

Chap. 8B. Intégrales à Paramètres $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le paramètre est noté « x ».

Soit A une partie d'un K -evn $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie ($A \neq \emptyset$)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

Thm 1 (De Continuité d'une Intégrale à Paramètre) Soit $f: A \times I \rightarrow K$ telle que

i) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A

ii) Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur I

iii) Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_\text{pm}^0(I, \mathbb{R})$ intégrable sur I telle que: $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

(Domination sur A)

Alors

① $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I

② $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Rq. Dans ce Thm, on peut appliquer le iii) seulement sur des parties (A_i) telles que $\bigcup A_i = A$

Rq. La continuité d'une fonction est une propriété locale. Il suffit que le thm¹ donne la continuité en tout $a \in A$ (à dans l'intérieur de l'un des $(A_i)_{i \in I}$) (*)

Thm 2 (De Dérivation d'une Intégrale à Paramètre) Soit $f: A \times I \rightarrow K$ telle que (A intervalle non trivial de $\mathbb{R}$)

i) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur A

ii) Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I

iii) Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est $\mathcal{C}_\text{pm}^0$ sur I

iv) Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_\text{pm}^0(I, \mathbb{R})$ intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in (A \times I), \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors

① $g: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur A

② Pour tout $x \in A$, $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Thm 3 (De $\mathcal{C}^k$ -Régularité d'une Intégrale à Paramètre) Soit $f: A \times I \rightarrow K$ (A intervalle réel non trivial) telle que

i) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^k$ sur A

ii) Pour tout $x \in A$, pour tout $j \in [0, k-1]$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est intégrable sur I

iii) Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est $\mathcal{C}_\text{pm}^0$ sur I

iv) Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_\text{pm}^0(I, \mathbb{R})$ intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors

① $g: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est $\mathcal{C}^k$ sur A

② Pour tout $x \in A$, pour tout $j \in [0, k]$

$$g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$

Rq. Dans les 3 cas, on peut obtenir le caractère $\mathcal{C}^k$ par recouvrement par des parties A_i ayant la propriété (*)

Théorème (de d'Alembert Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

$$\frac{d}{dx} \int = \int \frac{d}{dx}$$

← Preuve. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 1$.

Par l'absurde, supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$.

On considère:

$$\forall R > 0, \quad \varphi(R) := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(Re^{i\theta})}$$

On pose donc $f(R, \theta) := \frac{1}{P(Re^{i\theta})}$. $f(\cdot, \theta)$ et $f(R, \cdot)$ sont resp.

De plus $\frac{\partial f}{\partial R}(R, \theta) = -\frac{P'(Re^{i\theta})e^{i\theta}}{P(Re^{i\theta})^2}$, d'où $\frac{\partial f}{\partial R}(R, \cdot) \in \mathcal{C}^0$ sur $[0, 2\pi]$

Enfin, $\frac{\partial f}{\partial R}$ est continue sur $\cancel{[a, b] \times [a, b]}$ compact le fermé-borné $[a, b] \times [0, 2\pi]$.
Cette fonction est donc bornée sur $[a, b] \times [0, 2\pi]$.

d'où $\left| \frac{\partial f}{\partial R}(R, \theta) \right| \leq \psi(t)$ avec ψ constante intégrable sur $[0, 2\pi]$

Par thm, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi'(R) = \int_0^{2\pi} -\frac{P'(Re^{i\theta})e^{i\theta}}{P(Re^{i\theta})^2} d\theta$

$$\text{Or } \frac{\partial f}{\partial \theta}(R, \theta) = \frac{-P'(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}}{P(Re^{i\theta})^2} \rightarrow iR \varphi'(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(R, \theta) d\theta = \left[f(R, \theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

d'où $\varphi'(R) = 0$ et φ constante sur $\mathbb{R}_+^*$ disons égale à C

$$\text{On a: } C = \varphi(0) = \frac{2\pi}{P(0)}$$

$$\text{On pose } P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \text{ d'où } |P(Re^{i\theta})| = \left| \sum_{k=0}^d a_k R^k e^{ik\theta} \right|$$

$$\geq |a_d R^d| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| R^k$$

$$\geq |a_d| R^d \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{d'où } |P(Re^{i\theta})| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc $\frac{1}{|P(Re^{i\theta})|} \rightarrow 0$ d'où $R > 0$ tel que $\forall \theta, \frac{1}{|P(Re^{i\theta})|} < 1$

et sur le segment $[0, R]$, $\varphi \mapsto \frac{1}{p(\varphi e^{i\theta})}$ est continue donc bornée

d'où $\pi > 0$ tel que $\forall (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$, $\left| \frac{1}{p(\varphi e^{i\theta})} \right| \leq \pi$

Par Thm de Convergence Dominée, ($t \mapsto \pi$ intégrable, C.V.S. vers 0 $\mathcal{L}^0_{\mu}$ sur $[0, 2\pi]$), on a

$$\varphi(\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varphi e^{i\theta})} d\theta \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{p(0)} = 0 : \underline{\text{absurde.}}$$

□.