

Th 2. Transferts Thermiques (Th. 1. AP en TP!)

Cours TPI *

appel 3 types de transferts thermiques :

- Conduction : sans transport de matière, à l'intérieur de celle-ci (liens entre atomes)
- Convection : déplacement macroscopique de matière.
- Rayonnement : sans support matériel de propagation (échange d'énergie par échange de photons)

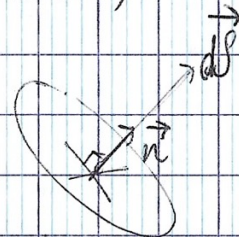
On étudie dans ce chapitre la conduction thermique (essentiellement...)

On parle aussi de « diffusion thermique ».

I. Conduction Thermique

1. Vecteur Surface (déjà introduit en sup : chap. induction)

Rappel Le vecteur surface orienté par $\vec{n}$ est défini par $d\vec{S} = dS \vec{n}$



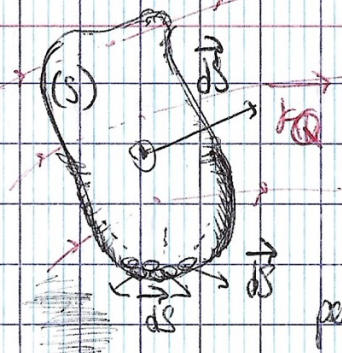
2. Vecteur Densité de Flux Thermique (note $\vec{j}_Q$ ou $\vec{j}_{th}$)

Ce vecteur quantifie la valeur de la puissance thermique issue de la conduction (à travers une surface), notamment par la formule : $d\Phi_{th} = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$

~~Pendant dt, le transfert thermique traversant dS~~

On dit que Φ_{th} est le flux de $\vec{j}_Q$ à travers S ! $\boxed{SQ = \int_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt}$

Pour une surface non-infinimentale, il suffit de décomposer la surface en un ensemble de surfaces infinitésimales puis de sommer les puissances thermiques qui traversent chacune d'elles :



$$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

dans le sens de $d\vec{S}$.

Le transfert thermique traversant (S) pendant dt vaut $\boxed{SQ = \Phi_{th} dt}$

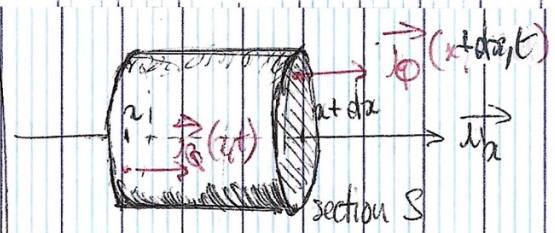
La direction de $\vec{j}_Q$ / Le sens de $\vec{j}_Q$ est celle / celui de la conduction
La norme de $\vec{j}_Q$ correspond à la puissance thermique par m^2 de surface due au transfert par conduction : $\boxed{[j_Q] = W \cdot m^{-2}}$

On a fréquemment $\vec{j}_Q \parallel d\vec{S}$ et $|\vec{j}_Q|$ uniforme sur S, alors $\boxed{\Phi_{th} = \pm j_Q S}$ (selon le sens relatif)

3. Bilan Thermique à Une Dimension (Problème Monodimensionnel, i.e. les grandeurs ne dépendent de l'espace que selon $\vec{u}_x$)

Objectif : établir une équation permettant d'étudier l'évolution du profil de température dans la matière (le long de Ox). Pour cela on applique le 1^{er} Principe à une tranche de matériaux comprise entre x et $x+dx$ et de section S entre les dates t et $t+dt$

(*) u dm car c'est m masse



Sen energie interne vaut $dU = u dm = u c_p S dz$ (*)
 d'ou $dU(t+dt) - dU(t) = (u(t+dt) - u(t)) c_p S dz (= d^2 U)$

Par l'approximation des corps condensés (U, H ne dépendent que de T et matière ^{non compressible})
 $c_v = c_p = c$ (la capacité thermique) et $S W_{pression} = 0$ Alors:

$dU = c (T(x,t+dt) - T(x,t)) c_p S dz$ d'ou $dU = c \frac{\partial T}{\partial t} dt \times c_p S dz = \delta Q$

