EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
ORAUX X-ENS

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*
10. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 1*
11. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 1*
12. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*
13. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 2*
14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 3*
15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *L'essentiel en théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
20. D. Perrin, *Mathématiques d'école*
22. P. Bourgade, *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*
23. V. Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*
24. R. Sá Earp, E. Toubiana, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*
25. L. Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
26. B. Candelpergher, *Calcul intégral*
27. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 1*
28. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 2*
29. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 3*
30. C. Zuily, *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
31. B. Makarov *et al.*, *Problèmes d'analyse réelle*
32. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 4*
33. E. Lehman, *Mathématiques pour l'étudiant de première année, vol. 1, Algèbre et géométrie*
34. F. Berthelin, *Équations différentielles*

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome III

Deuxième édition corrigée

CASSINI

SERGE FRANCINOU, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

HERVÉ GIANELLA, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal d'Orsay.

SERGE NICOLAS, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

ISBN 978-2-84225-214-4
(2e édition, 2014, nouveau tirage, 2019)
(1re édition, 2010, 978-2-84225-093-5)

Introduction

Cet ouvrage est le troisième tome d'analyse d'un recueil d'exercices de mathématiques destiné à la préparation des oraux des concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique. Il comportera sept tomes, trois d'algèbre et quatre d'analyse.

La vocation première des Écoles normales est de former des chercheurs ou des enseignants-chercheurs. Le concours d'entrée vise donc à détecter les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à la recherche. À l'oral, on jugera avant tout la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche. On ne sera pas surpris que les exercices posés aient un contenu mathématique riche, qu'ils soient très éloignés du simple exercice technique d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif. Ils pourraient apparaître excessivement difficiles, si on perdait de vue le déroulement concret de l'épreuve. L'oral des ENS est un long dialogue (l'épreuve dure environ cinquante minutes, comme d'ailleurs à l'École polytechnique) entre le candidat et l'examinateur, qui tout au long de l'épreuve fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion du candidat et tester ses réactions. Il est d'ailleurs impossible de rendre pleinement compte dans un recueil d'exercices du caractère oral de l'épreuve.

L'École polytechnique, quant à elle, est plus généraliste. Les exercices posés au concours sont de facture plus classique et, en règle générale, l'examinateur intervient moins. C'est au candidat de montrer sa maîtrise du programme dans la résolution d'un exercice dont la difficulté est cependant très variable. Certains sont proches des exercices d'ENS. Les énoncés circulent d'ailleurs d'un concours à l'autre, ou peuvent même être repris d'exercices d'Olympiades.

Les énoncés qui figurent dans ce recueil ont été donnés entre 1996 et 2010. Ils sont extraits pour l'essentiel des listes publiées chaque année par la RMS (*Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* aux éditions Vuibert jusqu'en 2003 et désormais *Revue de la filière Mathématiques* aux éditions e.net) dont nous remercions les auteurs pour l'aide précieuse qu'ils apportent ainsi aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires. Il s'agit de versions communiquées par les étudiants, reflétant la compréhension que ceux-ci ont eue de l'exercice et le déroulement conjoncturel de leur oral, comme le montrent les variations d'une année à l'autre pour un même exercice. Nous n'avons pas hésité à les modifier, pour rectifier des erreurs, compléter un énoncé quand manifestement l'exercice s'est arrêté avant que le résultat que l'examinateur avait en vue ne soit atteint, ou ajouter des indications.

Nous avons choisi de laisser quelques énoncés « bruts », ceux pour lesquels nous estimons qu'une démarche naturelle (qui peut être longue et ardue) permet de conduire à la solution. Pour d'autres exercices, nous avons pris la liberté de rajouter des questions intermédiaires, qui auraient pu être celles posées par l'examinateur. Quitte à perdre en concision, nous avons tenu à rédiger les solutions les plus pédagogiques possible, essayant d'exposer clairement les idées et démarches des raisonnements sans pour autant escamoter les détails ou calculs qui peuvent paraître évidents. On évite autant que possible l'introduction d'une astuce ou d'un objet *ad hoc* permettant d'atteindre rapidement la solution. S'il n'y a pas moyen d'expliquer l'origine de cette astuce, c'est que l'exercice est peu intéressant et que l'étudiant en tirera peu de profit.

À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices ont été regroupés thématiquement, et à l'intérieur de chaque thème, souvent par ordre de difficulté croissante. Ainsi regroupés, ils apparaîtront plus accessibles, car plongés dans leur contexte mathématique, éclairés par d'autres exercices voisins. Les introductions historiques qui ouvrent chaque chapitre, outre leur intérêt propre, visent au même but. Enfin, nous avons agrémenté les énoncés de quelques remarques préliminaires. Sans faire de rappels de cours systématiques, nous avons énoncé, voire redémontré certains résultats : lemmes classiques, intervenant dans la résolution d'un grand nombre d'exercices, ou résultats au contraire à la lisière du programme, mais utiles, pour lesquels des éclaircissements étaient nécessaires. On trouvera aussi des remarques de synthèse ou des généralisations qui, nous l'espérons, pourront amener le candidat curieux à approfondir ses connaissances. Les quelques indications bibliographiques ont le même objectif.

Le lecteur ne tirera profit de ce livre d'exercices que s'il cherche des solutions personnelles avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est indispensable. En effet, les théorèmes du programme fournissent bon nombre de schémas de démonstration. Rappelons aussi quelques démarches générales qui peuvent faciliter l'appréhension des exercices difficiles :

▷ en topologie, ne pas hésiter à faire une figure pour se faire une idée géométrique de la situation ;

▷ introduire des suites pour utiliser les caractérisations séquentielles des différentes notions (limite, compacité, complétude...) ;

▷ considérer les suites f récurrentes pour les questions de points fixes d'une fonction f ;

▷ en ce qui concerne les intégrales, les changements de variable et les intégrations par parties sont deux techniques à envisager en permanence ;

▷ commencer par un calcul formel (interversion série-intégrale, dérivation sous le signe intégral) pour s'assurer du bien-fondé de la démarche avant de justifier par les théorèmes *ad hoc*.

Au-delà des étudiants en classe préparatoire, ces ouvrages intéresseront aussi les candidats au CAPES et à l'Agrégation, qui y trouveront matière à réviser les principales notions du programme, ainsi que des exemples pour nourrir un développement pour leur oral.

Voyons maintenant plus précisément le contenu de ce tome 3 d'analyse. Il est centré sur la topologie, chapitre qui représente un bon quart du programme de mathématiques Spéciales. Les exercices sont répartis dans trois chapitres différents : le premier contient des exercices sur les normes, les notions topologiques associées, la convergence des suites et la continuité, notamment des applications linéaires. Le second est dédié aux notions de compacité et de connexité par arcs. Enfin le troisième est consacré aux exercices liés à la complétude et aux espaces de Hilbert. Le quatrième chapitre, est à part, et regroupe des exercices sur les intégrales sur un intervalle quelconque.

Comme dans les autres tomes, les exercices sont classés par thème. La difficulté est toutefois plutôt croissante : les chapitres commencent par des questions techniques ou des savoir-faire indispensables (comparaison de normes, étude d'intégrabilité...) et se terminent souvent par des exercices difficiles qui ont pour objet de démontrer des théorèmes du niveau licence ou master (prolongement de Tietze, théorème de Krein-Milman, théorème de Banach-Steinhaus, inversion de Fourier...).

Le quatrième et dernier tome d'analyse portera sur le calcul différentiel, les équations différentielles linéaires et non linéaires et sur la géométrie différentielles des courbes. Il était initialement prévu un seul tome regroupant l'ensemble mais devant l'ampleur prise par celui-ci il a été nécessaire de le scinder en deux volumes.

Nous remercions André et Catherine Bellaïche, ainsi que Joon Kwoon pour leur relecture enrichissante.

Enfin, si vous souhaitez nous contacter pour nous faire part de vos remarques, vous pouvez envoyer un courrier à l'adresse *fgn.cassini@free.fr*.

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

La topologie est un vaste champ d'étude dont le cœur est l'étude des déformations d'objets par des transformations continues. On reconnaît en général le problème des sept ponts de Königsberg, formulé par Leonhard Euler en 1736, comme l'un des premiers de nature topologique (par opposition à un problème propre aux distances). Pour un « polyèdre à trous », la formule d'Euler qui est valable pour un polyèdre convexe $v - e + f = 2$ *(*v *nombre de sommets,* e *d'arêtes et* f *de faces) tombe en défaut comme le note Antoine-Jean Lhuilier en 1813 : s'il possède* g *trous, on a* $v - e + f = 2 - 2g$ *où* g *apparaît comme un invariant topologique de la surface. On doit à Listing la reprise d'idées formulées mais non publiées par Gauss et il est le premier à utiliser le mot « topologie » dans les années 1840 dans ces études autour des courbes et surfaces. En 1858, de manière indépendante, Möbius et Listing décrivent une surface fermée dont le bord est homéomorphe à un cercle : le ruban de Möbius ne possède qu'une face et n'est pas orientable. En ce début de la deuxième moitié du* XIX^e *siècle, Riemann poursuit l'étude des surfaces et notamment celles qui portent aujourd'hui son nom. Jordan et surtout Poincaré (en 1895) mettront au clair la notion d'homotopie et de groupe fondamental d'une surface en envisageant des déformations continues de lacets tracés sur une surface donnée et introduiront de nouveaux invariants topologiques comme la caractéristique d'Euler-Poincaré.*

Mais, parallèlement au cours de ce XIXe *siècle, une conscience plus fine des notions de convergence et de limites va faire émerger les concepts fondamentaux qui fondent la topologie. En 1817, Bolzano exprime une vision « statique » de la convergence en notant qu'un ensemble infini et borné de réels possède un point d'accumulation (i.e. il existe un réel* x *pour lequel tout voisinage possède un point de l'ensemble autre que* x*). Ce fameux résultat appelé propriété de Bolzano-Weierstrass fut démontré rigoureusement par Weierstrass en 1877 dans des publications où l'on trouve la notion de voisinage. Cantor en 1872, à partir de travaux sur les séries trigonométriques et les nombres irrationnels, s'intéresse à l'ensemble dérivé d'une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *obtenu en prenant l'ensemble des points d'accumulation de* E *et à l'occasion définit les notions de parties ouvertes, fermées... C'est Fréchet en 1906 dans son désir d'unifier le langage topologique sur les ensembles de points et celui de l'analyse fonctionnelle naissante (calcul des variations, étude d'opérateurs linéaires...) qui va étendre ces concepts en passant de* $\mathbb{R}$ *et des espaces euclidiens à* *la notion plus générale d'espace métrique. Un autre grand fondateur de l'analyse fonctionnelle moderne, Banach laisse de riches travaux où l'on retrouve de nombreux résultats qui portent aujourd'hui son nom. Les espaces de Banach sont définis dans sa thèse en 1920. Enfin, la notion moderne d'espace topologique apparue en 1914 est due essentiellement à Hausdorff (et à un amendement de Kuratowski en 1922).*

Rappelons que, E *étant un espace vectoriel réel ou complexe, une norme sur* E *est une application* $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant les trois axiomes suivants :*

(i) $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(axiome de séparation) ;*

(ii) $\forall x \in \mathrm{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$ *(axiome d'homogénéité) ;*

(iii) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Il en découle aisément que la boule unité de E *pour* N *est une partie convexe. L'exercice suivant montre que l'inégalité triangulaire équivaut à la convexité de l'ensemble* $\{x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$ *lorsque les axiomes* (*i*) *et* (*ii*) *sont satisfaits.*

1.1. Sur l'inégalité triangulaire

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$.

1. Montrer que N est une norme si, et seulement si, l'ensemble $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$ est convexe.

2. On suppose que $\mathrm{N}(x + y)^2 \leqslant 2(\mathrm{N}(x)^2 + \mathrm{N}(y)^2)$ pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Montrer que N est une norme.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Si N est une norme il est clair que B est convexe : en effet, si x et y sont dans B et $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{N}((1-t)x + ty) &\leqslant \mathrm{N}((1-t)x) + \mathrm{N}(ty) \leqslant |1-t|\mathrm{N}(x) + |t|\mathrm{N}(y) \\ &\leqslant (1-t)\mathrm{N}(x) + t\mathrm{N}(y) \leqslant 1 - t + 1 = 1 \end{aligned}$$

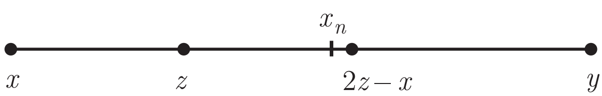
et $(1 - t)x + ty \in \mathrm{B}$.

Supposons réciproquement que B est convexe. Considérons x et y dans E. On veut prouver que $\mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$. On peut supposer x et y non nuls sans quoi l'inégalité est triviale. Par homogénéité, les vecteurs $\dfrac{x}{\mathrm{N}(x)}$ et $\dfrac{y}{\mathrm{N}(y)}$ sont dans B. Il en est donc de même de leur barycentre z affecté des masses positives $\mathrm{N}(x)$ et $\mathrm{N}(y)$. On a $z = \dfrac{x + y}{\mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)}$ et le fait que $\mathrm{N}(z) \leqslant 1$ conduit à $\mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

2. On va utiliser la caractérisation de la question précédente et montrer que B est convexe. Soient x et y deux vecteurs de B et $t \in [0,1]$. Posons $z = (1-t)x + ty$, l'objectif étant de prouver que $z \in \mathrm{B}$. La majoration naturelle

$$\mathrm{N}(z)^2 \leqslant 2\Big(\mathrm{N}((1-t)x))^2 + \mathrm{N}(ty)^2\Big) \leqslant 2((1-t)^2 + t^2) = 2 - 4t(1-t)$$

ne permet pas de conclure directement. Mais elle montre toutefois que $\mathrm{N}(z) \leqslant 1$ lorsque $t = \frac{1}{2}\cdot$ Autrement dit, B est stable par passage au milieu. Il est alors facile d'en déduire que $z \in \mathrm{B}$ lorsque t est un rationnel dyadique, c'est-à-dire de la forme $t = \frac{k}{2^n}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2^n$ (par récurrence sur n). Or l'ensemble de ces rationnels dyadiques est dense dans $[0,1]$. Supposons sans perte de généralité que $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\cdot$ L'idée est alors d'écrire z comme barycentre de x et d'un autre point de B avec des poids qui tendent vers $\frac{1}{2}\cdot$ En effet, comme on l'a vu plus haut, la majoration de la norme d'un barycentre est optimale lorsqu'il s'agit du milieu. Le symétrique de x par rapport à z est le point $x' = 2z - x = (1-2t)x + 2ty$.



Choisissons une suite de rationnels dyadiques $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ qui converge vers t et posons $x_n = (1-2t_n)x + 2t_n y$. D'après ce qui précède $x_n \in \mathrm{B}$ pour tout n. Par ailleurs, on a

$$z = (1-t)x + ty = (1-t)x + t\left(\frac{1}{2t_n}x_n - \frac{1-2t_n}{2t_n}x\right) = (1-a_n)x + a_n x_n,$$

avec $a_n = \frac{t}{2t_n}\cdot$ On a alors pour tout n,

$$\mathrm{N}(z)^2 \leqslant 2\Big((1-a_n)^2 + a_n^2\Big)$$

et il suffit de faire tendre n vers l'infini pour conclure que $\mathrm{N}(z) \leqslant 1$. ◁

Le boule unité fermée B *d'une norme caractérise cette norme. En effet, si* N_1 *et* N_2 *sont deux normes qui ont la même boule unité fermée* B *et si x est un vecteur non nul,* $\frac{x}{\mathrm{N}_1(x)} \in \mathrm{B}$ *par homogénéité et on a donc* $\mathrm{N}_2\left(\frac{x}{\mathrm{N}_1(x)}\right) \leqslant 1$ *soit* $\mathrm{N}_2(x) \leqslant \mathrm{N}_1(x)$. *Par symétrie il y a égalité* *et, comme cela reste vrai pour $x = 0$, on a $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$. L'exercice suivant donne une description des parties de $\mathbb{R}^n$ qui sont les boules unités fermées de normes sur $\mathbb{R}^n$.*

1.2. Description géométrique des normes

On munit $\mathbb{R}^n$ de son unique topologie d'espace normé. Montrer qu'une partie B de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité fermée d'une norme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si B est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Il est clair que la boule unité fermée B d'une norme N est convexe, symétrique par rapport à l'origine, d'intérieur non vide (il s'agit de la boule unité ouverte) et compacte (pour la topologie définie par n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$). On va s'attacher à la réciproque.

Notons B une partie de $\mathbb{R}^n$ vérifiant toutes les propriétés précédentes. On cherche à construire une norme N telle que $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$. Pour cela l'idée est d'utiliser l'homogénéité. Pour x vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ posons $\mathrm{I}_x = \left\{\lambda > 0,\ \dfrac{x}{\lambda} \in \mathrm{B}\right\}$. Montrons que cet ensemble n'est pas vide. En effet, l'origine est forcément un point intérieur à B car si A est intérieur à B, on peut trouver $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{A}, r) \subset \mathrm{B}$ (où la boule considérée est, par exemple, relative à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). Par symétrie de B on a aussi $\mathrm{B}(-\mathrm{A}, r) \subset \mathrm{B}$ et par convexité il en découle que $\mathrm{B}(0, r) \subset \mathrm{B}$. Ainsi, tous les réels suffisamment grands sont dans I_x. Mieux : comme B est convexe et contient l'origine, si $\lambda \in \mathrm{I}_x$ on a forcément $[\lambda, +\infty[\ \subset \mathrm{I}_x$. Donc I_x est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}_+^*$. Comme B est compacte, elle est bornée. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\|a\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $a \in \mathrm{B}$. Si $\lambda \in \mathrm{I}_x$ on a $\lambda \geqslant \dfrac{\|x\|}{\mathrm{M}} > 0$. Posons alors $\mathrm{N}(x) = \inf \mathrm{I}_x$. On vient de prouver qu'il s'agit d'un réel strictement positif. Comme B est fermée, l'intervalle I_x est aussi fermé et il est donc égal à $[\mathrm{N}(x), +\infty[$. Il ne reste plus qu'à vérifier que N (prolongée en 0 par $\mathrm{N}(0) = 0$) est une norme et que B en est la boule unité fermée.

• L'application N est positive et l'axiome de séparation est vérifié.

• Si x est non nul et si μ est un réel strictement positif il est clair que $\mathrm{I}_{\mu x} = [\mu \mathrm{N}(x), +\infty[$, donc on a $\mathrm{N}(\mu x) = \mu \mathrm{N}(x)$. Par symétrie de B on a $\mathrm{I}_{-x} = \mathrm{I}_x$, donc $\mathrm{N}(-x) = \mathrm{N}(x)$ et finalement N est homogène.

• Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\mathrm{N}(x) \leqslant 1$ si, et seulement si, $1 \in \mathrm{I}_x$ donc si, et seulement si, $x \in \mathrm{B}$. Comme B est convexe, on en déduit que N vérifie l'inégalité triangulaire (voir la solution de la première question de l'exercice précédent).

D'où le résultat : N est une norme de boule unité B. $\lhd$

Même si le petit exercice qui suit n'utilise que l'inégalité triangulaire, il n'est pas complètement évident.

1.3. Une inégalité

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme quelconque $\| \ \|$. Soient x, y, z trois points tels que 0 soit intérieur (au sens large) au triangle xyz.

1. Montrer que $\|x\| + \|y\| \leqslant \|x - z\| + \|y - z\|$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| \leqslant \|x - t\| + \|y - t\| + \|z - t\| + \|t\|.$$

(**École normale supérieure**)

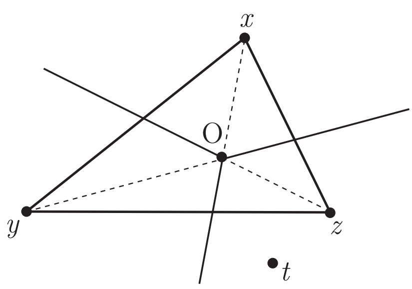
$\rhd$ **Solution.**

1. Pour $u \in \mathbb{R}^2$, posons $f(u) = \|x - u\| + \|y - u\|$. On doit prouver que $f(0) \leqslant f(z)$. Les fonctions $u \mapsto \|x-u\|$ et $u \mapsto \|y-u\|$ sont convexes. En effet, pour u et v dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\|x-(\lambda u+(1-\lambda)v)\| = \|\lambda(x-u)+(1-\lambda)(x-v)\| \leqslant \lambda\|x-u\|+(1-\lambda)\|x-v\|.$$

On en déduit que f est également convexe. Il en découle que l'ensemble $\mathrm{A} = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) \leqslant f(z)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, on voit que x et y sont dans A, tout comme z. Comme par hypothèse 0 est dans l'enveloppe convexe du triangle xyz, on a $0 \in \mathrm{A}$, ce qui prouve l'inégalité.

2. On peut toujours choisir deux sommets parmi x, y, z, tels que 0 soit dans l'intérieur (au sens large) du triangle formé par ces deux sommets et t :



Supposons que, comme sur la figure, ces sommets soient x et y. On a alors d'après la première question $\|x\| + \|y\| \leqslant \|x - t\| + \|y - t\|$. Par ailleurs, $\|z\| \leqslant \|z-t\|+\|t\|$ par inégalité triangulaire. Le résultat en découle en faisant la somme. ◁

L'inégalité prouve que l'origine est le point du plan qui minimise la somme des distances aux quatre points $0, x, y, z$.

1.4. Recherche d'un minimum

Soit, pour P dans $\mathbb{C}[X]$, $N(P) = \sup\{|P(z)|,\ |z| = 1\}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, A_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$ prenant la valeur 1 en 0. Quelle est la borne inférieure de N sur A_n ?

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On a $N(P) \geqslant 0$ pour tout polynôme P et si $N(P) = 0$, $P(z) = 0$ pour tout z de module 1, donc P a une infinité de racines et $P = 0$. Pour $P \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$N(\lambda P) = \sup\{|\lambda|\,|P(z)|,\ |z| = 1\} = |\lambda| \sup\{|P(z)|,\ |z| = 1\} = |\lambda| N(P).$$

Enfin si P et Q sont deux polynômes, on a pour $|z| = 1$,

$$|(P+Q)(z)| \leqslant |P(z)| + |Q(z)| \leqslant N(P) + N(Q),$$

et par passage à la borne supérieure, $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Examinons le cas des petites valeurs de n.

Il n'y a qu'un seul polynôme dans A_1, à savoir $1 + X$, et on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|1 + e^{i\theta}| = |e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}| = |2\cos\frac{\theta}{2}|$ donc $N(1 + X) = 2$.

Tout polynôme de A_2 s'écrit $1 + aX + X^2$, avec $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|1+ae^{i\theta}+e^{2i\theta}| = |e^{-i\theta}+a+e^{i\theta}| = \Big|2\cos\theta+a\Big| = \sqrt{(2\cos\theta + \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2}.$$

Le maximum est obtenu pour $\cos\theta = \pm 1$ selon le signe de $\operatorname{Re} a$ et et on trouve

$$N(1 + aX + X^2) = \sqrt{(2 + |\operatorname{Re} a|)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} = \sqrt{4 + 4|\operatorname{Re} a| + |a|^2} \geqslant 2.$$

La borne inférieure de N(P) sur A_2 vaut 2 et est atteinte pour $P = 1+X^2$.

Montrons que pour n quelconque la borne inférieure de N sur A_n est toujours atteinte en $1 + X^n$. La norme de $1 + X^n$ est 2. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|1 + e^{in\theta}| = |e^{-i\frac{n\theta}{2}} + e^{i\frac{n\theta}{2}}| = \left|2\cos\frac{n\theta}{2}\right|.$$

Il reste à montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{A}_n$, $\mathrm{N(P)} \geqslant 2$. Une méthode directe est cette fois-ci inapplicable. Soit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, où $a_0 = a_n = 1$.

Calculons $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})$. On a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\frac{2jk\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2jk\pi}{n}}.$$

Si $k \neq 0$ et $k \neq n$, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$ et $\sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2jk\pi}{n}} = \dfrac{1 - e^{i2k\pi}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = 0$. Il reste donc $\mathrm{S}_n = na_0 + na_n = 2n$. On en déduit

$$2n = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left|\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})\right| \leqslant n\mathrm{N(P)}$$

et donc $\mathrm{N(P)} \geqslant 2$. On peut préciser les cas d'égalité. Si $\mathrm{N(P)} = 2$, toutes les inégalités précédentes sont des égalités. On a donc $\left|\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})\right| = 2$ pour tout j et tous les $\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})$ ont même argument (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Tous les $\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})$ sont donc égaux à 2. Considérons le polynôme $\mathrm{P} - (1 + \mathrm{X}^n)$ qui appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Il s'annule en $e^{i\frac{2j\pi}{n}}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Il a donc au moins n racines. C'est le polynôme nul. Donc $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X}^n$.

Conclusion. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{A}_n$, le minimum de $\mathrm{N(P)}$ est 2. Il n'est atteint que pour $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X}^n$.

L'exercice suivant regroupe des questions posées à des oraux différents portant sur le thème des normes absolues.

1.5. Normes absolues

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et N une autre norme. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et on écrit $x \geqslant 0$ lorsque $x = |x|$. On dit que la norme N est absolue si $\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(|x|)$ pour tout x.

1. Montrer que N est absolue si, et seulement si, N est monotone, c'est-à-dire vérifie $|x| - |y| \geqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{N}(x) \geqslant \mathrm{N}(y)$ pour tout (x, y).

2. Donner un exemple de norme non absolue sur $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est-elle une norme absolue sur $\mathbb{R}^n$?

4. Soit M la norme triple de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à N. Montrer que N est absolue si et seulement si $M(A) \leqslant M(|A|)$ pour toute matrice $A = (a_{ij})$ où $|A|$ désigne la matrice de coefficients $|a_{ij}|$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Pour deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on écrira $x \leqslant y$ lorsque $y - x \geqslant 0$ c'est-à-dire si $x_i \leqslant y_i$ pour tout i. Il s'agit clairement d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.

• Supposons d'abord N monotone et considérons $x \in \mathbb{R}^n$. Si $y = |x|$ on a clairement $|x| = |y|$ donc $N(x) \leqslant N(y)$ et $N(y) \leqslant N(x)$. On a donc bien $N(x) = N(y) = N(|x|)$ et N est absolue.

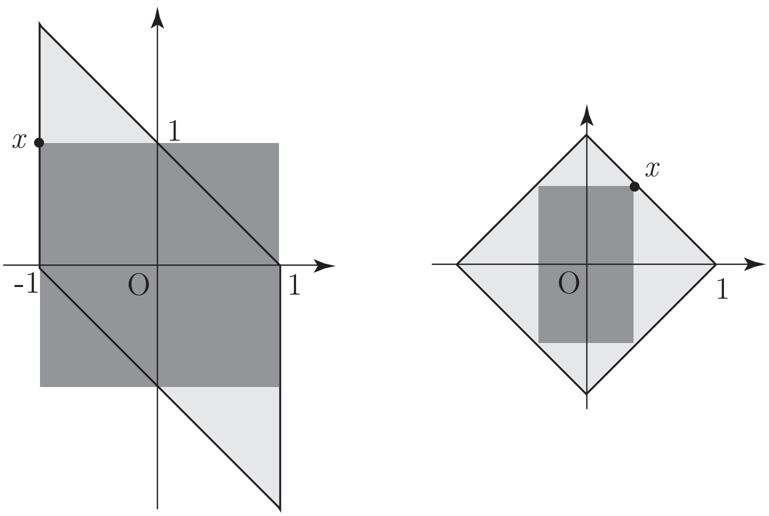
• Supposons réciproquement que N est absolue et considérons x et y dans $\mathbb{R}^n$ avec $|x| \leqslant |y|$. Quitte à remplacer x par $|x|$ et y par $|y|$ on peut supposer que $0 \leqslant x \leqslant y$. Pour prouver que $N(x) \leqslant N(y)$, il suffit de prouver que N est croissante par rapport à chaque coordonnée lorsque celle-ci varie dans $\mathbb{R}_+$, et par symétrie, il suffit de le rédiger pour la première. Fixons $a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$ et notons f la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $f(t) = N(t, a_2, \dots, a_n)$. Comme $f(|t|) = f(t)$ pour tout t, f est une fonction paire. Par ailleurs, elle est convexe sur $\mathbb{R}$. Ces conditions imposent que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $0 \leqslant t \leqslant t'$, la pente du segment joignant les points $(-t, f(-t))$ et $(t, f(t))$ est nulle, donc par le théorème des pentes croissantes, celle du segment qui joint les points $(t, f(t))$ et $(t', f(t'))$ est positive.

Voici une seconde solution plus géométrique : comme $|x| \leqslant |y|$, le vecteur x est dans l'enveloppe convexe des 2^n points $(\varepsilon_1 y_1, \dots, \varepsilon_n y_n)$, où $\varepsilon_i = -1$ ou 1. En effet, chaque $x_i \in [-y_i, y_i]$ peut s'écrire comme barycentre de $(-y_i, t_i)$ et $(y_i, 1 - t_i)$, où $t_i \in [0, 1]$. Cette enveloppe convexe contient donc tout point de la forme $(x_1, \varepsilon_2 y_2, \dots, \varepsilon_n y_n)$, car il est barycentre de $((-y_1, \varepsilon_2 y_2, \dots, \varepsilon_n y_n), t_1)$ et $((y_1, \varepsilon_2 y_2, \dots, \varepsilon_n y_n), 1 - t_1)$, puis tout point de la forme $(x_1, x_2, \varepsilon_3 y_3, \dots, \varepsilon_n y_n)$, car il est barycentre de $((x_1, -y_2, \varepsilon_3 y_3, \dots, \varepsilon_n y_n), t_2)$ et $((x_1, y_2, \varepsilon_3 y_3, \dots, \varepsilon_n y_n), 1 - t_2)$, … et finalement contient x. Ces 2^n points ont tous la même norme car N est absolue. Le résultat découle alors directement de l'inégalité triangulaire.

2. La norme euclidienne ainsi que les normes usuelles $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ définies pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ par $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$ sont clairement des normes absolues. Donnons un contre-exemple sur $\mathbb{R}^2$ que le lecteur généralisera facilement. Pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons

$N(X) = \max(|x|, |x+y|) = \|AX\|_\infty$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il est aisé de voir que N est une norme. Elle n'est pas absolue car $N(-1, 1) = 1$ et $N(1, 1) = 2$.

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ *est parfaitement caractérisée par sa boule unité fermée (voir l'exercice 1.2). La propriété d'être une norme absolue doit donc se voir sur cette boule. D'après la question 1, si* N *est absolue et si* x *est dans la boule unité fermée, alors tout l'hypercube formé des vecteurs* y *tels que* $|y| \leqslant |x|$ *est inclus dans cette boule. Réciproquement, si la boule possède cette propriété, alors* N *est absolue. On voit que sur notre exemple (figure de gauche), la propriété est en défaut. À droite est représentée la boule de la norme* $\| \ \|_1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *qui est absolue.*



3. Pour que $x \longmapsto \|Ax\|$ soit une norme il est nécessaire et suffisant que A soit inversible. Supposons cette condition réalisée. Notons $(C_1, \dots, C_n)$ la famille des colonnes de A. La norme $x \longmapsto \|Ax\|$ est absolue si, et seulement si, on a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x_1C_1 + \cdots + x_nC_n\|^2 = \||x_1|C_1 + \cdots + |x_n|C_n\|^2.$$

Pour $i \neq j$ donnés, prenons $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_k = 0$ pour $k \neq i, j$. On doit donc avoir $\|C_i - C_j\|^2 = \|C_i + C_j\|^2$ ce qui en développant donne $\langle C_i, C_j \rangle = 0$. Autrement dit, la famille des colonnes de A doit être une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, si cette condition est réalisée, on a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ax\|^2 = \|x_1C_1 + \cdots + x_nC_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|C_i\|^2$$

et il est clair que la norme est absolue.

4. Supposons d'abord que N soit absolue et considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a clairement $|Ax| \leqslant |A|\,|x|$. On en déduit

$$N(Ax) = N(|Ax|) \leqslant N(|A||x|) \leqslant M(|A|)N(|x|) = M(|A|)N(x).$$

Il en découle, par définition de la norme triple, que $M(A) \leqslant M(|A|)$.

Supposons réciproquement que $M(A) \leqslant M(|A|)$ pour toute matrice A et considérons $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit D la matrice diagonale telle que $d_{ii} = 1$ si x_i est positif et -1 sinon. Comme $|D|$ est la matrice identité on a $M(D) \leqslant 1$. Or, $|x| = Dx$ donc

$$N(|x|) = N(Dx) \leqslant M(D)N(x) \leqslant N(x).$$

Mais évidemment D est inversible et $D^{-1} = D$. On a donc $x = D|x|$ ce qui conduit à l'inégalité opposée. On conclut que N est une norme absolue. $\triangleleft$

Les normes absolues qui de plus sont symétriques (c'est-à-dire invariantes par permutation des coordonnées) jouent un rôle important dans la description des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariantes sous l'action du groupe unitaire (c'est-à-dire vérifiant $\|UAV\| = \|A\|$ pour U et V unitaires).

Par restriction du corps des scalaires, un espace normé complexe est naturellement muni d'une structure d'espace normé réel. L'exercice suivant étudie en quelque sorte la réciproque.

1.6. Espace normé réel vs espace normé complexe

Soit E un espace vectoriel complexe et N une norme sur E considéré comme un espace vectoriel réel. On suppose que l'homothétie de rapport i est continue dans (E, N). Établir l'existence d'une norme M sur E, considéré comme espace vectoriel complexe, qui est équivalente à N.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Si M convient, la valeur de $M(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$ ne doit dépendre que du module de λ. On a donc assez vite l'idée de poser

$$M(x) = \sup_{|\lambda|=1} N(\lambda x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} N(e^{i\theta}x).$$

Justifions d'abord cette définition. Si $\lambda = a + ib$ est de module 1 et si $x \in E$, on a

$$\mathrm{N}(\lambda x) = \mathrm{N}(ax+ibx) \leqslant \mathrm{N}(ax)+\mathrm{N}(ibx) \leqslant |a|\mathrm{N}(x)+\mathrm{KN}(bx) \leqslant (1+\mathrm{K})\mathrm{N}(x),$$

où K est la norme triple de l'homothétie de rapport i. Cette majoration justifie l'existence de la borne supérieure.

Montrons maintenant que M est une norme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Il est clair que $\mathrm{M} \geqslant 0$ et que si $\mathrm{M}(x) = 0$ alors $\mathrm{N}(x) = 0$ et donc $x = 0$. Pour $x \in \mathrm{E}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ on a

$$\mathrm{M}(\mu x) = \sup_{|\lambda|=1} \mathrm{N}(\lambda\mu x) = \sup_{|\lambda|=1} \mathrm{N}(\lambda|\mu|x) = |\mu| \sup_{|\lambda|=1} \mathrm{N}(\lambda x) = |\mu|\mathrm{M}(x).$$

Enfin l'inégalité triangulaire est évidente. Comme $\mathrm{N} \leqslant \mathrm{M} \leqslant (1+\mathrm{K})\mathrm{N}$ les normes N et M sont bien équivalentes. ◁

L'énoncé suivant est très classique aux oraux des concours et souvent posé directement avec $r = 1$.

