

Topologie II

Compacité



fermé
borné
Bolzano-Weierstrass

Maths-TPI*

Soit E un K -evn. Soit $K \subseteq E$.

On dit que « K est un compact » si K a la propriété de Bolzano-Weierstrass
i.e. $\forall (x_n) \in K^{\mathbb{N}}, \exists \varphi$ une extractrice, $x_{\varphi(n)}$ converge vers $l \in K$

Thm. 1. Si K est un compact, alors K est fermé et borné.

preuve. On suppose K compacte

K fermée? Soit $(y_n) \in K^{\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in E$.

Par définition, $\exists$ existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $y_{\varphi(n)} \rightarrow l \in K$
Par thm. sur les suites extraites, $l' = l \in K$, d'où K fermé

K bornée? Raisonnons par l'absurde: supposons que $\forall n > 0, \exists x_n \in K, \|x_n\| > n$

En particulier: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in K, \|x_n\| > n$. (x_n) est une suite de $K^{\mathbb{N}}$. D'où, par compacité, $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow l \in K$

Or $\|x_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \rightarrow +\infty$. Or $(x_{\varphi(n)})$ est convergente donc bornée: contredit $\|x_{\varphi(n)}\| \rightarrow +\infty$ $\square$

prop 2 On suppose K compacte.

i) Soit F un fermé de E , alors $F \cap K$ est un compact.

ii) Tout fermé $F \subseteq K$ est un compact de E .

preuve i) Soit F un fermé de E , $G = F \cap K$.

Soit $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$. Alors $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$

D'où φ telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow l \in K$. De plus $(x_{\varphi(n)}) \in F^{\mathbb{N}}$.

Comme F fermé, $l \in F$. Ainsi $x_{\varphi(n)} \rightarrow l \in G = F \cap K$.

ii) Dans le cas $F \subseteq K, F \cap K = F \rightarrow$ Découle de i). $\square$

Thm. 3 (Critère de Convergence dans un compact)

Si K est un compact, alors pour toute $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$,

(x_n) est convergente $\iff \text{card Adh}(x_n) = 1$

preuve. On suppose K compact. On fixe $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

$(\implies)$ Supposons que $x_n \rightarrow l$. Soit φ une extractrice. Alors $x_{\varphi(n)} \rightarrow l$ et l est la seule valeur d'adhérence possible pour (x_n) .

$(\impliedby)$ Supposons que $\text{Adh}(x_n) = \{l\}$ avec $l \in E$. Par compacité, il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow l' \in K$. Donc $l' \in \text{Adh}(x_n)$

Par unicité, $l = l' \in K$. Ainsi $x_{\varphi(n)} \rightarrow l \in K$. Montrons que $x_n \rightarrow l$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \geq n, \|x_n - l\| \geq \varepsilon)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \geq n, \|x_{k_n} - l\| \geq \varepsilon$. On pose donc $\tilde{\varphi}(0) \stackrel{\text{def}}{=} k_0$ et $\tilde{\varphi}(1) \stackrel{\text{def}}{=} k_{k_0+1}$, etc. en sorte que $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ soit strictement croissante

et vérifie $\|x_{\tilde{\varphi}(n)} - l\| \geq \varepsilon$. Or $\|x_{\tilde{\varphi}(n)} - l\| \rightarrow 0$ (extraire)

Par passage à la limite (tout converge) $0 \geq \varepsilon$: contradiction $\square$

prop 4 Soient K_1 compact de E_1 un evn, ..., K_n compact de E_n un evn,

Alors $K_1 \times \dots \times K_n$ est un compact de $E_1 \times \dots \times E_n$ evn.

preuve. (Procédé Diagonal) Soit $(x^{(k)}) \in K^{\mathbb{N}}$ avec $K = K_1 \times \dots \times K_n$.

On pose $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$

K_1 compact: il existe $\varphi_1 + \varphi_1 x_1^{(\varphi_1(k))} \rightarrow l_1 \in K_1$

K_2 compact: il existe $\varphi_2 + \varphi_2 x_2^{(\varphi_1 \circ \varphi_2(k))} \rightarrow l_2 \in K_2$

donc $x_1^{(\varphi_1 \circ \varphi_2(k))} \rightarrow l_1$ (thm sur les suites extraites)
 Par récurrence on construit $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n$ telle que
 $\forall i \in [1, n], x_i^{(\varphi(k))} \rightarrow l_i$ avec $\varphi = \prod_{j=1}^n \varphi_j$

Donc (pour $\|\cdot\|_\infty$): $x^{(\varphi(k))} \rightarrow (l_1, \dots, l_n) = l \in K_1 \times \dots \times K_n = K$
 $\square$

Rq Voir Thm de «Tikhonov»

App5. Soit (u_n) convergente vers $l \in E$. Soit $K = \{u_n : n \in \mathbb{N} \cup \{l\}\}$

On pose $u_{-1} := l$ en sorte que $K = \{u_n : -1 \leq n\}$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon$.

Soit $A = \{u_k : k \in [-1, n_0-1]\}$. Soit $(v_n) \in K^\mathbb{N}$.

1^{er} cas: S'il existe une infinité de n tels que $v_n \in A$.

Par le Principe de Dirichlet, il existe une infinité de n tels que

v_n est égale à l'une des valeurs de A .

D'où $k_0 \in [-1, n_0-1]$ tel qu'il existe une infinité de n tq $v_n = u_{k_0}$.

Donc il existe une suite extraite de v_n constante égale à u_{k_0} .

$(l \text{ tq } v_{\varphi(n)} \rightarrow u_{k_0} \in K)$

2^{ème} cas Si $\{n \in \mathbb{N} : v_n \in A\}$ est fini. Soit n_1 un majorant de cet ensemble. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow v_n \notin A$, d'où k_n tel que $v_n = u_{k_n}$ et donc il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = u_{k_1}$ et $k_1 \geq n_0$.

