

Chapitre 6: Sommabilité, Séries et Intro. Séries Entières.

(Rappels & Compléments)

Cours MPI*

I. Familles sommables et Séries vectorielle ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K -ev de dim $\mathbb{R}$, munie d'une norme $\|\cdot\|$)

rem La topologie de E ne dépend pas de la norme choisie.

rem Si de plus E est muni de la structure de K -algèbre, on suppose par-bis que la norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre ($\forall a, b \in E, \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$).

On fixe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

def Soit $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (U_n) converge dans E si pour tout $i \in [1, n]$, $\sum U_{n,i}$ converge dans K avec $U_{n,i} = e_i^*(U_n)$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_{n,i} \right) e_i$$

rem Cette notion ne dépend ni du choix de B , ni du choix de $\|\cdot\|$.

prop 1 On a encore les propriétés usuelles (linéarité, IT, ...)

def Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si $(\|a_i\|)_{i \in I}$ est sommable.

prop 2 $(a_i)_{i \in I}$ est sommable $\iff \forall k \in [1, n], (e_k^*(a_i))_{i \in I}$ est sommable.
 $\iff \sum_{i \in I} |e_k^*(a_i)| < +\infty$.

$$\iff \exists S \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists J_\varepsilon \subset I, \forall J \text{ fini}, J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|S - \sum_{i \in J} a_i\| \leq \varepsilon$$

①

$$\sum a_n$$

rem On montre que dans ce cas S est fini dans E et on note $S = \sum_{i \in I} a_i$.

Thm 3 (Somme par paquets) Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et qu'on a

$\{I_k, k \in K\}$ une partition de I Alors

(i) $\forall k \in K, (a_i)_{i \in I_k}$ est sommable

(ii) $(\sum_{i \in I_k} a_i)_{k \in K}$ est sommable

$$(iii) \sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

Thm 4 (Fubini) Si $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable, Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}$$

Thm 5 (Produit de Cauchy) Si $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable,

Alors $(\sum_{i+j=n} a_{ij})_n$ est sommable et dans ce cas

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=n} a_{ij}$$

Thm 6 (Convergence commutative) Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Si (a_n) est sommable, Alors $(a_{\sigma(n)})$ l'est aussi et dans ce cas :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$$

②

rem (Lien suite $\leftrightarrow$ série) Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^N$. On cherche (u_n) telle que $v_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Une analyse-synthèse (Télescope) donne que (u_n) est unique et est définie par $u_0 = v_0$ et pour tout $n \geq 1$

$$u_n = v_n - v_{n-1}$$

exple Si $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \dots = \sum_{k=1}^n u_k$

Thm 7 (CN de convergence) Si $\sum u_n$ converge, Alors $u_n \rightarrow 0$
Si $u_n \not\rightarrow 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Thm 8 (Absolue convergence $\Rightarrow$ convergence) Si $\sum \|u_n\|$ converge, Alors $\sum u_n$ converge et dans ce cas $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$.

def On définit $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ comme étant $\{(u_n) \in \mathbb{R}^N \mid \sum \|u_n\| \text{ converge}\}$
et $\ell^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}) = \{(u_i)_{i \in \mathbb{I}} \mid (u_i) \text{ est sommable}\}$

rem Ce sont des K -ev (inégalité triangulaire + thm de comparaison)
que l'on muni de la norme $\|\cdot\|_1$ telle que $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{I}} \|u_n\|$

appli 9 Nature de $\sum n^\alpha q^n$ où $(q, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

Si $|q| > 1$: $|n^\alpha q^n| = n^\alpha |q|^n \rightarrow +\infty$ (par croissances comparées)
et $\sum n^\alpha q^n$ diverge grossièrement

Si $|q| < 1$: $n^\alpha |n^\alpha q^n| = n^{\alpha+2} |q|^n \rightarrow 0$ d'où $|n^\alpha q^n| = o(\frac{1}{n^2})$
et $\sum n^\alpha q^n$ converge (par Thm de comparaison absolu + Série de Riemann etc.)

converge [Thm 8]

③

Si $|q| = 1$:
 $\rightarrow$ Si $q = 1$: $\sum n^\alpha q^n = \sum n^\alpha$ converge ssi $\alpha < -1$
 $\rightarrow$ Si $q = -1$ (et $\alpha < 0$): $\sum n^\alpha q^n = \sum \frac{(-1)^n}{n^{-\alpha}}$ est décroissant et tend vers 0. Par CSSA, $\sum n^\alpha q^n$ converge.
 $\rightarrow$ Si $q = -1$ (et $\alpha \geq 0$): ça diverge grossièrement.