1.7. Une fonction lipschitzienne

Soit $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ un espace normé réel et $r > 0$. Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $p(x) = x$ si $\|x\| \leqslant r$ et $p(x) = \dfrac{rx}{\|x\|}$ si $\|x\| > r$.

1. Montrer que p est lipschitzienne.

2. Que dire de $\sup\left\{\dfrac{\| p(a) - p(b)\|}{\|a-b\|},\ (a,b) \in \mathrm{E}^2,\ a \neq b\right\}$?

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Posons $q(x) = \dfrac{1}{r}p(rx)$ qui vaut x si $\|x\| \leqslant 1$ et $\dfrac{x}{\|x\|}$ si $x \geqslant 1$. Cela nous ramène donc à ne traiter que le cas où $r = 1$ puisqu'il est clair que q est K-lipschitzienne si, et seulement si, p est K-lipschitzienne. Prenons x et y dans E et distinguons 3 cas :

- Si x et y sont dans la boule unité, on a $\|q(x) - q(y)\| = \|x - y\|$.
- Si x et y sont tous les deux hors de la boule unité, on a

$$\begin{aligned}\|q(x) - q(y)\| &= \frac{\Big\|\|y\|x - \|x\|y\Big\|}{\|x\|\|y\|} = \frac{\Big\|\|y\|(x-y) + (\|y\| - \|x\|)y\Big\|}{\|x\|\|y\|} \\ &\leqslant \frac{\|x-y\|}{\|x\|} + \frac{\Big|\|y\| - \|x\|\Big|}{\|x\|} \leqslant 2\|x-y\|.\end{aligned}$$

- Si x est dans la boule unité et pas y, on a

$$\begin{aligned}\|q(x)-q(y)\| &= \left\|x-\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{\|y\|(x-y)+y(\|y\|-1)}{\|y\|}\right\| \\ &\leqslant \|x-y\|+\|y\|-1 \leqslant 2\|x-y\|\end{aligned}$$

car $\|y\|-1 \leqslant \|y\|-\|x\| \leqslant \|y-x\|$.

Ainsi la fonction q (donc p également) est 2-lipschitzienne.

2. Notons K la borne supérieure de l'énoncé à savoir la plus petite constante de Lipschitz possible pour q (c'est la même que pour p). On a donc prouvé que $1 \leqslant \mathrm{K} \leqslant 2$ (la minoration est évidente), mais on ne peut pas déterminer K de manière générale car cela dépend de la norme. Donnons deux exemples montrant que cet encadrement ne peut pas être amélioré.

• Prenons tout d'abord pour E un espace euclidien (ou même préhilbertien). On va reprendre les majorations ci-dessus. Pour x et y en dehors de la boule unité, on a

$$\|q(x)-q(y)\|^2 = 2-2\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = 2+\frac{\|x-y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{\|x\|\ \|y\|}$$

donc $\|q(x)-q(y)\|^2 \leqslant \|x-y\|^2$ car $\dfrac{\|x\|}{\|y\|}+\dfrac{\|y\|}{\|x\|} \geqslant 2$. Si x est dans la boule unité et pas y, on a alors

$$\begin{aligned}\|q(x)-q(y)\|^2 &= \left\|x-\frac{y}{\|y\|}\right\|^2 = 1+\|x\|^2-\frac{2\langle x,y\rangle}{\|y\|} \\ &= 1+\|x\|^2+\frac{\|x-y\|^2-\|x\|^2-\|\ y\|^2}{\|y\|} \\ &= \frac{\|x-y\|^2}{\|y\|}+(\|y\|\ -1)\left(\frac{\|x\|^2}{\|y\|}-1\right) \leqslant \|x-y\|^2\end{aligned}$$

car $\|y\| \geqslant 1$ et $\|x\| \leqslant 1$. On en déduit donc que dans ce cas q est 1-lipschitzienne autrement dit que $\mathrm{K}=1$.

• Prenons maintenant $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Soit $x=(1,1)$ et $y=(1+\varepsilon,1-\varepsilon)$ avec $\varepsilon \in]0,1]$. On a $q(x)=(1,1)$, $q(y)=\left(1,\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$ et donc $\|y-x\|_\infty=\varepsilon$ et $\|q(x)-q(y)\|_\infty=\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$. On en déduit que

$$\frac{\|q(x)-q(y)\|_\infty}{\|y-x\|_\infty}=\frac{2}{1+\varepsilon}$$

et ce rapport tend vers 2 lorsque ε tend vers 0^+. Dans ce cas la meilleure constante de Lipschitz possible pour q est donc $\mathrm{K}=2$. $\lhd$

Un théorème de Figueiredo-Karlovitz montre que si $\mathrm{K}=1$, *avec* $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$, *alors la norme est nécessairement hilbertienne.*

L'exercice suivant est à rapprocher de l'exercice 1.4 du tome 3 d'algèbre dans lequel on caractérise les normes euclidiennes à l'aide de l'identité du parallélogramme.

1.8. Caractérisation des normes euclidiennes

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle et N une norme sur E. On pose

$$\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) = \sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{\mathrm{N}^2(x+y)+\mathrm{N}^2(x-y)}{2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y))}.$$

1. Montrer que $1 \leqslant \mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) \leqslant 2$.

2. Montrer que $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) = 1$ si, et seulement si, N est une norme euclidienne.

3. Donner un exemple d'une norme N pour laquelle $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) = 2$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. En prenant $y = 0$ et x non nul, on obtient $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) \geqslant 1$. Pour x et y quelconques dans E on a, par inégalité triangulaire,

$$\mathrm{N}^2(x+y) \leqslant \mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y)+2\mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y) \leqslant 2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y)).$$

On a de même $\mathrm{N}^2(x-y) \leqslant 2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y))$ et donc, si $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\mathrm{N}^2(x+y)+\mathrm{N}^2(x-y)}{2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y))} \leqslant 2.$$

Par passage à la borne supérieure on obtient $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) \leqslant 2$.

2. Si la norme N découle d'un produit scalaire, alors pour tout couple (x,y), on a $\mathrm{N}^2(x+y) = \mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y)+2\langle x,y\rangle$ donc

$$\mathrm{N}^2(x+y)+\mathrm{N}^2(x-y) = 2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y)).$$

et il en découle que $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) = 1$. Réciproquement, supposons que $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) = 1$ et considérons $(x,y)\in\mathrm{E}^2$. On a

$$\mathrm{N}^2(x+y)+\mathrm{N}^2(x-y) \leqslant 2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y)).$$

Appliquons cette inégalité à $u = \frac{1}{2}(x+y)$ et $v = \frac{1}{2}(x-y)$. On a $u+v = x$ et $u-v = y$, donc par homogénéité il vient

$$\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y) \leqslant \frac{1}{2}(\mathrm{N}^2(x+y)+\mathrm{N}^2(x-y)).$$

On a donc $\mathrm{N}^2(x+y)+\mathrm{N}^2(x-y) = 2(\mathrm{N}^2(x)+\mathrm{N}^2(y))$: la norme N vérifie l'identité du parallélogramme et cela implique qu'il s'agit d'une norme euclidienne (voir la preuve de ce fait dans la correction de l'exercice 1.4 du tome 3 d'algèbre).

3. Une norme N pour laquelle $\mu(\mathrm{E},\mathrm{N}) = 2$ est donc fortement non euclidienne. C'est le cas par exemple de la norme $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. En prenant $x = (1,1,\ldots,1)$ et $y = (1,-1,1,\ldots,1)$ on a $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 2$ et il en découle que $\mu(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty) = 2$. $\triangleleft$

Soit E *un espace préhilbertien. Si un sous-espace* F *de* E *admet un supplémentaire orthogonal* G*, alors* G *est unique. En effet* G *est nécessairement égal à* $\mathrm{F}^\perp = \{x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{F}, \langle x,y\rangle = 0\}$ *: l'inclusion* $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$ *est vraie par définition, et inversement si* $x \in \mathrm{F}^\perp$*, on peut l'écrire* $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$*, avec* $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ *et* $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ *; on a alors* $0 = \langle x_\mathrm{F}, x\rangle = \|x_\mathrm{F}\|^2$ *donc* $x = x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$*. L'exercice suivant généralise ce résultat à un espace normé quelconque, la relation d'orthogonalité étant définie à l'aide de la norme.*

1.9. Orthogonalité généralisée

> Soit (E,N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On dit que $x \perp y$ si $\mathrm{N}(x+y) = \mathrm{N}(x-y)$. Montrer que, si à un sous-espace F de E on peut associer un sous-espace vectoriel G tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \perp \mathrm{G}$, alors G est unique.
>
> (**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Bien entendu si la norme N découle d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ alors $\mathrm{N}(x+y) = \mathrm{N}(x-y)$ équivaut à $\langle x,y\rangle = 0$ c'est-à-dire à l'orthogonalité de x et y. Notons que de manière générale la relation $\perp$ est symétrique et que $x \perp x \iff x = 0$.

Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $x \perp y$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}$. Montrons qu'alors G est l'orthogonal de F défini par

$$\mathrm{F}^\perp = \{y \in \mathrm{E}, \forall x \in \mathrm{F}, x \perp y\},$$

ce qui prouvera son unicité. Par définition on a $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$. Démontrons l'inclusion inverse. Soit $z \in \mathrm{F}^\perp$ et $(f,g) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}$ tel que $z = f+g$.

On a, pour tout $x \in \mathrm{F}$, $x \perp (f+g)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{N}(x+f+g) = \mathrm{N}(x-f-g).$$

D'autre part, $(x+f,g)$ appartient à $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$, donc $(x+f) \perp g$, ce qui donne $\mathrm{N}(x+f+g) = \mathrm{N}(x+f-g)$. En combinant les deux résultats on obtient donc $\mathrm{N}(x+f-g) = \mathrm{N}(x-f-g)$. En particulier, si on prend $x = (\lambda+1)f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{N}((\lambda+2)f-g) = \mathrm{N}(\lambda f - g)$. Considérons l'application $\varphi : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{N}(\lambda f - g) \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, φ est 2-périodique. Elle est continue, car composée de l'application $\lambda \longmapsto \lambda f - g$ et de la norme qui sont continues. On en déduit que φ est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais, pour $\lambda \neq 0$, $\varphi(\lambda) = |\lambda| \mathrm{N}\Big(f - \dfrac{g}{\lambda}\Big)$. On a $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathrm{N}\Big(f - \dfrac{g}{\lambda}\Big) = \mathrm{N}(f)$. Si $\mathrm{N}(f) \neq 0$, alors $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$ et φ n'est pas bornée. On a donc $f = 0$ et $z = g \in \mathrm{G}$. D'où le résultat. $\lhd$

Pour résoudre l'exercice suivant, le lecteur pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.8.

1.10. Prolongement d'une norme définie sur $\mathbb{Z}^2$

Soit $\mathrm{N} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ une application vérifiant les trois axiomes d'une norme :

(i) $\forall u \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{N}(u) = 0 \iff u = 0$;
(ii) $\forall u \in \mathbb{Z}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{N}(\lambda u) = |\lambda| \mathrm{N}(u)$;
(iii) $\forall (u,v) \in (\mathbb{Z}^2)^2, \mathrm{N}(u+v) \leqslant \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)$;

Montrer que N se prolonge de façon unique en une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

• Commençons par prouver l'unicité d'un tel prolongement. Supposons que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}^2$ qui prolongent N. Si $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ on peut trouver un entier $k \geqslant 1$ tel que $(kx, ky) \in \mathbb{Z}^2$ et on a donc par homogénéité

$$\mathrm{N}_1(x,y) = \frac{\mathrm{N}_1(kx,ky)}{k} = \frac{\mathrm{N}(kx,ky)}{k} = \frac{\mathrm{N}_2(kx,ky)}{k} = \mathrm{N}_2(x,y).$$

Donc N_1 et N_2 coïncident sur $\mathbb{Q}^2$. Comme les deux normes N_1 et N_2 sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (pour son unique topologie d'espace vectoriel normé) et comme $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$.

• Passons à l'existence. On commence par prolonger N à $\mathbb{Q}^2$ comme cela se voit ci-dessus : si $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ on considère les représentants irréductibles $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ et on pose $\mathrm{N}(x,y) = \dfrac{\mathrm{N}(kx,ky)}{k}$ où $k = \mathrm{ppcm}(b,d) \in \mathbb{N}^*$. Il est alors facile de vérifier que l'axiome d'homogénéité $\mathrm{N}(\lambda u) = |\lambda| \mathrm{N}(u)$ reste vérifié pour tout $u \in \mathbb{Q}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{Q}$. On note que (i) reste aussi vérifié : pour $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$, $\mathrm{N}(x,y) \geqslant 0$ et il y a égalité si, et seulement si, $(x,y) = 0$. Montrons l'inégalité triangulaire : si u et v sont dans $\mathbb{Q}^2$, on peut trouver $k \geqslant 1$ tel que ku et kv soient dans $\mathbb{Z}^2$ et on a alors

$$\mathrm{N}(u+v) = \frac{\mathrm{N}(ku+kv)}{k} \leqslant \frac{\mathrm{N}(ku)+\mathrm{N}(kv)}{k} = \mathrm{N}(u)+\mathrm{N}(v).$$

On en déduit en particulier que $|\mathrm{N}(u)-\mathrm{N}(v)| \leqslant \mathrm{N}(u-v)$ pour tout couple (u,v) de points de $\mathbb{Q}^2$. En notant (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ on a $\mathrm{N}(x,y) = \mathrm{N}(xe_1+ye_2) \leqslant (\mathrm{N}(e_1)+\mathrm{N}(e_2)\max(|x|,|y|)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$. Combiné avec ce qui précède, on en déduit que N est lipschitzienne de rapport $\mathrm{K} = \mathrm{N}(e_1)+\mathrm{N}(e_2)$ de $(\mathbb{Q}^2, \|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ et en particulier uniformément continue.

On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions uniformément continues à valeur dans un espace complet (voir l'exercice 3.8) : il existe un unique prolongement uniformément continu de N à $\mathbb{R}^2$, prolongement que l'on note encore N dans la suite. Il est immédiat de voir que les propriétés (*ii*) et (*iii*) restent vérifiées sur $\mathbb{R}^2$ par passage à la limite, et que N reste K-lipschitzienne de $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. Pour prouver que N est une norme il reste à vérifier l'axiome de séparation. Notons que $\mathrm{N}(u) \geqslant 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ par passage à la limite. Il nous reste à prouver que l'inégalité est stricte pour u non nul. Raisonnons par l'absurde en supposant que N s'annule en un vecteur u. Par homogénéité on peut supposer que $u = (1,a)$, avec nécessairement $a \notin \mathbb{Q}$. On va approcher a par un rationnel pour obtenir une contradiction. Soit $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$. On a $\mathrm{N}(1,b) = \frac{1}{q}\mathrm{N}(q,p) \geqslant \frac{1}{q}$ car $\mathrm{N}(q,p)$ est un entier naturel non nul. Par ailleurs,

$$\mathrm{N}(1,b) = \mathrm{N}(1,b)-\mathrm{N}(1,a) \leqslant \mathrm{N}(0,b-a) \leqslant \mathrm{K}|b-a| = \mathrm{K}\left|a-\frac{p}{q}\right|\cdot$$

Pour obtenir une contradiction, il suffit de prouver qu'on peut trouver un rationnel $b = \frac{p}{q}$ tel que $|qa-p| < \frac{1}{\mathrm{K}}\cdot$ C'est une question d'approximation diophantienne classique. Notons que $\mathrm{K} = \mathrm{N}(e_1)+\mathrm{N}(e_2)$ est un entier $\geqslant 2$. Parmi les $\mathrm{K}+1$ réels $0, a, 2a, \ldots, \mathrm{K}a$ pris modulo 1, il y en a au moins deux qui tombent dans le même intervalle de la forme $\left[\frac{i}{\mathrm{K}}, \frac{i+1}{\mathrm{K}}\right[$ où $0 \leqslant i < \mathrm{K}$ (d'après le principe des tiroirs). Par différence, on peut trouver $q \in [\![1,\mathrm{K}]\!]$ tel que la distance de qa à $\mathbb{Z}$ est strictement inférieure à $\frac{1}{\mathrm{K}}\cdot$ C'est le résultat voulu. $\lhd$

L'exercice suivant montre qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui soit constante sur toutes les classes de similitudes, puis s'intéresse aux semi-normes qui ont cette propriété. Rappelons qu'une semi-norme* N *sur un espace* E *vérifie tous les axiomes d'une norme sauf l'implication* $\mathrm{N}(x)=0 \Longrightarrow x=0$. *Il est facile de voir que* $\mathrm{E}_0 = \{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x)=0\}$

est alors un sous-espace de E *et que* N *induit une norme sur l'espace quotient* E/E_0*. Les semi-normes sont utilisées pour définir des topologies plus générales que celles découlant des normes.*

1.11. Semi-normes invariantes par similitude

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norme $\| \ \|$ invariante par similitude, *i.e.* telle que

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{P}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\| = \|\mathrm{A}\|.$$

2. Montrer que $\mathrm{A} \longmapsto |\operatorname{Tr} \mathrm{A}|$ est une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est invariante par similitude.

3. Déterminer toutes les semi-normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariantes par similitude.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Notons que dans le cas $n = 1$ toutes les normes sont invariantes par similitude. Supposons l'existence d'une telle norme $\| \ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$. Par hypothèse, on a $\|\mathrm{AP}\| = \|\mathrm{PA}\|$ pour tout couple (A, P) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et continuité de la norme on a $\|\mathrm{AB}\| = \|\mathrm{BA}\|$ pour tout couple $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Or si $n \geqslant 2$, il est aisé d'exhiber A, B telles que $\mathrm{AB} = 0$ et $\mathrm{BA} \neq 0$, par exemple en prenant deux matrices de la base canonique. D'où l'impossibilité.

2. Il est clair que, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$|\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \geqslant 0, \ |\operatorname{Tr}(\lambda \mathrm{A})| = |\lambda| |\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \ \text{ et } \ |\operatorname{Tr}(\mathrm{A}+\mathrm{B})| \leqslant |\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| + |\operatorname{Tr}(\mathrm{B})|.$$

On a donc bien une semi-norme. De plus, si $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a par propriété de la trace $\operatorname{Tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{APP}^{-1}) = \operatorname{Tr} \mathrm{A}$, donc cette semi-norme est invariante par similitude.

3. Soit N une semi-norme invariante par similitude. Notons que N est continue : en effet, si $\| \ \|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de $\mathrm{N} + \| \ \|$, donc N s'écrit comme la différence de deux normes et est continue. En particulier, on en déduit comme dans la question 1, que $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) = \mathrm{N}(\mathrm{BA})$ pour tout couple $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Considérons $\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \mathrm{N}(\mathrm{A}) = 0\}$. Il résulte de l'inégalité triangulaire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Observons que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$, on a $\mathrm{N}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B}) = \mathrm{N}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \mathrm{N}(\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{N}(-\mathrm{B}) = \mathrm{N}(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ de sorte que $\mathrm{N}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{N}(\mathrm{A})$. On va montrer que F contient l'hyperplan des matrices de trace nulle. Soit $i \neq j$ deux entiers de $[\![1, n]\!]$. On a

$$\mathrm{N}(\mathrm{E}_{ij}) = \mathrm{N}(\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{jj}) = \mathrm{N}(\mathrm{E}_{jj}\mathrm{E}_{ij}) = \mathrm{N}(0) = 0$$

donc $\mathrm{E}_{ij} \in \mathrm{F}$. On en déduit que F contient toutes les matrices de diagonale nulle. Or, il est classique que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle (voir l'exercice 7.12 du tome algèbre 1). Donc F contient l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $-\mathrm{A} + \dfrac{\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}}{n}\mathrm{I}_n \in \mathrm{F}$ donc

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \mathrm{N}\left(\mathrm{A} - \mathrm{A} + \frac{\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}}{n}\mathrm{I}_n\right) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)}{n}|\,\mathrm{Tr}(\mathrm{A})|$$

et N est positivement colinéaire à la semi-norme de la question précédente.

Conclusion. Les semi-normes invariantes par similitude sont les applications $\mathrm{A} \longmapsto \lambda|\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}|$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$. $\lhd$

Les exercices suivants concernent les comparaisons de deux normes sur un même espace. Il est bien connu que sur l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues, les normes classiques définies par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$ ne sont pas équivalentes, les seules inégalités étant $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty$. L'exercice suivant regarde ce que l'on peut dire d'un sous-espace F de E sur lequel $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ deviennent équivalentes.

1.12. Norme infinie vs norme de la convergence en moyenne quadratique

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\mathrm{C} > 0$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{C}\|f\|_2$ pour toute fonction $f \in \mathrm{F}$.

1. Montrer que $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.

2. Montrer que F est de dimension finie inférieure à C^2.

3. Donner un exemple d'un sous-espace F de dimension $n \geqslant 1$ vérifiant l'hypothèse avec $\mathrm{C} = \sqrt{n}$.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

1. C'est une question de cours. Considérons $f_n : x \longmapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ pour tout n. Il ne peut donc exister de constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $\|f_n\|_\infty \leqslant \mathrm{C}\|f_n\|_2$ pour tout n.

2. Si F est un sous-espace de dimension finie, les normes $\| \|_\infty$ et $\| \|_2$ deviennent équivalentes sur F. On va démontrer que c'est le seul cas où cela se produit.

Munissons F du produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$ dont découle la norme $\| \|_2$ et considérons une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_p)$ de F. Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, on a alors $\|\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p\|_2^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2$. Par hypothèse, on a donc, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_p f_p(x))^2 \leqslant \mathrm{C}^2(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2).$$

L'idée astucieuse est alors d'écrire cette inégalité pour x fixé en prenant des λ_k qui dépendent du point x, à savoir $\lambda_k = f_k(x)$. On a donc, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(f_1^2(x) + \dots + f_p^2(x))^2 \leqslant \mathrm{C}^2(f_1(x)^2 + \dots + f_p(x)^2),$$

donc $f_1^2(x) + \dots + f_p^2(x) \leqslant \mathrm{C}^2$. En intégrant cela entre 0 et 1, on obtient $\|f_1\|_2^2 + \dots + \|f_p\|_2^2 \leqslant \mathrm{C}^2$, soit $p \leqslant \mathrm{C}^2$. On en déduit que F est nécessairement de dimension finie inférieure ou égale à C^2 (sans quoi on pourrait trouver une famille orthonormée de cardinal strictement supérieur à C^2).

3. On va prendre pour F un sous-espace engendré par une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$. D'après la question précédente, il est nécessaire que cette famille vérifie $f_1(x)^2 + \dots + f_n(x)^2 \leqslant n$ pour tout $x \in [0, 1]$ (en fait, il y a égalité, puisque les intégrales sont égales). Mais cela est suffisant. En effet, si $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \in \mathrm{F}$, on a $\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)^2\right) \leqslant n\|f\|_2^2$$

pour tout x, donc $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{n}\|f\|_2$. Pour trouver une telle famille orthonormée, il faut penser au cours sur les séries de Fourier et plus précisément aux polynômes trigonométriques. On sait que les fonctions $x \longmapsto \cos kx$ et $x \longmapsto \sin kx$ forment une famille orthogonale pour le produit scalaire intégral sur $[0, 2\pi]$. On se ramène au segment $[0, 1]$, en considérant les fonctions $c_k : x \longmapsto \sqrt{2}\cos(2k\pi x)$ et $s_k : x \longmapsto \sqrt{2}\sin(2k\pi x)$ pour tout $k \geqslant 1$, qui forment une famille orthonormée. On note de plus c_0 la fonction constante égale à 1. Si $n = 2p$ est pair, il suffit alors de prendre la famille $(c_1, \dots, c_p, s_1, \dots, s_p)$ qui convient puisque $c_1^2 + \dots + c_p^2 + s_1^2 + \dots + s_p^2 = 2p = n$. Si $n = 2p + 1$ est impair, il suffit d'ajouter la fonction c_0 à la suite orthonormée précédente. $\triangleleft$

Si E *est un espace préhilbertien réel, il découle du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que* $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ *si, et seulement* *si, les vecteurs x et y sont positivement colinéaires. Cela n'est bien entendu pas le cas pour une norme quelconque : par exemple dans $\mathbb{R}^2$ si $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$ on a $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$. Dans l'exercice suivant, on prouve toutefois que si* E *est séparable (c'est-à-dire contient une partie dénombrable dense), alors on peut toujours trouver une norme équivalente à la norme de départ qui possède cette qualité.*

1.13. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ un espace normé réel.

1. Pour x non nul dans E, on définit l'application $p_x : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par $p_x(a) = \inf\{\|a + \lambda x\|, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que pour a, b dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$p_x(a+b) \leqslant p_x(a) + p_x(b) \quad \text{et} \quad p_x(\lambda a) = |\lambda| p_x(a).$$

Déterminer $\{a \in \mathrm{E}, p_x(a) = 0\}$.

2. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ dense dans E. Construire une norme N, équivalente à $\| \ \|$ et telle que pour tout $(a,b) \in \mathrm{E}^2$, l'égalité $\mathrm{N}(a+b) = \mathrm{N}(a) + \mathrm{N}(b)$ implique que a et b sont positivement colinéaires.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Géométriquement, $p_x(a)$ s'interprète comme la distance de l'origine à la droite affine passant par a et dirigée par x. Soit $(a,b) \in \mathrm{E}^2$. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a, par inégalité triangulaire,

$$p_x(a+b) \leqslant \|a + b + (\lambda + \mu)x\| \leqslant \|a + \lambda x\| + \|b + \mu x\|.$$

En passant à la borne inférieure sur λ puis sur μ, on obtient donc l'inégalité $p_x(a+b) \leqslant p_x(a) + p_x(b)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout réel μ, on a

$$p_x(\lambda a) \leqslant \|\lambda a + \lambda \mu x\| = |\lambda| \|a + \mu x\|$$

et en passant à la borne inférieure sur μ, il vient $p_x(\lambda a) \leqslant |\lambda| p_x(a)$. Si $\lambda = 0$, on a clairement égalité car $p_x(0) = 0$, et sinon on obtient l'inégalité inverse en remplaçant a par λa et λ par $\dfrac{1}{\lambda}$. On a donc prouvé que $p_x(\lambda a) = |\lambda| p_x(a)$. Comme p_x est clairement positive, on vient donc de montrer que p_x est une semi-norme sur E (cf. p.21 pour la définition d'une semi-norme).

Cherchons maintenant $\{a \in \mathrm{E}, p_x(a) = 0\}$. On a clairement $p_x(a) = 0$ lorsque a est sur la droite engendrée par x. C'est le seul cas, car il est facile de voir que la borne inférieure qui définit $p_x(a)$ est atteinte : si

(λ_n) est une suite de réels telle que $\|a + \lambda_n x\|$ converge vers $p_x(a)$, la suite (λ_n) est bornée et il suffit d'en extraire une sous-suite convergente pour conclure.

2. La question précédente montre que toutes les fonctions p_x pour $x \neq 0$ sont des semi-normes sur E et il est naturel d'utiliser les p_{x_n} pour construire la norme N recherchée. On fait l'hypothèse que les vecteurs x_n sont tous non nuls : si le vecteur nul apparaît dans la suite, il suffit de considérer la sous-suite formée des vecteurs non nuls de la suite. Celle-ci reste clairement dense dans E.

Il est clair que la somme d'une norme et de semi-normes est encore une norme (l'inégalité triangulaire et l'axiome d'homogénéité sont clairement vérifiés et l'axiome de séparation reste vrai). Comme on a une suite infinie de semi-normes à ajouter, on place un coefficient de manière à obtenir une série convergente. Posons donc, pour tout $a \in \mathrm{E}$,

$$\mathrm{N}(a) = \|a\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_{x_n}(a)}{2^n}.$$

La série converge car $p_{x_n}(a) \leqslant \|a\|$ pour tout n. On en déduit déjà que $\|a\| \leqslant \mathrm{N}(a) \leqslant 2\|a\|$ pour tout $a \in \mathrm{E}$. Ainsi N est une norme sur E, équivalente à $\|\ \|$. Il nous reste à démontrer qu'elle a la propriété requise concernant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Soit $(a, b) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\mathrm{N}(a + b) = \mathrm{N}(a) + \mathrm{N}(b)$. Les inégalités triangulaires sont donc toutes des égalités : on a $\|a + b\| = \|a\| + \|b\|$ et $p_{x_n}(a + b) = p_{x_n}(a) + p_{x_n}(b)$ pour tout entier n. Montrons que cette dernière égalité est en fait vraie pour tout vecteur non nul x de E. Comme la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est dense dans E il nous suffit de vérifier que, a étant fixé, l'application $x \mapsto p_x(a)$ est continue sur $\mathrm{E} \setminus \{0\}$. Soient x et x' deux vecteurs non nuls. Pour tout réel λ on a, par inégalité triangulaire,

$$p_{x'}(a) \leqslant \|a + \lambda x'\| \leqslant \|a + \lambda x\| + |\lambda| \|x' - x\|.$$

Comme $\|a + \lambda x\| \geqslant |\lambda| \|x\| - \|a\|$ et comme $p_x(a) \leqslant \|a\|$, on peut se restreindre à prendre $|\lambda| \leqslant \dfrac{2\|a\|}{\|x\|}$ pour calculer la borne inférieure définissant $p_x(a)$. Par passage à la borne inférieure on a donc

$$p_{x'}(a) \leqslant p_x(a) + 2\frac{\|a\|}{\|x\|}\|x' - x\|.$$

En échangeant les rôles de x' et x on a donc l'encadrement suivant

$$p_x(a) - 2\frac{\|a\|}{\|x'\|}\|x' - x\| \leqslant p_{x'}(a) \leqslant p_x(a) + 2\frac{\|a\|}{\|x\|}\|x' - x\|.$$

Par le théorème d'encadrement, on peut donc affirmer que $p_{x'}(a)$ tend vers $p_x(a)$ lorsque x' tend vers x. On a donc $p_x(a+b) = p_x(a) + p_x(b)$ pour tout vecteur x non nul.

Supposons alors $a + b \neq 0$ (si $b = -a$ et si les deux vecteurs ne sont pas nuls il ne peut pas y avoir égalité dans l'inégalité triangulaire). Appliquons le résultat précédent avec $x = a+b$. Comme $p_{a+b}(a+b) = 0$, on a forcément $p_{a+b}(a) = p_{a+b}(b) = 0$, donc a et b sont colinéaires d'après le résultat de la première question. Si par exemple a n'est pas nul et si on pose $b = \lambda a$, on a alors $1 + |\lambda| = |1 + \lambda|$ car $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$. Cela impose que soit λ positif. D'où le résultat $\lhd$

Voici maintenant quelques exercices portant sur les notions topologiques suivantes : ouverts, fermés, adhérence, intérieur.

1.14. Sous-espaces fermés

> Soient F et G deux sous-espaces d'un espace normé E. On suppose que est F fermé et G de dimension finie. Montrer que F + G est fermé.
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

Tout espace de dimension finie pouvant s'écrire comme somme d'un nombre fini de droites vectorielles, il suffit de montrer le résultat lorsque G est une droite $\mathbb{R}e$. On peut dans ce cas supposer la somme directe, sinon $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F}$ et le résultat est évident. Soit $x_n = f_n + \lambda_n e$ une suite de $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ qui converge vers $x \in \mathrm{E}$. On veut montrer que $x \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Si la suite (λ_n) est bornée, c'est facile. En effet, on extrait alors une sous-suite $(\lambda_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel λ. La suite $(f_{\varphi(n)})$ converge alors aussi, comme différence de suites convergentes, et sa limite f est dans F car F est fermé. On a alors $x = f + \lambda e$ et c'est fini. Le même argument fonctionne si la suite (λ_n) admet une sous-suite bornée (*i.e.* dès qu'elle admet une valeur d'adhérence réelle). Si ce n'est pas le cas, c'est que $|\lambda_n|$ tend vers l'infini. Mais alors, comme la suite (x_n) est bornée, $e = \dfrac{1}{\lambda_n} x_n + \dfrac{1}{\lambda_n} f_n$ est limite de la suite $\left(\dfrac{1}{\lambda_n} f_n\right)$ d'éléments de F, ce qui est absurde, car e n'appartient pas à F et F est fermé. $\lhd$

En prenant $\mathrm{F} = \{0\}$ *cet exercice prouve en particulier que tout sous-espace de dimension finie de* E *est fermé. Rappelons la preuve la plus rapide de ce fait. Soit* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *de dimension finie et* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de* F *qui converge vers* $a \in \mathrm{E}$. *Cette suite est donc de Cauchy et, comme* F *est complet, elle converge dans* F. *Par unicité de la limite (dans* E*), on peut dire que* $a \in \mathrm{F}$.

1.15. Fonctions injectives, surjectives, bijectives

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On note $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ les parties de E formées des fonctions à valeurs dans le segment $[0,1]$ qui sont respectivement injectives, surjectives, bijectives. Les parties $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• L'ensemble $\mathcal{I}$ n'est pas fermé, car les fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x}{n}$ (pour $n \geqslant 1$) sont à valeurs dans $[0,1]$ et injectives, alors que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle qui n'est pas injective.

Il n'est pas non plus ouvert et on va même prouver que $\mathcal{I}$ est d'intérieur vide. Soit $g \in \mathcal{I}$. Pour $n \geqslant 2$, notons g_n la fonction continue qui vaut $g(0)$ sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, qui coïncide avec g sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{n}, 1\right]$, et qui est affine sur $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$. Les fonctions g_n ne sont pas injectives et il est facile de voir que la suite (g_n) converge uniformément vers g sur $[0,1]$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, par uniforme continuité de g sur $[0,1]$, il existe n_0 tel que, si $n \geqslant n_0$, on a $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tous x et y dans $\left[0, \dfrac{2}{n}\right]$. On a alors $\|g_n - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$. On en déduit que g n'est pas un point intérieur à $\mathcal{I}$.

• L'ensemble $\mathcal{S}$ est fermé. En effet, soit (f_n) une suite de $\mathcal{S}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f \in \mathrm{E}$. La fonction f est encore à valeur dans $[0,1]$. Soit $y \in [0,1]$. Pour tout n on peut trouver un réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = y$. Par compacité du segment $[0,1]$ on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers un point $a \in [0,1]$. Alors la suite $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$, qui est constante égale à y, converge aussi vers $f(a)$ car on a l'inégalité

$$|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| \leqslant \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty$$

et le majorant tend vers 0. On a donc $f(a) = y$ par unicité de la limite. Comme cela vaut pour tout y, on a $f([0,1]) = [0,1]$ et $f \in \mathcal{S}$.

On en déduit que $\mathcal{S}$ n'est pas ouvert puisque, E étant connexe par arcs (c'est un espace vectoriel), les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E. Mais on peut aussi le prouver très élémentairement : par exemple les fonctions $g_n : x \longmapsto \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x$ ne sont pas dans $\mathcal{S}$ et la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ qui est dans $\mathcal{S}$.

Montrons plus précisément que $\mathcal{S}$ est d'intérieur vide. Si $f \in \mathcal{S}$, il suffit de considérer $f_n : x \longmapsto \min(f(x), 1 - \frac{1}{n})$ pour $n \geqslant 1$. Les fonctions f_n sont continues, non surjectives et comme $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$, la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément vers f.