(On peut supposer (quitte à faire un procédé diagonal) (k_n) strictement croissante) et on a: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \|v_n - l\| = \|u_{k_n} - l\| \leq \varepsilon$

$\square$ D'où dans les deux cas une suite extraite de (v_n) qui converge dans K

Appl5 (Procédé Diagonal Infini) Soit $K = \{(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \forall p, |u_p| \leq \frac{1}{2^p}\}$
 K compact de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$? Soit $(u_n) \in K^\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (u_{n,p}) \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} \quad |u_{n,p}| \leq \frac{1}{2^p}$$

i.e. $u_{n,p} \in B_{\mathbb{C}}(0, 1/2^p)$ donc $(u_{n,p}) \in (B_{\mathbb{C}}(0, 1/2^p))^\mathbb{N}$.

Or $B_{\mathbb{C}}(0, 1/2^p)$ est un compact de $\mathbb{C}$ qui est un evn de dim finie
 Par Toro1, $B_{\mathbb{C}}(0, 1/2^p)$ est un compact.

Il existe $\varphi_p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi_p(n), p} \rightarrow l_p \in B_{\mathbb{C}}(0, 1/2^p)$

$$u_{\varphi_p(n), p} \rightarrow l_p \in B_{\mathbb{C}}(0, 1/2^p)$$

On pose $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $\psi_n = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$

ψ est strictement croissante et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(u_{p, \psi(n)})_{n \geq p}$ est une suite extraite de $(u_{p, \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(n)})_{n \geq p}$ si bien que $u_{p, \psi(n)} \rightarrow a_p$

Or $|u_{p, \psi(p)}| \leq 1/2^p$ donne $|a_p| \leq 1/2^p$ par passage à la limite

Ainsi, $\sum a_p$ converge absolument donc converge et $(a_n) \in \ell^1$

$\Rightarrow$ à reprendre.

Appl 7 Soient A, B deux fermés de E . cf. Topo 2: $A+B$ pas fermé

Si A est fermé, B compact: On pose $C = A+B$.

Soit $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que (x_n) converge vers $x \in E$.

On écrit $x_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in A^{\mathbb{N}}$, $b_n \in B^{\mathbb{N}}$.

Or B est compact, d'où $\exists$ telle que $b_{\varphi(n)} \rightarrow b$

Ainsi $a_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)} \rightarrow x - b$
 $\in A$ donc $x - b \in A$ car A est fermé

$x = (x - b) + b \in A + B$, d'où C fermé.

Si A et B sont compacts. Soit $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ avec $x_n = a_n + b_n$

(a_n) est une suite d'éléments de A qui est compact, d'où $\exists$ telle que $a_{\varphi(n)} \rightarrow a \in A$. De même il existe ψ telle que

$b_{\psi(n)} \rightarrow b \in B$. Alors $a_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow a$ (thm sur les suites extraites)

d'où $x_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow a + b \in C$ et C fermé compact

Pour le contre exemple:

$A = \mathbb{Z} \rightarrow A+B = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ sous groupe additif de $\mathbb{R} \Rightarrow$ dense

$B = \sqrt{2}\mathbb{Z} \quad \overline{A+B} = \mathbb{R} \neq \mathbb{N}$

donc $A+B \neq \overline{A+B}$ et $A+B$ n'est pas fermé.

Appl 8 (Thm de Rice) $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{k \in [0, n]} |a_k|$ pour $n \geq \deg P$

$\|X^n\|_{\infty} = \|1 \cdot X^n\|_{\infty} = 1$
 $\|X^n - X^m\|_{\infty} = 1 \quad (*)$ } impossible: contredit la convergence

Par l'absurde, supposons que $B_f(0, 1)$ soit compact (on note $B = B_f(0, 1)$)

Soit $(X^n) \in B^{\mathbb{N}}$. Puisque B est compact, il existe φ telle que

$X^{\varphi(n)} \rightarrow P \in B$. Donc $\|X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}\|_{\infty} \rightarrow 0$

Or $\|X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}\|_{\infty} = 1 \quad (*)$ car φ strictement croissante

Unicité de la limite: $1 = 0$: impossible.

Appl 9 Soit K un fermé non vide. Montrer que: de K

K compact $\Leftrightarrow$ Pour toute suite (F_n) de fermés non vides "décroissante",

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est non vide.

$(\Rightarrow)$ Supposons K compact. Soit (F_n) comme ci-dessus.

On pose $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. F_n est non vide. D'où $a_n \in F_n \subset K$

On construit ainsi $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Puisque K compact, il existe φ telle que $a_{\varphi(n)} \rightarrow a \in K$, et $a_{\varphi(n)} \in F_{\varphi(n)} \subseteq F_n$ car $\varphi(n) \geq n$ (cf. 10)

(comme F_n est fermé, $a \in F_n$, d'où $a \in F$ qui est non vide.

$(\Leftarrow)$ Soit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$

On a $F_{n+1} \subseteq F_n$ donc $\overline{F_{n+1}} \subseteq \overline{F_n}$ et (F_n) décroissante

et F_n fermé non vide. Par hypothèse, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est non vide

Soit $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Pour tout n , $l \in F_n = \overline{V_n}$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n \geq n$ et $\|x_{k_n} - l\| \leq \varepsilon$. On ~~constate~~ construit ainsi φ strictement croissante telle que $\|x_{\varphi(n)} - l\| \leq \varepsilon$, d'où $x_{\varphi(n)} \rightarrow l$ avec $l \in K$ d'où K compact.

Appli 10 (Théorème du Point Fixe) Soit X un compact non vide de E et $f: X \rightarrow X$ continue sur X . On définit (u_n) telle que $u_0 \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On note $A = \text{Adh}((u_n))$. A compact de E non vide tq $f(A) = A$?