Rem Dans $\mathbb{C}$ grosse galère! c'est tout.

appli 10 Nature de $\sum \binom{n}{k} 2^{-n}$ où $k \in \mathbb{N}$?

Notons que $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} P(n)$ où $P \in K[X]$ unitaire de degré k .
d'où $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ et donc: $\binom{n}{k} 2^{-n} \sim \frac{n^k}{k! 2^n}$. D'autre part:

$$\frac{n^k}{k! 2^n} = \frac{n^{k+1}}{k! 2^n} = \frac{1}{k!} \exp((k+1)\ln(n) - n\ln(2)) \rightarrow 0$$

d'où $\frac{n^k}{k! 2^n} = o(\frac{1}{n^2})$ ce qui permet de conclure (Thm Comp x2)

appli 11 [intervient en probas] Nature de $\sum \binom{2n}{n} 2^{-2n}$?

$$\text{On a } \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{d'où } \binom{2n}{n} 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow +\infty$$

Par Thm, $\sum \binom{2n}{n} 2^{-2n}$ diverge grossièrement.

def On dit que $\sum f_n(x)$ converge normalement si il existe $(v_n) \in \mathbb{R}^N$ tel que
(i) $\forall x \in E, \|f_n(x)\| \leq v_n$
(ii) $\sum v_n$ converge.

④

Fonction ζ

appli 12 Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{H}_\sigma^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma\}$ et $\mathcal{H}_\sigma^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma\}$.
et pour $s \in \mathbb{C}$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $s \in \mathcal{H}_1^-$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma(s)}}$ converge et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge. [2.a]

Soit $s \in \mathcal{H}_{1+\varepsilon}^+$, on a $|\frac{1}{n^s}| = |\frac{1}{n^{\sigma(s)}}| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ dont la série converge, si bien que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge normalement. [2.b]

Si $s, t > 1$ sont tels que $s < t$, on vérifie que $\zeta(t) \leq \zeta(s)$ d'où ζ décroissante sur $]1, +\infty[$. La continuité est facile en écrivant les inégalités sur $s \mapsto 1/n^s$ (comme pour Γ en gros) et on obtient ainsi la continuité. [2.c]

$(\frac{1}{n^k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ Soit $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{n^k})$ est une série géométrique de raison $1/n$ dont le module est strictement inférieur à 1 d'où $\forall n \geq 2$, $(1/n^k)_{k \geq 2}$ sommable. De plus

$$\sum_{n \geq 2} \sum_{k \geq 2} (\frac{1}{n^k}) = \sum_{n \geq 2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n \geq 2} \frac{(\frac{1}{n})^2}{1 - \frac{1}{n}} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - n}$$

On conclut par Thm de comparaison: $(\frac{1}{n^k})_{n,k}$ est sommable. [2.d]

Par le Thm de Fubini (Thm 1), $\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

Par Télescope, $\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = 1$. $\zeta(1) - 1$

Par CN de convergence [Thm 4], $\zeta(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ i.e. $\zeta(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$. Par encadrement et puisque ζ est décroissante $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$. Montrons que $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $s \in]1, +\infty[$ Alors $\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n}$

Or $\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^s} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n} \xrightarrow{n_0 \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où n_1 tel que $\forall n \geq n_1, \sum_{n=1}^n \frac{1}{n^s} \geq A > A-1$. On a aussi $\varepsilon > 0$ tel que $\forall s \in]1, 1+\varepsilon[$, $\sum_{n=1}^{n_2} \frac{1}{n^s} \geq A-1$ d'où $\forall s \in]1, 1+\varepsilon[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq A-1$