On traite le cas où de l'énergie thermique peut être créée à l'intérieur de la matière. On note $P_{créé, vol}$ la puissance thermique créée par unité de volume. d'ou $\delta Q = P_{créé, vol} S dz dt + \delta Q_{reçu\ en\ z} + \delta Q_{reçu\ en\ z+dz}$

$= P_{créé, vol} S dz dt - j_Q(x+dz, t) S dt + j_Q(x, t) S dt$
 $= P_{créé, vol} S dz dt - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx S dt + j_Q(x, t) S dt - j_Q(x+dz, t) S dt$

Bilan

$P_{créé, vol} S dz dt - \frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt = c \frac{\partial T}{\partial t} c_p S dz dt$

d'ou $P_{créé, vol} - \frac{\partial j_Q}{\partial x} = c c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ △ Demo à comprendre parfaitement

△ Savoir faire le bilan thermique aussi en géométrie cylindrique (Lorsque T ne dépend que de la distance à l'axe et $\vec{j}_Q$ radial) et en géométrie sphérique.

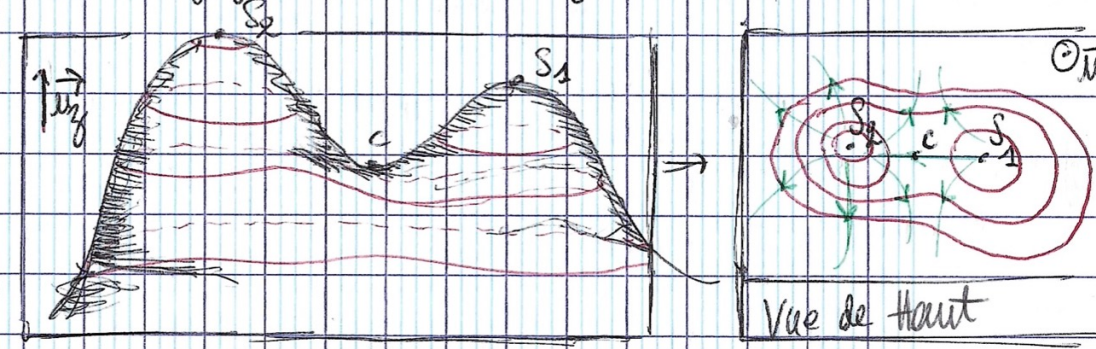
4- Outils Mathématiques : Champ scalaire $\xleftrightarrow{\text{grad}}$ Champ vectoriel
 On définit le gradient ($\vec{\text{grad}}$) par $\vec{\text{grad}} V$ tel que $V(r+\vec{dr}) - V(r) = \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{dr}$ avec V un champ scalaire

En coordonnées cartésiennes: $\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$

prop $\vec{\text{grad}} V$ est perpendiculaire en tout point aux surfaces iso-V (i.e. $\oint \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = 0$ constant $\oint$ (et dirigé selon V croissant))

prop Plus les iso-V sont resserrés, plus $\|\vec{\text{grad}} V\|$ est grande.

exple Carte géographique avec les lignes de niveaux:



not On note $\vec{\nabla} V = \vec{\text{grad}} V$

On définit le divergence comme étant l'inverse du gradient:
 def. c.f. wiki, p. 10 (mesure en gros si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace comme ce qu'on observe sur un diagramme de lignes de champ.)

En cartésien, si $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$, on a $\boxed{\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$

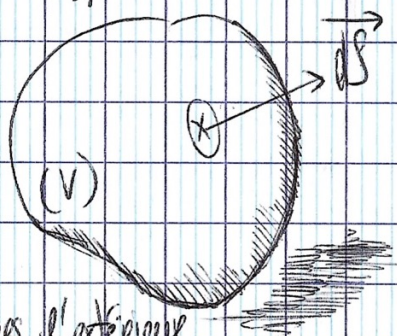
rem On a $\text{div } \vec{A} = \langle \vec{\nabla}, \vec{A} \rangle$ où $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ en tant que vecteur.

rem En cylindrique / sphérique, les opérateurs grad et div sont plus compliqués : ils seront fournis dans une formule.