On a $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$ avec $V_n = \{u_k : k \geq n\} \subseteq X$. Par l'exercice précédent, A est non vide, fermé par intersection quelconque de fermés. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $V_n \subseteq X$ donc $\overline{V_n} \subseteq X$ d'où $A \subseteq \overline{X} = X$. Par thm, A est compact.

[C] Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Il existe φ telle que $u_{\varphi(n)} \rightarrow a$. Donc $y = \lim f(u_{\varphi(n)})$. Par définition, $f(u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)+1}$ car $u_{\varphi(n)+1} = u_{\varphi(n)}$ avec φ strictement croissante. Comme A fermé, $y \in A$.
 $\downarrow$ converge dans A

[D] Soit $a \in A$. Il existe φ telle que $u_{\varphi(n)} \rightarrow a$

suite d'éléments de A qui est compact, qu'on note $u_{\varphi(n)}$

$\forall n \geq 1$, $\varphi(n) \geq 1$ et $u_{\varphi(n)} = f(u_{\varphi(n)-1})$. Il existe ψ telle que $(u_{\varphi \circ \psi(n)})$ converge vers $l \in A$. Or $u_{\varphi \circ \psi(n)} = f(u_{\varphi \circ \psi(n)-1}) = f(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(l)$ par cont. Par unicité, et comme; $u_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow a$, et $l \in A \subseteq X$, $a = f(l)$, donc $a \in f(A)$.

Supposons f strictement contractante sur X (C lipschitzienne avec $C > 1$). Unicité Soient $l \neq l'$ tels que $f(l) = l$ et $f(l') = l'$.

Donc $\|f(l) - f(l')\| \leq C \|l - l'\|$ d'où $\|l - l'\| \leq C \|l - l'\|$ impossible donc $l = l'$.

j'ai pas écouté la suite R.I.P.

Montrer qu'un sup est atteint et vaut l dans un compact K

① Caractérisation séquentielle: il existe $(z_n) \in K$ avec $z_n \rightarrow S$

② K compact: il existe φ tq $z_{\varphi(n)} \rightarrow z$

③ Par passage à la limite, $S = z$

Espaces Vectoriels Normés en Dimension Finie



Thm 17. Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Thm 18. En dimension finie : Compact équivaut à Fermé et Borné.

Thm 19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -evn de dimension finie.

- i) Toutes les boules fermées sont des compacts.
- ii) Tous les sev de E sont fermés (en particulier E est fermé)
- iii) Les applications linéaires et multilinéaires sont continues
- iv) Pour toute suite bornée de E^N , il existe une suite extraite qui converge et de plus, on a la convergence équivaut à l'unicité de la valeur d'adhérence.

Appli 20 (Thm de d'Alembert Gauss) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $n = \deg P \geq 2$. On pose $m = \inf \{ |P(z)| : z \in \mathbb{C} \}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.
 $\{ |P(z)| : z \in \mathbb{C} \}$ est une partie non vide minorée par 0, d'où on existe m .
 On a : $|P(z)| \geq |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k$ d'où $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$.
 On a donc $R > 0$ tel $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R \Rightarrow |P(z)| \geq |P(0)| \geq m$.
 $\inf \{ |P(z)| : z \in B_{\frac{1}{2}}(0, R) \} = \inf \{ |P(z)| : z \in \mathbb{C} \}$ est atteint et $m = |P(z_0)|$ avec $z_0 \in B_{\frac{1}{2}}(0, R)$. Par l'absurde, on suppose que $m > 0$. Montrons que dans un voisinage de z_0 , il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_1)| < |P(z_0)| = m$. On aura alors la contradiction.

(13)