Quitte à changer A en $A+1$, on a $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} +\infty$ [2.e]

$$\frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (p_i^{-s})^k \text{ d'où } \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^{+\infty} (p_i^{-s})^k$$

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{sk_1} \dots p_N^{sk_N}} = \sum_{(k_i)_{1 \leq i \leq N}} \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N})^s} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \zeta(s)$$

(e.f. corrigé pour les détails)

$\triangle$ c'est assez subtil

Demander la démon à Dattis.

$\rightarrow$ + Renvoyer la [2.e] !!

Fonction exponentielle

$$M_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Appli B Soit A une K-alg de dimension finie et soit $z \in A$.

1) Pour $z \in \mathbb{R}$, $M_n(z) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{z}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(z + o(1))$
d'où $M_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z$.

2) 1 et z/n constant, on a $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n a_{k,n} z^k$
so si $k > n$

$a_{k,n} = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ Fixons k , pour n assez grand on a fins
 $a_{k,n} = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \sim \frac{n^k}{k!} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$

3.a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $1 + \frac{z}{n} = e^{i\theta_n}$ où $e_n = \left|1 + \frac{z}{n}\right|$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$
On a de plus que $\theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ avec $x_n = \text{Re}\left(1 + \frac{z}{n}\right)$, $y_n = \text{Im}\left(1 + \frac{z}{n}\right)$
Si $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$),
 $\theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{b/n}{1 + a/n}\right)$

Ainsi:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e_n^n e^{in\theta_n} \text{ avec } e_n^n = \left(\left|1 + \frac{z}{n}\right|\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \left(\frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + o(1)\right) \rightarrow e^a$$

et $\theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{b/n}{1 + a/n}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{n} (1 + o(1))\right) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $n\theta_n \rightarrow b$

Ainsi $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow e^a e^{ib}$ où $z = a + ib$.
 $=: e^z$

3.b) Soit $A = P D P^{-1}$ où $(P, D) \in GL_n(K) \times D_n(K)$

Alors $I_R + \frac{1}{n} A = P \left(I_R + \frac{1}{n} D\right) P^{-1}$ d'où $\left(I_R + \frac{1}{n} A\right)^n = P \left(I_R + \frac{1}{n} D\right)^n P^{-1}$

et par récurrence sur k : $\left(I_R + \frac{1}{n} A\right)^n = P \left(I_R + \frac{1}{n} D\right)^n P^{-1}$
On écrit $\left(I_R + \frac{1}{n} D\right)^n = \text{diag}\left(\left(1 + \frac{d_1}{n}\right)^n, \dots, \left(1 + \frac{d_k}{n}\right)^n\right) \rightarrow \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_k})$

et alors $P D P^{-1} \rightarrow P \tilde{D} P^{-1}$ par opérations

Or $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = P \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}\right] P^{-1} = P \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k^k}{k!}\right) P^{-1} = P D P^{-1}$

Ainsi $\left(I_R + \frac{A}{n}\right)^n \rightarrow e^A$

4) Dans une K-alg générale. On admet que la K-alg A admet une norme d'algèbre (semi-multiplicative). Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc [Thm 8] converge. En effet $\left\|\frac{z^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|z\|^k}{k!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|z\|^k}{k!}$ converge vers $\exp(\|z\|)$. On conclut par Thm de comparaison. On a de plus:

$$\|e^z - (1+z)\| = \left\|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right\| = \left\|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right\| \leq \|z\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|z\|^{k-2}}{(k-2)!} = \|z\|^2 e^z \quad (\text{c.f. corrigé pour } b)$$

④

⑧

In Appli B Si $z, z' \in A$ une K -alg avec $zz' = z'z$

5) On a $e^{z+z'} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^k}{k!}$ et $e^z e^{z'} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{z'^l}{l!} \right)$
 $= \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \left(\frac{z^k}{k!} \right) \left(\frac{z'^l}{l!} \right)$

