

Topologie sur un K-evn

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K-evn.

def Soit $\Omega \subseteq E$. On dit que Ω est un ouvert de E si

$$\forall x \in \Omega, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B_0(x, r) \subseteq \Omega$$

prop. $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ est une famille d'ouverts, Alors $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert

Si $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sont n ouverts, $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ est un ouvert

Si Ω_1 est un ouvert de $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, \Omega_n$ est un ouvert de $(E_n, \|\cdot\|_n)$ Alors $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ est un ouvert de $(E_1 \times \dots \times E_n, \|\cdot\|_\infty)$ avec $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$

preuve. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{i_0}$, d'où $r > 0$ tel que

$$B_0(x, r) \subseteq \Omega_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i \text{ c.q.f.d.}$$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $r_i > 0$ tel que $B_0(x, r_i) \subseteq \Omega_i$

On pose $R = \min \{r_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Alors $B_0(x, R) \subseteq B_0(x, r_i) \subseteq \Omega_i \forall i$ d'où

$$B_0(x, R) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \Omega_i \text{ c.q.f.d.}$$

def. Soit $x_0 \in E$. Soit V une partie de E . On dit que V est un voisinage de x_0 dans E si il existe $R > 0$ tel que $B_0(x_0, R) \subseteq V$

Ainsi un ouvert Ω est voisinage de tous ses points.

prop. Toute réunion quelconque, intersection finie de voisinages de x_0 sont encore des voisinages de x_0 .

def. Soit $F \subseteq E$. On dit que F est fermée / est un fermé de E si $E \setminus F$ est un ouvert.

prop. On déduit les props duales à celle des ouverts par les Lois de De Morgan

prop. $\emptyset$ et E sont à la fois ouvertes et fermées.

def. On définit $S(x_0, R)$ la sphère de rayon $R > 0$ et de centre de x_0 par:

$$S(x_0, R) = \{y \in E : \|x_0 - y\| = R\} = B_F(x_0, R) \setminus B_0(x_0, R) = B_F(x_0, R) \cap (E \setminus B_0(x_0, R))$$

def. Soit $x \in E$. Soit $A \subseteq E$. On dit que x est un point intérieur à A si il existe $R > 0$ tel que $B_0(x, R) \subseteq A$. On dit que x est un point adhérent de A si il existe une $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

On note $\overset{\circ}{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : x \text{ est intérieur à } A\}$ et $\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : x \text{ est adhérent de } A\}$

prop. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A

$\bar{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A

Thm i) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d(x, A) = 0$

ii) A est fermée $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow \forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, (x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A)$ (Stabilité par passage à la limite)

def. On définit la frontière de A , notée ∂A par $\partial A \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

prop. $x \in \partial A \Leftrightarrow \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \exists (y_n) \in (E \setminus A)^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow x$

$$\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}_+^*, B_0(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B_0(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$$

def. On dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$ i.e. $\forall x \in E, \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x$

HP: On peut définir A dense dans $B \subseteq E$ si $A \subseteq B$ et $\forall x \in B, \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x$.

Thm (de Stone-Weierstrass) Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Alors $\mathbb{K}[X]$ est dense dans E (par abus de notation)

i.e. $\forall f \in E, \exists (P_n) \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}, \|P_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (DLGB pour la preuve)