 7 \text{ V}$  ? On prendra  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_0 = 125 \text{ k}\Omega$  et  $V_0 = 5 \text{ V}$ .

## Partie D – Accumulateur lithium-air

L'énergie électrique nécessaire au fonctionnement d'un dispositif embarqué ou un véhicule doit pouvoir être stockée en grande quantité et de manière réversible. Le stockage électrochimique est une technologie ancienne mais il continue à profiter de recherches importantes. Récemment, une technologie dite lithium-air a montré des avantages indéniables pour la fabrication de batteries de véhicules électriques en particulier parce qu'une des espèces électrochimiques, le dioxygène  $\text{O}_2$ , est apporté gratuitement par l'air.

### I – Stabilité du lithium

On s'intéresse aux réactions entre l'eau et le lithium métallique, selon le pH.

**Q35.** Écrire les deux demi-équations rédox relatives au couples  $\text{Li}^+ / \text{Li}$  et  $\text{H}^+ / \text{H}_2$ . En déduire la réaction bilan d'oxydation du lithium métallique par les ions  $\text{H}^+$ . *L'équation sera ajustée avec deux atomes de lithium.* Exprimer l'enthalpie libre standard de réaction  $\Delta_r G^\circ$  de la réaction précédente en fonction des potentiels standards des deux couples.

**Q36.** En déduire l'expression et la valeur à 298 K de la constante d'équilibre  $K^\circ$ . S'il n'y a pas de blocage cinétique de cette réaction, quelles pourraient en être les conséquences ?

On étudie la possibilité de la réaction précédente en fonction du pH. On suppose que la seule forme oxydée du lithium, à tout pH, est l'ion  $\text{Li}^+$ .

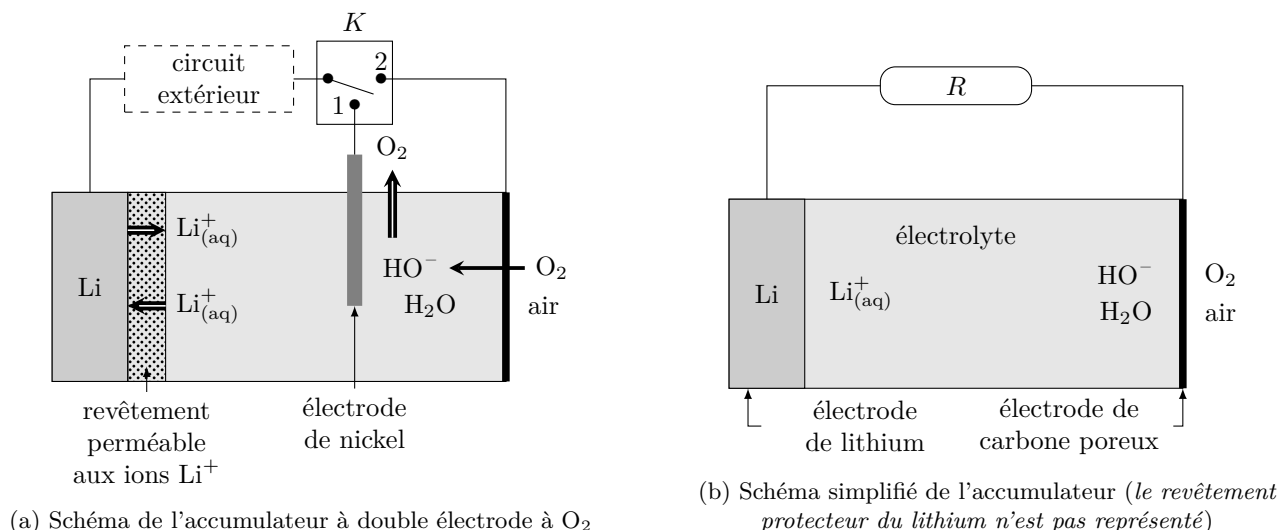
**Q37.** Pourquoi peut-on s'attendre à ce qu'une augmentation du pH défavorise thermodynamiquement l'équation bilan de la question **Q35** ?

**Q38.** Exprimer les potentiels des couples mis en jeu à la question **Q35** en fonction du pH, pour  $p(\text{H}_2) = 1 \text{ bar}$ . On notera  $E_1$  le potentiel du couple du lithium et  $E_2$  celui du couple de l'eau. En déduire l'expression de l'enthalpie libre  $\Delta_r G$  de la réaction bilan en fonction de  $\Delta_r G^\circ$  et du pH. Calculer  $\Delta_r G$  pour  $\text{pH} = 14$  et  $[\text{Li}^+_{\text{(aq)}}] = 1,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $T = 298 \text{ K}$ . La réaction est-elle évitée en milieu basique ?