• Comme $\mathcal{B}$ est inclus dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{I}$, on peut tout de suite dire d'après les deux points précédents que $\mathcal{B}$ est d'intérieur vide. Enfin $\mathcal{B}$ n'est pas fermé. En effet, soit f_n la fonction continue et affine par morceaux dont le graphe joint les points $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)$ et $(1,1)$. Il est clair que f_n est une bijection de $[0,1]$ sur lui-même pour tout $n \geqslant 2$. Mais la suite $(f_n)_{n \geqslant 2}$ converge uniformément vers une fonction affine f qui est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc non bijective. $\triangleleft$

Il est possible de décrire l'adhérence de $\mathcal{B}$. Une fonction f de $\mathcal{B}$ est strictement monotone sur $[0,1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ dans le cas croissant et $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ dans le cas décroissant. Si une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{B}$ converge uniformément il est clair que les fonctions f_n doivent avoir la même monotonie à partir d'un certain moment (car la suite $f_n(0)$ qui converge et n'a que deux valeurs possibles est stationnaire). On en déduit que l'adhérence de $\mathcal{B}$ est incluse dans l'ensemble des fonctions surjectives et monotones sur $[0,1]$. En fait il y a égalité. Par exemple si f est croissante avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, il suffit de considérer la suite des fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x + nf(x)}{1+n}$ pour $n \geqslant 1$. Il s'agit d'éléments de $\mathcal{B}$ et il est aisé de voir que cette suite converge uniformément vers f. On procède de façon analogue dans le cas décroissant.

1.16. Adhérence de l'ensemble des polynômes simplement scindés de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et Ω_n l'ensemble des polynômes de degré n de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ simplement scindés sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Trouver l'adhérence de Ω_n dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Soient $\mathrm{P} \in \Omega_n$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ les racines distinctes de P et des réels $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$. La fonction P change de signe en chaque α_i. On a donc, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{P}(\beta_i)\mathrm{P}(\beta_{i+1}) < 0$. La fonction $f : \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{P}(\beta_0), \mathrm{P}(\beta_1), \ldots, \mathrm{P}(\beta_n))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, qui sont de dimension finie donc elle est continue, $\mathbb{R}_n[X]$ étant muni d'une norme quelconque. On en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\|Q - P\| \leqslant \eta$, alors $Q(\beta_i)P(\beta_i) > 0$ pour tout i. On a alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(\beta_i)Q(\beta_{i+1}) < 0$. La fonction Q s'annule sur chaque intervalle $]\beta_i, \beta_{i+1}[$, donc Q possède n racines distinctes et $Q \in \Omega_n$. Donc Ω est ouvert.

2. Nous allons démontrer que l'adhérence de Ω_n est l'ensemble des polynômes scindés de $\mathbb{R}_n[X]$ auquel on rajoute le polynôme nul [1].

Soit $P \in \overline{\Omega_n}$ et (P_k) une suite d'éléments de Ω_n qui converge vers $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note $P_k = c_k \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_{k,i})$, où les $\alpha_{k,i}$ sont les n racines distinctes de P_k écrites dans un ordre quelconque. Considérons pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la suite $(\alpha_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$. Soit cette suite possède une suite extraite bornée, donc une suite extraite convergente, soit aucune suite extraite n'est bornée et alors il existe une suite extraite qui tend vers $\pm\infty$. De $(\alpha_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$, on extrait une suite $(\alpha_{\varphi_1(k),1})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge ou tend vers $\pm\infty$. Puis de la suite $(\alpha_{\varphi_1(k),2})_{k\in\mathbb{N}}$ on extrait une suite $(\alpha_{\varphi_2\circ\varphi_1(k),2})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge ou tend vers $\pm\infty$. En faisant n extractions successives $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, obtient une extraction $\varphi = \varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(\alpha_{\varphi(k),i})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ou tend vers $\pm\infty$. Quitte à changer l'ordre des racines, on peut supposer qu'il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $(\alpha_{\varphi(k),1}), \ldots, (\alpha_{\varphi(k),p})$ convergent vers $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et les $n-p$ autres suites divergent vers $\pm\infty$.

Pour k assez grand, on peut écrire

$$\begin{aligned} P_{\varphi(k)} &= c_{\varphi(k)} \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_{\varphi(k),i}) \prod_{i=p+1}^{n} (-\alpha_{\varphi(k),i}) \prod_{i=p+1}^{n} \left(1 - \frac{X}{\alpha_{\varphi(k),i}}\right) \\ &= d_k \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_{\varphi(k),i}) \prod_{i=p+1}^{n} \left(1 - \frac{X}{\alpha_{\varphi(k),i}}\right), \end{aligned}$$

où $d_k \in \mathbb{R}$. Quand k tend vers $+\infty$, $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_{\varphi(k),i}) \prod_{i=p+1}^{n} \left(1 - \frac{X}{\alpha_{\varphi(k),i}}\right)$ tend vers $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$ et $P_{\varphi(k)}$ vers P. Quitte de nouveau à faire intervenir une suite extraite, on peut supposer que la suite (d_k) converge vers d ou diverge vers $\pm\infty$. Si elle converge vers d, on obtient $P = d \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$. Si elle diverge vers $\pm\infty$, on considère la limite de $\frac{1}{d_k} P_{\varphi(k)}$, qui est nulle. On obtient $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) = 0$, ce qui est une contradictoire. Ainsi on a

1. Un polynôme scindé est par définition non nul.

$\mathrm{P} = d \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ qui est un polynôme scindé de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ (éventuellement nul si $p = 0$).

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ scindé. Si $\mathrm{P} = 0$, P est la limite de la suite $\left(\frac{1}{k}\,\mathrm{Q}\right)$, où Q est un polynôme simplement scindé de degré n quelconque. On suppose désormais que $\mathrm{P} \neq 0$, de degré p. On écrit $\mathrm{P} = c \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$, où $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_p$ sont les racines de P et $c \in \mathbb{R}^*$. On se donne des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{n-p}$ non nuls, distincts et on considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$\mathrm{P}_k = c \prod_{j=1}^{n-p} \left(1 - \frac{\mathrm{X}}{k\beta_i}\right) \prod_{i=1}^{p} \left(\mathrm{X} - \alpha_i - \frac{i}{k}\right).$$

Alors P_k est de degré n et simplement scindé pour n assez grand. En effet, on a pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$\alpha_i + \frac{i}{k} \leqslant \alpha_{i+1} + \frac{i}{k} < \alpha_{i+1} + \frac{i+1}{k},$$

donc les p dernières racines sont distinctes. Il en est de même des $n-p$ premières, les $k\beta_j$, par construction. Enfin, pour tout $j \in [\![1, n-p]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} k\beta_j = \pm\infty$ donc pour k assez grand, on a $k\beta_j \neq \alpha_i + \frac{i}{p}$ pour tout (i, j). Ainsi P_k est simplement scindé. Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{P}_k = \mathrm{P}$, $\mathrm{P} \in \overline{\Omega_n}$.

Conclusion. L'adhérence des polynômes de degré n simplement scindé sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est la réunion de $\{0\}$ et l'ensemble des polynômes scindés. ◁

Rappelons, en vue de l'exercice suivant, que si A *est une partie d'un espace vectoriel normé* E, *un point* x *de* A *est dit isolé s'il existe une boule ouverte* B *de centre* x *dans* E *tel que* $\mathrm{B} \cap \mathrm{A} = \{x\}$.

1.17. Théorème de Cantor-Bendixson

Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$. On dit que $x \in \mathrm{K}$ est un point de condensation si, pour tout voisinage V de x, l'ensemble $\mathrm{V} \cap \mathrm{K}$ est non dénombrable. On note $\mathrm{C_K}$ l'ensemble des points de condensation de K.

1. Donner des exemples où $\mathrm{C_K} = \emptyset$, $\mathrm{C_K} = \mathrm{K}$, $\mathrm{C_K}$ est non vide et distinct de K.

2. Montrer que $\mathrm{C_K}$ est fermé, que $\mathrm{K} \setminus \mathrm{C_K}$ est au plus dénombrable et enfin que $\mathrm{C_K}$ est sans point isolé.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Le but de cette première question facile est de familiariser le candidat avec la notion introduite par l'énoncé. Si K est un ensemble fini on a $C_K = \emptyset$. Si K est une boule fermée de rayon > 0 alors $C_K = K$. Enfin si on prend $K = [-1, 1] \cup \{2\}$ dans $\mathbb{R}$ on a $C_K = [-1, 1]$ qui est non vide et strictement inclus dans K.

2. Montrons que C_K est fermé en utilisant la caractérisation séquentielle des parties fermées. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de C_K qui converge vers x_∞. Comme K est fermé, $x_\infty \in K$ et on va montrer qu'il est dans C_K. Soit V un voisinage de x_∞ qu'on peut supposer ouvert quitte à le prendre plus petit. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in V$. Donc V est aussi un voisinage de x_N et comme x_N est un point de condensation de K, l'ensemble $V \cap K$ n'est pas dénombrable. Cela prouve que x_∞ est un point de condensation de K et donc que C_K est fermé.

Montrons maintenant que $K \setminus C_K$ est au plus dénombrable. Pour tout $x \in K \setminus C_K$, on peut trouver une boule ouverte B_x centré en x telle que l'intersection $B_x \cap K$ soit au plus dénombrable. Notons Ω l'ensemble des boules ouvertes centrées en un point de $\mathbb{Q}^n$ et ayant un rayon de la forme $\dfrac{1}{p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que l'ensemble Ω est dénombrable. Soit p un entier naturel tel que $\dfrac{2}{p}$ soit inférieur au rayon de B_x. Par densité de $\mathbb{Q}^n$, on peut trouver $y \in \mathbb{Q}^n$ tel que $|x - y| < \dfrac{1}{p}\cdot$ Alors, la boule B de centre y et de rayon $\dfrac{1}{p}$ appartient à Ω et vérifie : $x \in B$ et $B \subset B_x$. Il existe donc une partie Ω' de Ω telle que $K \setminus C_K \subset \displaystyle\bigcup_{B\in\Omega'} (B \cap K)$ où chaque intersection $B \cap K$ est au plus dénombrable. Il en découle que $K \setminus C_K$ est au plus dénombrable.

Montrons enfin que C_K est sans point isolé en raisonnant par l'absurde. Supposons que x est un point isolé de C_K. On peut donc trouver une boule ouverte B centrée en x telle que x soit le seul point de C_K dans B. Pour tout $y \in K \cap B$ distinct de x, on peut donc trouver, comme précédemment, une boule B_y de Ω contenant y et telle que $B_y \cap K$ soit au plus dénombrable. Il en découle que $B \cap K$ est au plus dénombrable car il est inclus dans $\{x\} \displaystyle\bigcup_{y\in K} (B_y \cap K)$ et l'ensemble des boules B_y est au plus dénombrable. Cela contredit le fait que x est un point de condensation de K. ◁

On a donc montré que K *se décompose en la réunion d'un fermé parfait (sans point isolé) et d'un ensemble au plus dénombrable. C'est le théorème de Cantor-Bendixson qui se généralise à n'importe quel es-*

pace métrique séparable (c'est-à-dire contenant une partie dénombrable dense).

Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie les normes ne sont pas toutes équivalentes et il est important, par exemple lorsqu'on parle de la convergence d'une suite, de bien préciser la norme utilisée. Il est tout de même assez surprenant de voir, dans l'exercice suivant, qu'une suite donnée de vecteurs peut converger vers n'importe quelle limite fixée à l'avance pour une norme bien choisie.

1.18. Choix de la limite d'une suite

> Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\geqslant 0}$ tende vers Q au sens de cette norme.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Sur un espace de dimension n muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, nous avons plusieurs normes classiques : par exemple si $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on peut considérer les normes suivantes :

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,\ \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},\ \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Ces normes vérifient toutes $\|e_i\| = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On va s'inspirer de cela pour construire des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

Posons $P_n = 2^n(X^n - Q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour toute norme $\|\ \|$, $\|X^n - Q\| = \dfrac{1}{2^n}\|P_n\|$. Il nous suffirait donc d'avoir $\|P_n\| = 1$ pour tout n pour conclure. Les polynômes P_n ne forment pas forcément une base. Cependant si $n_0 = \deg Q$ on a $\deg P_n = n$ pour $n > n_0$. Modifions P_n pour $n \leqslant n_0$, en prenant $P_n = X^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$ et la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une base de $\mathbb{R}[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrivant $\lambda_0P_0 + \lambda_1P_1 + \cdots + \lambda_kP_k$, avec les λ_i dans $\mathbb{R}$, on pose par exemple

$$\|P\| = \max_{0\leqslant i\leqslant k} |\lambda_i|.$$

Il s'agit clairement d'une norme sur $\mathbb{R}[X]$ avec $\|P_n\| = 1$ pour tout n. Donc pour $n \geqslant n_0$, $\|X^n - Q\| = \dfrac{1}{2^n}$, ce qui permet de conclure. ◁

Le thème qui termine ce chapitre est la continuité. Les premiers exercices concernent des applications quelconques ; la continuité des applications linéaires termine le chapitre. La notion de compacité, qui est au *cœur du chapitre suivant, sera déjà utilisée dans certains exercices, notamment le théorème important qui affirme que l'image par une fonction continue d'un ensemble compact est compact et le corollaire suivant : une fonction numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

1.19. Étude de continuité (1)

> Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction F qui à $r \geqslant 0$ associe $\mathrm{F}(r) = \sup\limits_{\|x\| \leqslant r} \|f(x)\|$ est continue.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc une limite à gauche et à droite en tout point r_0 avec $\lim\limits_{r_0^-} \mathrm{F} \leqslant \mathrm{F}(r_0) \leqslant \lim\limits_{r_0^+} \mathrm{F}$ (seulement à droite en $r_0 = 0$ bien entendu) et il suffit de prouver que ces limites sont égales à $\mathrm{F}(r_0)$.

Commençons par la continuité à gauche en un point $r_0 > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f et compacité de la boule fermée de rayon r_0 il existe x_0 tel que $\|x_0\| \leqslant r_0$ et $\mathrm{F}(r_0) = \|f(x_0)\|$. Si $\|x_0\| < r_0$, alors F est constante sur le segment $\big[\|x_0\|, r_0\big]$ et la continuité à gauche en r_0 est évidente. Supposons donc que $\|x_0\| = r_0$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ pour $\|x - x_0\| \leqslant \eta$. Pour de tels vecteurs x on a en particulier $\|f(x)\| \geqslant \|f(x_0)\| - \varepsilon = \mathrm{F}(r_0) - \varepsilon$. On a donc $\mathrm{F}(r) \geqslant \mathrm{F}(r_0) - \varepsilon$ pour $r \in [r_0 - \eta, r_0]$ et cela prouve la continuité à gauche en r_0.

Montrons maintenant que F est continue à droite en tout $r_0 \geqslant 0$. Comme précédemment, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un point x_p tel que $\|x_p\| \leqslant r_0 + \dfrac{1}{p}$ et $\mathrm{F}\Big(r_0 + \dfrac{1}{p}\Big) = \|f(x_p)\|$. La suite $(x_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point y. Par continuité de la norme on a $\|y\| \leqslant r_0$ et par continuité de f on a $\|f(y)\| = \lim\limits_{r_0^+} \mathrm{F}$. Cela implique que $\lim\limits_{r_0^+} \mathrm{F} \leqslant \mathrm{F}(r_0)$ et donc forcément que $\lim\limits_{r_0^+} \mathrm{F} = \mathrm{F}(r_0)$. La continuité à droite est ainsi démontrée. ◁

On étudie maintenant la continuité du minimum d'une famille de fonctions à un paramètre.

1.20. Étude de continuité (2)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^p$, K un compact d'un espace vectoriel normé E et f une fonction continue de $\mathrm{D} \times \mathrm{K}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \longmapsto \inf_{y \in \mathrm{K}} f(x,y)$ est continue sur D.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons φ la fonction qui à $x \in \mathrm{D}$ associe $\varphi(x) = \inf_{y \in \mathrm{K}} f(x,y)$. Cette fonction est bien définie car, à x fixé, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est continue sur le compact K (puisque f est continue) donc est bornée (et atteint ses bornes).

Soit $a \in \mathrm{D}$. Montrons que φ est continue en a en raisonnant par l'absurde. Si φ est discontinue en a, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de D qui converge vers a, telle que $|\varphi(a) - \varphi(x_n)| \geqslant \varepsilon$ pour tout n. Autrement dit, on a soit $\varphi(x_n) \geqslant \varphi(a) + \varepsilon$, soit $\varphi(x_n) \leqslant \varphi(a) - \varepsilon$, pour tout n. La compacité de K assure l'existence de $y_n \in \mathrm{K}$ tel que $\varphi(x_n) = f(x_n, y_n)$. Toujours par compacité de K, on peut supposer, quitte à remplacer $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(y_n)_{n \geqslant 0}$ par des suites extraites, que $(y_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers un élément b de K. Alors, par continuité de f, la suite $\varphi(x_n) = f(x_n, y_n)$ converge vers $f(a,b) \geqslant \varphi(a)$. Par conséquent, à partir d'un certain rang N, on a forcément $\varphi(x_n) \geqslant \varphi(a) + \varepsilon$.

Pour $y \in \mathrm{K}$ et $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $f(x_n, y) \geqslant \varphi(x_n) \geqslant \varphi(a) + \varepsilon$ donc, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $f(a,y) \geqslant \varphi(a) + \varepsilon$. Cela est valable pour tout $y \in \mathrm{K}$ donc $\varphi(a)) \geqslant \varphi(a) + \varepsilon$ ce qui est absurde.

Conclusion. La fonction φ est continue sur D. ◁

L'exercice suivant étudie la continuité de la plus grande racine réelle d'un polynôme de degré 3.

1.21. Étude de continuité (3)

Soit f l'application qui à $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ associe la plus grande racine du polynôme $\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X} + b$.

1. L'application f est-elle continue ?

2. Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles l'application $f_a : b \longmapsto f(a,b)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Un polynôme réel de degré 3 admet toujours au moins une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, ce qui justifie la définition de f. Plus précisément un tel polynôme possède soit une unique racine réelle (simple ou triple), soit trois racines réelles distinctes soit deux racines réelles distinctes dont l'une est double. Si P est scindé à racines simples, il en est de même des polynômes suffisamment proches de P (voir l'exercice 1.16) et intuitivement la plus grande racine dépend continûment de P. On va voir que f n'est pas continue en un point (a, b) qui correspond à une plus grande racine double. Prenons par exemple $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}-1)^2 = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} + 2$ (la somme des racines de P doit être nulle). On a donc $f(-3, 2) = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ le polynôme

$$\mathrm{P}_\varepsilon = (\mathrm{X}+2)\big((\mathrm{X}-1)^2 + \varepsilon\big) = \mathrm{X}^3 - (3-\varepsilon)\mathrm{X} + 2 + 2\varepsilon$$

a -2 pour plus grande racine réelle. On a donc $f(-3+\varepsilon, 2+2\varepsilon) = -2$ pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui montre que f n'est pas continue en $(-3, 2)$.

2. Supposons a fixé. Le fait de faire varier b revient simplement à translater verticalement le graphe du polynôme.

• Si $a < 0$ le polynôme $3\mathrm{X}^2 + a$ s'annule deux fois sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}$ admet un minimum local en $x_0 = \sqrt{-a/3}$. On peut trouver une valeur de b (unique) telle que $\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X} + b$ s'annule en x_0, à savoir $b = -\mathrm{Q}(x_0)$ (on a $b > 0$ car x_0 est compris entre les racines 0 et $\sqrt{-a}$ de Q). Le réel x_0 est alors une racine double de $\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X} + b$ et f_a n'est pas continue en b. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X} + b + \varepsilon$ admet une unique racine réelle qui est négative alors que $f_a(b) = f(a, b) = x_0 > 0$.

• Si $a \geqslant 0$ la fonction $x \mapsto x^3 + ax$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Si on note φ l'homéomorphisme réciproque, on a $f_a(b) = \varphi(-b)$ pour tout b et f_a est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X} + b$ admet une unique racine réelle pour tout b. ◁

1.22. Continuité de la composition

> Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\| \ \|_\infty$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $\psi : f \in \mathrm{E} \longmapsto \varphi \circ f \in \mathrm{E}$. Montrer que ψ est continue.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit f_0 dans E. On veut montrer la continuité de ψ en f_0 et pour cela on cherche à majorer $\|\varphi \circ f - \varphi \circ f_0\|_\infty$ pour f proche de f_0. Notons $[c, d]$ le segment image du segment $[a, b]$ par l'application continue f_0 et posons $\mathrm{I} = [c-1, d+1]$. Comme φ est continue sur le compact I, elle y est uniformément continue en vertu du théorème de Heine. Il va nous suffire de choisir f assez proche de f_0 pour que l'image de f soit incluse dans I. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$ et η un ε-module d'uniforme continuité de φ sur I. On peut bien entendu supposer $\eta \leqslant 1$. Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\|f - f_0\|_\infty \leqslant \eta$. Pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - f_0(x)| \leqslant \eta$ et donc

$$c - 1 \leqslant f_0(x) - \eta \leqslant f(x) \leqslant f_0(x) + \eta \leqslant d + 1.$$

Ainsi $f(x)$ et $f_0(x)$ sont dans I et on a $|\varphi(f(x)) - \varphi(f_0(x))| \leqslant \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout x dans $[a, b]$, on a $\|\varphi \circ f - \varphi \circ f_0\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

On vient donc de prouver que ψ est continue. $\lhd$

L'exercice suivant est facile et concerne la notion de prolongement par continuité.

1.23. Prolongement par continuité

Soit $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $z \in \mathrm{S}$, f possède un prolongement continu $f_z : \mathrm{D} \cup \{z\} \to \mathbb{R}$. Montrer que f possède un prolongement continu à $\overline{\mathrm{D}}$.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

Bien entendu il n'y a pas le choix pour définir le prolongement de f. Prenons $g : \overline{\mathrm{D}} \to \mathbb{R}$ définie par $g(z) = f(z)$ si $z \in \mathrm{D}$ et $g(z) = f_z(z)$ si $z \in \mathrm{S}$. Il est clair que g est continue en tout point de D et il nous faut simplement prouver que g est continue en tout point z_0 de S.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f_{z_0} est continue en z_0, il existe $r > 0$ tel que pour $|z - z_0| < r$ et $|z| < 1$ on ait $|f(z) - g(z_0)| \leqslant \varepsilon$. Soit alors $z_1 \in \mathrm{S}$ tel que $|z_1 - z_0| < r$. Il existe une suite (u_n) de $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}(z_0, r)$ qui converge vers z_1. En passant à la limite dans l'inégalité $|f(u_n) - g(z_0)| \leqslant \varepsilon$ valable pour tout n on obtient $|g(z_1) - g(z_0)| \leqslant \varepsilon$.

Bref, on a $|g(z) - g(z_0)| \leqslant \varepsilon$ pour tout z de $\overline{\mathrm{D}}$ vérifiant $|z - z_0| < r$. Cela permet de conclure que g est continue en z_0 et finalement sur $\overline{\mathrm{D}}$. $\lhd$

Le résultat se généralise aisément : si D *est une partie dense d'un espace métrique* E *et* $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ *une application continue sur* D *qui se prolonge continûment à* $\mathrm{D} \cup \{x\}$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *alors* f *se prolonge continûment à* E *tout entier.*

Le résultat de l'exercice suivant est un théorème de prolongement très important et beaucoup plus difficile.

1.24. Théorème de prolongement de Tietze

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie fermée non vide de E, $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\inf_{\mathrm{A}} f = 1$ et $\sup_{\mathrm{A}} f = 2$. Soit $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x)$ pour $x \in \mathrm{A}$ et

$$g(x) = \inf_{a\in\mathrm{A}} \frac{f(a)\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})} \text{ si } x \notin \mathrm{A}.$$

1. Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de g.
2. La fonction g est-elle continue ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Remarquons, pour commencer que $g(x)$ est bien défini si $x \notin \mathrm{A}$. En effet A étant fermé, $d(x,\mathrm{A}) = 0$ équivaut à $x \in \mathrm{A}$. D'autre part, la fonction $a \longmapsto \dfrac{f(a)\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})}$ est minorée par 0 donc possède une borne inférieure.

Déterminons la borne supérieure et la borne inférieure de g. Supposons que $x \notin \mathrm{A}$. Alors pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $\|x-a\| \geqslant d(x,\mathrm{A})$ et donc $\dfrac{f(a)\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})} \geqslant f(a) \geqslant 1$. D'où l'on déduit $g(x) \geqslant 1$. D'autre part, pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $f(a) \leqslant 2$ et donc $g(x) \leqslant 2 \inf_{a\in\mathrm{A}} \dfrac{\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})} = 2$, par définition de $d(x,\mathrm{A})$. On a donc $1 \leqslant g(x) \leqslant 2$ pour tout $x \notin \mathrm{A}$. Comme $g|_{\mathrm{A}} = f$, $\inf_{\mathrm{A}} f = 1$ et $\sup_{\mathrm{A}} f = 2$, on peut donc affirmer que $1 \leqslant g(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et que $\inf_{\mathrm{E}} g = 1$ et $\sup_{\mathrm{E}} g = 2$: g a les mêmes bornes supérieures et inférieures que f.

2. Montrons que g est continue en tout point x_0 de E.

• Supposons pour commencer que x_0 est dans l'ouvert $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. Au voisinage de x_0, on a $g(x) = \dfrac{1}{d(x,\mathrm{A})} \inf_{a\in\mathrm{A}} f(a)\|x-a\|$, car $x \notin \mathrm{A}$.

La fonction $x \longmapsto d(x,\mathrm{A})$ est continue sur E, car 1-lipschitzienne. En effet, pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ et $a \in \mathrm{A}$, on a

$$d(x,\mathrm{A}) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|.$$

On en déduit que $d(x,\mathrm{A}) \leqslant \|x-y\| + d(y,\mathrm{A})$ en passant à la borne inférieure sur a. On montre de même que $d(y,\mathrm{A}) \leqslant \|x-y\| + d(x,\mathrm{A})$ et finalement

$$|d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A})| \leqslant \|x-y\|.$$

Montrons de même que la fonction $h : x \longmapsto \inf_{a\in A} f(a)\|x-a\|$ est continue sur E. Pour $(x,y) \in E^2$ et $a \in A$, on a

$$f(a)\|x-a\| \leqslant f(a)\|x-y\| + f(a)\|y-a\| \leqslant 2\|x-y\| + f(a)\|y-a\|.$$

On en déduit $h(x) \leqslant 2\|x-y\| + h(y)$ et en échangeant les rôles de x et de y, $|h(x)-h(y)| \leqslant 2\|x-y\|$. La fonction h est 2-lipschitzienne et donc continue sur E. La fonction g est donc continue sur l'ouvert $E \setminus A$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

• Si x_0 est un point intérieur à A, la continuité de g en x_0 est immédiate, car g est égale à f sur un voisinage de x_0 (et f est continue sur A). Il reste à traiter le cas le plus délicat où x_0 est sur la frontière de A : dans ce cas, tout voisinage de A contient des points de A et des points du complémentaire de A. Donnons nous $\varepsilon > 0$. Comme $f = g|_A$ est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que,

$$\forall x \in A \cap B(x_0,\eta), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (*)$$

On a donc déjà $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ pour $x \in A \cap B(x_0,\eta)$.

Pour $x \notin A$, on commence par montrer que si x est assez proche de x_0, on peut se limiter à prendre la borne inférieure sur $A \cap B(x_0,\eta)$ dans la définition de $g(x)$. Cela permettra d'utiliser $(*)$ pour estimer $g(x)$. Plus précisément, prenons $x \in (E \setminus A) \cap B\Big(x_0, \dfrac{\eta}{3}\Big)$ (non vide par hypothèse). Si $a \in A \setminus B(x_0,\eta)$, alors on a $\|x-a\| \geqslant \dfrac{2\eta}{3}$ et $d(x,A) \leqslant \|x-x_0\| < \dfrac{\eta}{3}\cdot$ On en déduit

$$\frac{\|x-a\|}{d(x,A)} > 2, \text{ puis } \frac{f(a)\|x-a\|}{d(x,A)} > 2f(a) \geqslant 2 \geqslant g(x).$$

Cela entraîne

$$d(x,A) = \inf_{a\in A\cap B(x_0,\eta)} \|x-a\| \text{ et } g(x) = \inf_{a\in A\cap B(x_0,\eta)} \frac{f(a)\|x-a\|}{d(x,A)}\cdot$$

Pour tout $a \in A \cap B(x_0,\eta)$, on a d'après $(*)$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(a) < f(x_0) + \varepsilon,$$

et donc

$$(f(x_0) - \varepsilon)\frac{\|x-a\|}{d(x,A)} < \frac{f(a)\|x-a\|}{d(x,A)} < (f(x_0) + \varepsilon)\frac{\|x-a\|}{d(x,A)}.$$

En prenant la borne inférieure sur $A \cap B(x_0,\eta)$, on obtient

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathrm{B}\Big(x_0, \dfrac{\eta}{3}\Big)$, $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la continuité de g en x_0 et finalement sa continuité sur E. $\lhd$

Si f est une fonction continue et bornée non constante quelconque, on peut se ramener à une fonction ayant une borne supérieure égale à 2 *et une borne inférieure égale à* 1*, en la composant avec une fonction affine. On a donc démontré le résultat suivant : si* E *est un espace vectoriel normé et* A *un fermé de* E*, toute application continue et bornée de* A *dans* $\mathbb{R}$ *peut se prolonger en une application continue et bornée de* E *dans* $\mathbb{R}$*, ayant mêmes bornes inférieure et supérieure. Il s'agit du théorème de prolongement de Tietze qui reste valide dans des espaces topologiques plus généraux.*

Il est bien connu qu'une fonction convexe de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est nécessairement continue : elle est même dérivable à gauche et à droite en tout point. Cela découle simplement du théorème des pentes croissantes et du théorème de la limite monotone. Dans l'exercice suivant, on s'intéresse à la continuité d'une fonction convexe sur un espace vectoriel normé réel quelconque.*

1.25. Fonctions convexes

Soit E un espace vectoriel normé réel, Ω un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose qu'il existe une boule fermé $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ incluse dans Ω sur laquelle la fonction f est majorée par un réel M.

1. Montrer que $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{|\mathrm{M} - f(x_0)|\|x - x_0\|}{r}$ pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$.

2. Montrer que f est localement majorée (c'est-à-dire que pour tout $x \in \Omega$ il existe un voisinage de x inclus dans Ω sur lequel f est majorée). En déduire que f est continue sur Ω.

3. On suppose E de dimension finie. Montrer que toute fonction convexe de Ω dans $\mathbb{R}$ est continue.

4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

1. Soit $x \in \overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ que l'on suppose différent de x_0 (sans quoi le résultat est évident). On va simplement se ramener à une fonction convexe d'une variable réelle. Posons $\varphi(t) = f((1-t)x_0 + tx)$ pour $-\mathrm{T} \leqslant t \leqslant \mathrm{T}$ avec $\mathrm{T} = \dfrac{r}{\|x - x_0\|} \geqslant 1$. Le vecteur $(1-t)x_0 + tx$ reste dans la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ lorsque t parcourt le segment $[-\mathrm{T}, \mathrm{T}]$ et la fonction φ est convexe sur cet intervalle et majorée par M. On a $\varphi(0) = f(x_0)$ et $\varphi(1) = f(x)$. On applique alors le théorème des pentes croissantes :

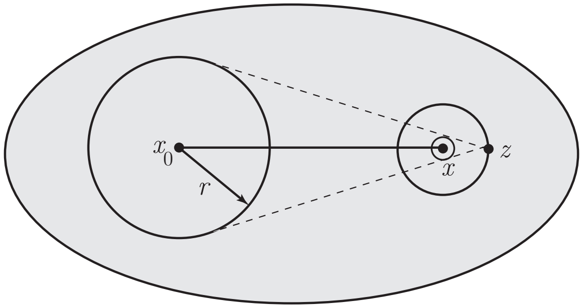
$$\varphi(1) - \varphi(0) \leqslant \frac{\varphi(\mathrm{T}) - \varphi(0)}{\mathrm{T}} \leqslant \frac{\mathrm{M} - f(x_0)}{\mathrm{T}},$$

ce qui donne $f(x) - f(x_0) \leqslant \dfrac{|\mathrm{M} - f(x_0)|\,\|x - x_0\|}{r}\cdot$ Pour la minoration on écrit de même

$$\frac{f(x_0) - \mathrm{M}}{\mathrm{T}} \leqslant \frac{\varphi(0) - \varphi(-\mathrm{T})}{\mathrm{T}} \leqslant \varphi(1) - \varphi(0),$$

et cela montre la majoration en valeur absolue qui est demandée. Notons que cela prouve déjà que f est continue en x_0.

2. Soit $x \in \Omega$. On peut supposer que x n'appartient pas à la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, sans quoi le résultat est évident. Soit $\eta > 0$ tel que la boule $\overline{\mathrm{B}}(x, \eta)$ soit incluse dans Ω. Pour majorer f au voisinage de x, on va considérer des barycentres à coefficients positifs de points de la boule $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ et d'un point fixe z.



On pose $z = x + \eta\,\dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\cdot$ Alors $z \in \overline{\mathrm{B}}(x, \eta)$ et donc $z \in \Omega$. Le point x est barycentre de x_0 et z avec les masses respectives $t = \dfrac{\eta}{\|x_0 - x\| + \eta}$ et $1 - t = \dfrac{\|x_0 - x\|}{\|x_0 - x\| + \eta}$. L'image de $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ par l'homothétie affine $y \mapsto ty + (1-t)z$ est la boule fermée de centre x et de rayon $tr \leqslant \eta$ (car $\|x_0 - x\| \geqslant r$). Si u est dans cette boule on peut l'écrire $u = ty + (1-t)z$ avec $y \in \overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ et par convexité de f on a $f(u) \leqslant t\mathrm{M} + (1-t)f(z)$. Cela montre que f est majorée sur $\overline{\mathrm{B}}(x, tr)$. Le résultat de la question 1 peut alors être appliqué en n'importe quel point x de l'ouvert Ω, ce qui prouve que f est continue sur Ω.

3. Via le choix d'une base on peut supposer que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. À translation près on peut aussi supposer que l'ouvert Ω contient l'origine. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On travaille avec la norme infinie définie par $\|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ ce qui est possible puisque toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Soit $r > 0$ tel que la boule de centre l'origine et de rayon r soit incluse dans Ω. Tout point de cette boule est barycentre à coefficients positifs des 2^n sommets $(\varepsilon_1 r, \ldots, \varepsilon_1 r)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ pour tout i (pour une justification précise, cf. exercice 1.5, question 1). Par inégalité de convexité on en déduit que f est majorée sur $\overline{\mathrm{B}}(0, r)$ par $\mathrm{M} = \max_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{\pm 1\}^n} f(\varepsilon_1 r, \ldots, \varepsilon_n r)$.

4. Il suffit de prendre une forme linéaire non continue pour avoir un exemple de fonction convexe non continue, ce qui est possible en dimension infinie. En effet, si E n'est pas dimension finie, on peut trouver dans E une famille libre dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de vecteurs unitaires. On note F l'espace engendré par les vecteurs e_n et G un supplémentaire de F dans E. Il existe une unique forme linéaire sur E tel que $f(e_n) = n$ pour tout n et $f(x) = 0$ si $x \in \mathrm{G}$. La fonction f n'est pas bornée sur la boule unité, donc n'est pas continue. $\triangleleft$

L'exercice suivant appartient à la topologie algébrique. Il démontre un résultat équivalent au théorème de Brouwer.

