dec 1.

1. Décomposition de Fourier

1.1. Cas d'un signal périodique

c.f. fiche rappel.

1.2. (HP) Transformée de Fourier

Une fonction non périodique peut néanmoins être écrite comme une somme de sinusoïdes (c'est une somme continue et non discrète) Avec des conditions vérifiées pour des signaux physiques, on montre que n'importe quelle fonction peut s'écrire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F_0}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

où $\underline{F_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ que l'on appelle « Transformée de Fourier de f ».

⚠ il existe des variantes ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ dans chaque formule et/ou la variable $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ fréquence au lieu de la pulsation)

En électricité, les signaux $f(t)$ sont à valeurs réelles. On montre alors que $\underline{F_0}(-\omega)$ est le conjugué de $\underline{F_0}(\omega)$

et donc $f(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}e \int_0^{+\infty} \underline{F_0}(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt$

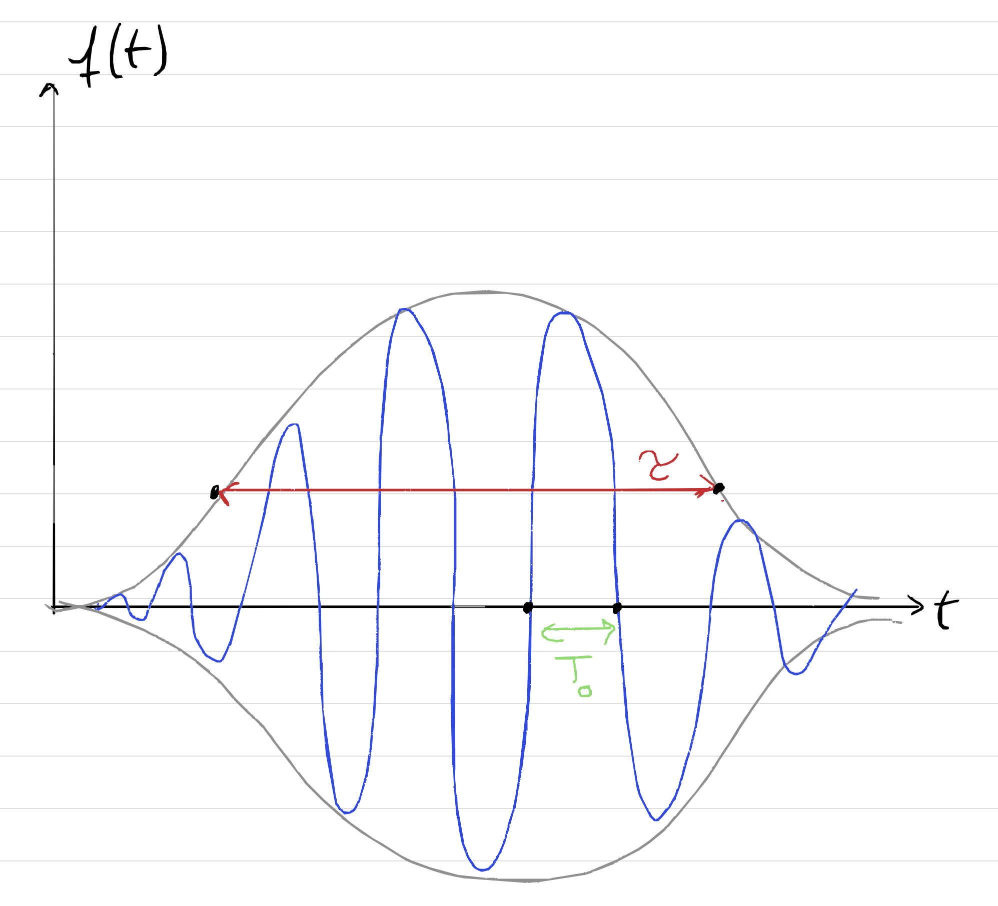
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} F_0(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))\, d\omega$$

