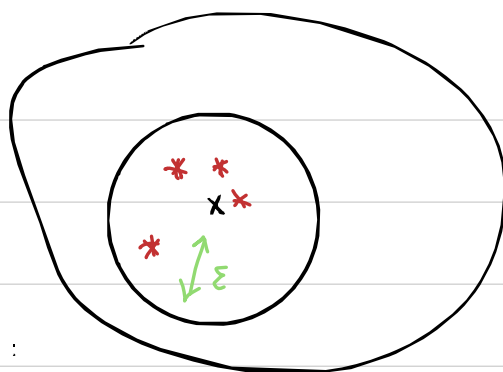


Densité



Pour montrer $\forall x \in E, P(x)$:

$$A = \{x \in E : P(x)\} \xrightarrow{\exists D \subseteq A, D \text{ dense dans } E} A \text{ fermé} \rightarrow E = \bar{D} \subseteq A: \text{win!}$$

Pour montrer que D est dense:

$$\begin{aligned} \uparrow & D \text{ dense dans } E \\ & \forall x \in E \exists (x_m) \in D^{\mathbb{N}} \quad x = \lim x_m \\ & \bar{D} = E \\ \downarrow & \forall \text{ boule ouverte } B \neq \emptyset \text{ de } D, B \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

Ensembles denses:

$\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^m$ dans $\mathbb{R}^m$

Les fct polynômiales dans $\mathcal{C}(I, K)$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$

Les fct en escaliers dans $\mathcal{E}_{pm}(I, K)$

$GL_m(K)$ dans $M_m(K)$

Les matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ dans $M_m(\mathbb{C})$

Techn:

Cont sur $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\text{Heine}} \text{Uniformément cont sur } [\alpha, \beta] \rightarrow \exists \text{ une subdivision de } [\alpha, \beta] \text{ sur laquelle on contrôle } f.$
(approx uniforme par des fct en escaliers)

Cont sur $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\text{S-W}} \exists \text{ une suite de polynôme } P_n \text{ tq } P_n \xrightarrow{u} f$
i.e. $|P_n(x) - f(x)| \leq \|P_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \leq \varepsilon$

Exples

$\forall A, B \in M_m(K), X_{AB} = X_{BA}$

Montrons la sur $GL_m(K)$. Soit $\varphi_B: A \mapsto X_{AB} - X_{BA}$

φ_B est nulle sur $GL_m(K)$ (cf déf de X_n)

φ_B est de plus continue sur $GL_m(K)$ car polynômiale.

Par densité, il existe une suite (A_n) de matrices inversibles telle que

$$\lim A_n = A \in M_m(K)$$

Par continuité il vient $\lim \underbrace{\varphi_B(A_n)}_{=0} = \varphi_B(A)$

Par unicité de la limite: $\forall A, B \in M_m(K) \quad \varphi_B(A) = 0$
d'où le résultat.

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\alpha}^{\beta} f(x) x^n dx = 0) \Rightarrow (\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) = 0)$$

Supposons l'hypothèse vraie. Alors par linéarité:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) P(x) dx = 0$$

Soit (P_n) une suite de polynômes convergente vers $\bar{f}$ uniformément sur $[\alpha, \beta]$

$$\text{Alors} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) P_n(x) dx \xrightarrow{\text{cvu}} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx$$

$$\text{Par unicité: } \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx}_{\geq 0, \text{ continue}} = 0$$

Par th. de positivité: $\forall x \in [\alpha, \beta], |f(x)|^2 = 0$, d'où le résultat.

Complément: $GL_m(K)$ dense dans $M_m(K)$?

Soit $A \in M_m(K)$. On définit $A_p := A - \frac{1}{p} I_m$

$A_p \notin GL_m(K)$ équivaut à $\text{Ker } A_p = \{0\}$

équivaut à $0 \in \text{Sp}(A_p)$

équivaut à $\frac{1}{p} \in \text{Sp}(A)$

Au plus m valeurs de p notées $p_1, \dots, p_m$

Pour $p_{\infty} > \max p_i$, $A_{p_{\infty}} \in GL_m(K)$

On construit de la sorte $\varphi(k) = p_{\infty}$ pour chaque p

Si bien que $A \varphi(k) \rightarrow A$ et $A \varphi(k) \in GL_m(K)$

donc $\boxed{GL_m(K) \text{ dense dans } M_m(K)}$