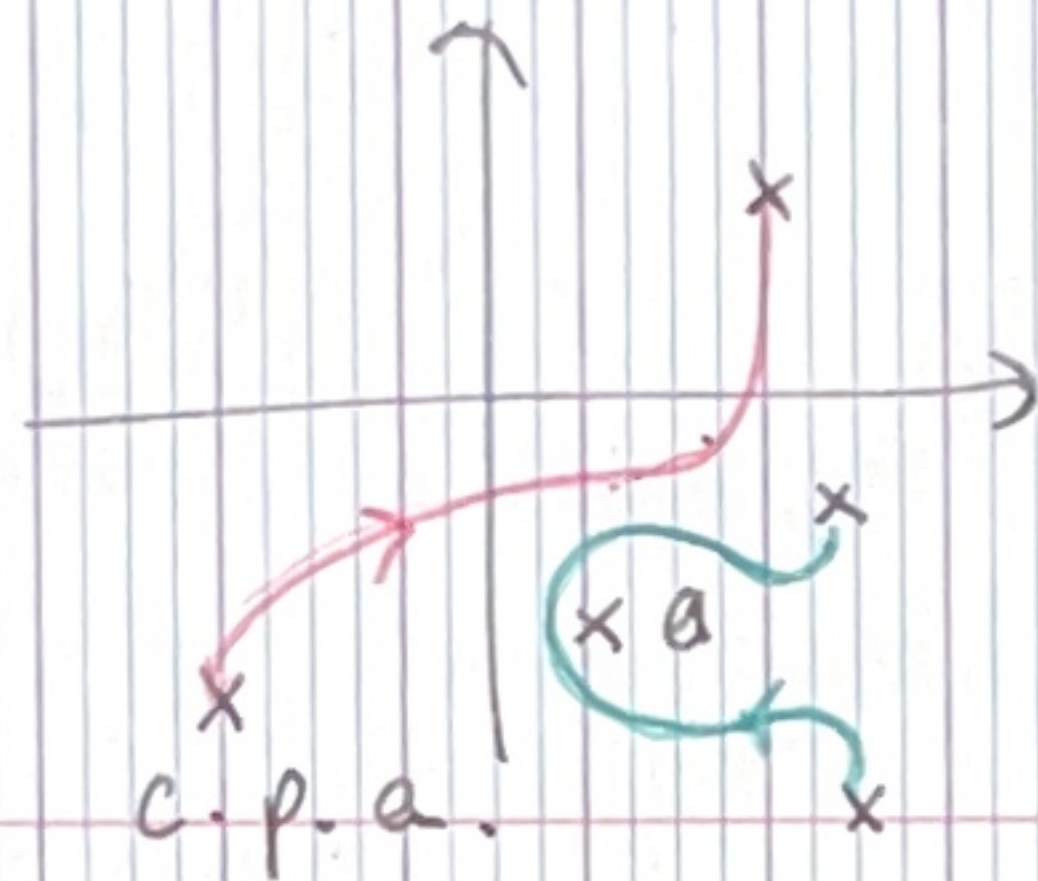
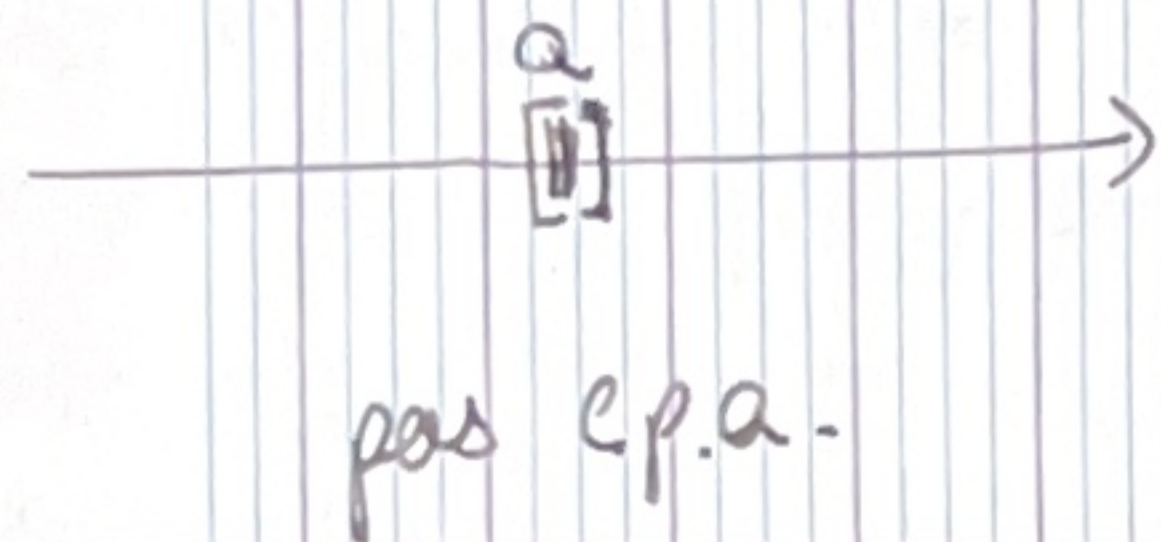
Taylor: $P(z_0 + z) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} z^k = \frac{P(z_0)}{0!} z^0 + \underbrace{\frac{P^{(l)}(z_0)}{l!} z^l}_{\neq 0} + \underbrace{\frac{P^{(l)}(z_0)}{l!} z^l + \sum_{k=l+1}^n \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} z^k}_{\neq 0}$
 avec l le plus petit indice tel que $P^{(l)}(z_0) \neq 0$ (existe car sinon P est constant), d'où Q tel que
 $P(z_0 + z) = P(z_0) + z^l Q(z)$ avec $Q(z) \neq 0$.
 donc $|P(z_0 + z)| = |P(z_0)| (1 + z^l \frac{Q(z)}{P(z_0)})$

Localement : $\frac{Q(z)}{P(z_0)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{Q(z_0)}{P(z_0)} = \lambda_0$ non nul. On pose $\lambda_0 = R_0 e^{i\theta_0}$.
 On prend $z = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/l} e^{-i\frac{\theta_0}{l}} e^{i\frac{\pi}{l}}$ avec $R > 0 \Rightarrow \lambda_0 z^l \rightarrow -R$
 $\left|1 - z^l \frac{Q(z)}{P(z_0)}\right| = 1 - R + o(R)$ en passant par la déf. de $|\cdot|$.
 < 1 pour R petit

Preuve Thm 16 Soit A une partie connexe par arcs. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction continue sur A à valeurs dans F un evn. On note $B = f(A)$. Soient $y, y' \in B$. Il existe $x, x' \in A$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
 A est connexe par arcs (c.p.a) : il existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = x'$. On pose donc $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$. $\tilde{\gamma}$ est continue par composition et $\tilde{\gamma}(0) = y, \tilde{\gamma}(1) = y'$ d'où B connexe par arcs. $\square$

Appli 21. Soit E un $\mathbb{R}$ -evn. Soit $a \in E$.
 Tlq: $E \setminus \{a\}$ est c.p.a. $\Leftrightarrow \dim E \neq 0, 1$. (i.e. $\dim E = \infty$ ou $\dim E \geq 2$)

(14)



dim $E = 0$ exclu par hypothèse.

1^{er} cas: Si $\dim E = 1$. Alors $E = \text{Vect}(e_1)$ avec $e_1 \neq 0$

Par l'absurde, supposons que $E \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

Prenons $x = (n_1 - 1)e_1$ et $y = (n_1 + 1)e_1$. On pose $A = E \setminus \{a\}$

Il existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

d'où: $\forall t \in [0, 1], \exists \varphi(t) \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \varphi(t)e_1$.

