Élec 2. Electronique Numérique

intro Signal analogique : fonction continue du temps à valeurs dans $\mathbb{R}$
Signal numérique : succession de bits (0 ou 1)

Numérisation d'un signal : conversion d'un signal analogique en un signal numérique. Elle est effectuée par un CAN (Convertisseur Analogique Numérique). Quelque soit la technologie, ce convertisseur possède deux étapes distinctes : l'échantillonnage et la quantification.

Echantillonnage : on discrétise l'axe des temps
Quantification : on discrétise l'axe des ordonnées.

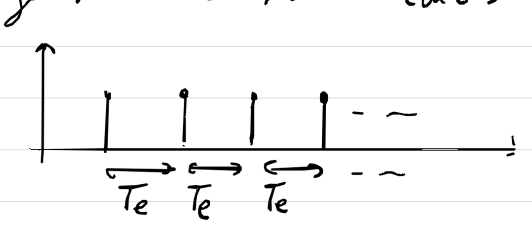
1. Echantillonnage

1.1. Principe

On prélève à intervalle de temps régulier la valeur du signal. (tous les T_e : période d'échantillonnage).

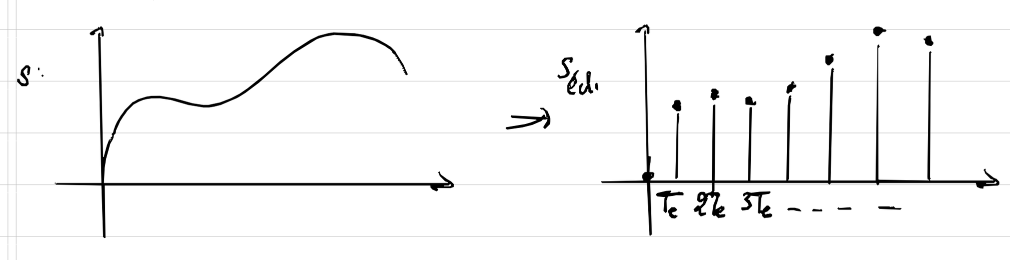
On passe d'une fonction continue $s(t)$ à une suite $(s(nT_e))_{n \geq 0}$.
Ce passage peut être représenté par la multiplication de $s(t)$ par un signal d'échantillonnage noté $e_c(t)$, i.e. $s_{éch}(t) = s(t)\, e_c(t)$.

Allure de $e_c(t)$:



suite de pics infiniments fins de même hauteur espacés de T_e (peigne de Dirac)

Si bien que :



Pbm Cette étape d'échantillonnage va-t-elle induire une perte d'informations ?

Dans le cas général : oui, mais on va pouvoir recréer en théorie parfaitement le signal $s(t)$ à partir de $s_{éch}(t)$ dès lors que le spectre de $s(t)$ et $f_{éch}$ (fréquence d'échantillonnage) vérifient une certaine condition que l'on va démontrer.

1.2. Spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné

On commence par échantillonner un signal sinusoïdal $s(t) = A\cos(\omega_s t + \varphi)$

e_c est périodique donc décomposable en somme discrète de sinusoïdes :

$$e_c(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

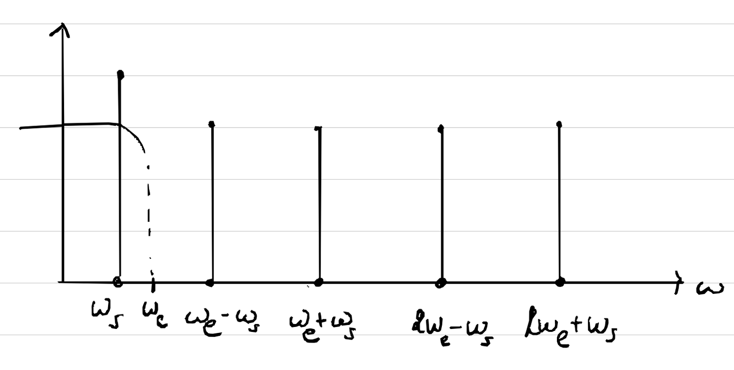
On montre que $\forall i,j\ k_i = k_j$, ce qui veut dire que dire que le spectre d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac.

