

Chapitre 8A (K = R ou C) Théorème de Convergence Dominée.

Thm 1 (Théorème de Convergence Dominée) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (ni vide ni réduit à un point). Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans K vérifiant:

- (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}_m(I, K)$ [hypothèse de régularité]
i.e. $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$
- Il existe $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$ [hypothèse de domination]

Alors: f est intégrable sur I et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$

Appl 2 (Ex C1) Intégrales de Wallis.

1. Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$. On pose $f_n: t \mapsto \sin(t)^n$ avec $I = [0, \pi/2]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

f_n est continue sur I donc continue par morceaux sur I par opérations.

i) Soit $t \in I$. On a $f_n(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \\ 1 & \text{si } t = \pi/2 \end{cases} =: f(t)$

f est continue par morceaux sur I (continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, admet une limite finie en $\frac{\pi}{2}$)

ii) $|f_n(t)| \leq 1 =: \varphi(t)$ avec φ intégrable sur I

Par Thm 1., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$

2. Soit $n \geq 2$. On a $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n-2} \underbrace{\sin(t)^2}_{\cos(t)^2} dt \Rightarrow W_n = W_{n-2} \frac{n-1}{n}$

Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$. (W_n) est décroissante

On a $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ d'où $W_{n-2} \sim W_n$. De plus $0 < W_n \leq W_{n-1} \leq W_{n-2}$ d'où $0 < 1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{W_{n-2}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et donc (par encadrement) $W_{n-1} \sim W_n$

On pose $U_n = n W_n W_{n-1}$. On a $U_n = (n-1) W_{n-1} W_{n-2} = W_{n-1} \cdot n W_n = U_{n-1}$ donc (U_n) est constante et $U_n = U_1$ donc $n W_n^2 \sim U_1 = \frac{\pi}{2}$

d'où $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Appl 3 (Ex C2) $f_n: x \mapsto n^2 x^n (1-x)$ est continue sur I par opérations donc continue par morceaux sur I avec $I = [0, 1]$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$ avec f c.p.m. Montrons que le Thm 1. ne s'applique pas !!!

$\int_0^1 f_n(x) dx = n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$ tandis que $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Soit $g_n: t \mapsto \frac{t^n}{n!} e^{-t}$. On a $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$ ← contradiction dans la conclusion
 g_n est dérivable et $g'_n(t) = \frac{t^{n-1}}{n!} e^{-t} (n-t) \Rightarrow g_n$ maximale en $t=n$
et $g_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n} \sim \frac{n^n e^{-n}}{n^n e^{-n \sqrt{n}}} = \sqrt{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \|g_n(t)\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Appl 4 (Ex C3) Soit $x > 0$.

$\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{x^2}{n})^n dx = \int_0^{\sqrt{n}} \tilde{f}_n(x) dx$ avec $\tilde{f}_n: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \sqrt{n} \\ (1 - \frac{x^2}{n})^n & \text{si } x < \sqrt{n} \end{cases}$

Pour n assez grand, $\sqrt{n} \geq 2$ et $f_n(x) = \tilde{f}_n(x)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) \rightarrow f(x) = e^{-x^2}$ (f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$)

On a $|f_n(x)| = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n \left(-\frac{x^2}{n}\right)\right) = e^{-x^2} =: \varphi(x)$

On a $x^2 \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par c.c. et donc $\varphi(x) = o(1/x^2)$. Par Thm de Cauchy-Paraisou, φ est intégrable en $+\infty$ donc sur $I = \mathbb{R}_+$ (+ c.p.m etc...)

Par Thm de convergence Dominée, $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

On pose le changement de variable $x = \sqrt{n} \cos(\theta) = \psi(\theta)$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \frac{n \cos^2(\theta)}{n}\right)^n (-\sqrt{n} \sin(\theta)) d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^{2n+1} d\theta = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

Par Appli 2. $W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ d'où $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par unicité de la limite, on retrouve la valeur: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\pi}{2}$

Soit $g_n: t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. On pose $\tilde{g}_n(t) = g_n(t)$ si $t \leq n$, 0 sinon en sorte que $\int_0^n g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \tilde{g}_n(t) dt$ avec $\tilde{g}_n(t) \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ et $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = t^{x-1} e^{-t}$ etc. etc. (ZZZ...)