1.26. Rétraction du disque unité sur une partie du cercle

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit B le disque unité fermé et S le cercle unité. Déterminer les ensembles A inclus dans S tels qu'il existe $f : \mathrm{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue, vérifiant $f(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$ et $f_{|\mathrm{A}} = \mathrm{Id}_\mathrm{A}$. On utilisera le théorème de relèvement continu.

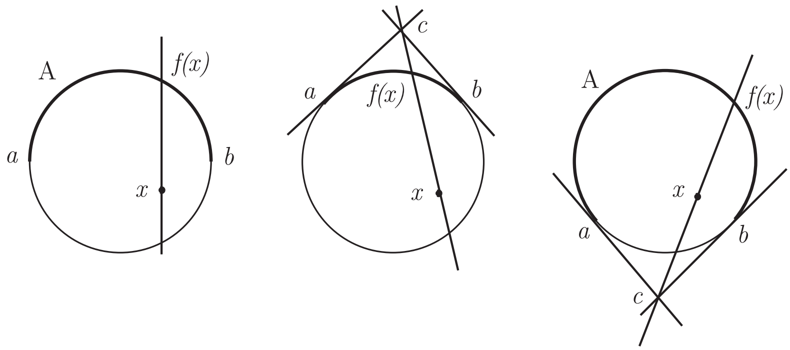
(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Une partie A vérifiant la propriété de l'énoncé est appelée un rétract de B et l'application f est alors une rétraction de B sur A. Comme B est connexe par arcs et compact, il en est de même de son image par une application continue. Ainsi A est nécessairement un arc fermé du cercle S. On va montrer qu'on peut obtenir n'importe quel arc fermé excepté le cercle S tout entier (résultat connu comme le lemme de non-rétraction de Brouwer).

• Prenons pour A un arc fermé du cercle S, distinct de S, d'extrémités a et b. On donne une définition géométrique d'une rétraction f de B sur A.

Soit $x \in \mathrm{B}$. Si a et b sont diamétralement opposés, on prend pour $f(x)$ le point d'intersection de A et de la perpendiculaire à (ab) contenant x. Si a et b sont ne sont pas diamétralement opposés, on note c le point d'intersection des tangentes à S en a et b et, pour tout x de B, $f(x)$ est le point d'intersection de A et de la droite (cx).



L'application f est continue sur B car la perpendiculaire à (ab) contenant x ou la droite (cx) selon les cas, dépendent continûment de x. Il est par ailleurs clair dans les deux cas que f induit l'identité sur A.

• On montre maintenant que S n'est pas une rétraction de B en raisonnant par l'absurde. Soit $f : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{S}$ continue telle que $f_{|\mathrm{S}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}}$. Nous utiliserons le théorème de relèvement suivant, en identifiant S à l'ensemble des nombres complexes de module 1 et B à l'ensemble des nombres complexes de module inférieur à 1.

Lemme. *Soit $f : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{S}$ une application continue. Il existe une application continue $\varphi : \mathrm{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{B}$, $f(x) = e^{i\varphi(x)}$.*

Démonstration.

Ce résultat peut se démontrer à partir du théorème de relèvement des chemins continus qui s'énonce ainsi : si g est une application continue de $[0,1]$ dans S et θ_0 un argument de $g(0)$, il existe une unique application continue $\theta : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = e^{i\theta(t)}$ et $\theta(0) = \theta_0$.

En effet, soit θ_0 un argument de $f(0)$. Pour tout $x \in \mathrm{B}$, on considère l'application $f_x : [0,1] \longmapsto \mathrm{S}$ définie par $f_x(t) = f(xt)$. La fonction f_x est continue et θ_0 est un argument de $f_x(0) = f(0)$, donc il existe une application $\theta_x : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $f_x(t) = e^{i\theta_x(t)}$ et $\theta_x(0) = \theta_0$. On pose, pour tout $x \in \mathrm{B}$, $\varphi(x) = \theta_x(1)$. La fonction $\varphi : \mathrm{B} \longmapsto \mathbb{R}$ vérifie, pour tout $x \in \mathrm{B}$, $f(x) = f_x(1) = e^{i\theta_x(1)} = e^{i\varphi(x)}$.

Il reste à montrer que φ est continue. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout couple $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\left|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}\right| = 2\left|\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right| = 2\sin\frac{|\theta|}{2},$$

où $\theta \in]-\pi, \pi]$ est la détermination principale de $\theta_1 - \theta_2$. On en déduit, puisque $\dfrac{|\theta|}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, par concavité de la fonction sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, que $|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \geqslant 2 \cdot \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{|\theta|}{2} = \dfrac{2|\theta|}{\pi} \cdot$ On obtient

$$|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi} \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta_1 - \theta_2 \in [-\varepsilon + 2k\pi, \varepsilon + 2k\pi].$$

Par le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur le compact B. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathrm{B}^2$,

$$|x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi} \cdot$$

Si $|x - y| \leqslant \alpha$, on a $|xt - yt| \leqslant \alpha$ pour tout $t \in [0, 1]$, et par conséquent $|f_x(t) - f_y(t)| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{\pi}$, c'est-à-dire $\left|e^{i\theta_x(t)} - e^{i\theta_y(t)}\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{\pi} \cdot$ On en déduit que, pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta_x(t) - \theta_y(t) \in [-\varepsilon + 2k\pi, \varepsilon + 2k\pi].$$

La fonction $\theta_x - \theta_y$ est continue sur $[0, 1]$ et s'annule en 0. Comme l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ est de longueur strictement inférieure à π, les intervalles $[-\varepsilon + 2k\pi, \varepsilon + 2k\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont disjoints et on a, pour tout $t \in [0, 1]$, $\theta_x(t) - \theta_y(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et en particulier, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$. Cela démontre la continuité uniforme de φ. $\diamondsuit$

Soit $\varphi : \mathrm{B} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{B}$, $f(x) = e^{i\varphi(x)}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a en particulier $f\left(e^{it}\right) = e^{i\varphi(e^{it})} = e^{it}$ car $e^{it} \in \mathrm{S}$. On en déduit que, pour tout réel t, $\varphi(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}$. La fonction $t \longmapsto \varphi(e^{it}) - t$ est continue et à valeurs dans un ensemble discret, donc est constante : il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout réel t,

$$\varphi(e^{it}) - t = 2k_0\pi.$$

Mais on a alors, pour tout réel t,

$$\varphi\left(e^{i(t+2\pi)}\right) = t + 2\pi + 2k_0\pi = \varphi(e^{it}) + 2\pi \neq \varphi\left(e^{it}\right),$$

ce qui est impossible.

Conclusion. Les ensembles A cherchés sont les arcs fermés de S, différents de S. $\lhd$

De la non-existence d'une rétraction de B *sur* S*, on peut déduire le théorème de Brouwer : toute application continue de* B *dans* B *admet au moins un point fixe.*

Raisonnons par l'absurde, en supposant que l'application continue $g : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}$ *n'admette pas de point fixe. Pour tout* x *de* B*, la droite* *passant par x et $g(x)$ coupe* S *en deux points. On note $f(x)$ celui qui vérifie $x \in [f(x), g(x)]$. Il existe $t \in \mathbb{R}_-$ tel que $f(x) = x + t(g(x) - x)$. En écrivant que $f(x)$ appartient à* S *et en prenant la valeur de t négative, on obtient*

$$t = -\frac{\langle x, g(x) - x\rangle + \sqrt{\langle x, g(x) - x\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|g(x) - x\|^2}}{\|g(x) - x\|^2}.$$

Si $\|x\| = 1$, alors $\langle x, g(x) - x\rangle = \langle x, g(x)\rangle - 1 < 0$, car x et $g(x)$ sont deux points distincts de la boule B *donc $t = 0$. On définit ainsi une application $f : \mathrm{B} \longmapsto \mathrm{S}$ continue, telle que $f_{|\mathrm{S}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}}$. C'est impossible.*

Rappelons quelques points essentiels sur la continuité des applications linéaires. On se donne deux espaces vectoriels normés sur K *(qui vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)* E *et* F *et f une application linéaire de* E *dans* F*. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) f est continue ;

(ii) f est continue en 0 ;

(iii) f est lipschitzienne ;

(iv) f est bornée sur la sphère unité.

Dans ce cas, la plus petite constante de Lipschitz de f qui vaut $\sup\limits_{x \in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \dfrac{\|f(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}} = \sup\limits_{\|x\|_{\mathrm{E}}=1} \|f(x)\|_{\mathrm{F}}$ est appelé la norme triple de f relativement aux normes prises sur E *et* F*. On note cette quantité $\|\!|f|\!\|$ et on vérifie facilement qu'elle définit une norme sur l'espace des applications linéaires continues de* E *dans* F *que nous noterons $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.*

Le premier exercice est très classique et caractérise les formes linéaires continues.

1.27. Caractérisation des formes linéaires continues

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle. Montrer que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Si f est continue, son noyau qui est l'image réciproque par l'application continue f du fermé $\{0\}$ est un fermé.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker} f$ fermé et f non continue. Comme f est linéaire, elle n'est pas bornée sur la sphère unité. Il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E, de norme 1, telle que $|f(x_n)| > n$. Soit u

un vecteur quelconque de E. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u - \dfrac{f(u)}{f(x_n)} x_n$. Alors u_n appartient à $\operatorname{Ker} f$. Or

$$\|u - u_n\| = \frac{|f(u)|}{|f(x_n)|}\|x_n\| = \frac{|f(u)|}{|f(x_n)|} \to 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers u, qui est donc dans $\operatorname{Ker} f$, puisque celui-ci est fermé. Cela étant vrai pour tout vecteur u, on en déduit que $f = 0$. Cela est contradictoire avec l'hypothèse de la non continuité de f. Donc f est continue et l'équivalence est établie. $\triangleleft$

Dans l'exercice suivant, on s'intéresse à la norme triple d'une forme linéaire continue et on caractérise le cas où celle-ci est atteinte.

1.28. Norme d'une forme linéaire continue

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle sur E. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}\cdot$

2. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists a \in \mathrm{E} \setminus \{0\},\ |||f||| = \frac{f(a)}{\|a\|} \iff \exists b \in \operatorname{Ker} f,\ \|x_0 - b\| \ = d(x_0, \operatorname{Ker} f).$$

3. On prend $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et $f : x \in \mathrm{E} \longmapsto \displaystyle\int_0^1 x - \int_{-1}^0 x$. Montrer que f est linéaire continue et calculer $|||f|||$. Existe-t-il un vecteur a non nul de E tel que $|f(a)| = |||f|||\|a\|$?

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Notons pour commencer que $d(x_0, \operatorname{Ker} f) > 0$, car $\operatorname{Ker} f$ est fermé et $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$. Si $x \in \operatorname{Ker} f$, on a

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(x)| \leqslant |||f|||\|x_0 - x\|.$$

Comme cela vaut pour tout vecteur x de $\operatorname{Ker} f$ on en déduit, en passant à la borne inférieure, que $|f(x_0)| \leqslant |||f|||d(x_0, \operatorname{Ker} f)$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, considérons un vecteur x quelconque de E. Comme $\mathrm{E} = \operatorname{Vect}(x_0) \oplus \operatorname{Ker} f$ il existe un scalaire λ et un vecteur $y \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = \lambda x_0 + y$. On a alors $f(x) = \lambda f(x_0)$. Supposons λ non nul, c'est-à-dire $x \notin \operatorname{Ker} f$. On a alors

$$\frac{\|x\|}{|\lambda|} = \left\|x_0 + \frac{1}{\lambda}y\right\| \geqslant d(x_0, \operatorname{Ker} f)$$

et par conséquent,

$$|f(x)| = |\lambda|\ |f(x_0)| \leqslant \frac{\|x\||f(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}.$$

Cette majoration reste vraie lorsque $x \in \operatorname{Ker} f$. On a donc par définition de la norme triple $|||f||| \leqslant \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}\cdot$ D'où le résultat par double inégalité.

2. Supposons qu'il existe $b \in \operatorname{Ker} f$ qui réalise la distance de x_0 à $\operatorname{Ker} f$ et posons $a = x_0 - b$. On a $f(a) = f(x_0)$ et $\|a\| = d(x_0, \operatorname{Ker} f)$. Par conséquent $\dfrac{|f(a)|}{\|a\|} = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)} = |||f|||$. Si $f(a) > 0$ alors a convient ; sinon il suffit de prendre $-a$.

Réciproquement, supposons l'existence d'un vecteur a non nul tel que $|||f||| = \dfrac{f(a)}{\|a\|}\cdot$ Il existe donc $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $f(a) = \varepsilon \dfrac{\|a\|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)} f(x_0)$. Posons alors $b = x_0 - \varepsilon \dfrac{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}{\|a\|} a$. On a $f(b) = 0$, donc $b \in \operatorname{Ker} f$, et $\|x_0 - b\| = \left\|\varepsilon \dfrac{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}{\|a\|} a\right\| = d(x_0, \operatorname{Ker} f)$. D'où l'équivalence demandée.

3. La linéarité de f découle simplement de la linéarité de l'intégrale. On a par inégalité triangulaire

$$|f(x)| \leqslant \left|\int_0^1 x\right| + \left|\int_{-1}^0 x\right| \leqslant \int_0^1 |x| + \int_{-1}^0 |x| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

pour toute fonction $x \in \mathrm{E}$. Donc f est continue et $|||f||| \leqslant 2$. Montrons qu'il y a en fait égalité. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ considérons la fonction $u_n \in \mathrm{E}$ affine par morceaux, qui vaut 1 sur le segment $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, -1 sur le segment $\left[-1, -\dfrac{1}{n}\right]$ et $x \longmapsto nx$ sur $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$. On a $\|u_n\|_\infty = 1$ pour tout n et il est facile de voir (en interprétant l'intégrale en terme d'aire) que $f(u_n) = 2 - \dfrac{1}{n}\cdot$ Par conséquent on a bien $|||f||| = 2$.

Montrons maintenant qu'il n'existe aucune fonction non nulle a telle que $|f(a)| = 2\|a\|_\infty$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'une telle fonction a existe. On peut supposer $\|a\|_\infty = 1$ par homogénéité. Comme $|a|$ est continue et

$$2 = |f(a)| \leqslant \int_{-1}^1 |a| \leqslant 2\|a\|_\infty = 2,$$

on a nécessairement $|a| = 1$ sur $[-1, 1]$. Donc a est constante, égale à 1 ou à -1, et son image par f est nulle, ce qui est absurde. ◁

Le lecteur trouvera dans l'exercice 3.9 une condition suffisante sur l'espace E *pour que la norme triple de toute forme linéaire continue sur* E *soit atteinte.*

L'exercice suivant rappelle qu'en dimension infinie, les normes ne sont pas toutes équivalentes. La continuité d'une application linéaire dépend donc de la norme choisie.

1.29. Normes sur $\mathbb{R}[X]$

> **1.** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Donner deux normes non équivalentes sur E.
> **2.** Soit D l'opérateur de dérivation. Donner un exemple de norme pour laquelle D est continu, et un exemple de norme pour laquelle D n'est pas continu.
> **3.** Soit M l'endomorphisme de E qui, au polynôme P, associe le polynôme XP. Existe-t-il une norme sur E qui rende simultanément D et M continus ?
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On peut définir de nombreuses normes sur $\mathbb{R}[X]$. On peut poser pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $N_1(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$, $N_2(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et plus généralement $N_3(P) = \sum_{k=0}^{n} p_k |a_k|$, où (p_k) est une suite de réels strictement positifs. Il est clair qu'on définit ainsi des normes sur $\mathbb{R}[X]$. Soit $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_1(P_n) = 1$ et $N_2(P_n) = n + 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{N_2(P_n)}{N_1(P_n)} = +\infty$. Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $N_1(D(X^n)) = N_1(nX^{n-1}) = n$, $N_1(X^n)$ et donc $\dfrac{N_1(D(X^n))}{N_1(X^n)} = n$. Le rapport $\dfrac{N_1(D(P))}{N_1(P)}$ n'est pas majoré quand P varie dans $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, donc D n'est pas continu pour la norme N_1. Pour la même raison, D n'est pas continu pour la norme N_2.

Considérons la norme N_3, avec $p_k = k!$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a donc $D(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}(j+1) X^j$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_3(\mathrm{D}(\mathrm{P})) &= \sum_{j=0}^{n-1} |a_{j+1}|(j+1)j! = \sum_{j=0}^{n-1} |a_{j+1}|(j+1)!\\ &= \sum_{k=1}^{n} |a_k|k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|k! \leqslant \mathrm{N}_3(\mathrm{P}).\end{aligned}$$

L'endomorphisme D est donc continu pour la norme N_3.

3. Supposons qu'une telle norme existe. Il existe des constantes k et k' telles que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\|\mathrm{M}(\mathrm{P})\| \leqslant k\|\mathrm{P}\|$ et $\|\mathrm{D}(\mathrm{P})\| \leqslant k'\|\mathrm{P}\|$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|n\mathrm{X}^n\| \leqslant \|\mathrm{M}(n\mathrm{X}^{n-1})\| \leqslant k\|n\mathrm{X}^{n-1}\| \leqslant k\|\mathrm{D}(\mathrm{X}^n)\| \leqslant kk'\|\mathrm{X}^n\|.$$

Comme $\|\mathrm{X}^n\| \neq 0$, car $\mathrm{X}^n \neq 0$, on en déduit $n \leqslant kk'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible. Ainsi, il n'existe pas sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de norme rendant D et M simultanément continus. ◁

On pouvait également remarquer que $\mathrm{D} \circ \mathrm{M} - \mathrm{M} \circ \mathrm{D} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$. *Il est alors classique d'aboutir à une contradiction si l'on suppose* D *et* M *continues (voir exercice 1.33).*

Voici un exemple d'étude de la continuité d'une forme linéaire en dimension infinie.

1.30. Continuité d'une forme linéaire

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \,\|_1$ définie pour $f \in \mathrm{E}$ par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. Soit $g \in \mathrm{E}$. Montrer que l'application $u_g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $u_g(f) = \int_0^1 g(t)f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $f \in \mathrm{E}$, est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme triple.

2. La forme linéaire $\mathrm{B} : f \longmapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, dont on justifiera la définition, est-elle continue sur $(\mathrm{E}, \| \,\|_1)$?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il est clair que u_g est une forme linéaire. Par ailleurs, on a

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad |u_g(f)| = \left|\int_0^1 g(t)f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |g(t)f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Donc u_g est continue et $|\!|\!|u_g|\!|\!| \leqslant \|g\|_\infty$. On va montrer qu'en fait il y a égalité. Comme g est continue sur le compact $[0,1]$, elle atteint ses bornes. Il existe donc $x_0 \in [0,1]$ tel que $|g(x_0)| = \|g\|_\infty$. Quitte à prendre

$-g$ (puisque $u_{-g} = -u_g$ et donc $|||u_{-g}||| = |||u_g|||$), on peut supposer que $g(x_0) = \|g\|_\infty$. L'idée est de prendre une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui « concentre la masse » en x_0. Précisons cela. On suppose $x_0 \in]0,1[$, laissant au lecteur les modifications mineures à faire lorsque x_0 est au bord. Pour n assez grand, on considère la fonction f_n, continue, affine par morceaux, nulle sur $\left[0, x_0 - \frac{1}{n}\right] \cup \left[x_0 + \frac{1}{n}, 1\right]$ et qui vaut n en x_0. On a $\|f_n\|_1 = 1$ et on va montrer que $|u_g(f_n)|$ tend vers $g(x_0) = \|g\|_\infty$ lorsque n tend vers l'infini. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$ lorsque $|x - x_0| \leqslant \eta$. Soit N tel que $\frac{1}{\mathrm{N}} \leqslant \eta$. Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$\begin{aligned} |u_g(f_n) - g(x_0)| &= \left| \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} g(t) f_n(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} g(x_0) f_n(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} |g(t) - g(x_0)| f_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f_n(t)\mathrm{d}t = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_g(f_n)| = g(x_0) = \|g\|_\infty$ et $|||u_g||| = \|g\|_\infty$.

2. L'application B est bien définie car si f est continue, la fonction $t \longmapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$. Pour $n \geqslant 2$, on considère f_n définie par $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ si $t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et $f_n(t) = \sqrt{n}$ si $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Il s'agit d'une fonction continue. On a

$$\|f_n\|_1 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 \quad \text{et} \quad |\mathrm{B}(f_n)| \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n.$$

Il en résulte que B n'est pas continue. ◁

L'exercice suivant est très proche du précédent, mais un peu plus difficile.

1.31. Calcul d'une norme triple

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_1$ définie pour $f \in \mathrm{E}$, par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. On considère l'application Φ qui à $f \in \mathrm{E}$ associe l'application $x \longmapsto \int_0^x f\varphi$ où φ est fixée dans E.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme continu de E.

2. Calculer la norme triple de Φ.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il est clair que si $f \in \mathrm{E}$, alors $\Phi(f) \in \mathrm{E}$ et, comme Φ est linéaire, c'est bien un endomorphisme de E. Pour montrer que Φ est continue, on se contente de majorer grossièrement $\|\Phi(f)\|_1$ pour $f \in \mathrm{E}$:

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \int_0^x |f(t)\varphi(t)|\mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_0^1 \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_0^1 \|f\|_1 \, \mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_1.\end{aligned}$$

Cette inégalité valable pour tout $f \in \mathrm{E}$ montre que Φ est continue.

2. Pour calculer la norme triple de Φ, on raffine la majoration ci-dessus. En intégrant par parties, on voit que, pour $f \in \mathrm{E}$,

$$\int_0^1 \int_0^x |f(t)\varphi(t)|\mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \left[(x-1)\int_0^x |f\varphi|\right]_0^1 - \int_0^1 (x-1)|f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

et le crochet est nul. On a donc

$$\|\Phi(f)\|_1 \leqslant \int_0^1 (1-x)|f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[0,1]} (1-x)|\varphi(x)| \, \|f\|_1$$

pour tout $f \in \mathrm{E}$ et par conséquent, $|||\Phi||| \leqslant \mathrm{M}$ où $\mathrm{M} = \sup_{x\in[0,1]} (1-x)|\varphi(x)|$. Montrons qu'il y a en fait égalité. Comme φ est continue, la borne supérieure M est atteinte en au moins un point x_0. Quitte à remplacer φ par $-\varphi$ (ce qui change Φ en $-\Phi$ et ne change pas la norme triple), on suppose $\varphi(x_0) > 0$ (si $\varphi(x_0) = 0$ c'est que φ est nulle et dans ce cas Φ aussi). En prenant, comme dans l'exercice précédent, une suite de fonctions positives f_n, d'intégrale 1, qui concentre la masse en x_0, on voit que $\|\Phi(f_n)\|_1 \to \mathrm{M}$.

Conclusion. On a $|||\Phi||| = \sup_{x\in[0,1]} (1-x)|\varphi(x)|$. ◁

1.32. Étude de continuité

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on note $\psi(f)$ l'unique primitive de f qui est dans E.

1. Montrer que ψ est endomorphisme continu, lorsque E est muni de la norme uniforme.

> **2.** Étudier la continuité de ψ, lorsque qu'on munit E de la norme $\| \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On va commencer par donner une expression intégrale de $\psi(f)$, pour tout $f \in \mathrm{E}$. Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + c$ où c est une constante. L'unique primitive d'intégrale nulle est obtenue en prenant $c = -\int_0^1 \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. Calculons cette intégrale, en intégrant par parties :

$$\int_0^1 \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \left[(x-1)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]_0^1 - \int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui vaut $-\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x$ car le crochet est nul. On a donc

$$\psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-1)f(t)\mathrm{d}t.$$

La linéarité de ψ est claire. On obtient

$$|\psi(f)(x)| \leqslant \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(1-x)^2}{2}\right)\|f\|_\infty.$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^2 + (1-x)^2 = 1 + 2x(x-1) \leqslant 1$. Il en résulte que $\|\psi(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$, donc que ψ est continue avec $|\!|\!|\psi|\!|\!| \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Si on reprend l'expression de $\psi(f)$ ci-dessus on a aussi pour tout x,

$$|\psi(f)(x)| \leqslant \int_0^x |f| + \int_x^1 |f| = \|f\|_1.$$

Ainsi $\|\psi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ et *a fortiori* $\|\psi(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Donc ψ est aussi continue lorsque E est muni de la norme $\| \|_1$. ◁

1.33. Crochet de Lie (1)

> Soient E un espace vectoriel normé, u et v deux endomorphismes continus de E. On suppose que $u \circ v - v \circ u = a\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
>
> **1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n \circ v - v \circ u^n = anu^{n-1}$.

2. Montrer que u et v commutent.
3. Donner une autre preuve si E est de dimension finie.
(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Montrons l'identité demandée par récurrence sur n. Elle est vraie pour $n = 1$ par hypothèse. Supposons qu'elle est vérifiée au rang n. Alors en composant l'égalité $u^n \circ v = anu^{n-1} + v \circ u^n$ à gauche par u, on obtient

$$u^{n+1} \circ v = anu^n + u \circ v \circ u^n = anu^n + (v \circ u + a\,\mathrm{Id_E}) \circ u^n = v \circ u^{n+1} + a(n+1)u^n,$$

ce qui est la relation voulue au rang $n+1$.

2. Prenons la norme triple de l'identité que nous venons de démontrer. On a pour tout $n \geqslant 1$,

$$n|a| |\!|\!| u^{n-1} |\!|\!| = |\!|\!| u^n \circ v - v \circ u^n |\!|\!| \leqslant 2 |\!|\!| u^n |\!|\!| |\!|\!| v |\!|\!| \leqslant 2 |\!|\!| u^{n-1} |\!|\!| |\!|\!| u |\!|\!| |\!|\!| v |\!|\!|$$

par sous-multiplicativité de la norme triple. Distinguons alors deux cas :

• Si $u^{n-1} \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$, on peut simplifier par $|\!|\!| u^{n-1} |\!|\!|$ et on en déduit que la suite $|a|n$ est majorée ce qui impose évidemment $a = 0$. Donc u et v commutent.

• Supposons qu'il existe $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$ (c'est-à-dire que u est nilpotent). Si a n'est pas nul et $p \geqslant 1$, l'identité de la première question écrite au rang p permet de dire que $u^{p-1} = 0$. Une récurrence descendante finie donne alors $u = 0$ et cela contredit l'hypothèse $a \neq 0$. Dans ce second cas, on a donc aussi $a = 0$.

3. Si E est de dimension finie non nulle (sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors en prenant la trace de la relation $u \circ v - v \circ u = a\,\mathrm{Id_E}$ il vient $a \dim \mathrm{E} = 0$ ce qui prouve directement que $a = 0$. ◁

Lorsque le corps de base n'est pas de caractéristique nulle, il peut être possible d'écrire $\mathrm{Id_E}$ *sous la forme* $u \circ v - v \circ u$. *Le lecteur pourra se reporter à l'exercice 6.17 du tome 1 d'algèbre.*

L'énoncé suivant concerne encore l'étude d'un endomorphisme continu c qui s'écrit comme un crochet de Lie, c'est-à-dire sous la forme $c = a \circ b - b \circ a$.

1.34. Crochet de Lie (2)

Soit E un espace vectoriel normé, a et b dans $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ et $c = ab - ba$ (pour simplifier, la composition est notée par simple juxtaposition). On suppose que les endomorphismes c et a commutent et on considère l'application $\delta : \mathcal{L}_c(\mathrm{E}) \to \mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ qui à x associe $ax - xa$.

1. Montrer que δ est linéaire et continue.

2. Vérifier que pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})^2$, $\delta(uv) = \delta(u)v + u\delta(v)$.
3. Calculer $\delta^2(b)$ puis $\delta^n(b^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On suppose E de dimension finie. Montrer que c est nilpotent.
5. Dans le cas général, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||c^n|||^{1/n} = 0$.
6. En déduire que $|||c - \mathrm{Id}_\mathrm{E}\,||| \geqslant 1$ et que c n'est pas inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Afin d'alléger les notations, nous noterons simplement $\|\,\|$ au lieu de $|||\,|||$ la norme triple sur $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ subordonnée à la norme de E (cette dernière n'intervient pas dans l'exercice).

1. La linéarité de δ est claire. Pour tout $x \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})$, on a par sous-multiplicativité,

$$\|\delta(x)\| = \|ax - xa\| \leqslant \|ax\| + \|xa\| \leqslant 2\|a\|\|x\|$$

donc δ est continue et on a même $|||\delta||| \leqslant 2\|a\|$.

2. Pour $(u,v) \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})^2$, on a

$$\begin{aligned} \delta(uv) &= auv - uva = auv + u(-va + av) - uav \\ &= (au - ua)v + u\delta(v) = \delta(u)v + u\delta(v). \end{aligned}$$

Cela prouve que δ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$.

3. On a $\delta^2(b) = \delta(c) = 0$, car c et a commutent. Comme δ est une dérivation, elle vérifie la formule classique de dérivation d'un produit de n termes :

$$\delta(a_1 \dots a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_1 \dots a_{k-1}\delta(a_k)a_{k+1}\dots a_n.$$

Il suffit de faire une récurrence sur n pour le prouver. Il s'ensuit que

$$\delta(b^n) = \sum_{k=1}^{n} b^{k-1}\delta(b)b^{n-k}.$$

Appliquons encore une fois δ sur cette relation. On prend l'image de chaque terme $b^{k-1}\delta(b)b^{n-k}$ par δ. Il s'agit d'une somme de termes $n-1$ termes du type $b\dots b\delta(b)b\dots b\delta(b)b\dots b$ où l'un des $\delta(b)$ est en k-ième place (le terme $b^{k-1}\delta^2(b)b^{n-k}$ est nul d'après ce qui précède). Au total il vient

$$\delta^2(b^n) = \sum_{\substack{1\leqslant k_1,k_2\leqslant n \\ k_1\neq k_2}} b\dots b \underbrace{\delta(b)}_{k_1\text{-ième place}} b\dots b \underbrace{\delta(b)}_{k_2\text{-ième place}} b\dots b$$

Quand on applique δ à un terme de la somme ci-dessus, on obtient une somme de $n-2$ termes (les deux autres sont nuls car $\delta^2(b)=0$) du type $b\dots b\delta(b)b\dots b\delta(b)b\dots b\delta(b)b\dots b$. On a donc

$$\delta^3(b^n) = \sum_{\substack{1\leqslant k_1,k_2,k_3\leqslant n\\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}} b\dots b \underbrace{\delta(b)}_{k_1\text{-ième place}} b\dots b \underbrace{\delta(b)}_{k_2\text{-ième place}} b\dots b \underbrace{\delta(b)}_{k_3\text{-ième place}} b\dots b$$

En réitérant ainsi l'application de δ, on trouve à la fin

$$\delta^n(b^n) = \sum_{\substack{1\leqslant k_1,\dots,k_n\leqslant n\\ k_i\neq k_j \text{ si } i\neq j}} \delta(b)\dots\delta(b)\dots\delta(b) = n!\delta(b)^n = n!c^n.$$

Conclusion. On a $\delta^n(b^n)=n!c^n$.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a donc $c^n\in\operatorname{Im}\delta$. Or, E étant ici de dimension finie, on a pour tout $x\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\operatorname{Tr}(ax)=\operatorname{Tr}(xa)$ donc $\operatorname{Tr}\delta(x)=0$. Ainsi $\operatorname{Tr}c^n=0$ pour tout $n\geqslant 1$ et c'est un exercice classique d'en déduire que c est nilpotent (voir l'exercice 2.33 du tome 2 d'algèbre, où le lecteur en trouvera trois preuves différentes).

5. On a $\|c^n\| = \dfrac{1}{n!}\|\delta^n(b^n)\| \leqslant \dfrac{1}{n!}|\!|\!|\delta^n|\!|\!|\|b\|^n \leqslant \dfrac{1}{n!}|\!|\!|\delta|\!|\!|^n\|b\|^n$. Donc

$$\|c^n\|^{1/n} \leqslant \frac{|\!|\!|\delta|\!|\!|\|b\|}{(n!)^{1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car (par exemple avec la formule de Stirling) on a $\ln n! \sim n\ln n$ donc $(n!)^{\frac{1}{n}}\to+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|c^n\|^{\frac{1}{n}}=0$.

6. Raisonnons par l'absurde et supposons $\|c-\mathrm{Id}_\mathrm{E}\|<1$. On essaie d'obtenir une contradiction avec le résultat précédent et pour cela, on cherche à minorer $\|c^n\|$. On pose $d=c-\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. On a alors, pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|c^n\| &= \|c^{n-1}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+d)\| = \|c^{n-1}+c^{n-1}d\| \geqslant \|c^{n-1}\|-\|c^{n-1}d\|\\ &\geqslant \|c^{n-1}\|-\|c^{n-1}\|\,\|d\| \geqslant \|c^{n-1}\|(1-\|d\|).\end{aligned}$$

On a donc, pour $n\geqslant 1$,

$$\|c^n\| \geqslant \|c\|(1-\|d\|)^{n-1}.$$

On en déduit

$$\|c^n\|^{1/n} \geqslant \left(\frac{\|c\|}{1-\|d\|}\right)^{1/n}(1-\|d\|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\|d\|>0$$

ce qui est absurde d'après la question précédente. On a donc montré que $\|c-\mathrm{Id}_\mathrm{E}\|\geqslant 1$.

Pour terminer montrons que c n'est pas inversible en raisonnant toujours par l'absurde. Si c est inversible on a

$$1 = \|c^n c^{-n}\| \leqslant \|c^n\| \|c^{-1}\|^n$$

pour tout $n \geqslant 1$ et donc

$$\|c^n\|^{1/n} \geqslant \left(\frac{1}{\|c^{-1}\|^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{\|c^{-1}\|} > 0,$$

ce qui contredit à nouveau le résultat trouvé à la question précédente. On conclut que c n'est pas inversible. $\triangleleft$

Si $\| \ \|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$*, elle induit une norme triple sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $|||A||| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$ *pour toute matrice* A*. Cela revient simplement à identifier la matrice* A *avec l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *qui lui est canoniquement associé. Une telle norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *n'est pas quelconque : c'est une norme d'algèbre qui vérifie* $|||AB||| \leqslant |||A||| |||B|||$ *pour tout couple* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ *et aussi* $|||I_n||| = 1$.

1.35. Conditionnement d'un système linéaire

Soit μ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et ν la norme triple qu'elle induit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, X, Y, x et y des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $AX = Y$ et $A(X + x) = Y + y$.

1. Trouver $c \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de A tel que $\dfrac{\mu(x)}{\mu(X)} \leqslant c \dfrac{\mu(y)}{\mu(Y)}$.

2. Calculer $\nu(A)$ puis $\nu(A)\nu(A^{-1})$ lorsque μ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Par hypothèse, on a $A(X + x) = AX + Ax = Y + Ax = Y + y$ et donc $Ax = y$. Comme A est inversible, on en déduit que $x = A^{-1}y$. On a donc les majorations

$$\mu(x) = \mu(A^{-1}y) \leqslant \nu(A^{-1})\mu(y) \quad \text{et} \quad \mu(Y) = \mu(AX) \leqslant \nu(A)\mu(X)$$

d'ou l'on déduit

$$\frac{\mu(x)}{\mu(X)} \leqslant \nu(A)\nu(A^{-1}) \frac{\mu(y)}{\mu(Y)}.$$

La constante c cherchée est égale à $\nu(A)\nu(A^{-1})$.