Par un produit de Cauchy [Thm 5]

$$e^z e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(k,l)} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^l}{l!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^l}{l!} n! = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

d'où le résultat par la formule du Binôme (z, z' commutent)

Appli 14 [HP] def. Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\prod z_n$ converge si $\prod_{n=0}^N (z_n + 1)$ admet une limite $\neq 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$
 Dans ce cas $l = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + z_n)$

1 $\rightarrow$ 2.b: voir corrigé

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $f(\alpha) = \prod \left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha} \right)$

On note $f_n(\alpha)$ la produit partielle.

$$\ln f_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}}_{g_k(\alpha)} \right) \text{ et } \ln \left(1 + g_k(\alpha) \right) = g_k(\alpha) + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$$

③

$\sum_{k \geq 0} g_k(\alpha)$ est une série alternée

Si $\alpha > 1$ $\sum_{k \geq 0} g_k(\alpha)$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k}$ convergent, Par Thm, $\sum \ln f_n(\alpha)$ converge.

Si $0 < \alpha \leq 1$ $\ln(1 + g_n(\alpha)) = g_n(\alpha) + \frac{1}{2(n+1)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
 $h_n(\alpha)$

avec $h_n(\alpha) \sim \frac{1}{2n^\alpha}$ d'où $\sum h_n(\alpha)$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$ (par Thm)
 donc $\sum g_n(\alpha) + h_n(\alpha)$ est de même nature que $\sum h_n(\alpha)$
 d'où $f(\alpha)$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.

II Compléments sur les Séries Numériques

1) Technique de Comparaison Série-Intégrale

Si on étudie $\sum f(n)$ avec $f \in \mathbb{R}^+$ décroissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $t \in [n-1, n]$, $f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$
 donc $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$ d'où $0 \leq \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$

Or $\sum_{n=1}^N (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N) \xrightarrow{?} f(0)$

Donc $\sum_{n \geq 1} f(n-1) - f(n)$ converge et par Thm, $\sum_{n \geq 1} \int_{n-1}^n f(t) dt$ converge
 et $\sum_{n \geq 1} f(n)$ sont de même nature. $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ⑩

Or $\sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(t) dt = \int_1^N f(t) dt$ si bien que $\int_1^{+\infty} f$ converge $\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge

Si on veut un équivalent: $\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=1}^N \left(f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt + \int_{n-1}^n f(t) dt \right)$
 $= \sum_{n=1}^N \left(f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt \right) + \int_1^N f(t) dt$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(t) dt + o(1) + \int_1^N f(t) dt$$

On repart de $0 \leq \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$ soit $0 \leq R'_N - R_N \leq f(N)$

avec $R'_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^n f(t) dt$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)$

On calcule $R'_N = \int_N^{+\infty} f(t) dt$ et on fait $R'_N - R_N = O(u_N)$

donc $R_N = R'_N + O(u_N)$

rem Au final on a besoin que f soit décroissante à partir d'un certain t_0 uniquement.

Cela permet d'obtenir des développements du type

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(t) dt + o(1) + \int_1^N f(t) dt$$

On peut aussi utiliser cette technique pour montrer la nature d'une intégrale, c'est cependant nettement plus rare.

expos exs 44, 45. On trouve les résultats:

• $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

• $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$ et $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$

• $\zeta(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right)$ lorsque $s \rightarrow +\infty$

rem Les généraux: Correction de continuité, Méthode des Trapèzes
 Bas final: Euler-Maclaurin

2) Technique de Comparaison Série Intégrale SANS MONOTONIE

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
 (hypothèse ajustable).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\int_n^{n+1} f(t) dt = \left[-(n+1-t)f(t) \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$

$= -f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$
 d'où $\int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$

d'ail $|u_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$ donc $\sum_{n=0}^N |u_n| \leq \int_0^{N+1} |f'(t)| dt$

Enfin $\sum_{n=0}^N |u_n| \leq \int_0^{+\infty} |f'(t)| dt < +\infty$. Si bien que $(\sum_{k=0}^n |u_k|)_{n \in \mathbb{N}}$

converge en tant que suite croissante et majorée. La série $\sum u_n$ converge absolument donc converge. Donc $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Appli 16 Soit $f: t \mapsto \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$
 $f'(t) = \frac{i}{2\sqrt{t}} \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t} - \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^2} = \frac{i}{2} \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^{3/2}} - \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^2}$

Donc $0 \leq |f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ convergent

Donc $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge. f' est intégrable sur $[1, +\infty[$ et on applique la même technique.