Par Thm 1: $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

Appli 2: Intégrales de Wallis

Appli 3: Cas où (f_n) n'est jamais dominée

Appli 4: Intégrale de Gauss & Fonction Gamma.

Appli 5, 6, 7: Méthode de Laplace

Appli 5 (Ex C4)

1. (Oral Times Telecom) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n} \sim ?$. On note I_n cette intégrale.

Changement de variable affine. $t = \frac{z}{n^{1/4}}: I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^{1/4}} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^4}{n}\right)^n} dz$

On a $f_n(z) = \exp(-n \ln(1 + \frac{z^4}{n})) \rightarrow e^{-z^4}$ (Appli 4, même méthode) $\underbrace{\quad}_{f_n(z)}$

(avec f c.p.m sur $\mathbb{R}_+$)

On pose $f_\alpha(z) = \left(1 + \frac{z^4}{\alpha}\right)^\alpha$. f_α est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'_\alpha(z) = \left(1 + \frac{z^4}{\alpha}\right)^{\alpha-1}$ et $f''_\alpha(z) = \left(1 + \frac{z^4}{\alpha}\right)^{\alpha-2}$

f_α est donc convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc $f_\alpha(x) \geq f'_\alpha(0)(x-0) + f_\alpha(0) = 1+x$

d'où $\left(1 + \frac{z^4}{n}\right)^n \geq 1 + z^4 > 0$ et $\left(\frac{1}{1 + \frac{z^4}{n}}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1 + z^4}\right)^n = \varphi(z)$ avec φ

intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par Thm 1, on trouve: $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{z^4}{n}\right)^{-n} dz \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-z^4} dz$

On pose le changement variable $x = u^{1/4} = \psi(u)$. ψ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{u \rightarrow 0} \psi(u) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = +\infty$ donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{4}-1} du = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \text{ [d'où le résultat]}$$

Thm 6 (Théorème de convergence Dominée/paramètre $n \in \mathbb{R} \rightarrow +\infty$)

Idem que Thm 1 avec n à la place de n .

Appli 7 (ExCh) On a $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{x+s} ds = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{1+\frac{s}{x}} ds = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f_{\frac{1}{x}}(s) ds$ avec $f_{\frac{1}{x}}(s) = \frac{e^{-s}}{1+\frac{s}{x}}$

Pour tout $x > 0$, $f_{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_{\frac{1}{x}}(s) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-s} = f(s)$ (avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ donc c.p.u sur $\mathbb{R}_+$).

De plus $|f_{\frac{1}{x}}(s)| \leq \frac{e^{-s}}{1+s} \leq e^{-s} = \varphi(s)$ ($\forall (x,s) \in \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[$)

Or φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par Thm. 6: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_{\frac{1}{x}}(s) ds = \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 1$

d'où $\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{x+s} ds - \frac{1}{x} \right| \rightarrow 0$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}_+)$ tq $f(0)=1$, $f'(0)=0$ et $f''(0)=-\mu < 0$, f strictement décroissante sur $[0,1]$

Taylor en 0: $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - \mu\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\int_0^1 f(t)^n dt = \int_0^1 f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{du}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 f_n(u) du$ avec $f_n(u) = \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \cdot \mathbb{1}_{u \leq \sqrt{n}}$

donc $f_n(u) = \left(1 - \mu\frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \mathbb{1}_{u \leq \sqrt{n}} \rightarrow \exp\left(-\frac{\mu u^2}{2}\right) = f(u)$

Hypothèse de domination subtile: il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tq pour tout $x \in [0, \alpha]$

$\frac{x^2}{2} > \frac{x^2}{4}$ donc $-\mu\frac{x^2}{2} > -\mu\frac{x^2}{4}$ et $f(x)-1 \sim -\mu\frac{x^2}{2}$ donc $f(x)-1 \leq -\mu\frac{x^2}{4}$

d'où $f(x) \leq 1 - \mu\frac{x^2}{4}$. Ainsi $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) dx + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}}^1 f_n(x) dx$