Partant du système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$, $\mathrm{X} + x$ *apparaît comme la solution d'un système perturbé* $\mathrm{AX}' = \mathrm{Y} + y$. *Si la constante* c *est petite, la majoration ci-dessus montre qu'une petite perturbation du second membre entraîne une petite perturbation de la solution. On dit que* $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{\nu(\mathrm{A})\nu(\mathrm{A}^{-1})}$ *est le conditionnement de la matrice* A *relativement à la norme* μ. *On remarque que* $c = \nu(\mathrm{A})\nu(\mathrm{A}^{-1}) \geqslant \nu(\mathrm{I}_n) \geqslant 1$. *Un système est dit bien conditionné lorsque* c *est voisin de* 1.

2. Examinons le cas où μ est la norme euclidienne canonique $\| \, \|$ de $\mathbb{R}^n$. On a

$$\nu(\mathrm{A})^2 = \sup_{\|\mathrm{X}\|=1} \|\mathrm{AX}\|^2 = \sup_{\|\mathrm{X}\|=1} \langle \mathrm{AX}, \mathrm{AX}\rangle = \sup_{\|\mathrm{X}\|=1} \langle {}^t\mathrm{AAX}, \mathrm{X}\rangle.$$

Or la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est symétrique positive (et même définie positive ici puisque A est inversible) donc elle se diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Notons $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^t\mathrm{AA}$ rangées dans l'ordre croissant. En décomposant X dans une base orthonormale de vecteurs propres associés aux λ_i il est facile de voir que $\sup_{\|\mathrm{X}\|=1} \langle {}^t\mathrm{AAX}, \mathrm{X}\rangle = \lambda_n$ (voir l'exercice 1.5 dans le tome 3 d'algèbre). Par conséquent $\nu(\mathrm{A}) = \sqrt{\lambda_n}$ est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^t\mathrm{AA}$.

On peut appliquer ce résultat à A^{-1}. Or ${}^t\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}^{-1} = (\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})^{-1}$. Et $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}({}^t\mathrm{AA})\mathrm{A}^{-1}$ est semblable à ${}^t\mathrm{AA}$ donc elle a le même spectre. Les valeurs propres de $(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})^{-1}$ sont donc les $\dfrac{1}{\lambda_i}$ et la plus grande d'entre elles est $\dfrac{1}{\lambda_1}\cdot$

Conclusion. On a donc $c = \nu(\mathrm{A})\nu(\mathrm{A}^{-1}) = \sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}$, où λ_n et λ_1 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$. $\lhd$

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *on appelle rayon spectral de* A *le module maximal des valeurs propres de* A : $\rho(\mathrm{A}) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{A}} |\lambda|$. *Cette définition vaut aussi pour* A *réelle, mais en prenant toujours les valeurs propres complexes. Assez naturellement, le rayon spectral gouverne le comportement de la suite* $(\mathrm{A}^k)_{k\geqslant 0}$ *(voir les exercices 2.59 et 2.60 du tome 2 d'algèbre). Dans l'exercice suivant, on montre que le rayon spectral est majoré par toute norme triple.*

1.36. Inégalité entre le rayon spectral et la triple norme

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\| \ \|$ et on note $\|\| \ \|\|$ la norme triple induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\rho(A) \leqslant \|\|A\|\|$, où $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda|$.

2. On suppose que $\|\|A\|\| < 1$. Montrer que $I_n + A$ est inversible, puis que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Sur le corps des nombres complexes, le résultat est complètement immédiat. En effet, si λ est une valeur propre complexe de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre unitaire associé, on a $AX = \lambda X$ donc en prenant la norme $|\lambda| = \|AX\| \leqslant \|\|A\|\| \|X\| = \|\|A\|\|$ et le résultat en découle.

Pour une matrice A réelle, il y a une petite difficulté supplémentaire, car il faut majorer le module de toutes ses valeurs propres complexes et la norme $\| \ \|$ n'est définie *a priori* que sur $\mathbb{R}^n$ (et il n'est pas clair qu'on puisse la prolonger à $\mathbb{C}^n$ en induisant la même norme triple de l'opérateur de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A). On raisonne alors de la manière suivante.

Supposons tout d'abord que $\|\|A\|\| < 1$. Comme $\|\|A^k\|\| \leqslant \|\|A\|\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais elle converge alors aussi vers 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, si $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre complexe pour A associé à une valeur propre λ, l'égalité $A^kX = \lambda^kX$, valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, permet de dire que la suite $(\lambda^kX)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0 dans $\mathbb{C}^n$ donc que $|\lambda| < 1$ (puisque X n'est pas nul). Cela vaut pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ donc on a $\rho(A) < 1$.

Passons maintenant au cas général. Si $r > \|\|A\|\|$, on a $\|\|\frac{1}{r}A\|\| < 1$ et donc $\rho\left(\frac{1}{r}A\right) < 1$ *i.e.* $\rho(A) < r$. Cela étant vrai pour tout $r > \|\|A\|\|$, il vient $\rho(A) \leqslant \|\|A\|\|$.

2. Si $\|\|A\|\| < 1$ on a vu dans la question précédente que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$I_n - A^{k+1} = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \ldots + A^k)$$

et la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$ est absolument convergente (puisque $\|\|A\|\|^k \leqslant \|\|A\|\|^k$), donc convergente puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est complet. En faisant tendre k vers l'infini dans l'égalité ci-dessus, il vient $I_n = (I_n - A)\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k\right)$. Donc

$\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible et son inverse est $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k$. Comme $\|\mathrm{A}\| = \|-\mathrm{A}\|$, $\mathrm{I} + \mathrm{A}$ est aussi inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{A}^k$.

On vient donc de prouver que I_n est un point intérieur à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et d'exhiber un voisinage de I_n inclus dans le groupe linéaire. La structure de groupe nous permet de transporter ce résultat. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $\mathrm{M} + \mathrm{H} = \mathrm{M}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H})$. Or, $\|\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\| \leqslant \|\mathrm{M}^{-1}\|\|\mathrm{H}\|$ donc si $\|\mathrm{H}\| < \dfrac{1}{\|\mathrm{M}^{-1}\|}$, la matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}$ est inversible et par conséquent $\mathrm{M} + \mathrm{H}$ aussi.

Conclusion. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\lhd$

Le dernier point s'obtient plus rapidement en disant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est l'image réciproque de l'ouvert* $\mathbb{R}^*$ *par la fonction* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui est continue. La démarche de l'exercice a le mérite de préciser un voisinage de chaque matrice* M *inclus dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, mais surtout celui de se généraliser au cas des endomorphismes d'un espace de Banach (en dimension infinie il n'y a plus de déterminant...). Le lecteur se reportera à l'exercice 3.11 pour le cas encore plus général des algèbres de Banach.*

1.37. Vers le théorème de l'application ouverte

Soient E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que

$$\exists k > 0,\ \ \exists \alpha \in]0,1[,\quad \forall y \in \mathrm{B}'(0,1),\quad \exists x \in \mathrm{B}'(0,k),\quad \|y - f(x)\| \leqslant \alpha,$$

où $\mathrm{B}'(0,k)$ est la boule fermée de centre 0 de rayon k.

Montrer que f est surjective.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

L'hypothèse signifie que, pour tout point y de la boule unité fermée de F, on a un élément de l'image de la boule fermée de rayon k qui n'est pas trop loin de y. On va essayer d'obtenir un antécédent de y en itérant cela pour construire une suite de vecteurs de l'image de plus en plus proches de y. Fixons $y \in \mathrm{F}$, avec $\|y\| \leqslant 1$. Il existe $x_1 \in \mathrm{E}$ tel que $\|x_1\| \leqslant k$ et $\|y - f(x_1)\| \leqslant \alpha$. Appliquons maintenant l'hypothèse au vecteur $y_1 = \dfrac{1}{\alpha}(y - f(x_1))$ qui est aussi dans la boule unité fermée. On peut donc trouver x_2, avec $\|x_2\| \leqslant k$, tel que $\|y_1 - f(x_2)\| \leqslant \alpha$, soit encore $\|y - f(x_1 + \alpha x_2)\| \leqslant \alpha^2$. On continue en appliquant l'hypothèse au vecteur $y_2 = \dfrac{1}{\alpha^2}(y - f(x_1 + \alpha x_2))$. On construit donc ainsi deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\|x_n\| \leqslant k$ pour tout n et

$$\|y - f(x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n)\| \leqslant \alpha^n.$$

Comme la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée par k et comme $\alpha < 1$, la série $\sum \alpha^{k-1} x_k$ est absolument convergente donc convergente (E est de dimension finie). Notons s sa somme. En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, et en utilisant la continuité de f, on a $f(s) = y$. L'image de f contient donc la boule unité fermée de F : c'est par conséquent F tout entier. ◁

La preuve ci-dessus montre que le résultat reste vrai lorsque E *est un espace de Banach et f est continue. Ce résultat, combiné au théorème de Baire permet alors de démontrer le théorème de l'application ouverte : si* E *et* F *sont deux espaces de Banach et si $f \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est surjective alors l'image d'un ouvert par f est un ouvert.*

Dans le cadre de l'exercice, c'est-à-dire en dimension finie, on peut aussi raisonner de la manière suivante : le sous-espace $\mathrm{Im}\, f$ *étant fermé, pour tout $y \in \mathrm{F}$ il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\|y - f(x_0)\| = d(y, \mathrm{Im}\, f)$ (car on se ramène facilement à un compact). Si cette distance d n'est pas nulle, on applique l'hypothèse au vecteur $\dfrac{1}{d}(y - f(x_0))$: il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\|y - f(x_0 + dx)\| \leqslant \alpha d < d$ ce qui amène à une contradiction. Avec cette preuve, on n'a pas besoin de l'information sur la norme du vecteur x.*

L'exercice suivant concerne justement le théorème de l'application ouverte, dans le cas très simple de la dimension finie.

1.38. Théorème de l'application ouverte en dimension finie

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si, et seulement si, l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Supposons que l'image par f d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. C'est en particulier le cas du sous-espace $\mathrm{Im}\, f = f(\mathbb{R}^n)$. Celui-ci est donc nécessairement égal à $\mathbb{R}^p$ (une boule ouverte, centrée en l'origine, de $\mathbb{R}^p$ contient une base de $\mathbb{R}^p$) et f est bien surjective.

• Réciproquement, supposons f surjective et considérons un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$. Soit $y_0 \in f(\mathrm{U})$ et $x_0 \in \mathrm{U}$ un antécédent de y_0 par f. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, que l'on munit de la norme infinie, et B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour cette norme.

Pour $r > 0$, on a $f(\mathrm{B}(x_0, r)) = f(x_0 + r\mathrm{B}) = y_0 + rf(\mathrm{B})$. Il suffit donc de prouver que $f(\mathrm{B})$ est un voisinage de 0 pour conclure. Comme f est surjective, $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^p$ et contient donc une base. Sans perte de généralité supposons que $\mathcal{B}' = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de $\mathbb{R}^p$. La partie $f(\mathrm{B})$ contient alors tous les vecteurs de la forme $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$ avec $\lambda_i \in \,]-1, 1[$ pour tout i. Il s'agit clairement d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$. $\triangleleft$

Comme il a été dit plus haut, ce résultat reste vrai pour une application linéaire continue et surjective entre deux espaces de Banach, mais sa preuve est plus délicate et fait appel au théorème de Baire.

1.39. Automorphismes unitaires de $\mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R})$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et A l'algèbre des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un automorphisme unitaire de A est une isométrie pour la norme uniforme.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Soient ψ un automorphisme unitaire de A, $f \in \mathrm{A}$ et $g = \|f\|_\infty - f$. La fonction g est positive donc $\psi(g) = (\psi(\sqrt{g}))^2$ aussi. Comme ψ envoie la fonction constante égale à 1 sur elle-même, on a $\psi(g) = \|f\|_\infty - \psi(f)$. On en déduit que $\psi(f) \leqslant \|f\|_\infty$. En faisant de même avec $-f$ on a $|\psi(f)| \leqslant \|f\|_\infty$ et donc $\|\psi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. En appliquant le même résultat à l'automorphisme unitaire ψ^{-1} avec la fonction $\psi(f)$ à la place de f on obtient $\|f\|_\infty \leqslant \|\psi(f)\|_\infty$.

Conclusion. ψ est une isométrie pour la norme uniforme. $\triangleleft$

1.40. Endomorphismes qui commutent avec la dérivation

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et T un endomorphisme continu de E tel que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\mathrm{T}f$ aussi et $(\mathrm{T}f)' = \mathrm{T}f'$. On désire prouver que T est une homothétie.

1. Montrer que si f est polynomiale, alors $\mathrm{T}f$ aussi.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère $c_n : t \longmapsto \cos nt$. À l'aide du développement en série de Fourier de $t \longmapsto t^2$ convenablement prolongée, montrer que $\mathrm{T}c_n = \lambda c_n$ où λ est indépendante de n.

3. Conclure en étudiant d'abord le cas des fonctions paires, puis des fonctions impaires.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Une récurrence immédiate sur $n \geqslant 1$ montre que, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-\pi, \pi]$, alors $(\mathrm{T}f)^{(n)} = \mathrm{T}f^{(n)}$. En particulier si f est une fonction polynôme de degré n, on a $(\mathrm{T}f)^{(n+1)} = 0$, de sorte que $\mathrm{T}f$ est une fonction polynôme de degré $\leqslant n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction c_n est solution de l'équation différentielle $y'' + n^2 y = 0$. En appliquant T sur la relation $c_n'' + n^2 c_n = 0$, on obtient $(\mathrm{T}c_n)'' + n^2 \mathrm{T}c_n = 0$. Par conséquent, il existe deux réels α_n et β_n tels que $\mathrm{T}c_n = \alpha_n c_n + \beta_n s_n$, où s_n désigne la fonction $x \mapsto \sin nx$. Par ailleurs, c_0 est la fonction constante égale à 1. D'après la première question, il existe donc $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}c_0 = \alpha_0 c_0$. On va prouver que la suite $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ est nulle et que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ est constante. Pour cela, comme le suggère l'énoncé, considérons la fonction 2π-périodique f dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est $t \mapsto t^2$. Il s'agit d'une fonction paire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est donc somme de sa série de Fourier et celle-ci converge normalement sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de Fourier de f s'obtiennent facilement :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \mathrm{d}t = \frac{2\pi^2}{3}$$

et pour $n \geqslant 1$, une double intégration par parties donne

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos nt \,\mathrm{d}t = -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi t \sin nt \,\mathrm{d}t = \frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot$$

On a donc pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

et la convergence est uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Notons $g : t \mapsto t^2$ la restriction de f à $[-\pi, \pi]$. D'après la question 1, il existe des constantes λ, μ, ν telles que $\mathrm{T}(g)(t) = \lambda t^2 + \mu t + \nu$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. Comme l'opérateur T est continu pour la topologie de la convergence uniforme, son application sur la décomposition en série de Fourier ci-dessus donne :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda t^2 + \mu t + \nu = \alpha_0 \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

et la série converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$. Dans cette égalité, on peut identifier les parties paires et impaires. Il vient, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
\lambda t^2 + \nu &= \alpha_0 \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \alpha_n \cos nt \\
\mu t &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \beta_n \sin nt
\end{aligned}$$

Comme les séries trigonométriques convergent uniformément, la première donne le développement en série de Fourier de la fonction $\lambda f + \nu$. Par unicité, on a donc $\alpha_n = \lambda$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\alpha_0 \frac{\pi^2}{3} = \lambda \frac{\pi^2}{3} + \nu$. En appliquant la seconde égalité en $t = \pi$, on obtient $\mu = 0$, puis $\beta_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ (toujours en raison de la convergence uniforme). Pour conclure, il reste à prouver que $\nu = 0$, de façon à avoir aussi $\alpha_0 = \lambda$. Pour cela, on note que $g'' = 2c_0$ donc $\mathrm{T}(g'') = \mathrm{T}(2c_0) = 2\alpha_0 c_0$, et par ailleurs, $\mathrm{T}(g'') = \mathrm{T}(g)'' = 2\lambda c_0$. On a donc bien $\alpha_0 = \lambda$.

3. Soit $f \in \mathrm{E}$ paire et de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $\tilde{f}$ le prolongement 2π-périodique de f à $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est donc somme de sa série de Fourier et la convergence est normale sur $\mathbb{R}$ donc *a fortiori* sur $[-\pi, \pi]$:

$$f = \frac{a_0(f)}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) c_n.$$

Comme dans la question précédent il suffit d'appliquer T pour obtenir $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Le cas où f est seulement continue sera traité à la fin.

Soit maintenant $f \in \mathrm{E}$ une fonction impaire. Notons F une primitive de f : F est de classe $\mathcal{C}^1$ et paire, donc justifiable du cas précédent. On a $\mathrm{T(F)} = \lambda\mathrm{F}$ donc en dérivant $\mathrm{T}(f) = \mathrm{T(F')} = \mathrm{T(F)}' = \lambda\mathrm{F}' = \lambda f$.

Par linéarité, on a donc $\mathrm{T}(f) = \lambda f$ pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et, en particulier, pour toute fonction polynôme. D'après le théorème de Weierstrass, le sous-espace des fonctions polynômes est dense dans E. Par continuité, on a donc $\mathrm{T}(f) = \lambda f$ pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$. $\triangleleft$

Le théorème de Hahn-Banach est un résultat essentiel en Analyse Fonctionnelle. Dans l'exercice suivant, il est présenté sous sa forme algébrique (prolongement d'une forme linéaire) et seulement en dimension finie. Sa généralisation à la dimension infinie fait appel au théorème de Zorn.

1.41. Théorème de Hahn-Banach en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension n, F un sous-espace de E, u une forme linéaire sur F. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\tilde{u}$ sur E qui prolonge u et qui est de même norme que u, c'est-à-dire telle que $\sup\limits_{x\in F\setminus\{0\}} \dfrac{|u(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\in E\setminus\{0\}} \dfrac{|\tilde{u}(x)|}{\|x\|}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Si le prolongement algébrique d'une forme linéaire est sans difficulté (on prend H un supplémentaire de F et toute forme linéaire v sur H détermine de manière unique une forme linéaire $\tilde{u}$ prolongeant u en imposant $\tilde{u}_{|H} = v$), la contrainte sur la norme (on doit avoir $\|\tilde{u}\| = \|u\|$) rend l'exercice plus délicat. On fait l'hypothèse que F n'est pas nul (dans ce cas $\tilde{u} = 0$ convient) et que F n'est pas égal à E (sans quoi le problème est trivial).

• À l'oral, l'étude de cas particuliers est une démarche naturelle et appréciée. Regardons le cas où E est un espace euclidien. On considère la forme linéaire $\tilde{u}$ de E qui coïncide avec u sur F et est nulle sur son orthogonal $F^{\perp}$. Dans ces conditions, si $x \in E$ est de norme inférieure ou égale à 1, on peut écrire $x = x_F + x'$ avec $x_F \in F$ et $x' \in F^{\perp}$. On a alors $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_F) = u(x_F)$. Avec le théorème de Pythagore, on obtient $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x'\|^2$ et donc $\|x_F\| \leqslant \|x\| \leqslant 1$. On en déduit $|\tilde{u}(x)| = |u(x_F)| \leqslant \|u\|$ et donc, $\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\|$. Comme $\tilde{u}$ coïncide avec u sur F qui n'est pas nul on a $\|\tilde{u}\| \geqslant \|u\|$ et finalement $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

• Parler de l'orthogonal de F lorsque la norme n'est pas euclidienne n'a pas de sens et il faut procéder autrement. On va supposer pour commencer que F est un hyperplan de E. Prenons $e \in E$ en dehors de F. On a alors $E = F \oplus \mathbb{R}e$.

Si $u = 0$, le problème est fini : $\tilde{u} = 0$ convient. On suppose donc $u \neq 0$ et même $\|u\| = 1$, quitte à diviser u par $\|u\| > 0$. L'application $\tilde{u}$ cherchée est déterminée par $\alpha = \tilde{u}(e)$. Nous pouvons énoncer ainsi notre but : trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in F$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|u(x) + t\alpha| \leqslant \|x + te\|.$$

Si un tel α existe, la forme linéaire $\tilde{u}$ qui à $x + te \in E$ ($x \in F$ et $t \in \mathbb{R}$) associe $u(x) + t\alpha$ est bien définie et a les propriétés voulues.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, notons (H) la condition à satisfaire :

$$(\mathrm{H}) \quad \forall x \in F,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |u(x) + t\alpha| \leqslant \|x + te\|.$$

On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{H}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathrm{F},\ \forall t \in \mathbb{R},\ -\|x+te\| \leqslant u(x)+t\alpha \leqslant \|x+te\| \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathrm{F},\ \forall t \in \mathbb{R},\ -\|x+te\|-u(x) \leqslant t\alpha \leqslant \|x+te\|-u(x).
\end{aligned}$$

Pour $t=0$, la condition est vérifiée pour tout α et tout x (car on a bien $-\|x\|-u(x) \leqslant 0 \leqslant \|x\|-u(x)$, puisque $\|\!|u|\!\|=1$). On divise par $t \neq 0$ en distinguant les cas $t>0$ et $t<0$ (dans le second cas, on change le sens des inégalités, mais $\dfrac{1}{t}\ \|x+te\| = -\left\|\dfrac{1}{t}x+e\right\|$). Ainsi (H) équivaut à

$$\begin{cases}
\forall x \in \mathrm{F},\ \forall t>0,\ -\left\|\dfrac{1}{t}x+e\right\| - u\left(\dfrac{1}{t}x\right) \leqslant \alpha \leqslant \quad \left\|\dfrac{1}{t}x+e\right\| - u\left(\dfrac{1}{t}x\right) \\[2ex]
\forall x \in \mathrm{F},\ \forall t<0, \quad \left\|\dfrac{1}{t}x+e\right\| - u\left(\dfrac{1}{t}x\right) \geqslant \alpha \geqslant -\left\|\dfrac{1}{t}x+e\right\| - u\left(\dfrac{1}{t}x\right).
\end{cases}$$

En posant $y=\dfrac{1}{t}x$ qui décrit F quand x décrit F et t décrit $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on obtient finalement

$$(\mathrm{H}) \Longleftrightarrow \forall y \in \mathrm{F},\ -\|y+e\|-u(y) \leqslant \alpha \leqslant \|y+e\|-u(y)$$

Pour qu'un réel α vérifiant la condition (H) existe, il faut et il suffit que pour tout $y \in \mathrm{F}$ et tout $y' \in \mathrm{F}$,

$$-\|y+e\|-u(y) \leqslant \|y'+e\|-u(y'),$$

la condition est clairement nécessaire et réciproquement, si elle est vérifiée, il suffit de prendre $\alpha = \sup\limits_{y \in \mathrm{F}}(-\|y+e\|-u(y))$. Or, pour y et y' dans F on a

$$-\|y+e\|-u(y) \leqslant \|y'+e\|-u(y') \iff u(y'-y) \leqslant \|y'+e\|+\|y+e\|$$

Cette dernière inégalité est vérifié car, comme $\|\!|u|\!\|=1$, on a

$$u(y'-y) \leqslant \|y'-y\| = \|y'+e-(y+e)\| \leqslant \|y'+e\|+\|y+e\|.$$

Donc α vérifiant (H) existe et $\tilde{u}$ définie comme plus haut prolonge u en une forme linéaire de même norme.

• Dans le cas général (si F n'est pas un hyperplan), on peut procéder par récurrence sur $\dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$. C'est trivial si $\mathrm{E}=\mathrm{F}$ et cela vient d'être fait pour $\dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F} = 1$. Si $\dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F} \geqslant 2$, on prend un sous-espace F' de E contenant F de dimension $\dim \mathrm{F}+1$. D'après ce que nous venons de faire, on peut prolonger u à F' avec une norme identique. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à ce prolongement sur F' pour trouver la forme $\tilde{u}$ demandée. $\triangleleft$

Chapitre 2

Compacité, convexité, connexité

La notion de compacité joue un rôle essentiel en Analyse. Dans le programme de Spéciales, celle-ci est définie à l'aide de la propriété de Bolzano-Weierstrass : une partie K *d'un espace normé* E *est compacte lorsque toute suite d'éléments de* K *admet une valeur d'adhérence dans* K *(ce qui correspond à la définition que donne Fréchet en 1906). Les premiers exercices du chapitre reposent sur cet aspect séquentiel de la compacité. Viennent ensuite quelques exercices sur la notion de précompacité qui donnent un autre éclairage : une partie compacte est une partie complète approximativement finie, c'est-à-dire recouverte pour tout* $\varepsilon > 0$ *par un nombre fini de boules de rayon* ε*. Cette approche permet de mesurer le degré de compacité (voir l'exercice 2.14). Même s'ils font parfois manipuler des recouvrements par des boules ouvertes, notons toutefois que nos exercices ne font jamais appel à la propriété de Borel-Lebesgue trop éloignée du programme actuel. Le chapitre se poursuit par plusieurs exercices sur les ensembles convexes, et notamment les convexes compacts, qui associent des considérations géométriques et topologiques. Il se termine par des exercices sur la connexité par arcs.*

Une partie compacte d'un espace normé est nécessairement bornée et fermée. En dimension finie, la réciproque est vraie, ce qui offre une caractérisation particulièrement simple des parties compactes. Le théorème de Riesz, qui fait l'objet de l'exercice suivant, montre que la réciproque n'est vraie qu'en dimension finie. Par conséquent, de nombreux théorèmes ont été établis pour décrire les parties compactes des espaces usuels de l'Analyse Fonctionnelle qui sont tous de dimension infinie (par exemple le théorème d'Ascoli que le lecteur trouvera dans l'exercice 2.34 du tome 2 d'analyse).

2.1. Théorème de Riesz

Soit (E, N) un espace normé complexe et $\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 1\}$ la sphère unité de E. Montrer que si S est compacte, alors E est de dimension finie.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On raisonne par l'absurde, en supposant E de dimension infinie et en construisant une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de S qui ne peut pas avoir de valeur d'adhérence. Si E est un espace préhilbertien c'est très facile à faire : il suffit de prendre une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ orthonormée (de telles suites existent, par exemple grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). En effet, on a alors $\|x_n - x_p\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq p$ quelconques et aucune sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ne peut converger (car aucune sous-suite n'est de Cauchy).

Revenons au cas général, un peu plus compliqué car on ne dispose pas de produit scalaire. On va construire, par récurrence, une suite de S telle que $\|x_n - x_p\| \geqslant 1$ pour $n \neq p$. On pourra alors conclure comme précédemment. Partons d'un vecteur unitaire x_0 quelconque. Supposons que les p premiers termes $x_0, \ldots, x_{p-1}$ de la suite soient construits. On cherche $x_p \in \mathrm{S}$ tel que $\|x_p - x_k\| \geqslant 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$. Notons F le sous-espace de E engendré par $x_0, \ldots, x_{p-1}$. Comme E n'est pas de dimension finie par hypothèse on peut trouver un vecteur $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$. Comme F est de dimension finie, il existe $b \in \mathrm{F}$ tel que $d(a, \mathrm{F}) = \|a - b\|$. En effet, l'application $x \mapsto \|a - x\|$ est continue et on vérifie facilement que $d(a, \mathrm{F}) = \inf\limits_{x\in \mathrm{F}} \|x - a\| = \inf\limits_{x \in \mathrm{F}\cap \mathrm{B}'(a,r)} \|x - a\|$ pour $r > d(a, \mathrm{F}) + \|a\|$. Cette borne inférieure est donc atteinte car $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}'(a, r)$ est une partie fermée et bornée, donc compacte, de F. En particulier, la distance $d(a, \mathrm{F})$ est strictement positive. Posons alors $x_p = \dfrac{a-b}{\|a-b\|}$. C'est un vecteur unitaire de E. Comme $b \in \mathrm{F}$, on a $d(a - b, \mathrm{F}) = d(a, \mathrm{F}) = \|a - b\|$ et donc $d(x_p, \mathrm{F}) = 1$. En particulier $\|x_p - x_k\| \geqslant 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant p - 1$ et ce vecteur convient. La suite ainsi construite par récurrence n'a pas de valeur d'adhérence et le résultat est prouvé. ◁

L'exercice suivant n'utilise que la compacité des boules fermées en dimension finie.

2.2. Quasi-isométrie

Soient E un espace euclidien et $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \ \big|\|f(x) - f(y)\| - \|x - y\|\big| \leqslant \delta.$$

Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)x)$ existe et que l'application qui à x associe cette limite est une isométrie.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit $x \in \mathrm{E}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f(nx)\| \leqslant \|f(nx) - f(0)\| + \|f(0)\| \leqslant \|nx\| + \delta + \|f(0)\|$$

et donc $\left\|\frac{1}{n}f(nx)\right\| \leqslant \|x\| + \frac{1}{n}(\delta + \|f(0)) \leqslant \|x\| + \delta + \|f(0)\|$. La suite $\left(\frac{1}{n}f(nx)\right)$ est bornée et E est de dimension finie, donc on peut en extraire une suite convergente. Il faut montrer maintenant qu'on peut choisir une extraction indépendante de x.

Soit p la dimension de E, $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de E et pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{X}_n = \left(\frac{1}{n}f(ne_1), \dots, \frac{1}{n}f(ne_p)\right)$. La suite (X_n) est une suite bornée de l'espace vectoriel de dimension finie E^p. On peut en extraire une suite $(\mathrm{X}_{\varphi(n)})$ convergente. On pose, pour $x \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)}f(\varphi(n)x)$. Si $(g_n(x))$ converge, on note $g(x)$ sa limite. Par le choix de φ, $(g_n(e_i))$ converge pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On a, pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\|f(\varphi(n)x) - f(\varphi(n)y)\| - \|\varphi(n)(x - y)\|| \leqslant \delta$$

et donc

$$|\|g_n(x) - g_n(y)\| - \|x - y\|| \leqslant \frac{1}{\varphi(n)}\|x - y\|.$$

On en déduit que $(\|g_n(x) - g_n(y)\|)$ converge vers $\|x - y\|$. On obtient en particulier, si $(g_n(x))$ et $(g_n(y))$ convergent, $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$ et donc, pour tout (i, j) de $[\![1, p]\!]^2$, $\|g(e_i) - g(e_j)\| = \|e_i - e_j\|$. D'autre part, comme la suite $(g_n(0)) = \left(\frac{1}{\varphi(n)}f(0)\right)$ converge clairement vers 0, la suite $(\|g_n(x)\|)$ converge vers $\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. En particulier $\|g(e_i)\| = \|e_i\| = 1$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. La réciproque du théorème de Pythagore assure que les $g(e_i)$ sont deux à deux orthogonaux et ainsi $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une base orthonormée de E.

Soit $x \in \mathrm{E}$, quelconque. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la suite $(\|g_n(x) - g_n(e_i)\|)$ et donc la suite $(\|g_n(x) - g(e_i)\|)$ convergent vers $\|x - e_i\|$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\langle g_n(x), g(e_i)\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(\|g_n(x)\|^2 + \|g(e_i)\|^2 - \|g_n(x) - g(e_i)\|^2)\\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|e_i\|^2 - \|x - e_i\|^2) = \langle x, e_i\rangle,\end{aligned}$$

pour tout i, puis que

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\langle g_n(x), g(e_i)\rangle g(e_i) = \sum_{i=1}^{p}\langle x, e_i\rangle g(e_i).$$

La suite $(g_n(x))$ est donc convergente pour tout $x \in \mathrm{E}$.

On a alors d'après ce qui précède $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$ pour tous x et y de E, donc g est une isométrie. $\triangleleft$

Le résultat de l'exercice n'est pas spécifique aux espaces euclidiens. Il reste vrai dans tout espace vectoriel normé de dimension finie. La démonstration est un peu plus compliquée. On considère une partie de E *dénombrable et dense* $\mathrm{F} = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *(une telle partie existe : il suffit de considérer l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées dans une base donnée sont rationnelles). Par un procédé diagonal (cf. exercices 3.3 et 3.18), on construit une extraction* φ *telle que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *la suite* $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)x_k)\right)$ *converge. Il faut démontrer que la suite* $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)x)\right)$ *converge pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Pour cela, on montre qu'elle est de Cauchy. Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $y \in \mathrm{F}$ *tel que* $\|x-y\| \leqslant \varepsilon$. *Pour simplifier les notations, on pose* $u_n = \dfrac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)x)$ *et* $v_n = \dfrac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)y)$. *On note que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\|f(nx) - f(ny)\| \leqslant \|nx - ny\| + \delta$ *et donc*

$$\|u_n - v_n\| \leqslant \|x - y\| + \frac{\delta}{\varphi(n)} \leqslant \varepsilon + \frac{\delta}{\varphi(n)}\cdot$$

On en déduit que, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|u_n - u_p\| \leqslant \|v_n - v_p\| + 2\varepsilon + \frac{\delta}{\varphi(n)} + \frac{\delta}{\varphi(p)}\cdot$$

La suite (v_n) *est de Cauchy et* $\left(\dfrac{\delta}{\varphi(n)}\right)$ *tend vers* 0 *donc il existe un entier* n_0 *tel que, pour* n *et* $p \geqslant n_0$, $\|u_n - u_p\| \leqslant 3\varepsilon$. *La suite* (u_n) *est de Cauchy, donc elle converge, puisque* E *est complet (car de dimension finie). Ainsi la suite* $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)x)\right)$ *converge pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Le fait que* g *soit une isométrie s'obtient comme dans l'exercice.*

L'exercice suivant est classique mais pas facile.

2.3. Dilatations d'un compact

Soit X un compact non vide d'un espace normé E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une dilatation, c'est-à-dire une application vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$

1. Soit $a \in \mathrm{X}$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n.

2. Montrer que f est une isométrie.
3. Montrer que f est une bijection de X sur X.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Comme X est compact, on peut extraire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge. On a alors pour tout n,

$$\begin{aligned}\|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - u_0\| &\leqslant \|f^{\varphi(n)}(u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}) - f^{\varphi(n)}(u_0)\| \\ &= \|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

car $f^{\varphi(n)}$ est aussi une dilatation de K. On peut très bien choisir la fonction d'extraction φ de sorte que la suite $\psi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ soit strictement croissante. On constate alors que $a = u_0$ est limite de la suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n\geqslant 0}$.

2. Soient a et b deux points de X. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ comme dans la question précédente et on considère de même la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ obtenue en itérant f à partir de $v_0 = b$. On peut extraire de la suite $(u_n)_{n\ \geqslant 0}$ une sous-suite $(u_{\varphi_1(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge. De la suite $(v_{\varphi_1(n)})$ de X on peut extraire la suite $(v_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ qui converge. Si l'on pose $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, les suites $(u_{\varphi(n)})$ et $(v_{\varphi(n)})$ convergent, et quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer encore $(\varphi(n+1) - \varphi(n))$ strictement croissante. Alors $u_{\psi(n)}$ converge vers a et $v_{\psi(n)}$ converge vers b. Mais on a $\|u_{\psi(n)} - v_{\psi(n)}\| \geqslant \|f(a) - f(b)\|$ pour tout $n \geqslant 1$ car f est une dilatation. En passant à la limite, on obtient $\|a-b\| \geqslant \|f(a)-f(b)\|$ et donc $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$. Cela vaut pour tout couple (a, b) donc f est une isométrie.