### II – Fonctionnement de l'accumulateur

On peut utiliser un électrolyte aqueux à condition de protéger le lithium métallique par un revêtement perméable aux ions  $\text{Li}^+$  mais étanche à l'eau et à ses ions (figure 15a). Dans cet accumulateur lithium-air, les couples rédox mis en jeu sont les couples  $\text{Li}^+_{\text{(aq)}} / \text{Li}$  et  $\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$ . Le dioxygène est sous forme dissoute dans l'électrolyte basique.

**Q39.** Écrire l'équation de demi-réaction ayant lieu sur l'électrode de nickel, en milieu basique. Exprimer et calculer le potentiel  $E_{\text{O}_2}$  de cette électrode pour une pression de dioxygène gazeux  $p(\text{O}_2) = 0,2 \text{ bar}$  et à  $\text{pH} = 14$ . Exprimer et calculer le potentiel  $E_{\text{Li}}$  de l'électrode eau lithium pour une concentration  $[\text{Li}^+_{\text{(aq)}}] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . En déduire la fem  $e$  de l'accumulateur dans ces conditions.



**Figure 15** – Schémas de l'accumulateur Li-air

**Q40.** Le schéma simplifié (figure 15b) de l'accumulateur est reproduit sur le document réponse. Compléter le document réponse en indiquant, lorsque l'accumulateur est **en décharge** :

- les polarités des électrodes ( $\pm$ ) ;
- le sens de déplacement des électrons ;
- le sens du courant dans le circuit ;
- la nature des électrodes (anode, cathode) ;
- les réactions ayant lieu sur chacune d'entre elles ;
- le déplacement des ions dans l'électrolyte.

La présence d'ions  $Li^+$  dans la solution basique permet la formation d'un précipité d'hydroxyde de lithium (ou lithine)  $LiOH$ .

**Q41.** Préciser en quel endroit de l'accumulateur (schéma de la figure 15a) le précipité va se former et dans quelle condition (charge ou décharge de l'accumulateur). Quel problème cela peut-il poser ?

On suppose par la suite que le problème précédent est résolu et que le précipité éventuellement formé se dépose au fond de l'accumulateur. Le précipité apparaît quand la concentration en ions  $Li^+$  atteint la valeur  $c_{\max} = 5,25 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ .

**Q42.** Une batterie formée d'une association série de cellules élémentaires Li-air, identiques à l'accumulateur étudié précédemment, équipe un véhicule électrique. À partir des données du tableau 1, estimer la masse maximale de lithine  $LiOH$  qui peut se déposer dans la batterie.

|                                              |                                                         |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Consommation pour 100 km                     | 15 kW · h                                               |
| Tension aux bornes de la batterie            | 400 V                                                   |
| F.e.m. d'une cellule élémentaire Li-air      | 3 V                                                     |
| Densité volumique maximale d'énergie stockée | $W_{\max} = 2,2 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot L^{-1}$ |
| Autonomie maximale du véhicule               | 600 km                                                  |

**Tableau 1** – Caractéristiques d'un véhicule électrique et de sa batterie

Le fonctionnement cyclique de l'accumulateur nécessite une double électrode à  $O_2$ , l'une en carbone poreux à travers laquelle diffuse le dioxygène et l'autre en nickel, qui permet une réaction plus rapide. La commutation entre les deux électrodes est réalisée par l'interrupteur  $K$  (figure 15a).

**Q43.** Est-ce à la charge ou à la décharge de l'accumulateur que l'on a besoin d'une réaction rapide ? Justifier l'intérêt de l'une ou de l'autre électrode selon le fonctionnement de l'accumulateur en charge ou en décharge.

**Q44.** Proposer, sur un schéma simple, une réalisation de l'interrupteur  $K$ , de telle sorte que la commutation entre les deux électrodes soit spontanée.