avec $\varphi(\omega) = \arg \underline{F_0}(\omega)$

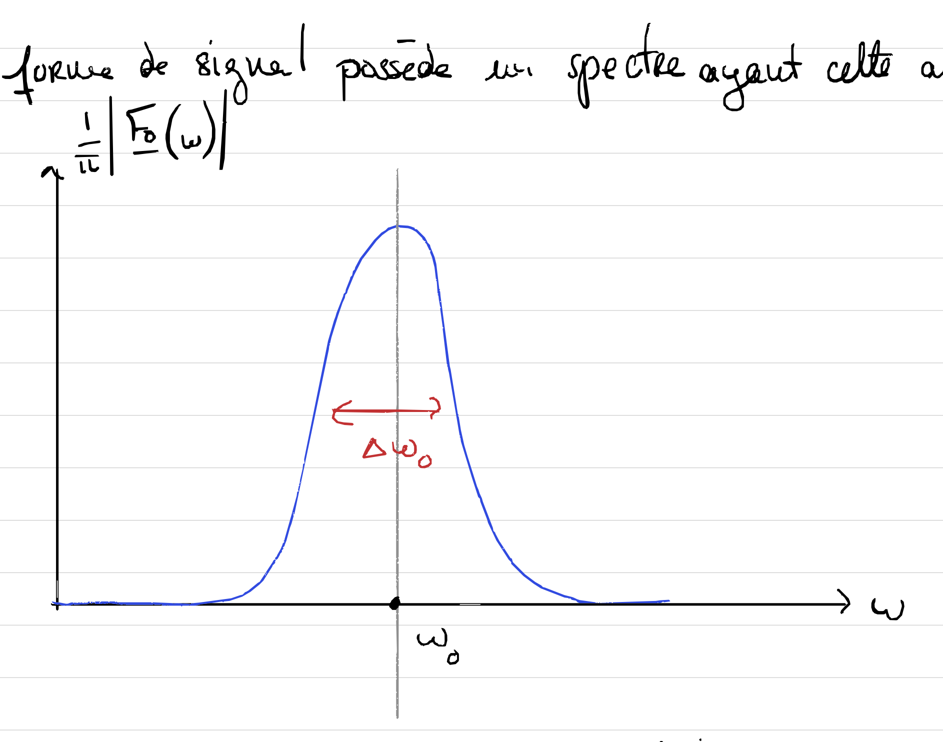
Avec cette forme, on voit que $f(t)$ est la somme de sinusoïdes dont la pulsation ω varie de 0 à $+\infty$.

Le spectre en amplitude de $f(t)$ est le tracé de $\frac{1}{\pi}|\underline{F_0}(\omega)|$ en fonction de ω.
C'est en général une fonction continue (vs une série de pics)

__exemple__ Cas d'un « paquet d'ondes » (utilisé pour l'étude des ondes)



Cette forme de signal possède un spectre ayant cette allure.



Si $\Delta\omega_0 \to 0$, le spectre est un pic infiniment fin en ω_0. C'est normal car la fonction est alors une « vraie » sinusoïde.

2. Action d'un fitre linéaire

2.1. Définition
2.2. Effet sur un signal sinusoïdal
2.3. Notation complexe
2.4. Fonction de transfert
2.5 Effet sur un signal périodique

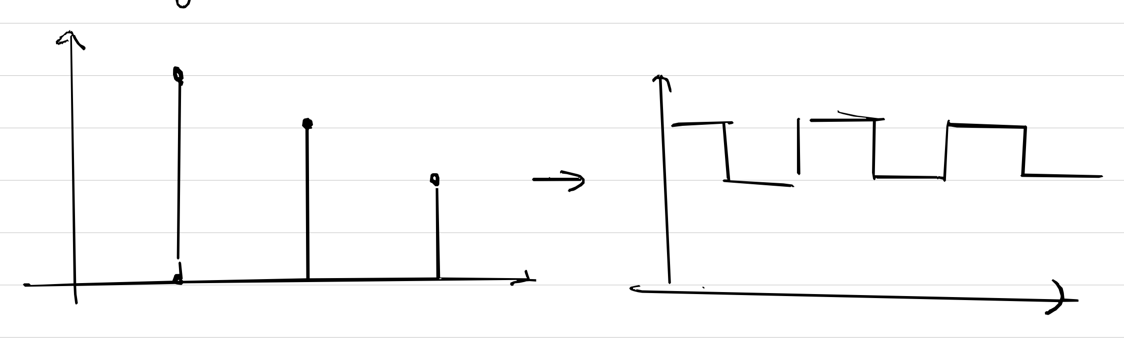
c.f. fiche rappels.