Cette fonction φ est $t \mapsto e_1^*(\gamma(t))$ (continue par composée)

$\varphi(0) = n_1 - 1$ et $\varphi(1) = n_1 + 1$, $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$n_1 - 1 \leq n_1 \leq n_1 + 1$. Par le TVI, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$\varphi(t_0) = n_1$, d'où $e_1^*(\gamma(t_0)) = n_1$ donc $\gamma(t_0) = n_1 e_1 = a$: impossible

2^{ème} cas Si $\dim E \geq 2$. Soient $x, y \in A$. On se ramène à

$a = 0$ par translation. Si $0 \notin [x, y]$ on peut prendre $\gamma(t) = \frac{(1-t)x}{1+t} + \frac{ty}{1+t}$

Alors γ est continue sur $[0, 1]$ et $\gamma(t) \neq 0$ par hypothèse.

γ est donc à valeurs dans $[x, y] \subseteq A$ et $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

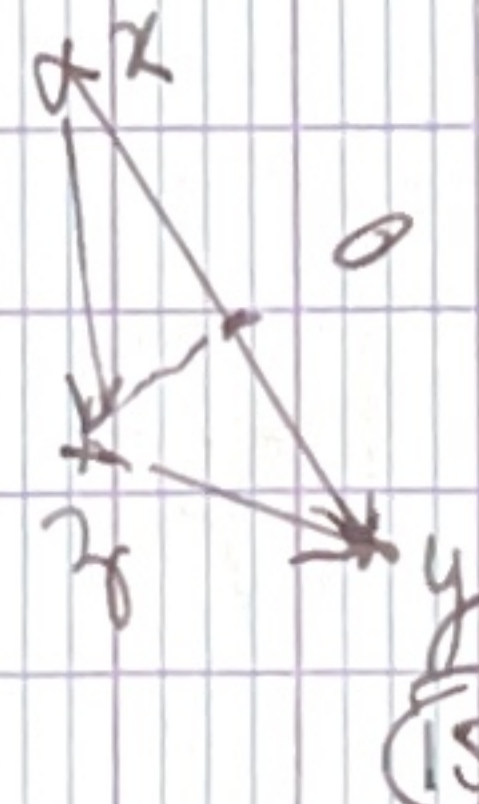
Si $0 \in [x, y]$, Alors (x, y) est liée. ($\exists t_0, -t_0 x = (1-t_0)y$)

De plus $\text{Vect}(x) \not\subseteq E$ ($1 < 2$). D'où $z \in E \setminus \text{Vect}(x)$

$x \overset{A}{\rightsquigarrow} x+z$? Si $0 \in [x, x+z]$, Alors $x+z = \lambda x$

donc $[x, x+z] \subseteq A = E \setminus \{0\}$: exclu, d'où $x \overset{A}{\rightsquigarrow} x+z$

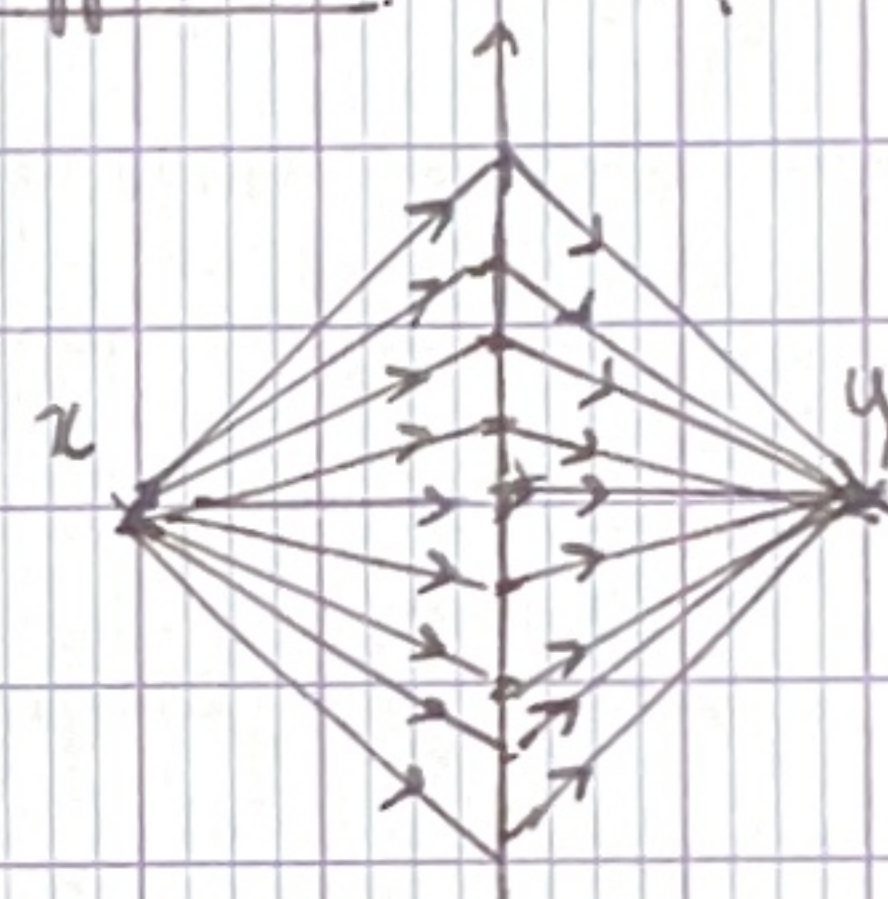
De même $y \overset{A}{\rightsquigarrow} y+z$



Si $0 \notin [x+z, y+z]$, Alors il existe t_1 tel que $t_1(x+z) + (1-t_1)(y+z) = 0$
donc $z \in \text{Vect}(x)$: exclu. Donc $x+z \overset{A}{\rightsquigarrow} y+z$

Par Sym+Transi: $x \overset{A}{\rightsquigarrow} y$

Appli 22 $\mathbb{R}^2 \setminus D$ connexe par arc si D au plus $\aleph_1$.