# Données et formulaire

## Données numériques partie B

|                      |                                                                        |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Permittivité du vide | $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . |
| Perméabilité du vide | $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$            |
| Kilowattheure        | $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$ .            |

## Données numériques partie C

|                                  |                                                                                                                   |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Charge élémentaire               | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$                                                                             |
| Mobilité de l'électron dans AsIn | $\mu_e = -3,3 \text{ U.S.I.}$                                                                                     |
| Rayons ioniques                  | $r_{\text{In}^{3+}} = 80 \text{ pm}$<br>$r_{\text{As}^{3-}} = 160 \text{ pm}$ .                                   |
| Masse molaires                   | $M_{\text{In}} = 114,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$<br>$M_{\text{As}} = 74,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Nombre d'Avogadro                | $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                                                            |

## Données numériques partie D

|                                  |                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Potentiels standard              | $E^\circ(\text{H}^+ / \text{H}_2) = 0 \text{ V}$<br>$E^\circ(\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$<br>$E^\circ(\text{Li}^+_{\text{(aq)}} / \text{Li}) = -3,045 \text{ V}$ |
| Produit ionique de l'eau à 298 K | $K_e = [\text{H}^+][\text{HO}^-] = 10^{-14}$                                                                                                                                           |
| Constante de Nernst à 298 K      | $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,059 \text{ V}$                                                                                                                                      |
| Constante de Faraday             | $\mathcal{F} = 9,6485 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .                                                                                                                   |
| Constante des gaz parfaits       | $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$                                                                                                                        |
| Masse molaire du lithium         | $M_{\text{Li}} = 6,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .                                                                                                                                |
| Masse molaire de l'oxygène       | $M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .                                                                                                                                  |
| Masse molaire de l'hydrogène     | $M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .                                                                                                                                   |

## Spécifications Python

**np.polyfit( $x, y, 1$ )** : renvoie le couple  $(a, b)$  (flottants) où  $a$  est la pente et  $b$  l'ordonnée à l'origine de la droite de régression des points dont les abscisses sont données dans la liste  $x$  et les ordonnées dans la liste  $y$ .

**np.random.uniform( $a, b$ )** : renvoie une valeur aléatoire (flottante) comprise dans l'intervalle  $[a, b]$  selon une loi de probabilité uniforme.

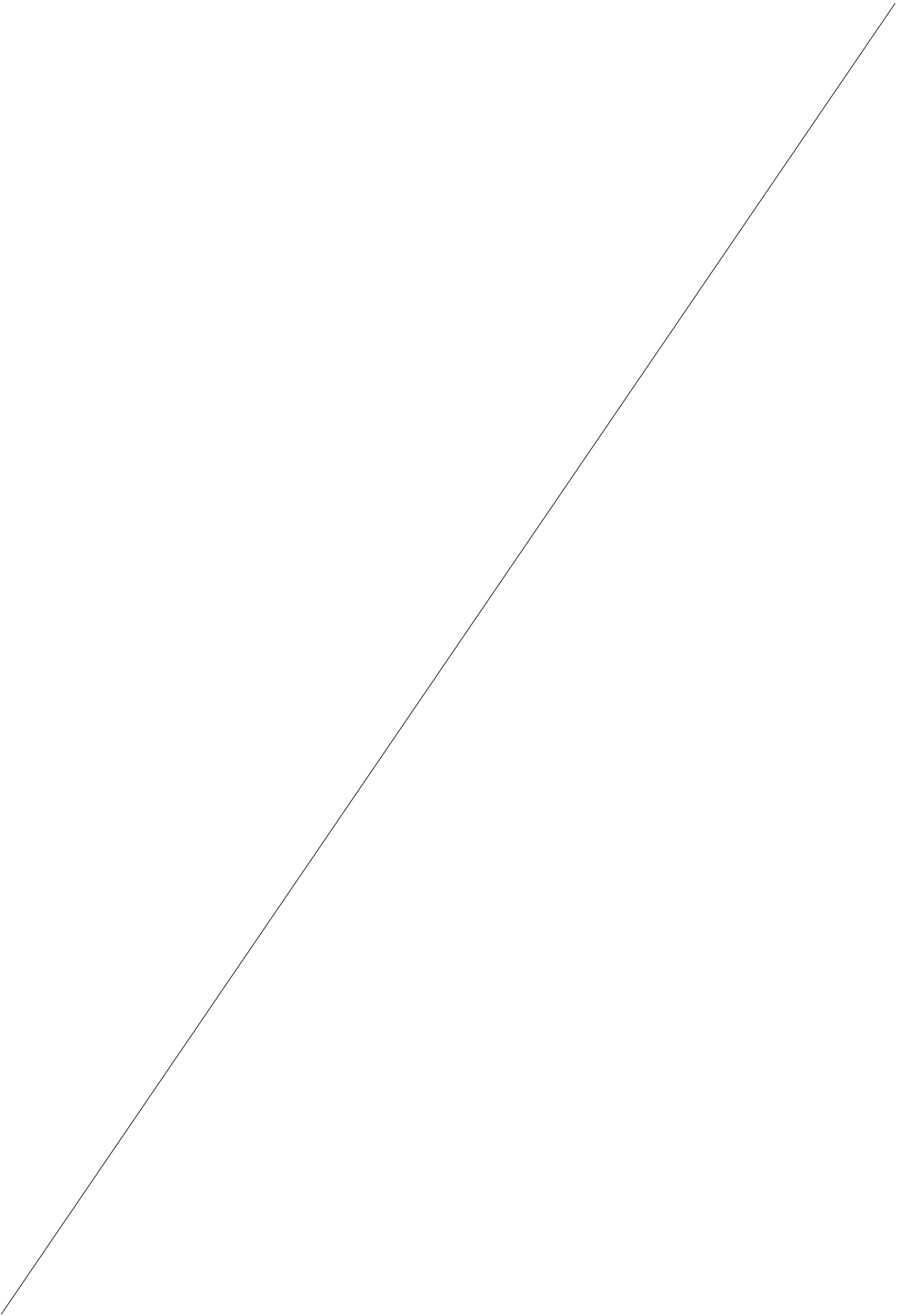
**np.average( $L$ )** : renvoie la moyenne (flottante) des valeurs de la liste (ou du tableau)  $L$ .