2.6. Exemple

But: obtenir un signal sinusoïdal de même fréquence qu'un signal créneaux.

Idée: utiliser un filtre ne laissant passer que le fondamental et coupant les harmoniques.

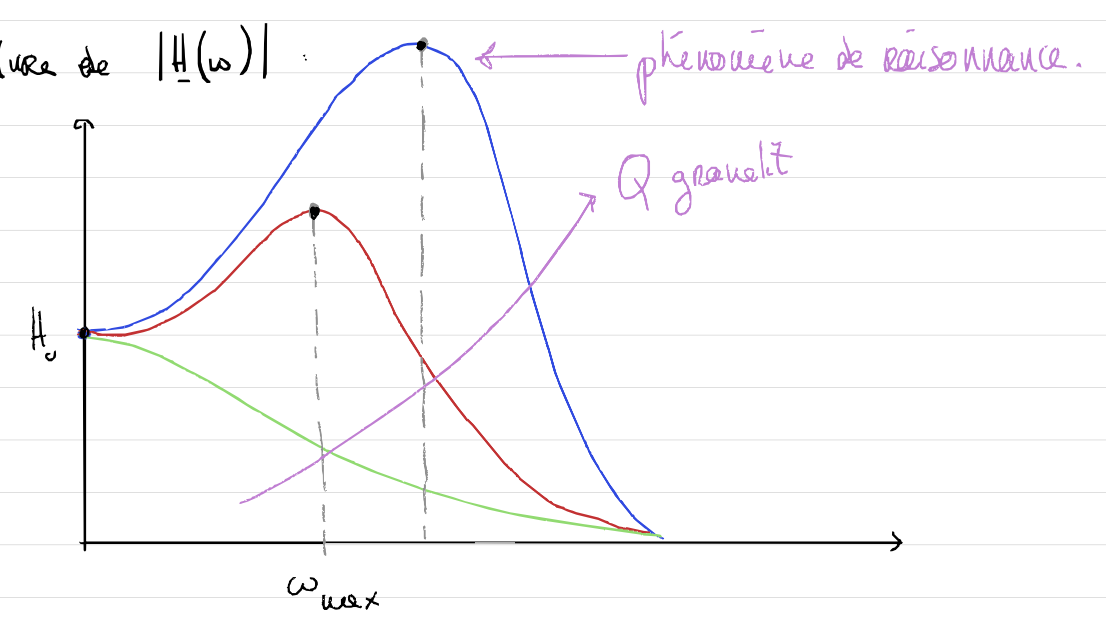
Spectre du signal créneaux:



→ utilisation d'un filtre passe-bas ordre 2 plus efficace que ordre 1 car il couperait mieux les hautes fréquences.

__rappel__ forme canonique $\underline{H}(\omega) = \dfrac{H_0}{1 + \frac{1}{Q}\frac{j\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

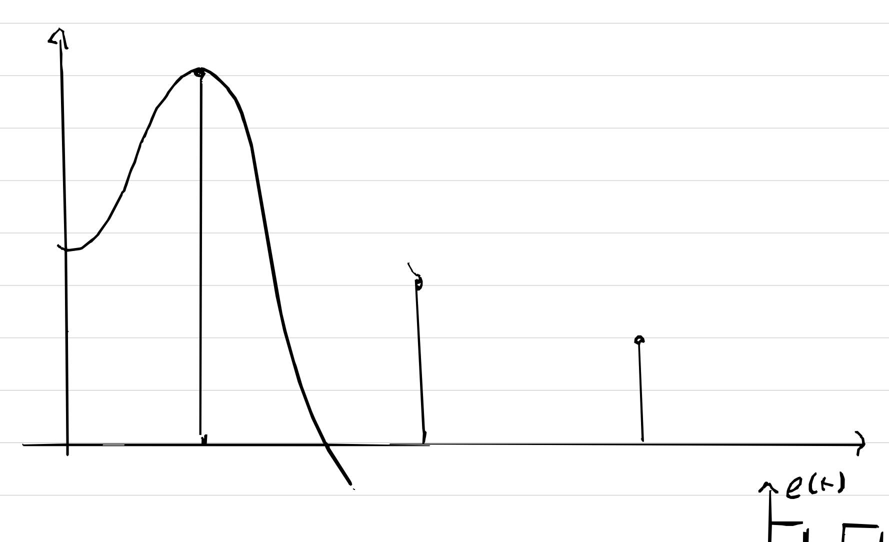
Allure de $|\underline{H}(\omega)|$:

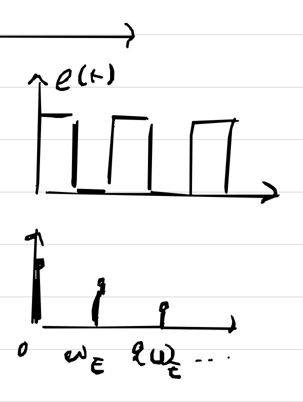


On montre que $\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Le fitre est caractérisé par (H_0, ω_0, Q). On a intérêt à amplifier fortement le fondamental donc $\omega_0 \simeq \omega_e$ et $Q \gg 1$

Dans ce cas $|\underline{H}(\omega_e)| \simeq QH_0$ et $|\underline{H}(3\omega_e)| \simeq \frac{H_0}{8} \ll QH_0$.





Si le créneaux possède une composante continue, et que l'on veut s'en débarrasser, on prend un passe bande (au minimum d'ordre 2):

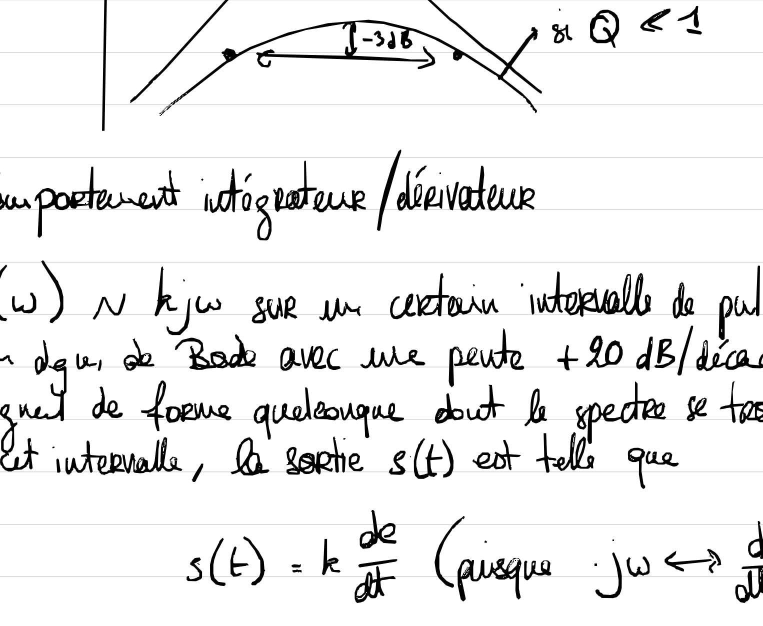
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_{max}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Il faut alors: $Q > 1$ (pour atténuer les harmoniques) et $\omega_0 \simeq \omega_E$ (pour laisser passer au mieux le fondamental)

La composante continue est automatiquement coupée car $\underline{H}(0) \to 0$.

__rappel__ On montre que $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (largeur de la bande passante à -3 dB)

Allure du diagramme de Bode en amplitude:



2.7. Comportement intégrateur/dérivateur

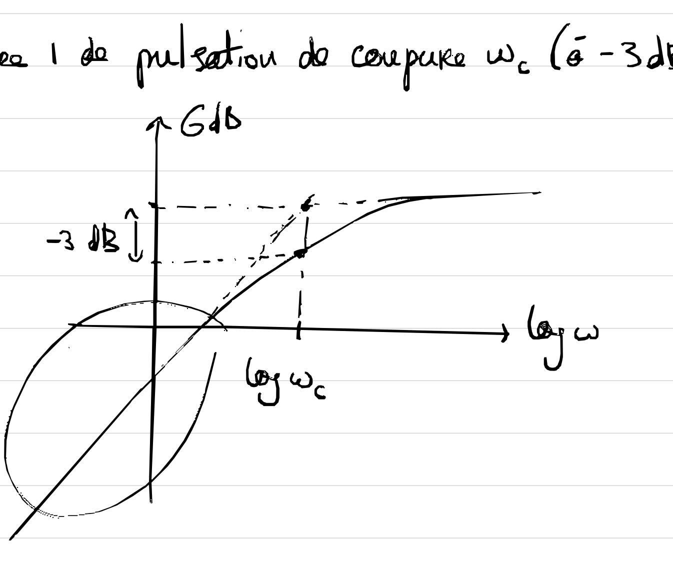
Si $\underline{H}(\omega) \sim kj\omega$ sur un certain intervalle de pulsation (repérable sur un dgm de Bode avec une pente $+20$ dB/décade), alors pour un signal de forme quelconque dont le spectre se trouve essentiellement dans cet intervalle, la sortie $s(t)$ est telle que