D'où $s_{éch}(t) = e_c(t)\, s(t) = \left(e_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k_n \cos(n\omega_c + \varphi_n)\right) . A\cos(\omega_s t + \varphi)$

$= e_0 A\cos(\omega_s t + \varphi) + \sum_{k=1}^{+\infty} A k \cos(n\omega_c + \varphi_n)\cos(\omega_s t + \varphi)$

$= e_0 A\cos(\omega_s t + \varphi) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Ak}{2}\cos\left((n\omega_c + \omega_s)t + (\varphi_n + \varphi)\right) + \frac{Ak}{2}\cos\left((n\omega_c - \omega_s)t + (\varphi_n - \varphi)\right)$

Allure du spectre de $s_{éch}$:



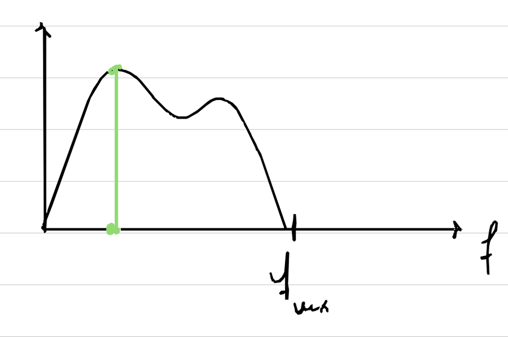
On peut recréer le signal d'origine(*) en faisant passer $s_{éch}(t)$ dans un filtre passe bas de pulsation de coupure supérieure à ω_s et inférieure aux autres pulsations, et d'ordre le plus élevé possible afin d'éliminer au mieux les pulsations autres que ω_s.

Ceci est possible si $\omega_e - \omega_s > \omega_s$ de sorte qu'il existe ω_c tel que $\omega_s < \omega_c < \omega_e - \omega_s$
(i.e. $\omega_e > 2\omega_s$).

(*) à un facteur multiplicatif près.

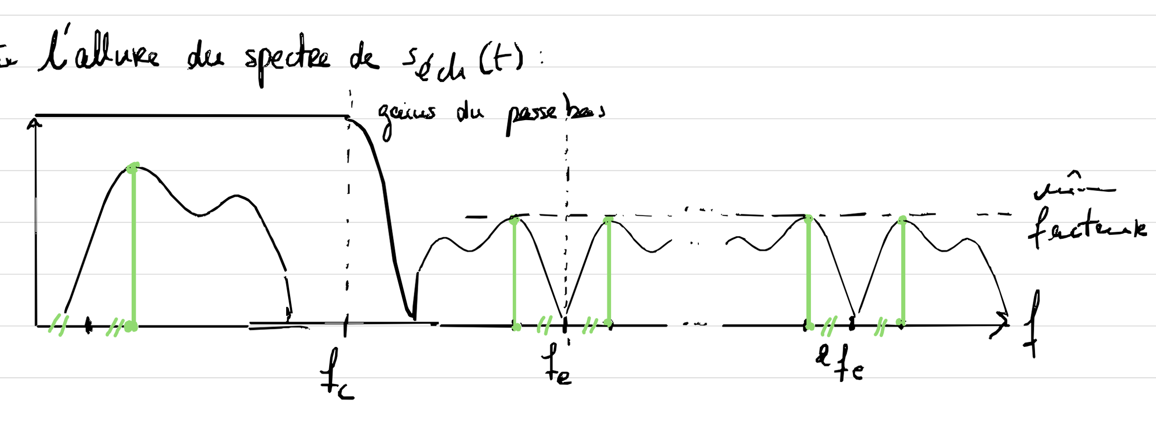
1.3. Cas général

On souhaite échantillonner un signal $s(t)$ dont le spectre contient des fréquences de 0 à f_{max} :



Alors $s(t)$ peut s'écrire comme somme (continue ou discrète) de sinusoïdes de fréquence f entre 0 et f_{max}. On peut appliquer les calculs de 1.2. pour chacune de ces sinusoïdes.