Thm (de Green-Ostrogradski)

$$\boxed{\iiint_{(V)} \text{div } \vec{A} dV = \oint \vec{A} d\vec{S}}$$

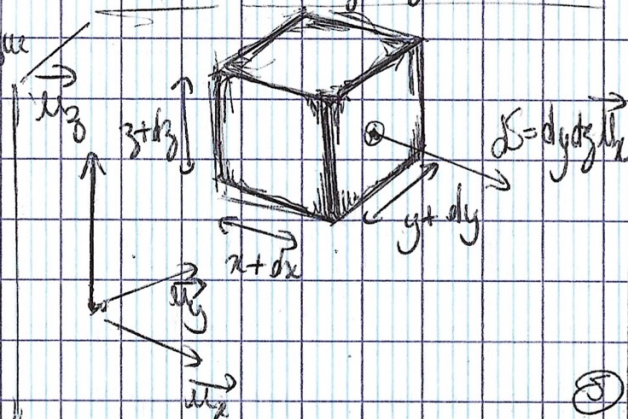
⚠ Il est nécessaire que $d\vec{S}$ soit orienté vers l'extérieur



5. Généralisation en 3 dimensions

On fait un bilan thermique sur un volume $dV = dx dy dz$

$dU(t+dt) - dU(t) = \delta Q_{\text{créé}} + \delta Q_{\text{rayé}}$
où $\delta Q_{\text{rayé}}$ contient 6 termes relatifs aux 6 faces



$$\delta Q_{\text{rayé}} = - \left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} dx dy dz + \dots \right) dt = - \left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{Qy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{Qz}}{\partial z} \right) dV dt$$

$$\boxed{\rho_c \frac{\partial T}{\partial t} = P_{\text{créé, vol}} - \text{div } \vec{j}_Q} \quad (\text{version locale du bilan thermique})$$

On peut également l'écrire en version globale



(V) contient une énergie interne $U(V) = \iiint_{(V)} \rho_c u dV$
Le 1^{er} principe entre t et $t+dt$ donne :
 $U(V)(t+dt) - U(V)(t) = \delta Q_{\text{créé dans (V)}} + \delta Q_{\text{entrant dans (V)}}$

En divisant par dt :

$$\boxed{\frac{dU(V)}{dt} = \iiint_{(V)} P_{\text{créé, vol}} dV = \oint \vec{j}_Q d\vec{S}} \quad (\text{version globale du bilan thermique})$$

avec :

- $\frac{dU(V)}{dt}$: puissance thermique emmagasinée
 - $\iiint_{(V)} P_{\text{créé, vol}} dV$: puissance thermique créée
 - $\oint \vec{j}_Q d\vec{S}$: puissance thermique sortante
- ⤴ aussi dite « intégrale »
⤴ c'est du bon sens

Les versions locales et globales peuvent être reliées par le Théorème de Green-Ostrogradski. En effet,

$$\frac{dU_{cr}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{(V)} \rho u dV = \iiint_{(V)} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iiint_{(V)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

(dans les conditions telles que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial \theta}{\partial t}$)

d'où :

$$\iiint_{(V)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iiint_{(V)} P_{crée, vol} dV - \oint_{\partial V} \vec{J}_Q d\vec{S}$$

et donc $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = P_{crée, vol} - \text{div} \vec{J}_Q$

On reconnaît le divergent

6. Loi de Fourier (1 seul $\vec{x}$) $\rightarrow$ Loi phénoménologique, pour ΔT pas trop grand.

C'est une loi proposée en 1822 par Fourier pour modéliser le phénomène de conduction thermique :

C'est une loi phénoménologique (issue de l'expérience) :

$$\vec{J}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$$

où λ est la conductivité thermique, s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

Le signe - traduit le fait que la chaleur diffuse du plus chaud vers le plus froid.

Pour du béton, $\lambda \sim 1 W.m^{-1}.K^{-1}$. Pour du bois, $\lambda \sim 0,3 W.m^{-1}.K^{-1}$ car plus isolant. Le métal est un très bon conducteur : $\lambda \sim 10 W.m^{-1}.K^{-1}$

Enfin l'air : $\lambda \sim 0,024 W.m^{-1}.K^{-1}$: très bon isolant thermique pour la conduction (Δ il faut pouvoir empêcher la convection) : exple : Double vitrage.