On sait que le produit de deux compacts est un compact, donc X^2 *est compact. De la suite* (u_n, v_n) *de* X^2*, on peut donc extraire une suite* $(u_{\varphi(n)}, v_{\varphi(n)})$ *convergente. Cette remarque permet de faire l'économie des deux extractions successives.*

3. Du fait que f est une isométrie, il découle directement que f est injective et continue. D'après la première question, tout élément de X est adhérent à $f(\mathrm{X})$. Or $f(\mathrm{X})$ est compact, car image d'un compact par une fonction continue, et par conséquent fermé. Par suite $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et f est aussi surjective, donc établit une bijection de X sur X. ◁

Cette dernière question (montrer qu'une isométrie d'un compact X *est bijective) est souvent proposée directement à l'oral. Le lecteur en trouvera une autre version dans l'exercice 2.11.*

L'exercice suivant se ramène assez facilement à l'exercice 2.3.

2.4. Surjection 1-lipschitzienne d'un compact

Soit X un compact non vide d'un espace normé E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une fonction 1-lipschitzienne et surjective. Montrer que f est une isométrie.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ qui à tout $y \in \mathrm{X}$ associe un antécédent de y par f. La fonction g est injective et vérifie $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$. Soient y_1 et y_2 deux points de X, $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$ les antécédents choisis. On a

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| = \|x_1 - x_2\| \geqslant \|f(x_1) - f(x_2)\| = \|y_1 - y_2\|.$$

Donc g est une dilatation du compact X. D'après l'exercice précédent g est nécessairement une bijection isométrique de X. On a alors $f = g^{-1}$ et f est aussi une isométrie bijective de X. ◁

Tout espace compact étant complet, le théorème du point fixe s'y applique (cf. page 159). Mais, dans un espace compact, il est possible d'affaiblir un peu l'hypothèse de contractance du théorème du point fixe. C'est ce que montre l'exercice suivant.

2.5. Un théorème de point fixe

Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte non vide de E. Soit $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ telle que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{K}^2$ tel que $x \neq y$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe α.

2. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite définie par $x_0 \in \mathrm{K}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n. Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers α.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $g : x \mapsto \|x - f(x)\|$ la fonction qui mesure l'écart entre un point x et son image par f. Comme g est continue sur le compact K, puisque f l'est, elle atteint son minimum en un point $\alpha \in \mathrm{K}$. Supposons que ce minimum n'est pas nul *i.e.* que $\alpha \neq f(\alpha)$. On a alors

$$g(f(\alpha)) = \|f(\alpha) - f(f(\alpha))\| < \|\alpha - f(\alpha)\| = g(\alpha),$$

ce qui contredit la définition de α. On a donc $g(\alpha) = 0$ et α est un point fixe de f. Il ne peut clairement pas y avoir deux points fixes distincts, donc α est l'unique point fixe de f.

2. La suite réelle $\|\alpha - x_n\|$ est décroissante et positive donc converge. Notons s sa limite et supposons par l'absurde $s > 0$. Par compacité de K, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un point $\beta \in \mathrm{K}$. On a alors $\|\alpha - \beta\| = s$ par passage à la limite. Mais comme $\|\alpha - f(x_{\varphi(n)})\| = \|\alpha - x_{\varphi(n)+1}\| \geqslant s$ pour tout n, on a aussi $\|\alpha - f(\beta)\| \geqslant s$, par continuité de f. On a donc $\|f(\alpha) - f(\beta)\| \geqslant \|\alpha - \beta\|$ avec $\alpha \neq \beta$, ce qui contredit la propriété vérifiée par f. Ainsi $s = 0$ et $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge bien vers α. ◁

La première question de l'exercice suivant est classique et établit un résultat très important (voir par exemple les exercices 2.12 et 2.13 du tome 1 d'analyse pour des applications). L'exercice se poursuit par l'étude d'une suite récurrente d'un compact qui admet exactement deux valeurs d'adhérence.

2.6. Suite ayant deux valeurs d'adhérence

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer qu'une suite d'éléments de K converge dans K si, et seulement si, cette suite admet une seule valeur d'adhérence.

2. Soit $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ une application continue, $x_0 \in \mathrm{K}$. On définit une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n. On suppose que cette suite admet exactement deux valeurs d'adhérence z_0 et z_1. Montrer que pour deux voisinages quelconques V_0 et V_1 de z_0 et z_1, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant \mathrm{N}$ implique $x_n \in \mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1$.

3. Soit φ une extraction telle que $x_{\varphi(n)}$ converge vers z_0. Que peut-on dire de la suite $(x_{\varphi(n)+1})$? Envisager deux cas et conclure.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers z et z est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ possède une seule valeur d'adhérence z et qu'elle ne converge pas vers z. Alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $\|x_n - z\| \geqslant \varepsilon$. On peut donc construire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, $\|x_{\varphi(n)} - z\| \geqslant \varepsilon$. De celle-ci, K étant compact, on peut extraire une nouvelle sous-suite convergente $(x_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Si on appelle

z' sa limite, on a $\|z - z'\| \geqslant \varepsilon$, donc $z \neq z'$, et pourtant z' est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est contraire à l'hypothèse.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des voisinages V_0 de z_0 et V_1 de z_1 tels que, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $x_n \notin \mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1$. On peut alors construire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, on ait $x_{\varphi(n)} \notin \mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1$. La suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence z qui est aussi valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc $z = z_0$ ou $z = z_1$. Mais c'est contradictoire avec le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \notin \mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1$.

3. Soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers z_0. Comme f est continue, la suite de terme général $x_{\varphi(n)+1} = f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(z_0)$. Donc $f(z_0)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a soit $f(z_0) = z_0$ soit $f(z_0) = z_1$.

• Montrons qu'on ne peut pas avoir $f(z_0) = z_0$, en raisonnant par l'absurde. Soit W_0 un voisinage de z_0 et V_1 un voisinage de z_1 tels que $\mathrm{W}_0 \cap \mathrm{V}_1 = \emptyset$. Comme f est continue en z_0, il existe un voisinage V_0 de z_0 tel que $f(\mathrm{V}_0) \subset \mathrm{W}_0$. Si x appartient à V_0, alors $f(x)$ n'appartient pas à V_1. D'après la question 1, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, $n \geqslant \mathrm{N}$ implique $x_n \in \mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1$. Comme z_0 est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_1 \geqslant \mathrm{N}$ tel que x_{n_1} appartienne à V_0. Mais alors $x_{n_1+1} = f(x_{n_1})$ n'est pas dans V_1, donc est dans V_0. Une récurrence immédiate montre que pour $p \geqslant n_1$ x_p appartient à V_0 et pas à V_1, ce qui est contradictoire avec le fait que z_1 valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc $f(z_0) = z_1$ et par symétrie $f(z_1) = z_0$: z_0 et z_1 sont deux points fixes de $f \circ f$.

• Montrons maintenant que les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, l'une vers z_0, l'autre vers z_1. Comme f est continue sur le compact K elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\|z_0 - z_1\|\right[$ et η un module d'uniforme continuité de f relatif à ε. On peut imposer de plus $\eta < \varepsilon$. Soit enfin V_0 et V_1 les boules ouvertes de rayon η de centres respectifs z_0 et z_1. D'après la question 2, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant \mathrm{N}$, alors x_n appartient à $\mathrm{V}_0 \cup \mathrm{V}_1$.

Si x_n appartient à V_0, alors on a $\|f(x_n) - f(z_0)\| = \|x_{n+1} - z_1\| \leqslant \varepsilon$. De par le choix de ε et η, on a alors, $\|x_{n+1} - z_0\| > \varepsilon > \eta$ et x_{n+1} n'appartient pas à V_0, il est dans V_1. On montre de même que, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, si x_n est dans V_1, alors x_{n+1} appartient à V_0.

À partir du rang N, les termes de la suite sont alternativement dans V_0 et V_1. On a donc

$*$ soit $\|x_{2n} - z_0\| < \varepsilon$ et $\|x_{2n+1} - z_1\| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$*$ soit $\|x_{2n} - z_1\| < \varepsilon$ et $\|x_{2n+1} - z_0\| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$.

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, nous avons montré que l'une des sous-suites convergent vers z_0 et l'autre vers z_1.

Conclusion. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence z_0

et z_1, alors $f(z_0) = z_1$, $f(z_1) = z_0$ et les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, l'une vers z_0, l'autre vers z_1. ◁

L'énoncé suivant donne un exemple de compact de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$*, où* E *est de dimension finie.*

2.7. Endomorphismes stabilisant un compact

Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \geqslant 1$ et A une partie compacte de E. On pose $\mathrm{L_A} = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}\}$.

1. Montrer que si A contient une boule ouverte alors $\mathrm{L_A}$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2. Caractériser les parties compactes A telles que $\mathrm{L_A}$ soit une partie compacte de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Comme A contient une boule ouverte, elle contient une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. On munit alors $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ de la norme N définie par $\mathrm{N}(f) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \|f(e_k)\|$. La partie A est compacte, donc bornée. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. Alors, pour tout $f \in \mathrm{L_A}$, on a $\mathrm{N}(f) \leqslant \mathrm{M}$, donc $\mathrm{L_A}$ est une partie bornée de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrons que $\mathrm{L_A}$ est aussi fermée, ce qui permettra de conclure, puisque $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est de dimension finie. Soit $(f_p)_{p\geqslant 0}$ une suite de $\mathrm{L_A}$ qui converge vers f (au sens d'une norme quelconque sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$). Montrons que $f \in \mathrm{L_A}$. Soit $x \in \mathrm{A}$. Pour tout p, le vecteur $f_p(x)$ est dans A par hypothèse, et la suite $f_p(x)$ converge vers $f(x)$. Comme A est fermée, $f(x) \in \mathrm{A}$. Ainsi f stabilise A, et $\mathrm{L_A}$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2. Dans ce qui précède, on n'a pas vraiment utilisé le fait que A est d'intérieur non vide, mais seulement le fait qu'il contient une base de E. Montrons que cette condition est nécessaire pour que $\mathrm{L_A}$ soit compacte. Si Vect A est un sous-espace strict de E, on se donne une base $(f_1, \dots, f_p)$ de Vect(A), que l'on complète en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E. Les endomorphismes ayant une matrice diagonale de la forme $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, d_{p+1}, \dots, d_n)$ dans cette base sont tous dans $\mathrm{L_A}$ (puisqu'ils agissent comme l'identité sur le sous-espace Vect(A)). Cela montre que l'ensemble $\mathrm{L_A}$ n'est pas borné et donc pas compact.

Conclusion. L'ensemble $\mathrm{L_A}$ est un compact de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ si, et seulement si, $\mathrm{Vect(A)} = \mathrm{E}$. ◁

L'exercice suivant utilise (et démontre) le théorème de Dini : si une suite croissante de fonctions continues sur un compact converge simplement, la convergence est uniforme.

2.8. Suite croissante de fonctions continues

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, H un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ et $\mathrm{H}^+ = \{u \in \mathrm{H},\ u \geqslant 0\}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Pour tout compact K inclus dans Ω, et pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $c > 0$ tel que : $\forall z \in \mathrm{K}$, $\forall u \in \mathrm{H}^+$, $u(z) \leqslant cu(z_0)$.

(ii) Pour toute suite (u_n) croissante de H^+ qui converge simplement vers $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, on a : soit u est identiquement infinie, soit u est partout finie et continue.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On suppose que (i) est réalisé et on considère une suite (u_n) croissante de H^+. Pour tout $z \in \Omega$, la suite $(u_n(z))$ a une limite $u(z)$ appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui définit $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $u(z_0)$ soit fini. Soit K un compact inclus dans Ω. Il existe $c > 0$ tel que, pour tous $z \in \mathrm{K}$ et $v \in \mathrm{H}^+$, $v(z) \leqslant cv(z_0)$. On a donc, pour tout $z \in \mathrm{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(z) \leqslant cu_n(z_0) \leqslant cu(z_0).$$

Pour tout $z \in \mathrm{K}$, la suite $(u_n(z))$ est majorée donc $u(z) \in \mathbb{R}_+$. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant n$, $u_p - u_n \in \mathrm{H}^+$ donc, pour tout $z \in \mathrm{K}$,

$$u_p(z) - u_n(z) \leqslant c(u_p(z_0) - u_n(z_0)).$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient, pour tout $z \in \mathrm{K}$,

$$0 \leqslant u(z) - u_n(z) \leqslant c(u(z_0) - u_n(z_0)).$$

La suite (u_n) converge uniformément sur K. Ceci est vraie pour tout compact K de Ω. Comme les fonctions u_n sont continues, leur limite u est également continue. Donc (ii) est réalisé.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde : on suppose que (ii) est réalisé, mais que (i) n'est pas vérifié. Ainsi, il existe $z_0 \in \Omega$ et un compact K de Ω tels que, pour tout $c > 0$, il existe $u \in \mathrm{H}_+$ et $z \in \mathrm{K}$ tels que $u(z) > cu(z_0)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_n \in \mathrm{K}$ et $u_n \in \mathrm{H}^+$ tels que $u_n(z_n) > n^3 u_n(z_0)$. On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k(z_0)} u_k$. Alors (v_n) est une suite de H^+, croissante. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(z_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, donc $(v_n(z_0))$ converge vers une limite finie. D'après

(ii), la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers une fonction $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. D'autre part, la suite (z_n) du compact K admet une valeur d'adhérence z. Il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, strictement croissante telle que $z = \lim_{n\to+\infty} z_{\varphi(n)}$.

On utilise alors le théorème de Dini : si une suite croissante de fonctions continues sur un compact d'un espace vectoriel normé converge simplement vers une fonction continue, la convergence est uniforme. Nous l'avons démontrée pour des fonctions définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans notre tome 2 d'analyse (exercice 2.30). La démonstration reste essentiellement la même.

Lemme. *Soit* K *un compact d'un espace vectoriel normé et* (f_n) *une suite croissante de fonctions continues sur* K *à valeurs réelles convergeant simplement sur* K *vers* $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si* f *est continue, la convergence est uniforme.*

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - f_n$ est positive et continue sur K. Il existe donc $x_n \in \mathrm{K}$ tel que $\mathrm{M}_n = \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$. Pour tout $x \in \mathrm{K}$, on a $f(x) - f_{n+1}(x) \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \mathrm{M}_n$, donc $0 \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \leqslant \mathrm{M}_n$. La suite réelle (M_n) est décroissante et positive donc converge vers $\mathrm{M} \geqslant 0$. La suite (x_n) étant dans le compact K contient une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in \mathrm{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \leqslant \varphi(n)$, on a

$$0 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f(x_{\varphi(n)}) - f_p(x_{\varphi(n)}).$$

De $0 \leqslant \mathrm{M} \leqslant f(x_{\varphi(n)}) - f_p(x_{\varphi(n)})$, on tire, en faisant tendre n vers l'infini, $0 \leqslant \mathrm{M} \leqslant f(a) - f_p(a)$, puisque $f - f_p$ est continue. Comme $\lim f_p(a) = f(a)$, on en déduit $\mathrm{M} = 0$. La suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ converge vers 0, ce qui est la définition de la convergence uniforme. $\diamondsuit$

Comme (v_n) est une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction continue v, la croissance est uniforme sur le compact K. *A fortiori*, la suite $(v_{\varphi(n)})$ converge uniformément vers v sur K. Comme $(z_{\varphi(n)})$ est une suite de K qui converge vers z, la suite $\big(v_{\varphi(n)}(z_{\varphi(n)})\big)$ converge vers $v(z)$. Mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n(z_n) \geqslant \frac{1}{n^2 u_n(z_0)} u_n(z_n) \geqslant n$$

et donc en particulier $v_{\varphi(n)}(z_{\varphi(n)}) \geqslant \varphi(n)$ donc $\big(v_{\varphi(n)}(z_{\varphi(n)})\big)$ tend vers $+\infty$. On obtient la contradiction voulue. $\triangleleft$

L'exercice suivant relève de l'étude des systèmes dynamiques. On y *étudie en effet l'adhérence de l'orbite d'un point sous l'action des itérées d'une fonction.*

2.9. Théorème de Gottschalk et Hedlung (1955)

Soient $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un espace normé, X un compact de E, $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ un homéomorphisme et $g : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose :

(i) pour tout compact $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$, $f(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{C} = \emptyset$ ou $\mathrm{C} = \mathrm{X}$;

(ii) il existe $x_0 \in \mathrm{X}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|\sum_{i=0}^{n} g \circ f^i(x_0)\right| \leqslant \mathrm{M}.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathrm{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{i=0}^{n} g \circ f^i(x)\right| \leqslant 2\mathrm{M}$.

On définit $\mathrm{F} : (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R} \longrightarrow (f(x), g(x)+t) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R}$ et, pour $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{T}_s : (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R} \longrightarrow (x, t+s) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathrm{X}$, on note $\mathrm{K}_x = \overline{\{\mathrm{F}^n(x,0),\ n \in \mathbb{N}\}}$.

2. Soient x et y dans X. Établir l'existence et l'unicité de $s \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}_s(\mathrm{K}_y) = \mathrm{K}_x$.

3. Soit $x \in \mathrm{X}$. Montrer que K_x est le graphe d'une application continue de X dans $\mathbb{R}$.

4. Établir l'existence d'une application $\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\varphi \circ f - \varphi = g$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, notons $\mathrm{A}_x = \{f^i(x),\ i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathrm{C}_x = \overline{\mathrm{A}_x}$. Il est clair que $f(\mathrm{A}_x) \subset \mathrm{A}_x$. Comme f est continue on en déduit

$$f(\mathrm{C}_x) = f\left(\overline{\mathrm{A}_x}\right) \subset \overline{f(\mathrm{A}_x)} \subset \mathrm{C}_x.$$

Or C_x est compact, puisque c'est un fermé du compact X, et non vide, donc $\mathrm{C}_x = \mathrm{X}$, d'après (i).

Soient $x_0 \in \mathrm{X}$, $x \in \mathrm{A}_{x_0}$ et $j \in \mathbb{N}$ tel que $x = f^j(x_0)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} g \circ f^i(x)\right| = \left|\sum_{i=j}^{n+j} g \circ f^i(x_0)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n+j} g \circ f^i(x_0)\right| + \left|\sum_{i=0}^{j-1} g \circ f^i(x_0)\right| \leqslant 2\mathrm{M}.$$

Soit maintenant $x \in \mathrm{X}$ et (x_k) une suite d'éléments de A_{x_0} qui converge vers x. On a, pour tous entiers naturel k et n,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} g \circ f^i(x_k)\right| \leqslant 2\mathrm{M}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de f et g, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} g \circ f^i(x)\right| \leqslant 2\mathrm{M}.$$

2. On pose, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{B}_x = \{\mathrm{F}^n(x,0),\ n \in \mathbb{N}\}$. On a $\mathrm{F}(x,0) = (f(x), g(x))$, $\mathrm{F}^2(x,0) = (f^2(x), g(f(x)) + g(x))$ et l'on montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{F}^n(x,0) = \left(f^n(x), \sum_{i=0}^{n-1} g \circ f^i(x)\right).$$

On prend d'abord $y \in \mathrm{A}_x$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = f^k(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}^n(y,0) = (f^{n+k}(x), \sum\limits_{i=k}^{n+k-1} g \circ f^i(x))$. On pose $s = \sum\limits_{i=0}^{k-1} g \circ f^i(x)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_s(\mathrm{F}^n(y), 0) = \mathrm{F}^{n+k}(x,0)$ et donc $\mathrm{T}_s(\mathrm{B}_y) \subset \mathrm{B}_x$. Ainsi, pour tout $y \in \mathrm{A}_x$, il existe $s \in [-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$ tel que $\mathrm{T}_s(\mathrm{B}_y) \subset \mathrm{B}_x$. Soit $y \in \mathrm{X}$. Il existe une suite (y_p) d'éléments de A_x qui convergent vers y et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s_p \in [-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$ tel que $\mathrm{T}_{s_p}(\mathrm{B}_{y_p}) \subset \mathrm{B}_x$. La suite (s_p) est bornée donc on peut, quitte à remplacer (s_p) et (y_p) par des suites extraites supposer que (s_p) converge vers s. Pour tous entiers naturels n et p,

$$\mathrm{T}_{s_p}(\mathrm{F}^n(y_p, 0)) = (f^n(y_p), \sum_{i=0}^{n-1} g \circ f^i(y_p) + s_p) \in \mathrm{B}_x.$$

En faisant tendre p vers l'infini, on en déduit que

$$(f^n(y), \sum_{i=0}^{n-1} g \circ f^i(y) + s) \in \overline{\mathrm{B}_x} = \mathrm{K}_x,\ \textit{i.e.}\ \ \mathrm{T}_s(\mathrm{F}^n(y,0)) \in \mathrm{K}_x.$$

Cela montre que $\mathrm{T}_s(\mathrm{B}_y) \subset \mathrm{K}_x$. Comme T_s est continue, on en déduit $\mathrm{T}_s(\mathrm{K}_y) \subset \mathrm{K}_x$.

Il faut démontrer qu'en fait on a une égalité. On montre de même qu'il existe $s' \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}_{s'}(\mathrm{K}_x) \subset \mathrm{K}_y$. On en déduit que

$$\mathrm{T}_{s+s'}(\mathrm{K}_x) = \mathrm{T}_s \circ \mathrm{T}_{s'}(\mathrm{K}_x) \subset \mathrm{K}_x.$$

Notons $p : (x,t) \longmapsto t$ la projection de $\mathrm{X} \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(\mathrm{F}_n(x)) \in [-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$, i.e. $p(\mathrm{B}_x) \subset [-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$. On en déduit que $p(\mathrm{K}_x) \subset [-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_{k(s+s')}(\mathrm{K}_x) \subset \mathrm{K}_x$ et $p(\mathrm{T}_{k(s+s')}(\mathrm{K}_x)) \subset [-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$. Or si $\omega \in \mathrm{K}_x$, comme la suite des $p(\mathrm{T}_{k(s+s')}(\omega))$ est bornée, nécessairement $s + s' = 0$, autrement dit, $\mathrm{T}_{s+s'} = \mathrm{Id}$. Ainsi, on a $\mathrm{K}_x = \mathrm{T}_s \circ \mathrm{T}_{s'}(\mathrm{K}_x) \subset \mathrm{T}_s(\mathrm{K}_y) \subset \mathrm{K}_x$ et $\mathrm{T}_s(\mathrm{K}_y) = \mathrm{K}_x$.

L'unicité résulte de ce qui précède. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}_t(\mathrm{K}_y) = \mathrm{K}_x$. On a alors $\mathrm{K}_y = (\mathrm{T}_t)^{-1}(\mathrm{K}_x) = \mathrm{T}_{-t}(\mathrm{K}_x)$ et $\mathrm{K}_x = \mathrm{T}_s \circ \mathrm{T}_{-t}(\mathrm{K}_x) = \mathrm{T}_{s-t}(\mathrm{K}_x)$. On en déduit $s - t = 0$ et donc $s = t$.

Conclusion. Pour tout $(x, y) \in \mathrm{X}^2$, il existe un réel s unique tel que $\mathrm{T}_s(\mathrm{K}_y) = \mathrm{K}_x$.

3. Notons $q : (x, t) \longmapsto x$ la projection de $\mathrm{X} \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, $q(\mathrm{K}_x)$ contient $q(\mathrm{B}_x) = \mathrm{A}_x$. On sait que $\overline{\mathrm{A}_x} = \mathrm{X}$. Soit $x \in \mathrm{X}$. Il existe une suite d'éléments (x_n, t_n) de B_x telle $q(x_n, t_n) = x_n$ converge vers x. Comme la suite (t_n) est bornée ($|t_n| \leqslant 2\mathrm{M}$), on peut en extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})$ qui converge vers t. La suite $(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)})$ converge vers (x, t) qui appartient à $\overline{\mathrm{B}_x} = \mathrm{K}_x$. Donc $x \in q(\mathrm{K}_x)$ et $q(\mathrm{K}_x) = \mathrm{X}$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathrm{K}_x$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(y, t) \in \mathrm{K}_x$. Pour que K_x soit le graphe d'une application de X dans $\mathbb{R}$, il faut que, pour tout $y \in \mathrm{X}$, t soit unique. On remarque que $(y, t) \in \mathrm{K}_x$ équivaut à $\mathrm{T}_t(y, 0) \in \mathrm{K}_x$. Il est clair que $\mathrm{F}(\mathrm{B}_x) \subset \mathrm{B}_x$. Comme F est continue, on en déduit $\mathrm{F}(\mathrm{K}_x) \subset \mathrm{K}_x$. D'autre part, T_t commute avec F. On en déduit que, si $(y, t) = \mathrm{T}_t(y, 0) \in \mathrm{K}_x$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{T}_t(\mathrm{F}^n(y, 0)) \in \mathrm{K}_x$, c'est-à-dire $\mathrm{T}_t(\mathrm{B}_y) \subset \mathrm{K}_x$. Comme T_t est continue, on en déduit $\mathrm{T}_t(\mathrm{K}_y) \subset \mathrm{K}_x$ et d'après la question précédente cela implique $\mathrm{T}_t(\mathrm{K}_y) = \mathrm{K}_x$. Un tel t est unique. Donc K_x est le graphe d'une application φ de X dans $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant la continuité de φ. Soit $y \in \mathrm{X}$ et (y_n) une suite de X qui tend vers y. On pose pour tout n, $t_n = \varphi(y_n)$. Supposons que (t_n) ne tende pas vers $\varphi(y)$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction ψ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|t_{\psi(n)} - \varphi(y)| \geqslant \varepsilon$. Comme $(t_{\psi(n)})$ est bornée on peut, quitte à la remplacer par une nouvelle suite extraite, supposer qu'elle converge vers t. On a alors $|t - \varphi(y)| \geqslant \varepsilon$, donc $t \neq \varphi(y)$ et $(y, t) \notin \mathrm{K}_x$. Mais K_x est fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(y_{\psi(n)}, t_{\psi(n)}) \in \mathrm{K}_x$ donc sa limite (y, t) devrait appartenir à K_x. D'où une contradiction et la continuité de φ.

4. On prend un élément x quelconque et on garde les notations de la question précédente. On a montré que pour tout $y \in \mathrm{K}_x$, $\varphi(y) = t$ équivaut à $\mathrm{T}_t(\mathrm{B}_y) \subset \mathrm{K}_x$. Il résulte du début de la question 2 que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(f^k(x)) = \sum_{i=0}^{k-1} g \circ f^i(x)$ et donc

$$\varphi \circ f(f^k(x)) - \varphi(f^k(x)) = \varphi(f^{k+1}(x)) - \varphi(f^k(x)) = g(f^k(x)).$$

Ainsi les applications $\varphi \circ f - \varphi$ et g coïncident sur A_x donc par continuité sur $\mathrm{X} = \overline{\mathrm{A}_x}$. On a donc $\varphi \circ f - \varphi = g$. $\triangleleft$

On peut noter qu'il est inutile de supposer que f est un homéomorphisme. La continuité suffit. D'autre part, l'existence de φ implique, pour tous $x \in \mathrm{X}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} g \circ f^i(x) = \sum_{i=0}^{n} \big(\varphi \circ f^{i+1}(x) - \varphi \circ f^i(x)\big) = \varphi(f^{n+1}(x)) - \varphi(x).$$

Comme les fonctions continues φ et $\varphi \circ f$ sont bornées sur le compact X, la condition (ii) est réalisée. Pour un couple (X, f) vérifiant (i) (on dit que f est un homéomorphisme minimal), il y a équivalence entre (ii) et l'existence de φ.

L'énoncé suivant donne un critère très utile de compacité faisant intervenir la notion de précompacité. Celle-ci sera au cœur des exercices suivants.

2.10. Compacité et précompacité

Soit E un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble non vide de E.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathrm{A}^n$, $\mathrm{A} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(a_i, \varepsilon)$;

(ii) de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite de Cauchy.

2. Un ensemble A de E vérifiant (i) est dit *précompact*. Montrer que A est compact si, et seulement si, A est précompact et complet.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. • Montrons que (i) implique (ii). Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de A. En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans la réunion d'un nombre fini de boules de rayon 1, dont le centre est dans A. Une de ces boules au moins contient un nombre infini de termes de la suite : on peut donc trouver $a_1 \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{I}_1 \subset \mathbb{N}$ infini, tel que

$$\{x_k,\, k \in \mathrm{I}_1\} \subset \mathrm{B}(a_1, 1).$$

Supposons construits des sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_n$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{A}^n$ tels que

$$\begin{cases} \mathrm{I}_1 \supset \cdots \supset \mathrm{I}_n \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\, \{x_k,\, k \in \mathrm{I}_i\} \subset \mathrm{B}\Big(a_i,\, \dfrac{1}{i}\Big). \end{cases}$$

Alors $\{x_k, k \in \mathrm{I}_n\}$ est contenu dans une réunion finie de boules de rayon $\frac{1}{n+1}$, dont le centre est dans A. Une de ces boules au moins contient un nombre infini d'éléments de cet ensemble : il existe donc $a_{n+1} \in \mathrm{A}$ et un sous-ensemble infini I_{n+1} de I_n tels que

$$\{x_k,\ k \in \mathrm{I}_{n+1}\} \subset \mathrm{B}\Big(a_{n+1}, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étant ainsi construites, on définit une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\varphi(n) \in \mathrm{I}_n$. On prend $\varphi(1)$ quelconque dans A_1. Puis $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$ étant construits, on prend $\varphi(n+1)$ quelconque dans I_{n+1} et strictement supérieur à $\varphi(n)$, ce qui est possible car I_{n+1} est infini.

Par construction, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, $x_{\varphi(m)}$ et $x_{\varphi(n)}$ sont tous deux dans la boule $\mathrm{B}\Big(a_m, \frac{1}{m}\Big)$ car $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}_m$ et on a donc $\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}\| \leqslant \frac{2}{m}$. Cela démontre que la suite $(x_{\varphi(k)})_{k\geqslant 1}$ extraite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. On a donc prouvé (*ii*).

• La réciproque est plus facile. On montre la contraposée. On suppose donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathrm{A}^n$, il existe $x \in \mathrm{E}$ qui appartient à $\mathrm{A} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(a_i, \varepsilon)$. On construit alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\|x_m - x_n\| \geqslant \varepsilon$. On choisit x_1 quelconque dans A. Puis on construit les termes de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence : $x_1, \dots, x_n$ étant choisis et vérifiant pour $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, $\|x_p - x_q\| \geqslant \varepsilon$, on prend x_{n+1} dans $\mathrm{A} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$, ensemble qui n'est pas vide par hypothèse. On a alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|x_{n+1} - x_i\| \geqslant \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite a les propriétés voulues et aucune suite extraite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ne peut être de Cauchy. En effet, pour toute application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, on a $\|x_{\varphi(m)} - x_{\varphi(n)}\| \geqslant \varepsilon$ dès que $m \neq n$.

2. Si A est précompact, de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite de Cauchy. Si de plus, A est complet, cette sous-suite converge vers un point de A. On peut donc extraire de toute suite de A une sous-suite qui converge vers un point de A et par conséquent, A est compact.

Réciproquement, si A est compact, A est complet (c'est du cours). De plus, de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente, qui est en particulier une suite de Cauchy. D'après la première question, A est précompact et l'équivalence est prouvée. ◁

La notion de précompacité (recouvrement par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$) peut aussi se définir à l'aide *de la notion de partie ε-séparée (ensemble de points dont les distances mutuelles sont toutes $\geqslant \varepsilon$). C'est ce que l'on voit dans la première question de l'exercice suivant qui offre une nouvelle solution de la dernière question de l'exercice 2.3.*

2.11. Isométries d'un compact

Soient $\| \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et ε un réel strictement positif. Une partie A une partie de K est dite ε-séparée si : $\forall (x, y) \in \mathrm{A}^2$, $\|y - x\| < \varepsilon \Longrightarrow x = y$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{M}(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée de K soit de cardinal inférieur à $\mathrm{M}(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie ε-séparée de cardinal $\mathrm{M}(\varepsilon)$.

2. Soit $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ une fonction qui conserve la distance. Montrer que f est surjective.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. La question consiste simplement à montrer que l'ensemble U des cardinaux des parties ε-séparées de K est une partie majorée de $\mathbb{N}$. Il suffira alors de prendre pour $\mathrm{M}(\varepsilon)$ le plus grand élément de U. C'est une simple utilisation de la précompacité de K (voir exercice 2.10) : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p$ dans K tels que les boules ouvertes centrées en les a_i et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ recouvrent K. Toute partie ε-séparée possède alors au plus p éléments : en effet, si on a plus de $p + 1$ éléments dans K il y en a au moins deux, disons x et y, qui sont dans la même boule ouverte de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ ce qui impose $\mathrm{N}(y - x) < \varepsilon$.

Si on note $\mathrm{N}(\varepsilon)$ *le nombre minimal de boules ouvertes de rayon* ε *nécessaires pour recouvrir* K *on a donc* $\mathrm{M}(\varepsilon) \leqslant \mathrm{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. *Il est par ailleurs clair que* $\mathrm{N}(\varepsilon) \leqslant \mathrm{M}(\varepsilon)$, *car les boules de centre* ε *centrées en les points d'une partie* ε*-séparée recouvrent nécessairement* K *(sinon on pourrait ajouter un point de plus). On en déduit qu'une partie d'un espace normé est précompacte si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *les parties* ε*-séparées de cet ensemble sont toutes finies.*

2. Supposons par l'absurde que f n'est pas surjective et considérons un élément y de K qui n'est pas dans $f(\mathrm{K})$. Comme $f(\mathrm{K})$ est compact (en tant qu'image continue d'un compact) la distance d de y à $f(\mathrm{K})$ est strictement positive. Prenons $\varepsilon < d$ et A une partie ε-séparée de K de cardinal maximal $\mathrm{M}(\varepsilon)$. Comme f conserve la distance, $f(\mathrm{A})$ reste une partie ε-séparée de $f(\mathrm{K})$, de cardinal $\mathrm{M}(\varepsilon)$ puisque f est injective. On obtient une contradiction, car $f(\mathrm{A}) \cup \{y\}$ est une partie ε-séparée de K qui possède $\mathrm{M}(\varepsilon)+1$ éléments. $\triangleleft$

Dans l'énoncé suivant, on cherche un recouvrement fini d'un compact K *par des boules (fermées) de rayon* ε *qui minimise la somme des distances entre les centres des boules.*

2.12. Recouvrement minimal

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Si A est une partie finie de K, on dit que A ε-recouvre K lorsque $\mathrm{K} \subset \bigcup\limits_{a \in \mathrm{A}} \overline{\mathrm{B}(a,\varepsilon)}$.

1. Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que toute partie A qui ε-recouvre K soit de cardinal supérieur ou égal à $\mathrm{N}(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie A de cardinal $\mathrm{N}(\varepsilon)$ qui ε-recouvre K.

2. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de cardinal $\mathrm{N}(\varepsilon)$ qui ε-recouvrent K. Montrer que la fonction $\mathrm{D} : \mathrm{A} \in \mathcal{A} \mapsto \sum\limits_{(x,y) \in \mathrm{A}^2} \|y-x\|$ atteint son minimum.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. La précompacité de K (voir exercice 2.10) montre qu'il existe des parties finies A de K telles que $\mathrm{K} \subset \bigcup\limits_{a \in \mathrm{A}} \overline{\mathrm{B}(a,\varepsilon)}$. L'ensemble des cardinaux de ces parties est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet un plus petit élément $\mathrm{N}(\varepsilon)$.