Pour I_n : $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) dx \sim \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\mu\frac{x^2}{2}} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\mu n}}$ (voir corrigé)

Pour J_n : $\forall t \in [\alpha, 1]$, $0 \leq f(t) \leq f(\alpha) \leq 1$ donc $f(t)^n \leq f(\alpha)^n$

donc $J_n \leq \int_{\alpha}^1 k^n dt$ et $0 \leq \sqrt{n} J_n < \sqrt{n} k^n$ d'où $J_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
et $I_n + J_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\mu n}}$

Thm 8 (~~Thm~~ Théorèmes d'Intégration Termes à Termes) [Analogie de Sabin]

Soit (u_n) une suite de fonctions intégrables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $+\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\sum u_n$ converge simplement vers $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ continue par morceaux sur I . Alors

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t) dt \text{ dans } \mathbb{R}_+^*$$

en particulier $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt$ converge si, et seulement si $\sum \int_I u_n(t) dt$ converge.
(et dans ce cas il y a égalité)

Thm 9 (Thm 8, version générale)

I dom avec $(u_n: I \rightarrow \mathbb{K})$ telle que $\sum u_n$ converge simplement vers f cpm et $\sum \int_I |u_n|$ converge. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t) dt$$

Preuves Thm 8: c.f. Thm 1

Thm 9: aduis

Thm 1,6: cf. Topologie ($\mathbb{K}$ -ev normés en dim. ∞)

Appli 10 (Ex 16)

$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On travaille sur $[0, 1[$

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} = - \frac{\ln(t)}{1-t} = - \ln(t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\ln(t)) t^n \text{ avec } |t| < 1$$

Par Thm 8, dans $\mathbb{R}_+$, $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$

Or u_n est continue sur $[0, 1]$ ~~donc continue~~ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 u_n(t) dt = \int_\varepsilon^1 -\ln(t) t^n dt = \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_\varepsilon^1 u_n(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

d'où $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ intégrable sur $[0, 1]$ et son intégrale vaut $\pi^2/6$.

Appli 11 (Ex 17)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact.

On définit pour $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi t x} dt$

Montrons que: $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$. f à support compact $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], f(x) = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi t x} dt = \int_a^b f(t) e^{-2i\pi t x} dt$$

Quitte à agrandir $[a, b]$, on suppose $a = -a$ et $b = a$:

$$\hat{f}(x) = \int_{-a}^a f(t) e^{-2i\pi t x} dt = \int_{-a}^a f(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi t x)^n}{n!} dt = \int_{-a}^a \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) \frac{(-2i\pi t x)^n}{n!} dt$$

u_n est continue sur $[-a, a] = I$ donc intégrable sur I

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |f(t)| \frac{|-2i\pi t x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} |f(t)| \frac{(2\pi |t x|)^n}{n!} = |f(t)| e^{2\pi |t x|} < \infty$$

d'où $\int_{-a}^a \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(t)| dt < \infty$

$$\text{Par Thm, } 0 = \hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-a}^a f(t) \frac{(-2i\pi t x)^n}{n!} dt$$

$$\text{donc } 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n!} \int_{-a}^a f(t) t^n dt \text{ et par unicité des DSE } \frac{\alpha_n}{n!} (-2i\pi)^n = 0$$

donc $\alpha_n = 0$ et par linéarité $\forall P \in \mathbb{C}[X], \int_{-a}^a P(t) f(t) dt = 0$

Par le Thm de Weierstrass, il existe (P_n) une suite de polynômes tq

$$\|P_n - \hat{f}\|_{\infty, [-a, a]} \rightarrow 0 \text{ Alors } \int_{-a}^a P_n(t) f(t) dt \rightarrow \int_{-a}^a \hat{f}(t) f(t) dt = \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt$$

(Par Thm de convergence Dominée).

$$\text{Par unicité de la limite: } \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt = 0 \text{ d'où } f = 0$$

méthode 1 pour les séries alternées: écrire la somme comme une série géométrique plus somme partielle + reste via T.C.D. au reste (majoré par le premier terme en valeur absolue)