4. Equation de diffusion à une dimension (d'après I, sans source de chaleur) Loi de Fourier valide

Le bilan thermique local s'écrit e.g. $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x}$ et $J_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

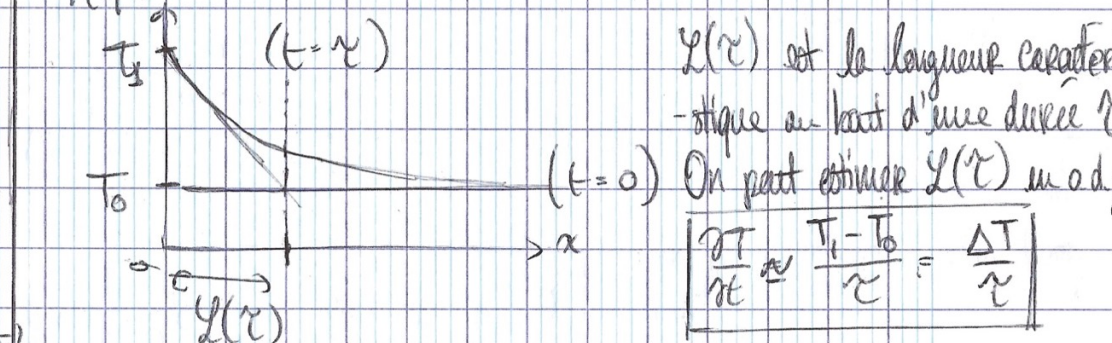
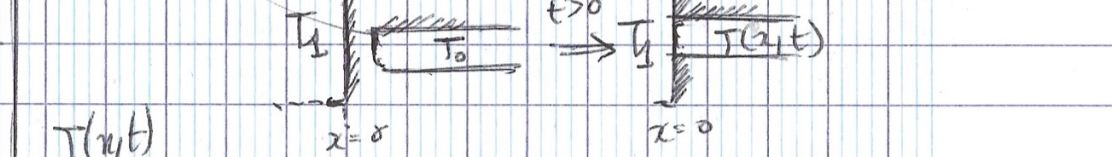
d'où $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (-\lambda T) \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et donc

avec $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ en $m^2.s^{-1}$ la « diffusivité »

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

8. Raisonnement en ordre de grandeur du temps de diffusion

On traite le cas où un barreau de température initialement uniforme vaut T_0 et à partir de $t=0$ en contact en $x=0$ avec un thermostat de température T_1 .



$L(\tau)$ est la longueur caractéristique au bout d'une durée τ . On peut estimer $L(\tau)$ en o.d.g.

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right| \approx \frac{T_1 - T_0}{L} = \frac{\Delta T}{L}$$

On a aussi $\frac{\partial T}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta T}{L^2}$ donc $\frac{\Delta T}{L} \approx D_{th} \frac{\Delta T}{L^2}$ d'où $L \approx \sqrt{D_{th} \tau}$

3) Opérateur Laplacien scalaire : $\Delta \cdot = \text{div } \vec{\nabla} \cdot$

En cartésien ; pour $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$: $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

10) Equation de diffusion en dim 3 (cf 7. pour les conditions)

Eq $\frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{J}_Q$ et $\vec{J}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$ d'où Eq $\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$

Ainsi $\frac{\partial T}{\partial t} = D_m \Delta T$

*** FIN DU (I) ***

Δ Très souvent, les Bilans Thermiques sont à réaliser ; ne pas utiliser la formule toute faite en générale.

II. Cas des régimes stationnaires

1) Conservation du flux thermique

def. On dit qu'on est en régime stationnaire si les différentes grandeurs locales restent constantes à un endroit donné. On a alors $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
d'où $\text{div } \vec{J}_Q = P_{\text{créée, vol}}$ et en version intégrale :

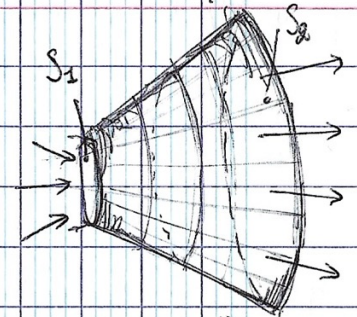
$$\oint_{(S)} \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} P_{\text{créée, vol}} dV$$
 Tout ce qui est créé DOIT partir

def

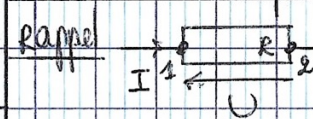
Si absence de source de chaleur ($P_{\text{créée, vol}} = 0$), alors $\text{div } \vec{J}_Q = 0$ et on dit que $\vec{J}_Q$ est à flux conservatif, i.e. le flux Φ_{Th} de $\vec{J}_Q$ se conserve entre l'entrée et la sortie d'un tube de flux thermique

$$\oint_{(S_1)} \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = \oint_{(S_2)} \vec{J}_Q \cdot d\vec{S}$$
 avec les dS de même sens.