2. La fonction D est positive donc admet une borne inférieure m. On va montrer que cette borne est atteinte. Il existe une suite $(\mathrm{A}_n)_{n \geqslant 0}$ de parties de $\mathcal{A}$ telle que la suite $(\mathrm{D}(\mathrm{A}_n))$ tende vers m. Notons $(a_{n,1}, \ldots, a_{n,\mathrm{N}(\varepsilon)})$ les éléments de A_n pris dans un ordre quelconque. Comme K est compact on peut, par $\mathrm{N}(\varepsilon)$ extractions successives, trouver $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que toutes les suites $(a_{\varphi(n),k})$ convergent. On notera b_k la limite de $(a_{\varphi(n),k})$ pour tout $k \in [\![1, \mathrm{N}(\varepsilon)]\!]$.

Montrons que la partie $\mathrm{B} = \{b_1, \ldots, b_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\}$ est encore dans $\mathcal{A}$. Pour cela il suffit de prouver que $\mathrm{K} \subset \bigcup\limits_{b \in \mathrm{B}} \overline{\mathrm{B}(b,\varepsilon)}$ car, par minimalité de $\mathrm{N}(\varepsilon)$, les éléments de B seront alors forcément deux à deux distincts. Soit x un point quelconque de K. Pour tout entier n, on peut trouver un entier $k(n)$ tel que $\|x - a_{n,k(n)}\| \leqslant \varepsilon$ car $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$. La suite d'entiers $(k(\varphi(n)))$ prend ses valeurs dans l'ensemble fini $[\![1, \mathrm{N}(\varepsilon)]\!]$, donc on peut en extraire une sous-suite constante $(k(\varphi(\psi(n))))$. On notera ℓ la valeur de cette constante pour alléger l'écriture. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x - a_{\varphi(\psi(n)),\ell}\| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit de faire tendre n vers l'infini pour obtenir $\|x - b_\ell\| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $x \in \overline{\mathrm{B}(b_\ell, \varepsilon)}$ et cela prouve que la partie B est dans $\mathcal{A}$.

Il est clair, par continuité de la norme, que la suite $(\mathrm{D}(\mathrm{A}_{\varphi(n)}))$ converge vers D(B). Comme elle converge aussi vers m, on a par unicité de la limite $\mathrm{D}(\mathrm{B}) = m$, et B réalise le minimum de D. ◁

Dans l'exercice suivant, on montre notamment que l'adhérence et l'enveloppe convexe d'une partie précompacte sont aussi précompacts.

2.13. Enveloppe convexe fermée et précompacité

Soit $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un espace normé réel. Si A est une partie bornée non vide de E, on note $\mathrm{C_A}$ l'enveloppe convexe de A et $\alpha(\mathrm{A})$ la borne inférieure de l'ensemble $\mathrm{E_A}$ des réels $\varepsilon > 0$ tels que l'on puisse recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

1. Calculer $\alpha(\mathrm{A})$ si E est de dimension finie.

2. Montrer que $\alpha(\overline{\mathrm{C_A}}) = \alpha(\mathrm{A})$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Il est clair que $\mathrm{E_A}$ est un intervalle (si $r \in \mathrm{E_A}$, alors $[r, +\infty[\subset \mathrm{E_A}$), non vide car A est bornée. Notons que dans cet exercice on n'impose pas aux centres des boules d'être des points de A. Néanmoins dire que $\alpha(\mathrm{A}) = 0$ équivaut à dire que E est précompact. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, si on peut recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε, alors on peut le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 2ε centrées en des points de A : il suffit de choisir un point de A dans chacune des boules précédentes (en ôtant celles qui ne coupent pas A).

Lorsque E est de dimension finie, $\overline{\mathrm{A}}$ est compact car fermé et borné, donc $\alpha(\overline{\mathrm{A}}) = 0$. Par suite $\alpha(\mathrm{A}) = 0$, car il est clair que si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors $\alpha(\mathrm{A}) \leqslant \alpha(\mathrm{B})$ (on a trivialement $\mathrm{E_B} \subset \mathrm{E_A}$).

2. On va décomposer la question en deux résultats en montrant que pour toute partie bornée A on a $\alpha(\overline{\mathrm{A}}) = \alpha(\mathrm{A})$ et $\alpha(\mathrm{C_A}) = \alpha(\mathrm{A})$.

• On a déjà vu ci-dessus que $\alpha(\mathrm{A}) \leqslant \alpha(\overline{\mathrm{A}})$. Soit $r \in \mathrm{E_A}$ et $x_1, \dots, x_p$ tels que $\mathrm{A} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, r)$. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\mathrm{A}} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\mathrm{B}(x_i, r)} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, r+\varepsilon)$$

donc $r+\varepsilon \in \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{A}}}$. Ainsi $\alpha(\overline{\mathrm{A}}) \leqslant r+\varepsilon$. Cela vaut pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $r \in \mathrm{E}_{\mathrm{A}}$, donc en passant aux bornes inférieures on obtient $\alpha(\overline{\mathrm{A}}) \leqslant \alpha(\mathrm{A})$. Cela montre l'égalité.

On en déduit en particulier que A *est précompacte si, et seulement si,* $\overline{\mathrm{A}}$ *est précompacte.*

• Montrons maintenant que $\alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{A}}) = \alpha(\mathrm{A})$. Il est clair que C_{A} aussi est bornée. On a déjà $\alpha(\mathrm{A}) \leqslant \alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{A}})$ puisque $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}_{\mathrm{A}}$. Comme précédemment, prenons $r \in \mathrm{E}_{\mathrm{A}}$ et $x_1, \ldots, x_p$ tels que $\mathrm{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, r)$. L'enveloppe convexe $\mathrm{C}_{\{x_1,\ldots,x_p\}}$ des points x_i est compacte : il s'agit en effet de l'image du compact $\Lambda_p = \{(t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}_+^p,\ t_1 + \cdots + t_p = 1\}$ par l'application continue $(t_1, \ldots, t_p) \mapsto t_1 x_1 + \cdots + t_p x_p$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini de points $y_1, \ldots, y_{\mathrm{N}}$ de E tels que

$$\mathrm{C}_{\{x_1,\ldots,x_p\}} \subset \bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}(y_j, \varepsilon).$$

Prenons un point $z \in \mathrm{C}_{\mathrm{A}}$. Celui-ci s'écrit comme barycentre à coefficients positifs d'une famille $a_1, \ldots, a_n$ de points de A : $z = t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n$ avec $(t_1, \ldots, t_n) \in \Lambda_n$. Chaque point a_i se trouve dans (au moins) une des boules de rayon r qui recouvrent A : notons $k(i)$ l'indice d'une telle boule et posons $y = t_1 x_{k(1)} + \cdots + t_n x_{k(n)}$. Il s'agit d'un point de $\mathrm{C}_{\{x_1,\ldots,x_p\}}$ tel que

$$\|z - y\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i \|a_i - x_{k(i)}\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i r = r.$$

On peut alors trouver $j \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$ tel que $y \in \mathrm{B}(y_j, \varepsilon)$, c'est-à-dire vérifiant $\|y - y_j\| < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a $\|z - y_j\| < r + \varepsilon$. On vient donc de montrer que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{A}} \subset \bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}(y_j, r+\varepsilon).$$

Ainsi, on a $\alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{A}}) \leqslant r + \varepsilon$ et comme précédemment, on en déduit $\alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{A}}) \leqslant \alpha(\mathrm{A})$, puis l'égalité de ces deux quantités.

En particulier A *est précompacte si, et seulement si,* C_{A} *est précompacte.*

En combinant les deux résultats on a $\alpha(\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{A}}}) = \alpha(\mathrm{C}_{\mathrm{A}}) = \alpha(\mathrm{A})$. ◁

En dimension finie, l'enveloppe convexe d'une partie compacte reste compacte (voir l'exercice 4.44 du tome 3 d'algèbre) mais en dimension *infinie, il se peut que cette enveloppe convexe ne soit pas fermée. Cela explique que l'on considère l'adhérence de l'enveloppe convexe (qui est fermée et reste convexe). Dans un espace de Banach, le résultat de l'exercice combiné à la caractérisation des compacts donnée dans l'exercice 2.10 montre donc directement que, si* A *est une partie compacte, alors* $\overline{\mathrm{C_A}}$ *est compact.*

Si K *est un compact non vide d'un espace normé* E *on peut, pour tout* $\varepsilon > 0$*, recouvrir* K *à l'aide d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon* ε *centrées en des points de* K*. Notons, comme dans les exercices précédents,* $\mathrm{N}(\varepsilon)$ *le nombre minimal de boules dans un tel recouvrement. On définit ainsi une fonction décroissante de* ε*. Lorsque* K *est infini,* $\mathrm{N}(\varepsilon)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* ε *tend vers* 0^+*. Cette fonction permet de mesurer le degré de compacité de* K *: plus vite elle tend vers l'infini, moins* K *est compact. Pour quantifier, on regarde la limite en* 0 *du quotient* $\dfrac{\ln \mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ *(ou plutôt la limite supérieure car cette limite n'existe pas toujours). Cette limite est appelée la dimension métrique de* K*. Les deux exercices suivants concernent cette notion.*

2.14. Mesure de compacité, deux exemples

Si K est un compact d'un espace normé réel E, on note $\mathrm{N}(\mathrm{K},\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules ouvertes de rayon ε centrées en un point de K nécessaires pour recouvrir K.

1. On prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et K la boule unité fermée de E. Calculer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln \mathrm{N}(\mathrm{K},\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\cdot$ Même question pour un compact K de E d'intérieur non vide.

2. On prend $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et K l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{E}$ nulles en 0 et 1-lipschitziennes. Calculer la limite quand ε tend vers 0^+ de

$$\frac{\ln(\ln \mathrm{N}(\mathrm{K},\varepsilon))}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Notons B la boule unité fermée de E et $\mathrm{N}(\varepsilon)$ au lieu de $\mathrm{N}(\mathrm{B},\varepsilon)$ pour simplifier. Soit $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}(\varepsilon)}$ des points de B tels que $\mathrm{B} \subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}(\varepsilon)} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. On en déduit une majoration du volume de B :

$$\mathrm{vol}(\mathrm{B}) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}(\varepsilon)} \mathrm{vol}(\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}(\varepsilon)} \varepsilon^n \,\mathrm{vol}(\mathrm{B}) = \mathrm{N}(\varepsilon)\varepsilon^n \,\mathrm{vol}(\mathrm{B}),$$

la fonction volume étant homogène de degré n. Comme le volume de B n'est pas nul, on a déjà la minoration $\mathrm{N}(\varepsilon) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon^n}\cdot$

On va maintenant chercher une majoration de $\mathrm{N}(\varepsilon)$, toujours à l'aide d'un argument de volume. Soit $y_1, \ldots, y_p$ des points de la boule B tels que $\|y_i - y_j\| \geqslant \varepsilon$ pour $i \neq j$, avec p maximal. Les boules ouvertes centrées en les y_i et de rayon $\dfrac{\varepsilon}{2}$ sont deux à deux disjointes et la réunion de ces boules est incluse dans $\mathrm{B}\Big(0, 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\Big)$. On obtient, en considérant les volumes et en utilisant de nouveau l'homogénéité du volume, $p\Big(\dfrac{\varepsilon}{2}\Big)^n \leqslant \Big(1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\Big)^n$. Mais on a $\mathrm{N}(\varepsilon) \leqslant p$, car si les boules ouvertes centrées en les y_i et de rayon ε ne recouvraient pas B, on pourrait ajouter un point y_{p+1} de plus et cela contredirait la maximalité de p. On a finalement obtenu l'encadrement

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \leqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \leqslant \Big(\frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon}\Big)^n .$$

Il en découle directement que $\dfrac{\ln \mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ tend vers n lorsque ε tend vers 0^+.

On peut donc dire que plus la dimension n est grande, moins la boule unité est compacte. Dans un espace de dimension infinie, la boule unité n'est d'ailleurs plus compacte (c'est le théorème de Riesz que le lecteur trouvera dans l'exercice 2.1).

Si K est une boule fermée de rayon $r > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a clairement $\mathrm{N}(\mathrm{K}, \varepsilon) = \mathrm{N}(\mathrm{B}, \frac{\varepsilon}{r})$, et on en déduit que $\dfrac{\ln \mathrm{N}(\mathrm{K}, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ tend toujours vers n lorsque ε tend vers 0^+.

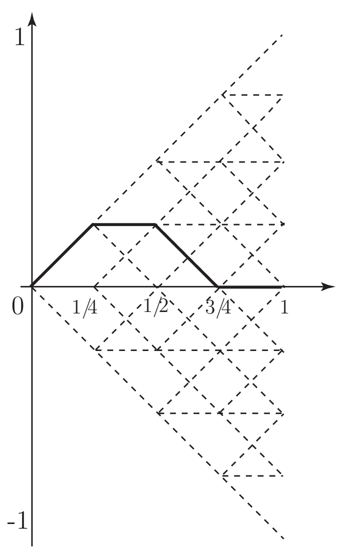
Si K est un compact d'intérieur non vide on peut trouver deux boules fermées B_1 et B_2 de rayons strictement positifs telles que $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{K} \subset \mathrm{B}_2$. Observons que si K_1 et K_2 sont deux compacts avec $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{K}_2$ on a $\mathrm{N}(\mathrm{K}_1, 2\varepsilon) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{K}_2, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. En effet, soit $x_1, \ldots, x_\mathrm{N}$ sont des points de K_2 tels que $\mathrm{K}_2 \subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. Si la boule $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ rencontre K_1 on choisit $y_i \in \mathrm{K}_1 \cap \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ et sinon on ne tient pas compte de cette boule. Il est clair que les boules centrées en les y_i et de rayon 2ε recouvrent K_1 et il y en a moins de N.

On a donc l'encadrement $N(B_1, 2\varepsilon) \leqslant N(K, \varepsilon) \leqslant N\Big(B_2, \dfrac{\varepsilon}{2}\Big)$ et en divisant par $\ln \dfrac{1}{\varepsilon}$ on en déduit directement que $\dfrac{\ln N(K, \varepsilon)}{\ln \dfrac{1}{\varepsilon}}$ tend toujours vers n lorsque ε tend vers 0^+.

Lorsque K *est d'intérieur vide on ne peut rien dire de général. Il existe par exemple des compacts de* $\mathbb{R}$ *(comme l'ensemble de Cantor) ayant une dimension métrique dans* $]0, 1[$. *Il se peut aussi que la limite considérée dans l'exercice n'existe pas ; on la remplace alors par la limite supérieure. Cela étant, ce qui précède montre que la dimension métrique d'un compact* K *de* $\mathbb{R}^n$ *reste toujours inférieure ou égale à la dimension du sous-espace affine engendré par* K.

2. Notons que la compacité de K découle du théorème d'Ascoli (voir exercice 2.31 du tome 2 d'analyse) car K est fermé, borné et équicontinu. Mais on peut aussi la déduire de l'exercice 2.10. En effet, K est complet car fermé dans l'espace complet E et nous allons justifier qu'il est précompact en montrant que $N(K, \varepsilon)$ existe pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ et $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ la subdivision régulière de $[0, 1]$ de pas $\dfrac{1}{N}\cdot$ On définit un ensemble de 3^N fonctions continues sur $[0, 1]$, affines de pente -1, 0 ou 1 sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. On peut noter $f_{i_0, i_1, \ldots, i_N}$ une telle fonction, où $i_0 = 0$ et, pour $0 \leqslant k \leqslant N - 1$, $i_{k+1} - i_k \in \{-1, 0, 1\}$, la valeur de cette fonction en x_k étant $\dfrac{i_k}{N}\cdot$ Par exemple pour $N = 4$ voici le graphe de $f_{0,1,1,0,0}$:



Il y a autant de telle fonctions que de listes $(i_0, i_1, \ldots, i_{\mathrm{N}})$, soit 3^{N} (car $i_0 = 0$ est fixé). Une telle fonction est nulle en 0, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux de dérivée comprise entre -1 et 1 : elle est donc 1-lipschitzienne et appartient à K.

Montrons que les boules ouvertes de centre $f_{i_0,i_1,\ldots,i_{\mathrm{N}}}$ et de rayon 3ε recouvrent K. Soit $f \in \mathrm{K}$. On a $|f(x_k)| = |f(x_k) - f(0)| \leqslant |x_k|$ et donc $|\mathrm{N}f(x_k)| \leqslant k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Posons $i_k = \mathrm{E}\,(\mathrm{N}f(x_k))$. On a donc $i_k \in [\![-k, k]\!]$. D'autre part, pour $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}-1$, on a

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant |x_{k+1} - x_k| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\cdot$$

Comme $\dfrac{i_k}{\mathrm{N}} \leqslant f(x_k) < \dfrac{i_k+1}{\mathrm{N}}$, on a $\dfrac{i_k-1}{\mathrm{N}} \leqslant f(x_{k+1}) < \dfrac{i_k+2}{\mathrm{N}}$ si bien que $i_{k+1} \in \{i_k - 1, i_k, i_k + 1\}$. Cela permet de définir $g = f_{i_0,i_1,\ldots,i_{\mathrm{N}}}$. On a, pour tout $k \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$, $|f(x_k) - g(x_k)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N}}\cdot$ On en déduit, pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| &\leqslant |f(x) - g(x)| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| \\ &\leqslant \frac{3}{\mathrm{N}},\end{aligned}$$

car f et g sont 1-lipschitziennes. On a donc $\|f - g\|_\infty \leqslant \dfrac{3}{\mathrm{N}} < 3\varepsilon$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K, par un nombre fini de boules de rayon ε. On a montré l'inégalité $\mathrm{N}(\mathrm{K}, 3\varepsilon) \leqslant 3^{\mathrm{N}}$ et donc $\ln(\ln \mathrm{N}(\mathrm{K}, 3\varepsilon)) \leqslant \ln \mathrm{N} + \ln(\ln 3)$. On peut prendre pour N le plus petit entier tel que $\dfrac{1}{\mathrm{N}} < \varepsilon$ à savoir $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. On a alors un majorant de $\ln(\ln \mathrm{N}(\mathrm{K}, 3\varepsilon)$ équivalent à $\dfrac{1}{\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$. On obtient ainsi un majorant de $\ln(\ln \mathrm{N}(\mathrm{K}, \varepsilon))$ équivalent à $\ln \dfrac{3}{\varepsilon}$ et donc à $\ln \dfrac{1}{\varepsilon}\cdot$

Il faut maintenant trouver un minorant équivalent. Reprenons notre réseau de fonctions $f_{i_0,i_1,\ldots,i_{\mathrm{N}}}$ avec $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Elles sont deux à deux distinctes et distantes d'au moins $\dfrac{1}{\mathrm{N}}$. Par conséquent, pour recouvrir K de boules de rayon $\dfrac{1}{3\mathrm{N}}$, il faut au moins 3^{N} boules puisque chaque boule ne peut contenir qu'au plus une fonction du réseau. Autrement dit, on a

$$\mathrm{N}\left(\mathrm{K}, \frac{\varepsilon}{3}\right) \geqslant \mathrm{N}\left(\mathrm{K}, \frac{1}{3\mathrm{N}}\right) \geqslant 3^{\mathrm{N}} \geqslant 3^{\mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Ainsi, on a la minoration

$$\ln \mathrm{N}(\mathrm{K}, \varepsilon) \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right) \ln 3 \quad \text{et}$$

$$\ln \ln \mathrm{N}(\mathrm{K},\varepsilon) \geqslant \ln \mathrm{E}\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right) + \ln \ln 3 \sim \ln\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right) \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

On conclut par théorème de comparaison $\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln(\ln \mathrm{N}(\mathrm{K},\varepsilon))}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1}$. ◁

2.15. Graphe d'une fonction höldérienne

Pour toute partie bornée A du plan $\mathbb{R}^2$ euclidien, on note $\mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules ouvertes de rayon $\varepsilon > 0$ nécessaires pour recouvrir A.

1. Trouver la meilleure constante γ telle que si A est une boule unité, il existe $k > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $\mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon) \geqslant k\varepsilon^\gamma$.

2. Soit $\beta \in]0,1]$. Démontrer qu'il existe $k > 0$ telle que pour tout $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ fonction β-höldérienne d'image Γ et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $\mathrm{N}(\Gamma,\varepsilon) \leqslant k\varepsilon^{-1/\beta}$.

3. En déduire que si $\beta > \frac{1}{2}$ l'image d'une fonction β-höldérienne $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est d'intérieur vide.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. D'après la première question de l'exercice 2.14 (dans le cas $n = 2$), on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon) \leqslant \left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\right)^2.$$

Ainsi $\mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon) \geqslant \varepsilon^{-2}$ et $\gamma = -2$ convient. Si $\gamma < -2$, alors de l'inégalité $\mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma} \leqslant \varepsilon^{-\gamma-2}(\varepsilon+2)^2$ on déduit $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma} = 0$ et $\mathrm{N}(\mathrm{A},\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}$ n'est pas minoré par une constante strictement positive. Ainsi γ ne convient pas : -2 est la plus petite constante γ possible, c'est-à-dire la meilleure (car l'application $\gamma \longmapsto \varepsilon^\gamma$ décroît).

2. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant c|x-y|^\beta.$$

Soit N un entier naturel non nul et $x_0 < x_1 < \cdots < x_{\mathrm{N}}$ la subdivision de $[0,1]$ régulière de pas $\frac{1}{\mathrm{N}}\cdot$ Pour tout $x \in [0,1]$, il existe $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$ tel que $|x - x_k| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$ et donc $\|f(x) - f(x_k)\| \leqslant \frac{c}{\mathrm{N}^\beta}\cdot$ Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a donc $\|f(x) - f(x_k)\| < \varepsilon$ si $\mathrm{N} > \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Si $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) + 1$, chaque élément $f(x)$ appartient à une boule de centre $f(x_k)$ et de rayon ε. On a donc $N(\Gamma, \varepsilon) \leqslant N$. Comme $N \underset{\varepsilon \to 0^+}{\sim} \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $\varepsilon^{\frac{1}{\beta}} N$ est majorée pour $\varepsilon \in]0,1[$ par une constante $k > 0$ et $N(\Gamma, \varepsilon) \leqslant k\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}$.

3. Supposons que l'intérieur de Γ n'est pas vide. Il existe donc une boule B de rayon $r > 0$ telle que $B \subset \Gamma$. Si B est de rayon r alors $\frac{1}{r}B$ est une boule unité et par homogénéité,

$$N(B, \varepsilon) = N\left(\frac{1}{r}B, \frac{\varepsilon}{r}\right) \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{-2} \geqslant r^2\varepsilon^{-2},$$

d'après la question 1. Par ailleurs il existe un réel $k > 0$ tel que

$$N(B, \varepsilon) \leqslant N(\Gamma, \varepsilon) \leqslant k\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}.$$

On a donc, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $r^2\varepsilon^{-2} \leqslant k\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}$, *i.e.* $\varepsilon^{\frac{1}{\beta}-2} \leqslant \frac{k}{r^2}$. Cela entraîne $\frac{1}{\beta} - 2 \geqslant 0$ et donc $\beta \leqslant \frac{1}{2}$, sinon le membre de gauche de l'inégalité tend vers $+\infty$ quand ε tend vers 0. La contraposée donne le résultat : si $\beta > \frac{1}{2}$, alors Γ est d'intérieur vide. $\lhd$

Dans un article de 1890, le mathématicien italien Giuseppe Peano décrit une courbe de $\mathbb{R}^2$ dont l'image est le carré $[0,1]^2$. Un an plus tard, Hilbert proposait une construction plus simple et donnait une première illustration. L'exercice suivant reprend en substance leur construction. Comme la fonction obtenue est $\frac{1}{2}$-höldérienne, elle fournit un contre-exemple au résultat de l'exercice précédent pour $\beta = \frac{1}{2}\cdot$ La démonstration utilise le théorème du point fixe (cf. page 159).

2.16. Courbe de Peano-Hilbert

Soit E l'ensemble des applications continues $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telles que $f(0) = (0,0)$ et $f(1) = (1,0)$. On considère les applications $A_1, A_2, A_3, A_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$\begin{aligned} A_1(x,y) &= \left(\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right), \quad A_2(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right), \\ A_3(x,y) &= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right), \quad A_4(x,y) = \left(1 - \frac{y}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour $t \in [0,1]$ et $f \in E$, on pose $Tf(t) = A_i(f(4t - i + 1))$, où $i \in [\![1,4]\!]$ est tel que $0 \leqslant 4t - i + 1 \leqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $Tf \in E$.

2. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, la suite $(\mathrm{T}^n f)$ converge pour la norme infinie vers un élément Φ de E indépendant de f.

3. Montrer que $\Phi([0,1]) = [0,1]^2$.

4. Soit $\| \ \|$ la norme de $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$. Prouver que

$$\forall (t,t') \in [0,1]^2, \quad \|\Phi(t) - \Phi(t')\| \leqslant 2\sqrt{|t-t'|}.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Si $t \in [0,1]$, l'entier i est tel que $4t \leqslant i \leqslant 4t+1$. On trouve un unique entier de $[\![1,4]\!]$, sauf si $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4} \cdot$ L'étude de la continuité de $\mathrm{T}f$ montrera que les deux expressions possibles de $\mathrm{T}f$ donnent la même valeur. Comme f et les A_i sont continues, il suffit de vérifier la continuité de $\mathrm{T}f$ en $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}f\left(\frac{1}{4}^-\right) &= \mathrm{A}_1(f(1^-)) = \mathrm{A}_1(1,0) = \left(0, \frac{1}{2}\right),\\
\mathrm{T}f\left(\frac{1}{4}^+\right) &= \mathrm{A}_2(f(0^+)) = \mathrm{A}_2(0,0) = \left(0, \frac{1}{2}\right),\\
\mathrm{T}f\left(\frac{1}{2}^-\right) &= \mathrm{A}_2(f(1^-)) = \mathrm{A}_2(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\\
\mathrm{T}f\left(\frac{1}{2}^+\right) &= \mathrm{A}_3(f(0^+)) = \mathrm{A}_3(0,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\\
\mathrm{T}f\left(\frac{3}{4}^-\right) &= \mathrm{A}_3(f(1^-)) = \mathrm{A}_3(1,0) = \left(1, \frac{1}{2}\right),\\
\mathrm{T}f\left(\frac{3}{4}^+\right) &= \mathrm{A}_4(f(0^+)) = \mathrm{A}_4(0,0) = \left(1, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

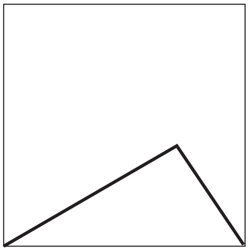
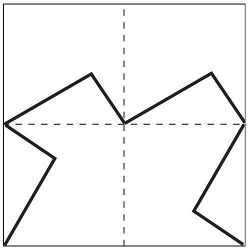
Ainsi $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0,1]$. On a de plus

$$\mathrm{T}f(0) = \mathrm{A}_1(f(0)) = \mathrm{A}_1(0,0) = (0,0) \ \text{ et}$$

$$\mathrm{T}f(1) = \mathrm{A}_4(f(1)) = \mathrm{A}_4(1,0) = (1,0)$$

donc $\mathrm{T}f \in \mathrm{E}$.

Pour la suite il est utile de visualiser l'action des applications affines A_i sur le carré $[0,1]^2$. Sur la figure suivante on a à gauche le graphe d'une fonction $f \in \mathrm{E}$ affine par morceaux et à droite la fonction T_f.

L'application A_1 est l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{2}$ composée avec la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$ et conduit à la partie inférieure gauche de la courbe T_f, A_2 est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ composée avec la translation de vecteur $(0, 1/2)$ et conduit au coin supérieure gauche, A_3 est la même homothétie composée avec la translation de vecteur $(1/2, 1/2)$ et enfin A_4 est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y + x = 1$ suivie de l'homothétie de centre $(1, 0)$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

2. On résout cette question en utilisant le théorème du point fixe. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \ \|$ définie par $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $C = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ de la norme de la convergence uniforme associée : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|f(t)\|$. On sait que C est complet et comme E est fermé dans C, il en est de même de E. Les fonctions A_i sont toutes $\frac{1}{2}$-lipschitziennes pour la norme $\| \ \|$ de $\mathbb{R}^2$. Il en est de même pour T. En effet, pour $(f, g) \in E^2$, $t \in [0, 1]$ et i tel que $0 \leqslant 4t - i + 1 \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\|Tf(t) - Tg(t)\| &= \|A_i(f(4t - i + 1)) - A_i(g(4t - i + 1))\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|f(4t - i + 1) - g(4t - i + 1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|Tf - Tg\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$. L'application T étant contractante et E complet, il résulte du théorème du point fixe que T possède un unique point fixe $\Phi \in E$ et que la suite $(T^n f)_{n\geqslant 0}$ converge vers Φ quel que soit le choix de f.

On peut éviter le recours au théorème du point fixe (qui n'est pas au programme des classes préparatoires) en constatant que

$$\|T^{n+1}f - T^n f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|T^n f - T^{n-1}f\|_\infty \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}\|Tf - f\|_\infty.$$

La série $\sum(T^{n+1}f - T_n f)$ *est normalement convergente à valeurs dans un espace complet : elle converge donc uniformément vers une fonction continue. Il s'ensuit que* $T^n f$ *converge vers une fonction* $\Phi \in E$ *et comme*

$\|T^n f - T^n g\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^n}\|f-g\|_\infty$, *par passage à la limite, il vient que* Φ *est indépendante du choix de* f *dans* E.

3. Il est clair que pour tout i, $A_i([0,1]^2) \subset [0,1]^2$. On en déduit que si $\mathrm{Im}\, f \subset [0,1]^2$ (on peut prendre $f : t \longmapsto (t,0)$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, T^n f \subset [0,1]^2$ et comme $[0,1]^2$ est fermé, on en déduit par passage à la limite, $\mathrm{Im}\,\Phi \subset [0,1]^2$. Montrons maintenant que tout élément de $[0,1]$ est dans $\mathrm{Im}\,\Phi$.

Les couples de la forme $\left(\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{\ell}{2^n}\right)$, où $0 \leqslant k, \ell \leqslant 2^n$ sont denses dans $[0,1]^2$. En effet, si $(x,y) \in [0,1]^2$, $n \in \mathbb{N}$ et $(k,\ell) = (\mathrm{E}(x2^n), \mathrm{E}(y2^n))$, on a $\left\|(x,y) - \left(\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{\ell}{2^n}\right)\right\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$ Posons

$$C_n = \left\{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{\ell}{2^n}\right),\ \ 0 \leqslant k, \ell \leqslant 2^n\right\}.$$

On choisit f telle que $\mathrm{Im}\, f$ contienne $C_0 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. On montre qu'alors $\mathrm{Im}\, T^n f$ contient C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence. On suppose la propriété vraie au rang n. Si $g \in$ E et $z \in \mathrm{Im}\, g$, il existe $t \in [0,1]$ tel que $z = g(t)$. Pour $i \in [\![1,4]\!]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $u = \dfrac{t+i-1}{4}$ et donc $t = 4u - i + 1$. On a donc

$$A_i(z) = A_i(g(t)) = A_i(g(4u-i+1)) = Tg(u)$$

et $A_i(z) \in \mathrm{Im}\, Tg$. Par hypothèse $\mathrm{Im}\, T^n f$ contient C_n, donc $\mathrm{Im}\, T^{n+1} f$ contient les ensembles $A_i(C_n)$, c'est-à-dire contient, pour $0 \leqslant k, \ell \leqslant 2^n$,

$$\left(\frac{\ell}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^{n+1}}\right), \left(\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{\ell+2^n}{2^{n+1}}\right), \left(\frac{k+2^n}{2^{n+1}}, \frac{\ell+2^n}{2^{n+1}}\right) \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{2^{n+1}-\ell}{2^{n+1}}, \frac{2^n-k}{2^{n+1}}\right).$$

Or il est clair que tout élément $\left(\dfrac{k'}{2^{n+1}}, \dfrac{\ell'}{2^{n+1}}\right)$ peut s'écrire sous l'une de ces quatre formes selon que $k', \ell' \leqslant 2^n$, $k' \leqslant 2^n \leqslant \ell'$, $k', \ell' \geqslant 2^n$ ou $\ell' \leqslant 2^n \leqslant k'$. Ainsi $\mathrm{Im}\, T^{n+1} f$ contient C_{n+1}, ce qui termine la récurrence.

Soit alors $z \in [0,1]^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in C_n$, tel que $\|z - z_n\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$ Comme $C_n \subset \mathrm{Im}\, T_n f$, il existe $t_n \in [0,1]$ tel que $z_n = T^n f(t_n)$. On a donc $\|z - T^n f(t_n)\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$ On en déduit

$$\|z - \Phi(t_n)\| \leqslant \|\Phi(t_n) - T^n f(t_n)\| + \frac{1}{2^n} \leqslant \|\Phi - T_n f\|_\infty + \frac{1}{2^n}\cdot$$

Donc la suite $(\Phi(t_n))$ converge vers z. De la suite (t_n) du compact $[0,1]$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers t. On a donc, puisque Φ est continue, $z = \Phi(t)$. On conclut que $\operatorname{Im}\Phi = [0,1]^2$.

4. Cette question est assez délicate. On va d'abord montrer le caractère 1/2-höldérien pour les nombres rationnels de la forme $\dfrac{k}{4^n}$ avec $0 \leqslant k < 4^n$ et on terminera avec un argument de densité. En effet, il est possible de calculer les images par Φ de ces nombres. Soit $t = \dfrac{k}{4^n} \in [0,1[$. On écrit t en base 4 sous la forme $t = 0,a_1 \dots a_n$ où les a_i sont dans $\{0,1,2,3\}$. Si $t \in [0,1/4[$ alors $a_1 = 0$ et, comme Φ est point fixe de T, on a $\Phi(t) = \mathrm{A}_1(\Phi(4t))$ avec $4t = 0,a_2 \dots a_n$. Si $t \in [1/4,1/2[$ alors $a_1 = 1$ et on a $\Phi(t) = \mathrm{A}_2(\Phi(4t-1))$ avec $4t-1 = 0,a_2 \dots a_n$ et c'est pareil dans les deux cas restants. On a donc la formule suivante pour n quelconque et $0 \leqslant k < 4^n$:

$$\Phi(0,a_1a_2 \dots a_n) = (\mathrm{A}_{a_1+1} \circ \mathrm{A}_{a_2+1} \circ \dots \circ \mathrm{A}_{a_n+1})(0,0).$$

La formule est vraie même si tous les a_i sont nuls puisque A_1 fixe l'origine et $\Phi(0) = (0,0)$. De la même manière on peut ajouter des décimales nulles après a_n et la formule reste exacte. Prenons maintenant deux rationnels 4-adiques t et t' dans $[0,1[$. On écrit $t = 0,a_1a_2 \dots a_n$ et $t' = 0,b_1b_2 \dots b_n$ en prenant le même n quitte à ajouter des 0 comme on vient de l'expliquer. Supposons $t \neq t'$ et soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq b_p$. On est alors certain que $|t-t'| \geqslant \dfrac{1}{4^p}$. Posons $\mathrm{M} = (\mathrm{A}_{a_{p+1}+1} \circ \dots \circ \mathrm{A}_{a_n+1})(0,0)$ et $\mathrm{N} = (\mathrm{A}_{b_{p+1}+1} \circ \dots \circ \mathrm{A}_{b_n+1})(0,0)$. Ce sont deux points du carré a priori quelconques. On a alors, comme toutes les fonctions A_i sont $\dfrac{1}{2}$-lipschitziennes,

$$\|\Phi(t') - \Phi(t)\| \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}\|\mathrm{M}-\mathrm{N}\| \leqslant \frac{1}{2^{p-1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{4^p}} \leqslant 2\sqrt{|t'-t|}.$$

Les rationnels 4-adiques formant un ensemble dense dans $[0,1]$ et Φ étant continue on a alors $|\Phi(t') - \Phi(t)| \leqslant 2\sqrt{|t'-t|}$ pour tout $(t,t') \in [0,1]^2$ et Φ est 1/2-höldérienne. $\triangleleft$

L'exercice suivant est l'occasion d'introduire la propriété de Borel-Lebesgue qui, dans les espaces vectoriels normés, équivaut à la définition séquentielle de la compacité.