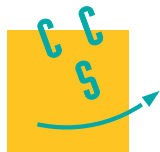
**np.std( $L$ )** : renvoie l'écart-type (flottant) des valeurs de la liste (ou du tableau)  $L$ .

---

◇ Fin ◇

---





Numéro d inscription

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

**Signature**

**Nom**

[illegible]

Prénom

[illegible]

CONCOURS CENTRALE • SUPÉLEC

Épreuve : Physique-chimie 1 PSI

**Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête**

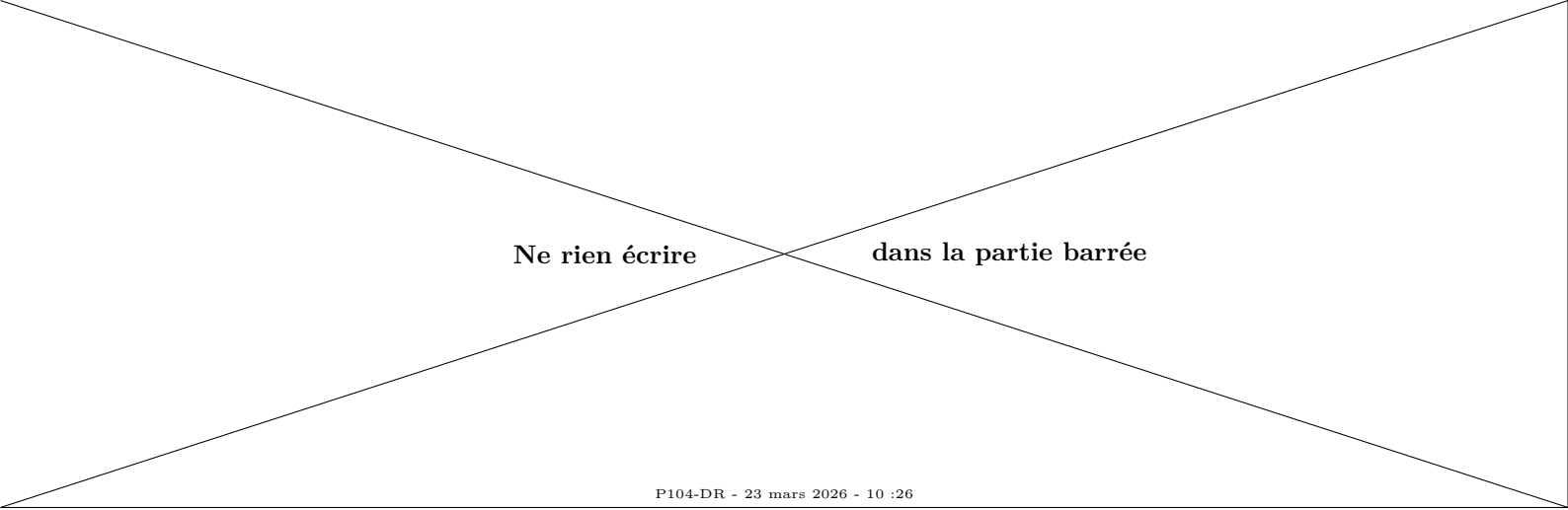
## Feville

|  |  |   |  |  |
|--|--|---|--|--|
|  |  | / |  |  |
|--|--|---|--|--|

## Document réponse

*Les candidats doivent rendre ce document réponse avec leur copie, même s'ils ne l'ont pas utilisé*





Q11.