3) Séries Alternées et Complément sur la Transformation d'Abel. [HP]
 (de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec (a_n) décroissante tendant vers 0)

On suppose que $\sum (-1)^n a_n$ converge. On a que $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^n a_n$ et $|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n$

Fonction éta de Dirichlet

A voir.

Appli 17 Soit $\eta: s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ E.

→ Technique à voir dans le corrigé. [ex. 18] (pas le temps en cours)

Fin de l'appli

On introduit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k a_k$ et $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ($A_{-1} = 0$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$ d'où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k (A_k - A_{k-1})$

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k (A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=0}^n u_k A_k - \sum_{k=0}^n u_k A_{k-1}$ et $A_{-1} = 0$

$= \sum_{k=0}^n u_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} A_k$

$= a_n A_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) A_k$

On ramène le problème à la convergence de $\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) A_k$

exple Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On considère $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i n \theta}}{n} = \sum u_n a_n$
 où $u_n = 1/n$ et $a_n = e^{i n \theta} = (e^{i \theta})^n$.

$A_n = \sum_{k=0}^n e^{i k \theta} = \frac{1 - e^{i \theta (n+1)}}{1 - e^{i \theta}}$ ($e^{i \theta} \neq 1$) et $|A_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i \theta}|} =: K$

③ Ainsi $|u_k A_k| \leq \frac{K}{k} \rightarrow 0$ d'où par Thm: $u_k a_k \rightarrow 0$ ④

$$|(u_k - u_{k+1}) A_k| < |u_k - u_{k+1}| \cdot |A_k| \\ < \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| \cdot K$$

$$\leq \frac{K}{k(k+1)} \sim \frac{K}{k^2} \text{ donc par Thm, } \sum (u_k - u_{k+1}) A_k \\ \text{converge absolument donc converge et donc } S_n \text{ converge.}$$

4) Sommation des Relations de Comparaison (+ Lemme de Cesàro)

Thm 18 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels telles que (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang

(i) Cas divergent

i.a) Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, Alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

i.b) Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, Alors $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$

i.c) Idem avec un 0

(ii) Cas convergent

ii.a) Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, Alors $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$

ii.b) Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, Alors $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$

ii.c) Idem avec un 0

Cor 19 (Lemme de Cesàro)

i) Cas fini ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in K$.
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ existe et vaut l

ii) Cas infini ($K = \mathbb{R}$) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ existe et vaut l .

Preuve i) Puisque $u_n \rightarrow l$, on écrit $u_n = l + o(1)$ d'où $u_n - l = o(1)$.

Or $\sum 1$ est divergente. Par [Thm 18.i.b], $\sum_{k=0}^n (u_k - l) = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right) = o(n+1)$

Or $\sum_{k=0}^n (u_k - l) = \sum_{k=0}^n u_k - (n+1)l = o(n+1)$ d'où $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = l + o(1)$
d'où le résultat pour $K = \mathbb{R}$. On étend à $K = \mathbb{C}$ en prenant les parties réelles / imaginaires.

ii) Si $u_n \rightarrow +\infty$, on a $1 = o(u_n)$ et (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang n_0 . Par [Thm 18.i.b], $\sum_{k=0}^n 1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$
d'où $1 = o\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k\right)$ d'où le résultat pour $+\infty$.

Idem pour $-\infty$.

Rem Ça ne dépend pas du premier terme, tant qu'on a le bon nombre de terme au dénominateur.