D'où l'allure du spectre de $s_{éch}(t)$:

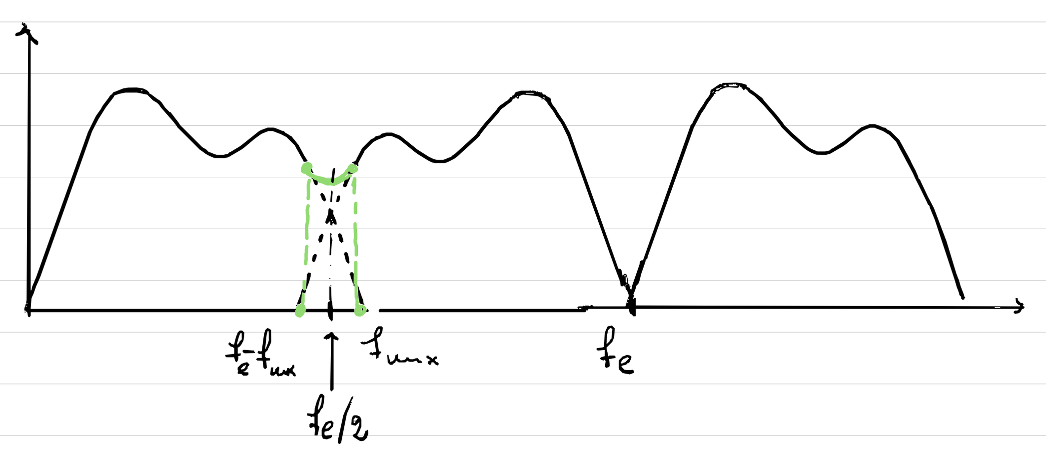


On peut retrouver le spectre de $s(t)$ et donc recréer le signal $s(t)$ grâce à un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c telle que $f_{max} < f_c < f_e - f_{max}$

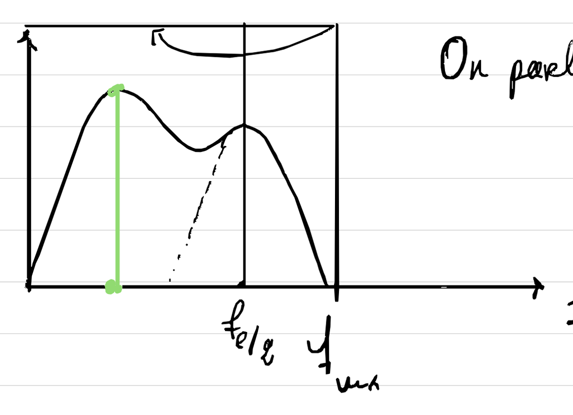
c/c) Pour que l'échantillonnage d'un signal ne fasse pas perdre d'information, il faut et il suffit que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la fréquence maximale présente dans le spectre du signal

[critère de <u>Nyquist-Shannon</u>]

Si ce critère n'est pas respecté.



Dans l'intervalle $f_e - f_{max}$ à $f_e/2$, le spectre de $s_{éch}(t)$ est celui de $s(t)$ auquel on ajoute la partie de $f_e/2$ à f_{max} mais "repliée" en $f_e/2$. Impossible alors de recréer $s(t)$.



On parle de "repliement de spectre"

Pour éviter le repliement de spectre, il faut faire deux prélèvements de la valeur du signal par la période la plus petite présente dans le spectre du signal.

1.4. Précautions à prendre

Avant un échantillonnage à la fréquence f_e, il est conseillé de faire passer le signal par un filtre passe bas de fréquence par un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c \simeq f_e/2$ pour éviter le repliement de spectre.