par $\oint \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = 0$



2) Résistance Thermique



Loi d'Ohm : $U = RI \Leftrightarrow I = \frac{V_2 - V_1}{R}$
avec $I = \dot{Q}$

En conduction thermique, une différence de flux thermique génère un flux thermique par conduction.

def. La résistance thermique R_{Th} est définie telle que $T_1 - T_2 = R_{Th} \Phi_{Th}$
avec R_{Th} en $[K \cdot W^{-1}]$

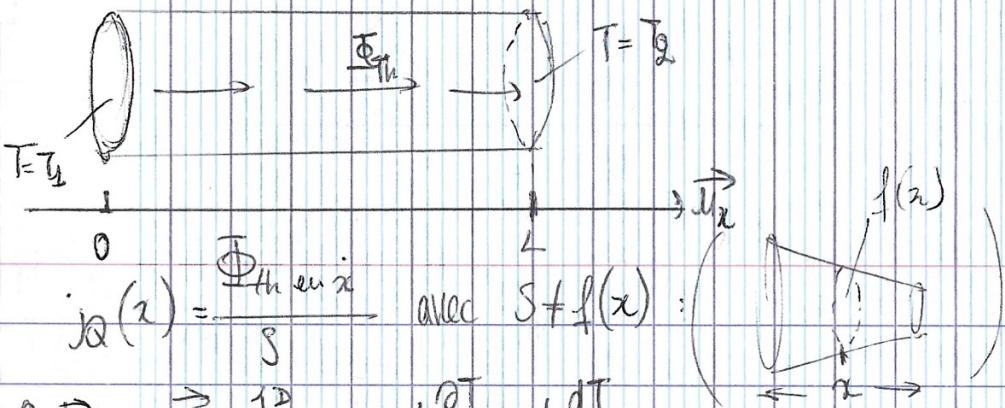
Rem. Cette notion ne s'applique que si on est en régime permanent et sans source de chaleur dans le volume (même en régime quasi permanent)

def. On définit la conductance thermique comme étant l'inverse de R_{Th} , i.e.

$G_{Th} = R_{Th}^{-1}$

3) Calcul de R_{Th} en dim. 1. (dans les bonnes conditions)

But : Calculer la résistance R_{Th} d'un barreau de longueur L et de section S :



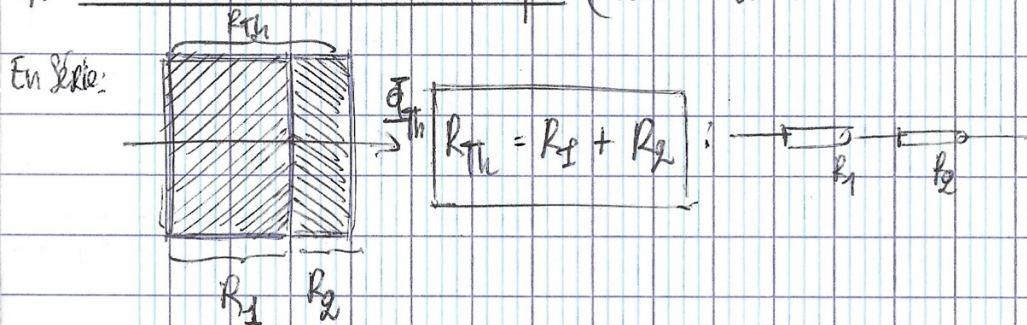
Or $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T \Rightarrow q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\Phi_{Th}}{S} \Rightarrow T(x) = -\frac{x}{\lambda} \frac{\Phi_{Th}}{S} + C^k$