Appli 20 [Ex C10] « Intégration Discrète »

1.a. On a $\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par Thm $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) = \ln(n)$
 d'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \ln(n) + o(\ln n) = \ln(n) + o(\ln n) \sim \ln(n)$

1.b. On a $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$
 donc $\sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ converge et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge. Par Thm, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$
 $= \frac{1}{n+1} - 0$

1.c. Si $\alpha > 1$ On a $n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} = n^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} (1 - \frac{1}{n})^{1-\alpha} = n^{1-\alpha} (1 - (1 - \frac{1}{n})^{1-\alpha})$
 $= n^{1-\alpha} ((1-\alpha)\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = (1-\alpha)n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}) \sim (1-\alpha)n^{-\alpha}$
 d'où $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. On sait que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, Par Thm, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=1}^n (\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}) = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ Rem cas $\alpha = 2$

Si $\alpha < -1$ Par la même idée on montre que $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

2. On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En effet si on pose $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$
 alors $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) = 1 + \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)) = \sum_{k=1}^n v_k$
 où $v_k = \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$

$v_k = \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) = \frac{1}{k} + \ln(1 - \frac{1}{k}) = -\frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}) \sim -\frac{1}{2k^2}$
 et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. Par Thm, $\sum v_n$ converge d'où (M_n) converge.
 Si on note $\gamma := \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a $M_n = \gamma + o(1)$ d'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$
 On raffine par $\gamma = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n v_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. Par [Thm 8], $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$

On a $\gamma = M_n - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ d'où $M_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$
 On veut encore raffiner. On pose $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{2n}$
 On a $w_n = 1 + \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k} - (\ln(k) - \ln(k-1)) - (\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)})) = \sum_{k=1}^n t_k$
 où $t_k = \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)}$

Après un alg, $t_k \sim \frac{1}{6k^3}$. On fait ensuite $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k = \sum_{k=1}^n t_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k$
 avec $\sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12k^2}$ et on conclut de même.

On peut par la même méthode on peut raffiner la formule de Stirling:
 $n! = (e)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$

3. On veut un équivalent du reste de $\sum \sqrt{n} q^n$.
 On a $\sqrt{n+1} q^{n+1} = \sqrt{n+1} q \cdot \sqrt{n} q^n \sim q \sqrt{n} q^n$ d'où $\sqrt{n+1} q^{n+1} - \sqrt{n} q^n = q \sqrt{n} q^n - \sqrt{n} q^n + o(\sqrt{n} q^n) = \sqrt{n} q^n (q-1) + o(\sqrt{n} q^n)$
 d'où $\sqrt{n+1} q^{n+1} - \sqrt{n} q^n = q \sqrt{n} q^n - \sqrt{n} q^n + o(\sqrt{n} q^n) = \sqrt{n} q^n (q-1) + o(\sqrt{n} q^n)$
 donc $\sqrt{n} q^n \sim \frac{\sqrt{n+1} q^{n+1} - \sqrt{n} q^n}{q-1}$. Ainsi $\sum \sqrt{n} q^n$ est de même nature que $\frac{1}{q-1} \sum (\sqrt{n+1} q^{n+1} - \sqrt{n} q^n)$ qui converge par télescopage.

Par [Thm 18], $\sum_{k=nt+1}^{+\infty} \sqrt{k} q^k \sim \frac{1}{q-1} \sum_{k=nt+1}^{+\infty} \sqrt{k+1} q^{k+1} - \sqrt{k} q^k \sim \frac{q}{1-q} \sqrt{nt} q^n$

4- Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. On a $u_1 \in [-1, 1]$. Par imprudence on se ramène au cas où $u_1 \in [0, 1]$. Alors $[0, 1]$ est stable par $\sin$ (u_n) est décroissante, minorée par 0 ($\sin(x) \leq x$). Par Thm,

(u_n) converge vers $l \in [0, 1]$. Par un passage à la limite $l=0$

Il faut trouver $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_{n+1} - u_n^\alpha$ est un équivalent simple de u_n . On a $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \sin(u_n)^\alpha - u_n^\alpha = (u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + o(u_n^3))^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha (1 - \frac{\alpha}{6}u_n^2 + o(u_n^2)) - u_n^\alpha = -\frac{\alpha}{6}u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2})$. On choisit astucieusement $\alpha = -2$

on voit que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \rightarrow \frac{1}{3}$ et par le Lemme de Cesàro, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$ d'où $\frac{1}{n+1} (u_{n+1}^{-2} - u_0^{-2}) \rightarrow \frac{1}{3}$

et finalement $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. NB: Il faut faire le cas $u_1 = 0$ à part et ça donne $u_n = 0$.