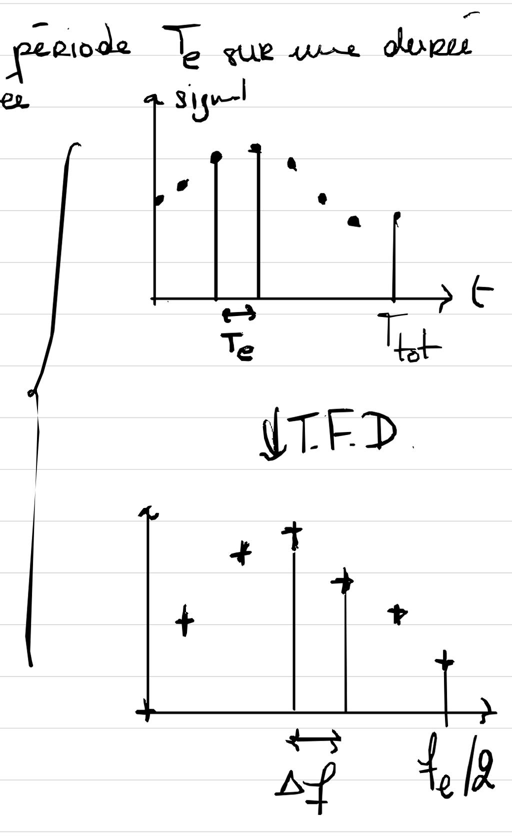
1.5. Résolution spectrale

Une fois le signal échantillonné, on peut déterminer son spectre en calculant sa transformée de Fourier discrète.

Rem Si il y a N échantillons, la complexité de la T.F.D. est en $O(N^2)$ pour l'algorithme naïf, $O(n\log n)$ pour la F.F.T.

Si l'échantillonnage se fait avec une période T_e sur une durée totale T_{tot}, Alors la T.F.D. est calculée par des fréquences multiples de $\Delta f = \frac{1}{T_{tot}}$

Donc la résolution spectrale (plus petit écart en fréquence du signal est égal à l'inverse de la durée totale du signal)



2. Quantification (hors-programme)

c.f. fiche de cours.

3. Filtrage numérique

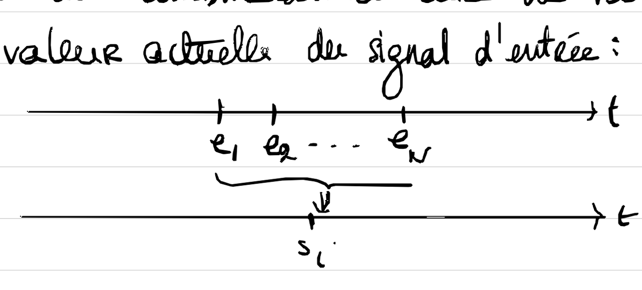
Une fois échantillonné, le signal d'entrée est une suite de N valeurs notées $e_1 \dots e_N$.

Le signal de sortie est déduit d'une formule mathématique utilisant les valeurs du signal d'entrée. Comment reproduire alors un filtrage analogique donné ? On a pour cela les filtres FIR (non récursifs) et IIR (récursifs).

3.1. Filtres non récursifs

Le signal de sortie est une combinaison linéaire des valeurs antérieures et de la valeur actuelle du signal d'entrée :

$$s_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j e_{i-j}$$



Un filtre FIR très utilisé est la « moyenne glissante » où le signal de sortie est la moyenne des Π dernières valeurs de l'entrée :

$$s_i = \frac{1}{\Pi}\sum_{j=0}^{\Pi-1} e_{i-j}$$

Cela permet de lisser un signal (joue le rôle d'un filtre passe-bas)

3.2. Filtres récursifs

Le signal de sortie est une combinaison linéaire des valeurs antérieures et de la valeur actuelle du signal d'entrée et de plusieurs valeurs antérieures du signal de sortie :

$$s_i = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j e_{i-j} + \sum_{j=0}^{q} \mu_j s_{i-j}$$

⚠ risque de divergence.