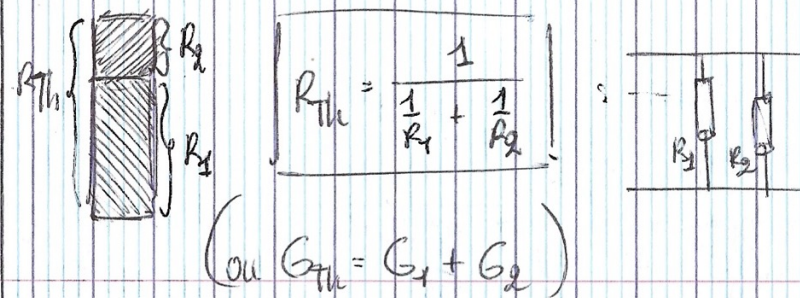
Or $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2 \Rightarrow C^k = T_1$ et $-\frac{L}{\lambda} \frac{\Phi_{Th}}{S} = T_2 - T_1$

$\Rightarrow \Phi_{Th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{Th}}$ avec $R_{Th} = \frac{L}{\lambda S}$ (à savoir démontrer)

4) Association de résistance thermique (comme en élec)



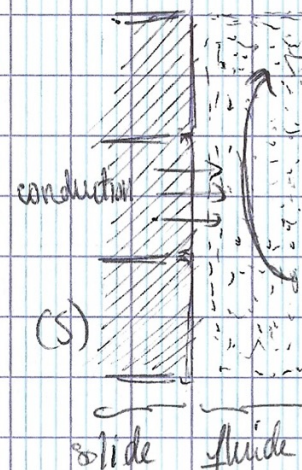
En dérivation:



FIN DU II

III. Les autres types de transfert thermique

1) Transfert conductoconvectif (Loi de Newton)



Les deux phénomènes ayant lieu simultanément.

Très compliqué à modéliser. $\Rightarrow$ on se contente d'une loi phénoménologique: la Loi de Newton:

$$\Phi_{S \rightarrow F} = h(T_S - T_F)$$

sur la surface

Sur une surface dS durant dt , $dQ_{S \rightarrow F} = h(T_S - T_F) dS dt$

2) Rayonnement thermique

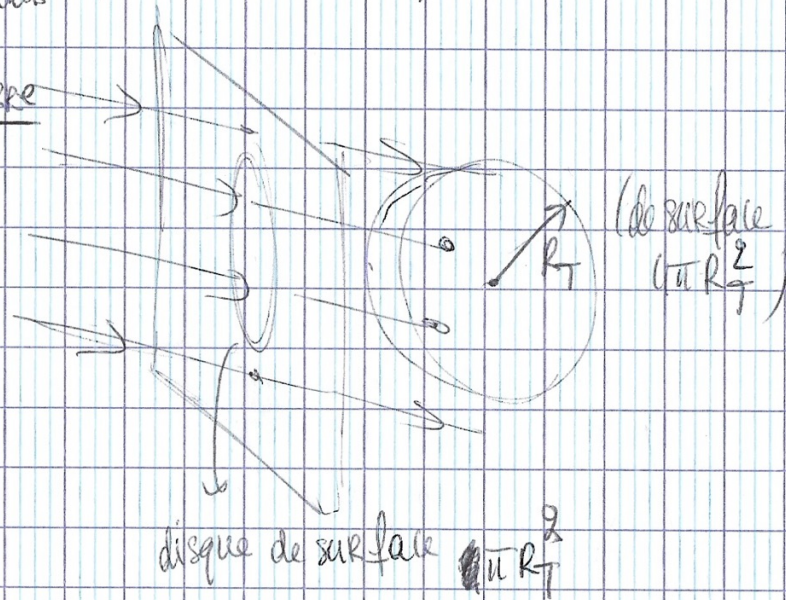
Def. Un corps est dit « noir » s'il absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit.
Rem Sur un intervalle de longueurs d'ondes, en pratique.

A l'équilibre thermodynamique, un corps noir émet son propre rayonnement dont le spectre ne dépend que de sa température.

Loi de Wien Le maximum du spectre d'un corps noir se situe à la longueur λ_{max} telle que $\lambda_{max} = \frac{c}{T}$ avec $c = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

Loi de Stefan : La puissance surfacique émise par un corps noir vaut $P_{\text{surfacique, émis}} = \sigma T^4$ avec $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

