Topologie / Suites de Cauchy

Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{K}$-evn complet

déf. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (x_n) est de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, \|x_p - x_q\|$$

2.a. Cauchy $\Rightarrow$ Convergent ? Soit (x_n) une suite de Cauchy.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq n, \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2^k}$

On peut prendre $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(1) = \max(\varphi(0), n_1) + 1 > \varphi(0)$ et ainsi de suite.

(n_k) est une suite d'entiers strictement croissante et $\|x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$

Par Thm de Comparaison $\sum (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)})$ converge absolument

d'où par complétude $\ell \in E$ tel que $x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(0)} \xrightarrow{k \to +\infty} \ell$ par télescopage.

Par définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0, \|x_{\varphi(k)} - \ell'\| \leq \varepsilon \text{ avec } \ell' = \ell + x_{\varphi(0)}$$

On pose $N_0 = \varphi(k_0)$, d'où pour tout $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \|x_n - \ell'\| &= \|x_n - x_{N_0} + x_{N_0} - \ell'\| \\ &\leq \|x_n - x_{N_0}\| + \|x_{N_0} - \ell'\| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

2.c. (Thm de Baire) Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E.

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E.

Applis Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(nx) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$
Alors $f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$
Alors f est polynômiale.

Preuve Soit $x \in E$. Il suffit de montrer que pour tout voisinage ouvert V de x, $V \cap \Omega \neq \emptyset$ (*) En effet si c'est le cas, on a :

Pour $V_1 = B_o(x, 1)$. On a $V_1 \cap \Omega \neq \emptyset$. Soit $x_1 \in V_1 \cap \Omega$

De même pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in V_n \cap \Omega$ avec $V_n = B_o(x, \frac{1}{n})$

Alors $\|x - x_n\| \to 0$ d'où $x_n \to x$ par thm d'encadrement.

Réciproquement, Ω dense $\Rightarrow$ (*)

Soit V un voisinage de x. Ω_0 est dense + ouvert, donc $V \cap \Omega_0 \neq 0$ et $V \cap \Omega_0$ est un ouvert.

Soit $x_0 \in V \cap \Omega_0$. Il existe $R_0 > 0$ tel que $B_f(x_0, R_0) \subseteq V \cap \Omega_0$

On peut choisir R_0 arbitrairement petit. On choisit $R_0 < \frac{1}{2^1}$. On note $B_{(0)} = B_f(x_0, R_0)$. Alors $\delta B_{(0)} = 2R_0 < \frac{1}{2^0}$ et :

$\mathring{B}_{(0)} = B_o(x_0, R_0)$ donc $\mathring{B}_{(0)} \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ par densité de Ω_1 dans E

D'où $x_1 \in E$ et $R_1 > 0$ tels que $B_{(1)} \overset{\text{déf}}{=} B_f(x_1, R_1) \subseteq \mathring{B}_{(0)} \cap \Omega$.

On peut supposer $R_1 < \frac{1}{2^2}$ et ainsi de suite tel que $B_{(n)} = B_f(x_n, R_n) \subseteq \mathring{B}_{(n-1)} \cap \Omega_n$ avec $\delta(B_{(n)}) < 1/2^n$.

Par Thm d'encadrement, $\delta(B_{(n)}) \longrightarrow 0$ et par 2b, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{(n)} = \{\ell\}$

On a alors $\ell \in V \cap \Omega$ et donc $V \cap \Omega \neq \emptyset$

3. Si E admet une base dénombrable alors E n'est pas complet.