III Complément sur les Séries Entières

Thm 21 (d'Alembert - Gauss pour une série)

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ non nulle à partir d'un certain rang. On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors (u_n) converge si $\lambda < 1$.

def. Une série entière est une série de la forme $\sum a_n x^n$ où $x \in \mathbb{C}$

def. On définit le rayon de convergence d'une telle série par $R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n) \text{ est bornée} \} \in \overline{\mathbb{R}_+}$

prop 22 (Lemme d'Abel) Si $(a_n r^n)$ est bornée, Alors $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-r, r[$

Thm 23 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. On pose

$$\varphi:]-R, R[\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{Alors } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ et pour tout } k \geq 1$$

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1) x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

def. On définit l'ensemble de convergence de $\sum a_n x^n$ noté $I_a =]-R_a, R_a[$

prop 24 $R_a = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ : \sum a_n r^n \text{ converge} \}$

prop 25 Si $x \in]-R_a, R_a[$ Alors $\sum a_n x^n$ converge absolument

Si $x \in]-\infty, -R_a[\cup]R_a, +\infty[$ Alors $\sum a_n x^n$ diverge

rem Il y a indétermination si $|x| = R_a$.

prop 26 I_a est un intervalle qui contient 0.

prop 27 Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non nulle à partir d'un certain rang et tel que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow l \in \mathbb{R}_+$, Alors $R_a = \frac{1}{l} \in \overline{\mathbb{R}_+}$

prop 28 Il y a unicité de l'écriture sous forme de série entière.

Appli 28 [exo 14] Soit $u_n = \frac{n!(n+1)^n}{(2n)!}$

1. a) On a $u_n > 0 \forall n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!(n+2)^{n+1}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{n!(n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)(n+1)^n}$

$= \frac{(n+2)}{2(n+1)} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \left(\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \rightarrow \frac{e}{4} < 1$

Par d'Alembert, $\sum u_n$ converge

1 b) On a $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow e/4$ d'où le rayon de convergence $R = 4/e$

2 a) Pour $\sum \frac{x^n}{n!}$: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$ d'où $R = +\infty$ (donc e^x est telle que exp est e^x)

2 b) Soit $f: x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$. On a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, dont le rayon de convergence vaut $+\infty$ [Thm 23]

Ainsi f se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

et par unicité : $f'(0) = \frac{1}{1+1}$

Preuve des Thm 18

Cas convergent avec α Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\|u_n\| = o(v_n)$ avec $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

Montrons que $\|R_n\| = o(v_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leq \varepsilon v_n$

d'où $\sum_{k=n+1}^N \|u_k\| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^N v_k$ donc $\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq \varepsilon R'_n$

Ainsi $\|R_n\| = o(R'_n)$

Cas divergent avec α Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\sum v_n$ diverge et $\|u_n\| = o(v_n)$.

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k \rightarrow +\infty$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$

Soit $n \geq n_0$ $R_n =$

$\|S_n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\| + \sum_{k=n}^n \|u_k\|$

$=: C = O(1) = o(S'_n)$

donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow C \leq \frac{\varepsilon}{2} \|S'_n\|$

Ainsi:

$\|S_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|S'_n\| + \sum_{k=n_0}^n \|u_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|S'_n\| + \frac{\varepsilon}{2} \|S'_n\| = \varepsilon \|S'_n\|$

d'où $\|S_n\| = o(S'_n)$

* * * Fin du Chapitre * * *