$$s(t) = k\frac{de}{dt} \quad \left(\text{puisque } j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}\right)$$

i.e. le filtre se comporte comme un dérivateur

__exemple__ Pour un passe-haut d'ordre 1 de pulsation de coupure ω_c (à -3dB)

$\underline{H}(\omega) = \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_c} H_\infty}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ et



Et dans la zone entourée (si $\omega \ll \omega_c$):

$\underline{H}(\omega) \simeq j\frac{\omega}{\omega_c} H_\infty$

$\Rightarrow s(t) \simeq \frac{H_\infty}{\omega_c}\frac{de}{dt}$

De même si $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{k'}{j\omega}$, on a un comportement d'intégrateur.

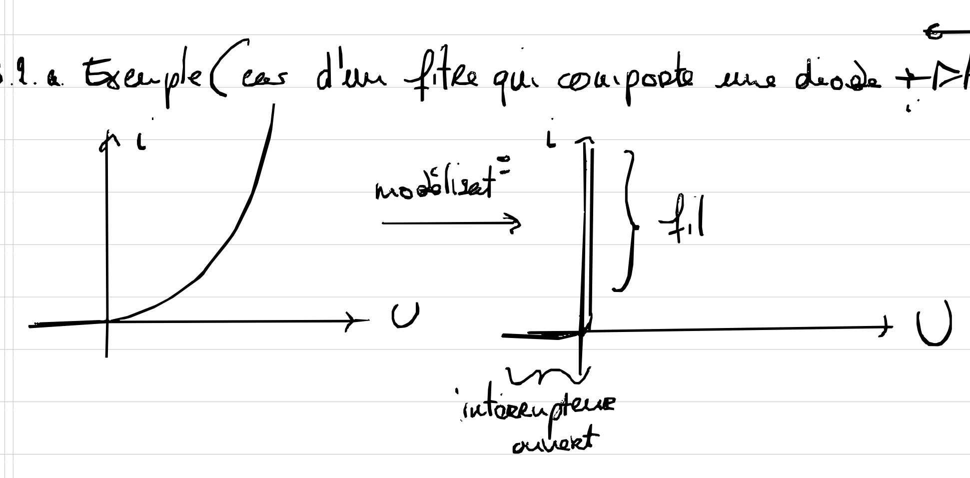
et dans ce cas pour un créneaux, il sort une fonction triangle.

3. Cas des filtres non linéaires.

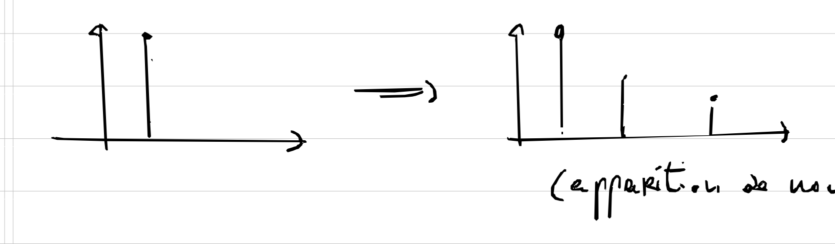
3.1. Apparition de nouvelles fréquences.

Si le spectre du signal de sortie contient une ou des fréquences absentes dans le spectre du signal d'entrée, alors le filtre est non linéaire ou non invariant (rare).

3.1.a. Exemple (cas d'un fitre qui comporte une diode $\overset{U}{\longleftarrow}$)



3.1.b. Exemple (cas d'un amplificateur qui sature)



(apparition de nouvelles harmoniques).