3) Effet de serre

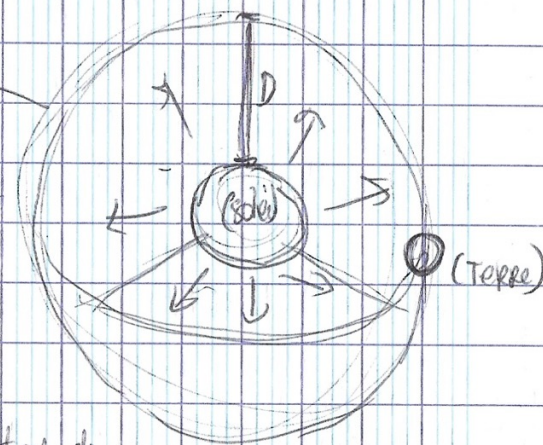


La surface de la Terre reçoit une puissance $P = P_s \times \pi R_T^2$

La puissance surfacique moyenne reçue du soleil sur la Terre vaut donc : $P_{\text{moy}} = \frac{P_s \cdot \pi R_T^2}{4\pi R_T^2} = \frac{P_s}{4}$

$$P_{\text{émis}} = \frac{P_{\text{émis}}}{4\pi R_T^2}$$

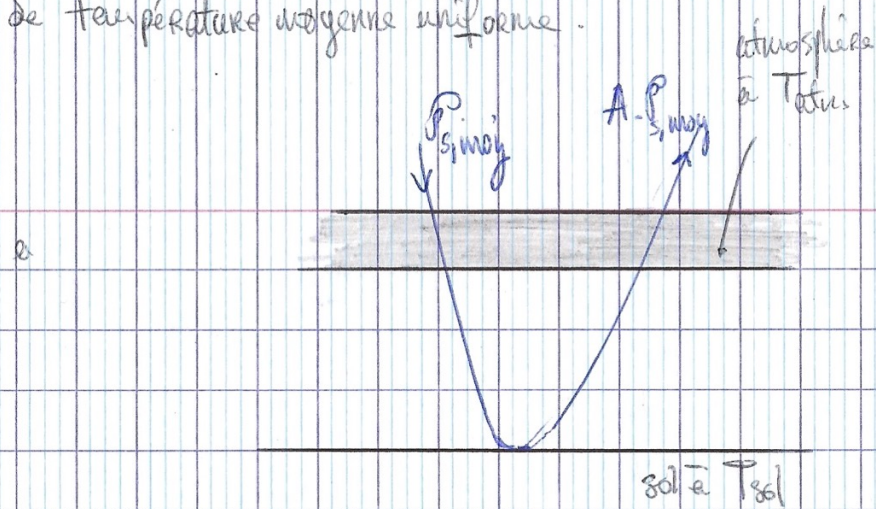
On raisonne sur un élément de surface de la Terre moyenne dans le temps



A. « albédo » : c'est la fraction de puissance réfléchi (0,3 en moyenne sur Terre)

On peut estimer la température moyenne en l'assimilant à un corps noir (grâce à un bilan thermique). En régime permanent, pas d'accumulation de chaleur et donc $P_{\text{absorbée}} = P_{\text{émise}}$.
Soit $(1-A)P_{\text{moy}} = \sigma T_{\text{sol}}^4 \Rightarrow T_{\text{sol}} = \left(\frac{(1-A)P_{\text{moy}}}{\sigma} \right)^{1/4}$. En moyenne : $T_{\text{sol}} \approx -18^\circ \text{C}$

On améliore le modèle en assimilant l'atmosphère à une
fine couche de température moyenne uniforme.



De plus, le sol va absorber tout le rayonnement infrarouge
émis par l'atmosphère vers le bas. En régime permanent:

Pour l'atmosphère: $\sigma T_{sol}^4 = 2\sigma T_{atm}^4$ (vers le haut + vers le bas)

Pour la Terre: $(1-A)P_{s, moy} + \sigma T_{atm}^4 = \sigma T_{sol}^4$

$$\Rightarrow T_{atm} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T_{sol} \Rightarrow (1-A)P_{s, moy} = \sigma T_{sol}^4 - \frac{\sigma}{2} T_{sol}^4 = \frac{\sigma}{2} T_{sol}^4$$

$$\Rightarrow T_{sol, atm} = \sqrt[4]{2} T_{sol, sans atm} \quad (AN: T_{sol, atm} = 23^\circ C)$$

L'absorption des IR par l'atmosphère n'est que partielle
seule une fraction f est absorbée.

f augmente à cause des gazs à effets de serre.

En 2025: $\Delta T \approx 1,5^\circ C$ depuis l'ère préindustrielle