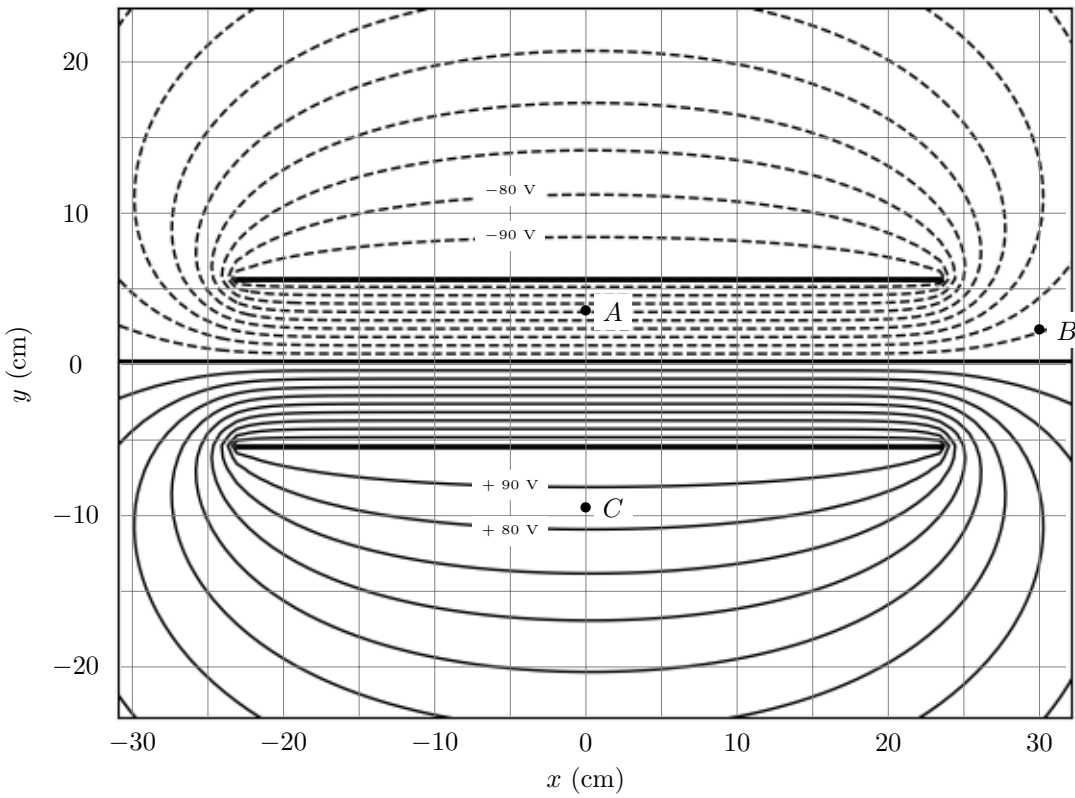


FIGURE 5 – Topographie des équipotentiels entre les armatures d’un condensateur plan pour  $d = 11\text{ cm}$  et  $\ell = 48\text{ cm}$ . En trait plein les équipotentiels positives, en pointillés les équipotentiels négatives. Deux équipotentiels voisines sont séparées de  $10\text{ V}$ .

Q40.

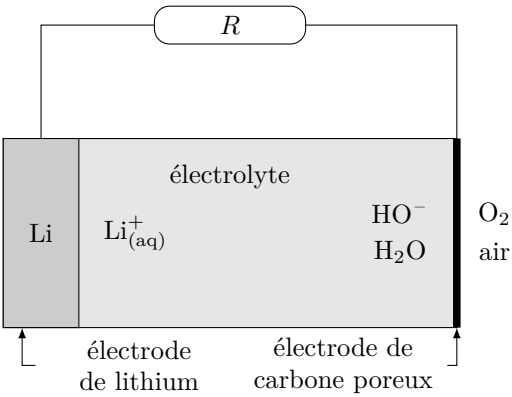


FIGURE 15 – Schéma simplifié de l’accumulateur (le revêtement protecteur du lithium n’est pas représenté)

