

# Définitions de Nouvelles Règles.

def. Soit  $S$  un système de preuve. On définit les arbres de preuve par induction :

(i) Si une règle de  $S$  est un axiome de la forme  $\frac{}{\Gamma \vdash \varphi} R$ , Alors  $\frac{}{\Gamma \vdash \varphi} R$  est un arbre de preuve dont la conclusion est  $\Gamma \vdash \varphi$ .

(ii) Pour toute règle du système de preuve qui n'est pas un axiome, de la forme :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \dots \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi} R$$

et si on peut construire inductivement les arbres de preuves  $(A_i)$  et les conclusions respectives  $(\Gamma_i \vdash \varphi_i)$  isien, alors

$$\frac{A_1 \dots A_n}{\Gamma \vdash \varphi} R$$

est un arbre de preuve de conclusion  $\Gamma \vdash \varphi$ .

Dans la suite, on notera dans un raisonnement : «  $\Gamma \vdash \varphi$  » le fait qu'il existe un arbre de preuve dont la conclusion est  $\Gamma \vdash \varphi$ .

exple On va montrer qu'on peut ajouter  $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ aff}$  à la déduction naturelle. En particulier on va montrer que si on peut construire un arbre de preuve dont la conclusion est  $\Gamma \vdash A$ , alors on peut construire un arbre de preuve dont la conclusion est  $\Gamma, B \vdash A$ .

Supposons qu'on peut construire un arbre de preuve  $T$  de conclusion  $\Gamma \vdash A$ . On raisonne par induction sur  $T$ .

Cas de base: Si  $T$  est de la forme  $\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{ ax}$ , Alors on a eu le droit d'appliquer la règle ax, et donc  $A \in \Gamma$ . Dans ce cas, l'arbre de preuve  $\frac{}{\Gamma, B \vdash A} \text{ ax}$  est valide car  $A \in \Gamma, B = \Gamma \cup \{B\}$ .

①

Cas inductif:  $\frac{\Gamma \vdash A_1 \quad \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2} \wedge_i$

\* Si  $T = \frac{}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2} \wedge_i$  (avec  $A = A_1 \wedge A_2$ )

On dispose de deux arbres  $T_1, T_2$  de conclusions respectives  $\Gamma \vdash A_1$  et  $\Gamma \vdash A_2$ . Par hypothèse d'induction on dispose de  $T'_1$  et  $T'_2$  de conclusions respectives  $\Gamma, B \vdash A_1$  et  $\Gamma, B \vdash A_2$ . On a alors:

$$\frac{\Gamma, B \vdash A_1 \quad \Gamma, B \vdash A_2}{\Gamma, B \vdash A_1 \wedge A_2} \wedge_i$$

\* Si  $T = \frac{\Gamma \vdash A \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash A} \wedge_e$  (on pose  $T_1$  l'arbre de  $\Gamma \vdash A \wedge \varphi_2$ )

Par HI, on a  $T'$  un arbre de conclusion  $\Gamma, B \vdash A \wedge \varphi_2$ . On a alors:

$$\frac{\Gamma, B \vdash A \wedge \varphi_2}{\Gamma, B \vdash A} \wedge_e$$

De même pour les autres règles de  $S$ .

Conclusion Grâce à cette preuve, on peut maintenant utiliser  $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ aff}$

exple On veut montrer  $\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \neg \neg e$ :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \varphi} \text{ aff} \quad \frac{}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \varphi} \text{ ax}}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp} \neg e}{\boxed{\Gamma \vdash \varphi}} \perp$$

Cet arbre de preuve incomplet signifie: « Si on peut démontrer  $\Gamma \vdash \neg \neg \varphi$  Alors on peut démontrer  $\Gamma \vdash \varphi$ . » Ce qui est exactement le sens de  $\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \neg \neg e$

Cela justifie la légitimité de cette dernière règle.

En gros 2 méthodes:

Preuve par induction / Faire un arbre de preuve incomplet.

②