On construit un ensemble $\{\gamma_i: i \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$
avec γ_i un chemin reliant x à y grâce à
la médiatrice (qui correspond à $\frac{x+y}{2} + \text{Vect}(u)$
avec $u \perp x-y$)

Rq il existe car $\text{Vect}(x-y)^\perp = \mathbb{R}$.

Si pour tout $i \in \mathbb{R}$, il existe $t_i \in [0, 1]$ tel que $\gamma_i(t_i) \in D$.

Alors $\Phi: \mathbb{R} \hookrightarrow D$ est injective: impossible car D au plus

dénombrable (il existe $\Psi: D \hookrightarrow \mathbb{N}$ injective et dans ce cas

$\mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} D \xrightarrow{\Psi} \mathbb{N}$: absurde).

Rq $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
 $f: (x, y) \mapsto x+iy$ est bijective, continue, et linéaire: c'est un
homéomorphisme.



Applications continues sur un compact.

Fin Topo. III
Notas - TPI*

Thm 11. (Généralisation du thm des segments). L'image continue d'un compact est un compact.

Preuve. Soit K un compact, $f: K \rightarrow K$ une fonction continue.

Soit $(y_n) \in f(K)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f(K)$. D'où une suite (x_n) telle que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$. On a $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et K compact, d'où $\exists$ une extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow x_\infty \in K$.

Or $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x_\infty)$ par continuité de f sur K .

d'où $f(K)$ compact. $\square$

Cor 12 (Thm des bornes Atteintes) Soit K un compact, $f: K \rightarrow F$ une fonction continue sur K à valeurs dans F un K -evn. Alors:

$\sup \{f(x) : x \in K\}$ existe et est atteint. De même pour $\inf \{f(x) : x \in K\}$.

Preuve. On regarde $\varphi: x \mapsto \|f(x)\|_F$. φ est une application de K à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Par thm 11, $K' := \varphi(K)$ est un compact. (Soit $M = \sup K'$. Il existe $(y_n) \in K'$ telle que $y_n \rightarrow M$. Il existe $(x_n) \in K$ telle que $\|f(x_n)\|_F \rightarrow M$.) C'est même un compact de $\mathbb{R}$: donc K' fermé borné et $\sup K'$ existe et $M = \sup K'$ est dans K' . Donc il existe $x_0 \in K$, $\varphi(x_0) = M$. Idem pour $\inf$. $\square$

Thm 13 (de Heine) La continuité sur un compact implique l'uniforme continuité sur ce compact.

Preuve. Par l'absurde, supposons que f soit continue sur un compact K mais n'y soit pas uniformément continue.

$\exists$ existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $(x, y) \in K^2$ tel que $\|x - y\| < \eta$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$.

~~Soit $(x_n, y_n) \in K^2$ tel que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$. Or K^2 est compact, d'où $\exists$ telle que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \rightarrow (l_x, l_y)$. Par thm d'encadrement, $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \rightarrow 0$, d'où $l_x = l_y = l$.~~
 f est continue en $l \in K$.

donc $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(l)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(l)$
d'où $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \rightarrow \|f(l) - f(l)\| = 0$, d'où $0 \geq \varepsilon$: contradiction. $\square$

Appl 14. Soit X un compact de E . Soit $f: X \rightarrow Y \subseteq F$ un evn continue sur X et bijective. Tq: f^{-1} est continue.
Par thm, $f(X)$ est compact.

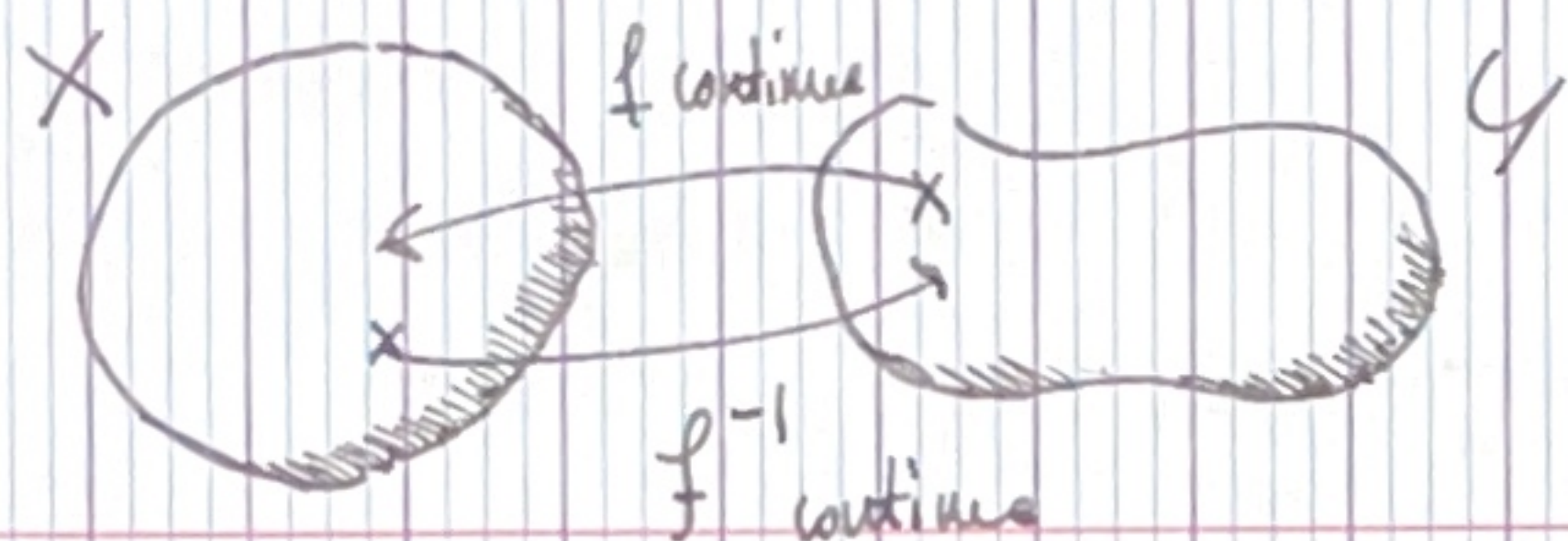
Caractérisation Séquentielle de la Continuité:

$\forall (y_n) \in f(X)^{\mathbb{N}}$, $y_n \rightarrow y \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(y_n)}_{x_n \in X} \rightarrow \underbrace{f^{-1}(y)}_{x \in X \text{ (compai)}}$

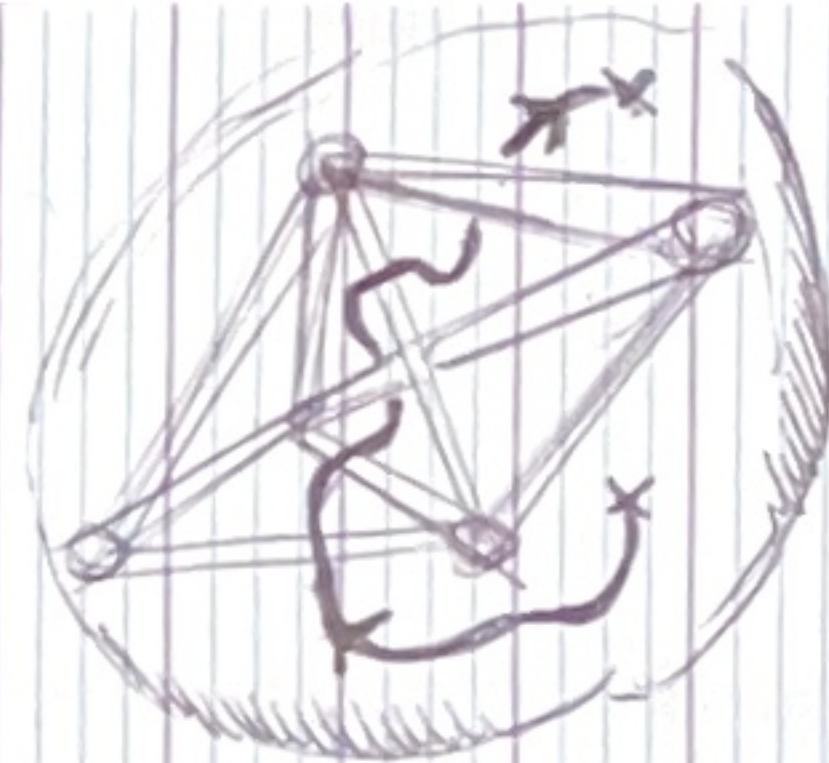
On a $x_n = f^{-1}(y_n)$ d'où $f(x_n) = y_n$. Tq: $x_n \rightarrow x$.
 (x_n) admet-elle une unique valeur d'adhérence?

Soit $a \in \text{Adh}((x_n))$. $\exists$ existe φ telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$
 $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(a)$ par continuité de f .
Par unicité, $y = f(a)$ d'où $a = f^{-1}(y)$. Ainsi $\text{Adh}((x_n)) = \{f^{-1}(y)\}$
et $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$.

Rq On dit aussi « f bicontinue » et « X et Y homéomorphes »



Connexité par Arcs



Soit A une partie d'un em E .

Soit $(a, b) \in A^2$, soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$. On dit que γ est un arc (sous-entendu continu) ou un chemin continu reliant a à b si:

i) γ est continue sur $[0, 1]$

ii) $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

La relation $R_A \subseteq A^2$: $a R_A b \iff$ il existe un arc reliant a à b .

est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalences de R_A sont appelées « composantes connexes dans A ».

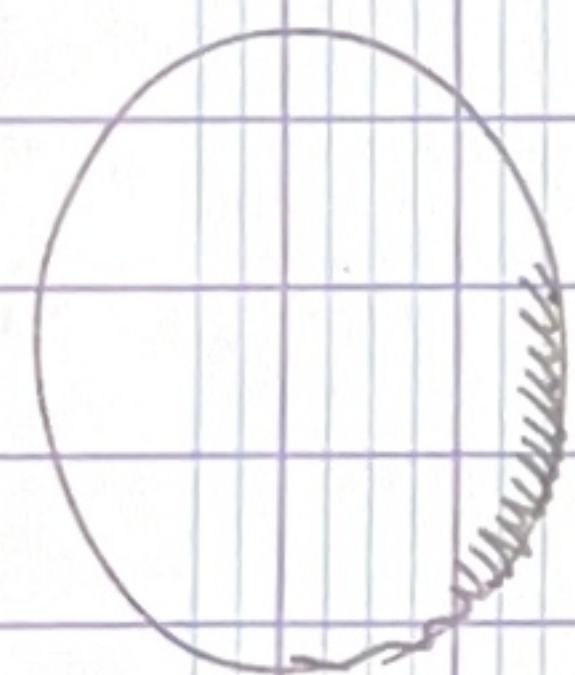
On dit que A est « connexe par arcs » si A possède unique composante connexe. (def très analogue aux graphes)

On dit que A est étoilé s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A, [a, x] \subseteq A$

Thm 15. Convexe ou Étoilé implique Connexe par Arcs.

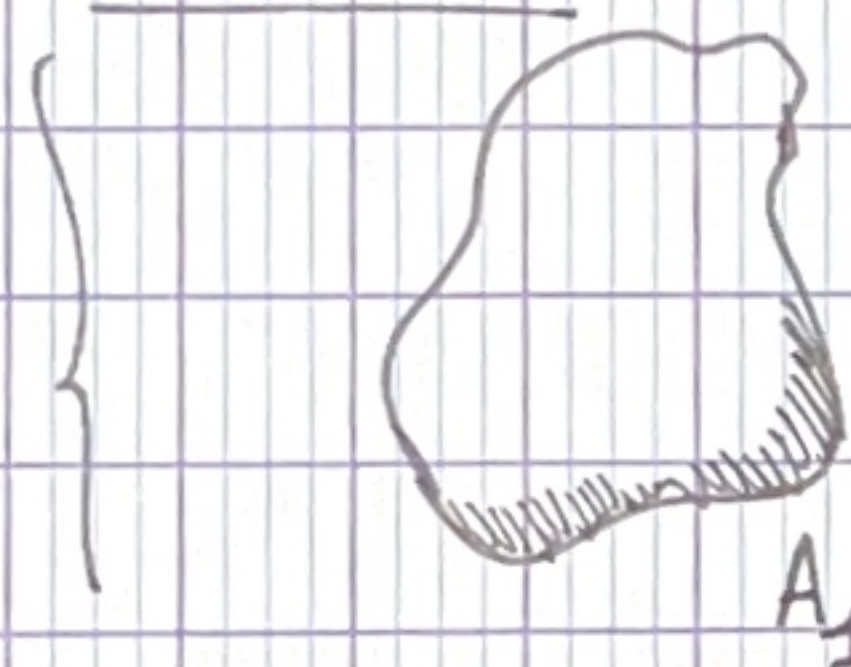
Thm 16. L'image continue d'une partie connexe par arcs est une partie connexe par arcs.

Appli dans l'exercice C7.



Partie convexe et connexe par arcs.

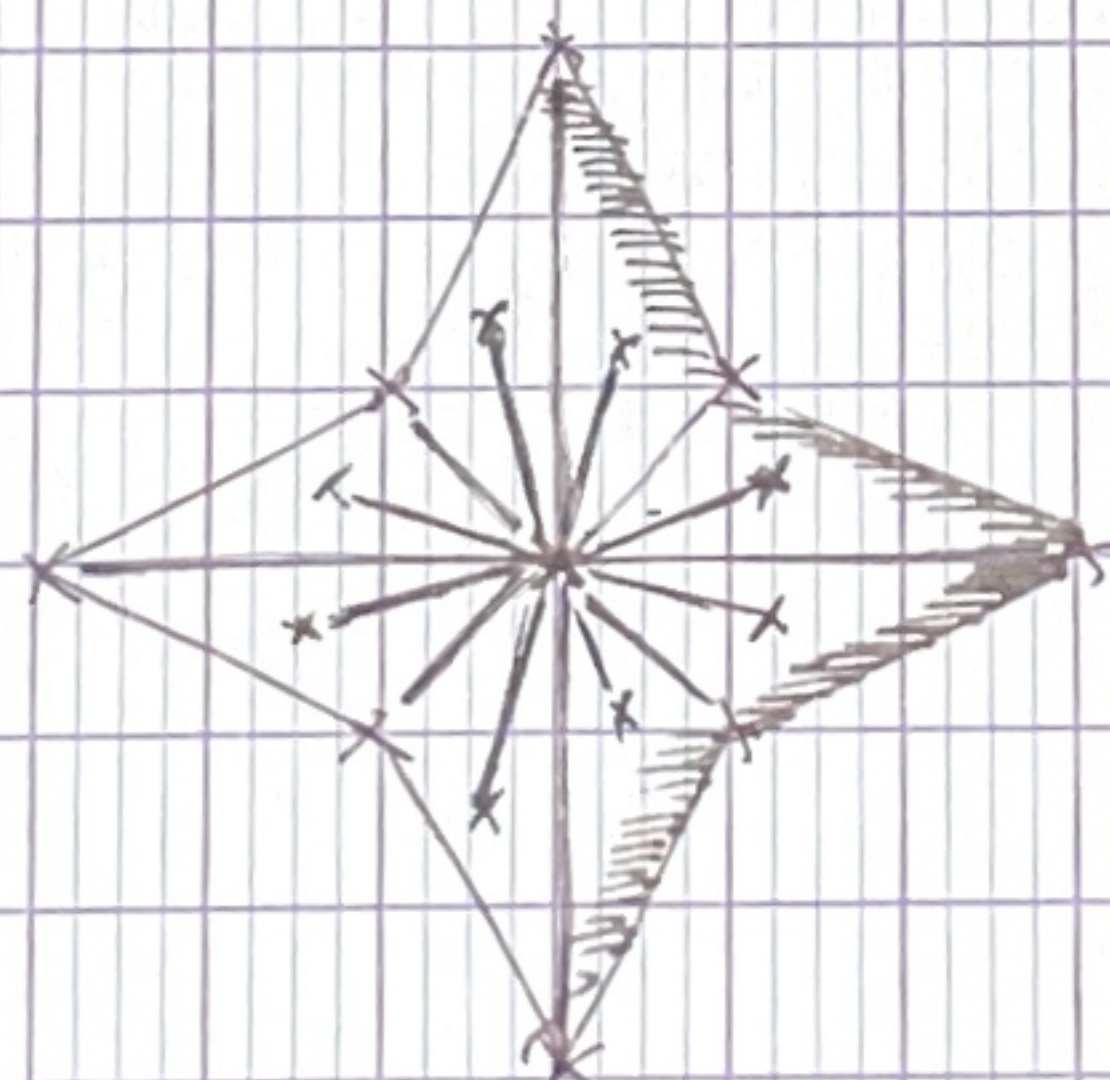
$$A = A_1 \cup A_2$$



Les composantes connexes sont A_1 et A_2



Partie non étoilée mais connexe par arcs.



Partie étoilée et connexe par arcs.