2.17. Propriété de Borel-Lebesgue

Déterminer les ouverts U de R^n vérifiant la propriété suivante : quelle que soit la suite de fermés emboîtés d'intersection incluse dans U, il existe un rang à partir duquel les fermés sont inclus dans U.
(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Nous allons montrer que les ouverts cherchés sont ceux dont le complémentaire $\mathrm{K} = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{U}$ est compact.

• Supposons K est compact et considérons une suite (F_n) décroissante de fermés telle que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n \subset \mathrm{U}$, *i.e.* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{F}_n \cap \mathrm{K}) = \emptyset$. Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n \cap \mathrm{K} \neq 0$ et choisissons un élément x_n dans chaque ensemble $\mathrm{F}_n \cap \mathrm{K}$. La suite (x_n) est une suite du compact K. On peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in \mathrm{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \geqslant n$, on a $x_{\varphi(p)} \in \mathrm{F}_{\varphi(p)} \subset \mathrm{F}_{\varphi(n)}$ et comme $\mathrm{F}_{\varphi(n)}$ est fermé, $x \in \mathrm{F}_{\varphi(n)}$. On a donc $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_{\varphi(n)}$, *i.e.* $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n$. En effet ces ensembles sont égaux : une inclusion est évidente et l'autre résulte de l'inclusion de $\mathrm{F}_{\varphi(n)}$ dans F_n. De plus, $x \in \mathrm{K}$, donc $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{F}_n \cap \mathrm{K})$, ce qui contredit l'hypothèse. Il existe donc n_0 tel que $\mathrm{F}_{n_0} \cap \mathrm{K} = \emptyset$, *i.e.* $\mathrm{F}_{n_0} \subset \mathrm{U}$. *A fortiori*, $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{U}$ pour tout $n \geqslant n_0$.

• Supposons que la propriété est vérifiée et considérons une suite (x_n) d'éléments de K. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n = \overline{\{x_k,\ k \geqslant n\}}$. Alors, comme $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{K}$ et K fermé, on a $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{K}$. La suite (F_n) est décroissante. Si $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n = \emptyset \subset \mathrm{U}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{U}$ et comme $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{K}$, $\mathrm{F}_n = \emptyset$. C'est manifestement faux. Donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n \neq \emptyset$ et comme $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n), celle-ci possède une valeur d'adhérence et K est compact. ◁

Sans changement, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ *par un espace vectoriel normé quelconque. La propriété de l'énoncé équivaut à : pour toute suite de fermés dont l'intersection est incluse dans* U, *il existe une intersection d'un nombre fini de ces fermés qui est incluse dans* U. *Pour le voir, il suffit de remplacer la suite de fermés quelconque* (F_n) *par la suite décroissante* (G_n) *définie par* $\mathrm{G}_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k$. *On en effet* $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_k = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{G}_k$. *En prenant le complémentaire, on voit que la propriété peut encore* *s'énoncer : si* K *est recouvert par une suite dénombrable d'ouverts, il est recouvert par un nombre fini de ces ouverts. On peut démontrer qu'en fait un compact* K *vérifie la propriété plus générale suivante (propriété de Borel-Lebesgue) : si* K *est recouvert par une famille* $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *d'ouverts, il est recouvert par un nombre fini de ces ouverts.*

Dans un espace vectoriel normé, les compacts sont les ensembles qui vérifient la propriété de Borel-Lebesgue.

Les exercices suivants sont consacrés à la convexité. Le lecteur trouvera aussi quelques énoncés sur ce thème dans le tome 3 d'algèbre (exercices 4.44 à 4.47). Les premiers font simplement appel à la définition de la convexité et aux notions topologiques générales.

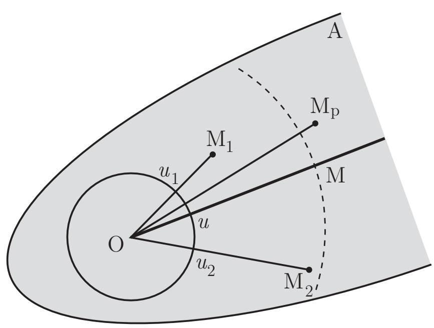
2.18. Un convexe non borné contient une demi-droite

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé non borné et convexe. Montrer que A contient une demi-droite.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Quitte à translater A on peut supposer que $\mathrm{O} \in \mathrm{A}$. On va montrer que A contient alors une demi-droite d'origine O. Comme A n'est pas borné, pour tout entier $p \geqslant 1$ il existe un point M_p de A tel que $\mathrm{OM}_p \geqslant p$. Par convexité tout le segment $[\mathrm{OM}_p]$ est inclus dans A. Notons u_p le vecteur unitaire (pour la norme euclidienne) positivement colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}_p}$. La suite $(u_p)_{p\geqslant 1}$ est dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, sphère qui est compacte. Elle admet donc une valeur d'adhérence u. On va montrer que la demi-droite $\mathrm{O} + \mathbb{R}_+ u$ est incluse dans A. Voici une figure dans le cas du plan :



On note $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $u_{\varphi(p)}$ converge vers u. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{O} + \lambda u$ un point de la demi-droite ($\lambda \in \mathbb{R}_+$). La suite de point

$O + \lambda u_{\varphi(p)}$ converge vers M et ces points sont tous dans A pour p assez grand. Comme A est supposé fermé, $M \in A$. ◁

Le lecteur pourra montrer que le résultat reste vrai si A *n'est pas fermé. On peut aussi noter que le résultat devient faux en dimension infinie : il suffit de prendre pour* A *l'enveloppe convexe d'une suite libre* $(e_n)_{n\geqslant 0}$*, avec* $\|e_n\|$ *qui tend vers l'infini.*

2.19. Segment intérieur à un convexe

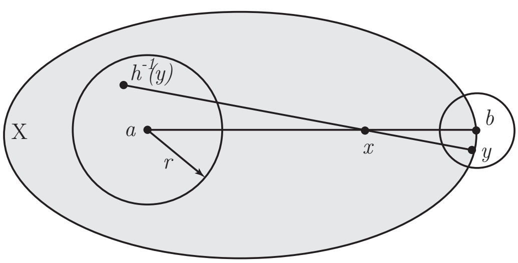
Soit X une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.

(**École polytechnique**)

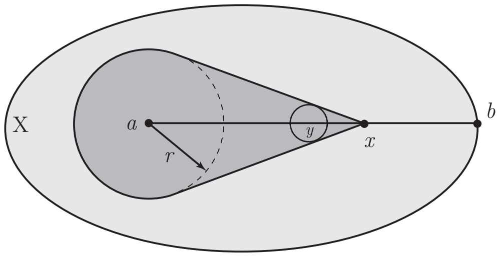
▷ **Solution.**

On commence par choisir une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$, par exemple la norme euclidienne usuelle. Comme l'adhérence de X est aussi convexe, on peut déjà affirmer que $[a, b] \subset \overline{X}$.

Montrons tout d'abord que $[a, b[\subset X$. Par hypothèse, on peut choisir $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset X$. Soit $x \in]a, b[$ que l'on écrit $x = (1-t)a + tb$ avec $t \in]0, 1[$. L'homothétie h de centre x et de rapport $\dfrac{t-1}{t}$ envoie a sur b. L'image par h de $B(a, r)$ est la boule $B\left(b, \dfrac{1-t}{t} r\right)$. Comme b est adhérent à X, cette boule contient au moins un point y de X. Mais alors, x est sur le segment joignant y et $h^{-1}(y) \in B(a, r)$. Par convexité de X, $x \in X$.



Il est alors clair que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X. En effet, si $y \in]a, b[$, on considère $x \in]y, b[$ et l'homothétie h' de centre x qui transforme a en y. L'image de $B(a, r)$ est une boule ouverte de centre y incluse dans X, car tout point de cette boule est sur le segment qui joint x à un point de $B(a, r)$.



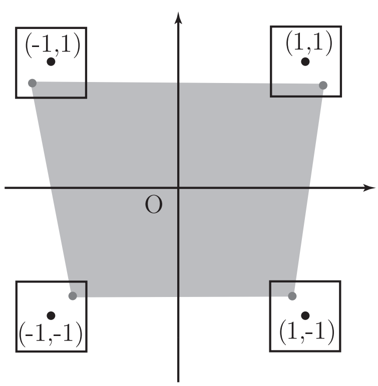
D'où le résultat. ◁

2.20. Partie convexe dense

> Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe et dense. Montrer que $X = \mathbb{R}^n$.
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons que le résultat est évident pour $n = 1$: une partie convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle et le seul intervalle dense dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ lui-même. Revenons au cas général et considérons un point M quelconque de $\mathbb{R}^n$. On veut montrer que $M \in X$. Quitte à translater la partie X on peut supposer que M est l'origine. Considérons les 2^n points $A_\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ où les ε_k valent ± 1. Ils forment un hypercube de centre l'origine. Ces points ne sont pas forcément dans X mais par densité de X on peut trouver des points B_ε à distance inférieure à $\frac{1}{4}$ de A_ε (pour la norme infinie). Comme le laisse penser la figure suivante en dimension 2 on va prouver que l'origine est combinaison convexe des points B_ε :



On raisonne par récurrence sur n en démontrant l'assertion suivante : si pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ on dispose d'un point B_ε dont la

k-ième coordonnée a le signe de ε_k pour tout k, alors l'enveloppe convexe des B_ε contient l'origine.

Le résultat est clair pour $n = 1$. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ des signes quelconques. Le point $\mathrm{B}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)}$ a sa dernière coordonnées strictement positive (et les autres coordonnées ont le signe des ε_k). De même le point $\mathrm{B}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,-1)}$ a sa dernière coordonnées strictement négative. Il existe donc $t \in]0,1[$ tel que le point

$$\mathrm{C}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})} = (1-t)\mathrm{B}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)} + t\mathrm{B}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,-1)}$$

ait sa dernière coordonnée nulle, les autres coordonnées ayant gardé les signes des ε_k.

Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux points $\mathrm{C}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})}$ sans tenir compte de la dernière coordonnée : l'origine est une combinaison convexe des $\mathrm{C}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})}$ donc aussi des $\mathrm{B}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}$ par associativité. $\triangleleft$

Notons que le résultat devient faux en dimension infinie : un sous-espace vectoriel strict, qui est évidemment convexe, peut être dense. C'est par exemple le cas du sous-espace des fonctions polynômes dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ *d'après le théorème de Weierstrass.*

Dans les exercices suivants on pourra être amené à utiliser le théorème de projection sur un convexe fermé. Rappelons ce résultat très important que le lecteur trouvera dans le tome 3 d'algèbre (exercice 1.43) pour le cas euclidien et au chapitre suivant (exercice 3.17) pour le cas d'un espace de Hilbert. Soit E *un espace euclidien et* K *une partie non vide, convexe et fermée de* E*. Pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *il existe un unique point* $p(x) \in \mathrm{K}$*, appelé projeté orthogonal de* x *sur* K*, tel que* $d(x, \mathrm{K}) = \|x - p(x)\|$*. De plus, on a* $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0$ *pour tout* $y \in \mathrm{K}$*. En particulier si* $x \notin \mathrm{K}$ *l'hyperplan affine* H *passant par* $p(x)$ *et de vecteur normal* $x - p(x)$ *sépare* K *et* x *:* K *est entièrement contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par cet hyperplan (et* x *est dans l'autre demi-espace ouvert). On dit que* H *est un hyperplan d'appui en* $p(x)$*. L'énoncé ci-après démontre l'existence d'un hyperplan d'appui en tout point de la frontière d'un convexe fermé.*

2.21. Hyperplan d'appui

Soit E un espace euclidien et C un convexe fermé non vide de E. On note p la projection sur C.

1. Montrer que p est continue.

2. Soit c un point de la frontière de C. Montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de C en c, c'est-à-dire un hyperplan affine H de E passant par c tel que C soit contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par H.

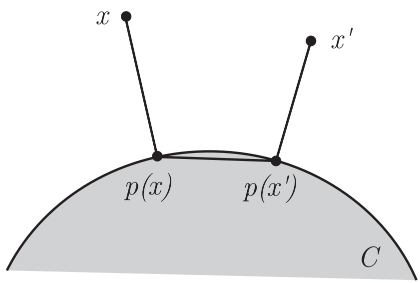
(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit x, x' deux points distincts de E. On a :

$$\begin{aligned} \|p(x) - p(x')\|^2 &= \langle p(x) - x + x - x' + x' - p(x'), p(x) - p(x') \rangle \\ &= \langle p(x) - x, p(x) - p(x') \rangle + \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle \\ &\quad + \langle p(x') - x', p(x') - p(x) \rangle. \end{aligned}$$

Nous savons que le premier et le troisième produit scalaire sont négatifs.



Donc, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\|p(x) - p(x')\|^2 \leqslant \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle \leqslant \|x - x'\| \|p(x) - p(x')\|$$

et finalement $\|p(x) - p(x')\| \leqslant \|x - x'\|$. La fonction p est 1-lipschitzienne donc continue sur E.

2. Soit c un point de la frontière de C. Ce point est adhérent à $\mathrm{E} \setminus \mathrm{C}$ donc on peut se donner une suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{C}$ qui converge vers c. Par continuité de p la suite $p(x_k)$ converge vers $p(c) = c$ et en chacun des points $p(x_k)$ on dispose d'un hyperplan d'appui (voir la remarque précédent l'exercice). On note $u_k = \dfrac{x_k - p(x_k)}{\|x_k - p(x_k)\|}$ un vecteur unitaire normal à cet hyperplan. La suite $(u_k)_{k \geqslant 0}$ est dans la sphère unité de E qui est compacte. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi(k)})_{k \geqslant 0}$. Notons u sa limite et H l'hyperplan affine d'équation $\langle u, x \rangle = \langle u, c \rangle$. Cet hyperplan affine contient c. On va montrer qu'il s'agit d'une hyperplan d'appui en c de C. Soit $z \in \mathrm{C}$. Pour tout entier k on a $\langle u_{\varphi(k)}, z - p(x_{\varphi(k)}) \rangle \leqslant 0$. Or $p(x_{\varphi(k)})$ tend vers $p(c)$ par continuité de p.

Donc par passage à la limite $\langle u, z-p(c)\rangle \leqslant 0$ et $\langle u, z\rangle \leqslant \langle u, c\rangle$. Ceci vaut pour tout z de C. Donc C est inclus dans un des demi-espaces fermés délimités par H et H est un hyperplan d'appui. $\triangleleft$

Notons qu'il n'y a pas forcément unicité de l'hyperplan d'appui en un point (prendre par exemple pour c l'un des sommets d'un carré dans le plan). On peut aussi obtenir le résultat de la seconde question à l'aide du théorème de Hahn-Banach dans sa forme géométrique.

Ce résultat est utilisé dans la preuve du théorème de Krein-Milman qui suit (les deux exercices sont extraits du problème posé aux ENS en 1996).

2.22. Théorème de Krein-Milman

Soit E un espace euclidien et K un convexe compact non vide de E. Un point a de K est dit extrémal lorsque $\mathrm{K} \setminus \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de K.

1. Soit $a \in \mathrm{K}$. On suppose que a est dans un hyperplan d'appui H de K. Montrer que a est un point extrémal de K si, et seulement si, a est un point extrémal du convexe compact $\mathrm{K} \cap \mathrm{H}$.

2. Montrer que K est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Notons que $\mathrm{K} \cap \mathrm{H}$ est non vide (il contient a), convexe en tant qu'intersection de deux convexes et compact comme intersection du compact K et de l'hyperplan H qui est fermé.

• Supposons que a est un point extrémal de K. Alors $\mathrm{K} \setminus \{a\}$ est convexe, donc $(\mathrm{K} \setminus \{a\}) \cap \mathrm{H} = (\mathrm{K} \cap \mathrm{H}) \setminus \{a\}$ aussi comme intersection de deux convexes. Par conséquent a est un point extrémal de $\mathrm{K} \cap \mathrm{H}$.

• Réciproquement, supposons que a est un point extrémal de $\mathrm{K} \cap \mathrm{H}$. Soient u et v dans K tels que $a = \dfrac{u+v}{2}\cdot$ On veut montrer que $u = v = a$. Soit φ une forme linéaire sur E telle que H ait pour équation $\varphi(x) = \lambda$. Comme K est contenu dans un demi-espace fermé délimité par H, on a par exemple $\varphi(u) \leqslant \lambda$ et $\varphi(v) \leqslant \lambda$. Mais comme $\varphi(a) = \dfrac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2} = \lambda$ on a forcément $\varphi(u) = \varphi(v) = \lambda$: u et v sont dans $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$ et par suite $u = v = a$.

2. On montre le résultat par récurrence sur la dimension p du sous-espace affine engendré par K. Si $p = 0$, alors K est un singleton et le résultat est vrai. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $p-1$ et on se donne un convexe compact K qui engendre un sous-espace affine de dimension p. Quitte à translater K et à remplacer E par un sous-espace vectoriel on peut supposer que $p = \dim \mathrm{E}$. Soit $c \in \mathrm{K}$. On cherche à écrire c comme barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de K. Distinguons deux cas :

• Si c est sur la frontière de K, l'exercice précédent assure l'existence d'un hyperplan d'appui H de K en c. On pose $\mathrm{K}' = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}$. Il s'agit d'un convexe compact qui engendre un sous-espace affine de dimension $\leqslant p-1$ auquel on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. Comme les points extrémaux de K' sont des points extrémaux de K d'après la question précédente, on a terminé.

• Si c est intérieur à K on considère D une droite quelconque qui passe par x. L'intersection de D et de K est une partie convexe de D qui est en plus compacte (car D est fermée). Il s'agit donc d'un segment $[a, b]$. Les points a, b sont clairement sur la frontière de K et on peut leur appliquer le cas précédent. Par associativité, c est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux. $\triangleleft$

Notons que le dernier argument montre immédiatement que K *est l'enveloppe convexe de sa frontière. Cette question plus simple a été aussi proposée à l'oral de l'École polytechnique.*

L'exercice suivant est très long et certains candidats ont pu se voir poser seulement la première question. On y utilise encore le résultat sur les hyperplans d'appui dans la question 3, mais on peut légitimement penser que le candidat a pu se servir du résultat sans avoir à le redémontrer.

2.23. Diamètres d'un convexe compact plan

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide.

1. Soit O un point intérieur à K. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, 2π-périodique, telle qu'en coordonnées polaires de centre O, K est l'ensemble $\{\mathrm{M}(\rho, \theta),\ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}$. Montrer que f est continue.

2. Soit $g : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^\pi g(x) \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi g(x) \sin x \,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que g s'annule au moins deux fois dans $]0, \pi[$.

3. Montrer que le centre de gravité G de K est intérieur à K.

4. Montrer que G est le milieu d'au moins trois « diamètres » de K (c'est-à-dire trois segments joignant deux points de la frontière).

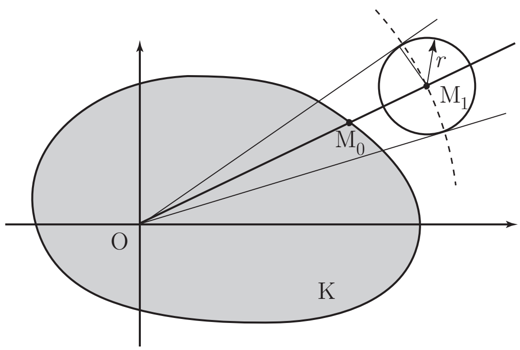
(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On considère un repère orthonormal de centre O. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ et d_θ la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_\theta}$. L'intersection de K et de d_θ est un convexe compact de la droite donc un segment d'origine O. Il n'est pas réduit au singleton $\{O\}$ car O est intérieur à K. On note $f(\theta)$ sa longueur. On obtient une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, 2π-périodique. Un point M de la demi-droite d_θ appartient à K si et seulement si $OM \leqslant f(\theta)$. Ainsi K est bien l'ensemble des points $M(\rho, \theta)$ vérifiant $0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)$.

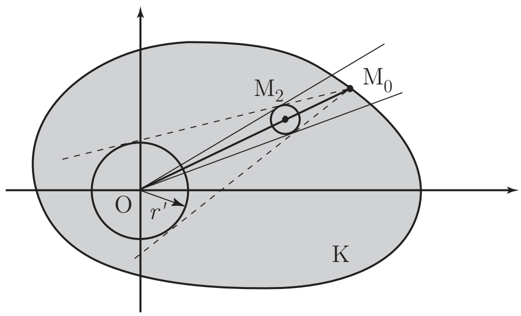
Montrons maintenant que f est continue. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$, M_0 le point de coordonnées polaires $(\theta_0, f(\theta_0))$ et $\varepsilon \in \,]0, f(\theta_0)[$.

Le point M_1 de coordonnées polaires $(\theta_0, f(\theta_0) + \varepsilon)$ n'appartient pas à K. Comme le complémentaire de K est ouvert, il existe $r > 0$ tel que si $M_1M \leqslant r$ alors $M \notin K$. La figure suivante laisse penser que $f(\theta)$ ne va pas pouvoir être beaucoup plus grand que $f(\theta_0)$ pour θ proche de θ_0.



Précisons cela. Les tangentes issues de O au cercle de centre M_1 et de rayon r, font avec la droite d_{θ_0} un angle α. Si $|\theta - \theta_0| \leqslant \alpha$, la droite d_θ rencontre le cercle de centre M_1 et de rayon r en un point qui est à une distance de O inférieure à $OM_1 = f(\theta_0) + \varepsilon$ et qui n'appartient pas à K. On a donc $f(\theta) \leqslant f(\theta_0) + \varepsilon$.

On va procéder de même pour obtenir une minoration de $f(\theta)$. On utilise cette fois le fait que le point O est intérieur à K. Il existe donc $r' \in \,]0, f(\theta_0)[$ tel que K contienne le disque de centre O et de rayon r'. Comme $0 < \dfrac{\varepsilon}{f(\theta_0)} < 1$, l'image de ce disque pas l'homothétie de centre M_0 et de rapport $\dfrac{\varepsilon}{f(\theta_0)}$ est inclus dans K. Son centre est M_2 de coordonnées polaires $(\theta_0, f(\theta_0) - \varepsilon)$ et son rayon r'' est inférieur ou égal à ε.



Les tangentes issues de O au cercle de centre M_2 et de rayon r'' font avec la droite d_{θ_0} un angle β. Si $|\theta - \theta_0| \leqslant \beta$, la droite d_θ rencontre le cercle de centre M_2 et de rayon r'' en un point qui est à une distance de O supérieure à OM_2 et donc supérieure à $f(\theta_0) - \varepsilon$, et qui appartient à K. On a donc $f(\theta) \geqslant f(\theta_0) - \varepsilon$.

On obtient, pour $|\theta - \theta_0| \leqslant \max(\alpha, \beta)$, $|f(\theta_0) - f(\theta)| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre la continuité de f.

2. Cette question est très classique et le lecteur en trouvera une généralisation dans l'exercice 4.4. du tome 2 d'analyse. Si g gardait un signe constant sur $]0, \pi[$, il en serait de même de $g \times \sin$ et $\int_0^\pi g(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ ne pourrait être nul. Donc g s'annule au moins une fois sur $]0, \pi[$. Supposons que g ne s'annule qu'une fois sur $]0, \pi[$ en un point α. D'après ce qui précède elle change nécessairement de signe en α. Mais alors la fonction $x \longmapsto g(x)\sin(x - \alpha)$ garde un signe constant sur $]0, \pi[$ et ne s'annule qu'en α. On en déduit que $\int_0^\pi g(x)\sin(x-\alpha)\,\mathrm{d}x \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse puisque

$$\int_0^\pi g(x)\sin(x-\alpha)\,\mathrm{d}x = \cos\alpha \int_0^\pi g(x)\sin x\,\mathrm{d}x - \sin\alpha \int_0^\pi g(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

3. Supposons par l'absurde que G n'est pas intérieur à K. Il est donc extérieur à K ou sur la frontière de K. Dans les deux cas on peut trouver une droite D passant par G telle que K soit contenu dans l'un des demi-plans fermé délimité par D. Dans un repère centré en G bien choisi $R = (G, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tous les points de K ont une ordonnée positive et comme K est d'intérieur non vide il existe un disque ouvert $D \subset K$ sur lequel l'ordonnée est strictement positive. On a donc $\iint_K \langle \overrightarrow{GM}, v\rangle \geqslant \iint_D \langle \overrightarrow{GM}, v\rangle > 0$ ce qui contredit la définition de G.

4. Puisque G appartient à l'intérieur de K, on peut appliquer les résultats de la première question avec $O = G$. Le point G est milieu d'un segment joignant deux points de la frontière de K s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $f(\theta+\pi)=f(\theta)$. On cherche trois diamètres différents et donc trois solutions de cette équation différentes modulo π.

Par définition de G, on a $\iint_K \overrightarrow{\mathrm{GM}}=0$, ce qui en coordonnées polaires donne $\int_0^{2\pi}\int_0^{f(\theta)} \overrightarrow{\mathrm{GM}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=0$. En séparant les deux coordonnées, on obtient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{f(\theta)} \rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=0$$

et de même $\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=0$. Pour utiliser la question précédente, on se ramène à l'intervalle $[0,\pi]$ en coupant ces intégrales en deux en π et en faisant dans la deuxième intégrale obtenue le changement de variable $x=\theta-\pi$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi} f^3(x+\pi)\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi}\Big(f^3(\theta)-f^3(\theta+\pi)\Big)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta=0.\end{aligned}$$

Avec la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_0^{\pi}\Big(f^3(\theta)-f^3(\theta+\pi)\Big)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=0.$$

D'après la question précédente, l'équation $f^3(\theta)-f^3(\theta+\pi)=0$, *i.e.* $f(\theta+\pi)=f(\theta)$ possède au moins deux solutions distinctes sur $]0,\pi[$. Pour en trouver une troisième, nommons α une des solutions et considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x+\alpha)$. Par un changement de variable, on obtient, puisque les fonctions sont 2π-périodiques,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} g^3(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f^3(x+\alpha)\cos x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f^3(\theta)\cos(\theta-\alpha)\,\mathrm{d}\theta\\ = \cos\alpha\int_0^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &+ \sin\alpha\int_0^{2\pi} f^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=0\end{aligned}$$

et de même $\int_0^{2\pi} g^3(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0$. En procédant comme précédemment pour f, on en déduit

$$\int_0^{\pi}\Big(g^3(x)-g^3(x+\pi)\Big)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\Big(g^3(x)-g^3(x+\pi)\Big)\sin x\,\mathrm{d}x=0.$$

Ainsi l'équation $g(x+\pi)=g(x)$, *i.e.* $f(x+\alpha+\pi)=f(x+\alpha)$ possède deux solutions distinctes β et γ sur $]0,\pi[$ et l'équation $f(x+\pi)=f(x)$ possède trois solutions α, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\gamma$ distinctes modulo π. $\triangleleft$

L'énoncé suivant concerne encore les compacts convexes du plan. On y utilisera encore les propriétés de la projection sur un convexe compact (cf. page 99).

2.24. Formule de Steiner-Minkowski en dimension 2

Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^2$ euclidien et $\delta > 0$. On pose

$$\mathrm{K}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^2,\ d(x, \mathrm{K}) \leqslant \delta\}.$$

1. Montrer que K_δ est un convexe compact.

2. On suppose désormais que $\partial\mathrm{K}$ est paramétré par un arc simple de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer l'aire de K_δ.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, la fonction $y \longmapsto \|x - y\|$ est continue (elle est même 1-lipschitzienne) et nous savons qu'elle atteint son minimum sur le compact K en un unique point $p(x)$. Soient x et x' dans K_δ, $\lambda \in [0, 1]$. Comme K est convexe, $\lambda p(x) + (1 - \lambda)p(x')$ appartient à K et

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1 - \lambda)x', \mathrm{K}) &\leqslant \|(\lambda x + (1 - \lambda)x') - (\lambda p(x) + (1 - \lambda)p(x'))\| \\ &\leqslant \lambda\|x - p(x)\| + (1 - \lambda)\|x' - p(x')\| \\ &\leqslant \lambda\delta + (1 - \lambda)\delta = \delta. \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda x + (1 - \lambda)x'$ appartient à K_δ et K_δ est bien convexe.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de K_δ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^2$. La fonction $x \longmapsto d(x, \mathrm{K})$ est continue puisque 1-lipschitzienne. On a donc

$$d(x, \mathrm{K}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, \mathrm{K}) \leqslant \delta,$$

car $d(x_n, \mathrm{K}) \leqslant \delta$ pour tout entier n. On en déduit que x appartient à K_δ qui est donc fermé.

Enfin K est borné : il existe $k > 0$ tel que $\|y\| \leqslant k$ pour tout $y \in \mathrm{K}$. Pour tout $x \in \mathrm{K}_\delta$, on a alors

$$\|x\| \leqslant \|p(x)\| + \|x - p(x)\| \leqslant k + \delta.$$

L'ensemble K_δ est donc borné. C'est un fermé borné et donc un compact de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble K_δ *est appelé un* voisinage tubulaire *du compact* K.

2. Pour nous donner une idée du résultat, considérons le cas où K est un disque de rayon R. La frontière de K est alors un cercle de longueur $\mathrm{L} = 2\pi\mathrm{R}$. Le compact K_δ est un disque de rayon $\mathrm{R} + \delta$ et on a

$$\mathcal{A}(\mathrm{K}_\delta) = \pi(\mathrm{R} + \delta)^2 = \pi\mathrm{R}^2 + 2\pi\mathrm{R}\delta + \pi\delta^2 = \mathcal{A}(\mathrm{K}) + \mathrm{L}\delta + \pi\delta^2.$$

Nous allons montrer que la formule est la même dans le cas général.

Nous supposons que l'arc $\partial \mathrm{K}$ est régulier et choisissons un paramétrage normal $\mathrm{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de $\partial \mathrm{K}$, L-périodique, où L est la longueur de $\partial \mathrm{K}$. Nous admettrons que si K est convexe, alors en tout point $m \in \partial \mathrm{K}$, la courbe $\partial \mathrm{K}$ est tout entière d'un seule côté de la tangente à $\partial \mathrm{K}$ en m et qu'on peut choisir le paramétrage F pour qu'elle soit toujours à gauche de cette tangente orientée par $\mathrm{F}'(s)$. D'après l'exercice 2.22, K est inclus dans l'enveloppe convexe de $\partial \mathrm{K}$, donc aussi inclus dans le demi-plan situé à gauche de la tangente. Le plan étant orienté dans le sens trigonométrique, on note pour tout réel s, $n(s)$ le vecteur unitaire tel que $(\mathrm{F}'(s), n(s))$ soit une base orthonormale directe. Il est dirigé vers l'intérieur de K. On peut montrer qu'alors la courbure k est toujours positive, ce qui nous sera utile pour la suite. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{F}''(s) = k(s)n(s)$. Au voisinage d'un point $\mathrm{F}(s_0)$ tel que $k(s_0) < 0$, on a

$$\mathrm{F}(s) = \mathrm{F}(s_0) + (s - s_0)\mathrm{F}'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 k(s_0)n(s_0) + o((s - s_0)^2).$$

Ceci est impossible puisque K est inclus dans le demi-plan limité par la tangente à $\mathrm{F}(s_0)$ dirigé par $n(s_0)$. On a donc, pour tout s, $k(s) \geqslant 0$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^2$ qui n'appartient pas à K et $s \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \mathrm{F}(s)$. Nous savons que, pour pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x - \mathrm{F}(s), \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(s)\rangle \leqslant 0.$$

La fonction $t \longmapsto \langle x - \mathrm{F}(s), \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(s)\rangle$ possède donc un maximum en s : sa dérivée en s est nulle, *i.e.* $\langle x - \mathrm{F}(s), \mathrm{F}'(s)\rangle = 0$. Ainsi x appartient à la normale à $\partial \mathrm{K}$ en $\mathrm{F}(s)$. Réciproquement, si x appartient à la normale à $\partial \mathrm{K}$ en $\mathrm{F}(s)$ et n'appartient pas à K, alors $p(x) = \mathrm{F}(s)$, car K est dans le demi-plan limité par la tangente à $\partial \mathrm{K}$ en $\mathrm{F}(s)$ ne contenant pas x.

Un point appartient donc à $\mathrm{K}_\delta \setminus \mathrm{K}$ s'il existe $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \,]0, \delta]$ tel que $x = \mathrm{F}(s) - tn(s)$. Ainsi K_δ est limité par la courbe de paramétrage $\mathrm{G} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ L-périodique défini par $\mathrm{G}(s) = \mathrm{F}(s) - \delta n(s)$ et le domaine $\mathrm{K}_\delta \setminus \mathrm{K}$ est paramétrée par l'application $\Phi : [0, \mathrm{L}[\times]0, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(s,t) = \mathrm{F}(s) - tn(s)$. La fonction Φ est injective car si $x = \mathrm{F}(s) - tn(s)$, alors $\mathrm{F}(s) = p(x)$, ce qui détermine s de manière unique, puis t. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s} = \mathrm{F}'(s) + tk(s)\mathrm{F}'(s)$, où $k(s)$ est la courbure de $\partial \mathrm{K}$ en $\mathrm{F}(s)$, et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -n(s)$. On sait que $k(s) \geqslant 0$, donc

$$\det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -(1 + tk(s)) \det(\mathrm{F}'(s), n(s)) = -(1 + tk(s)) < 0.$$

Ainsi Φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[0, \mathrm{L}[\times]0, \delta]$ sur $\mathrm{K} \setminus \mathrm{K}_\delta$. On obtient par le changement de variables $(s,t) \longmapsto \Phi(s,t)$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{A}(\mathrm{K}_\delta \setminus \mathrm{K}) = \int_0^{\mathrm{L}} \left(\int_0^{\delta} (1 + tk(s))\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \delta\mathrm{L} + \frac{\delta^2}{2} \int_0^{\mathrm{L}} k(s)\mathrm{d}s.$$

Il reste à calculer cette dernière intégrale.

L'application F' est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité. D'après le théorème de relèvement de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une application $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. En dérivant, on obtient, pour tout s,

$$k(s)n(s) = \theta'(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) = \theta'(s)n(s) \text{ et donc } k(s) = \theta'(s).$$

On a donc

$$\int_0^{\mathrm{L}} k(s)\mathrm{d}s = \int_0^{\mathrm{L}} \theta'(s)\mathrm{d}s = \theta(\mathrm{L}) - \theta(0).$$

Comme $\mathrm{F}'(\mathrm{L}) = \mathrm{F}'(0)$, $\theta(\mathrm{L}) - \theta(0)$ est un multiple de 2π.

Montrons que l'application F' est injective sur $[0, \mathrm{L}[$, en raisonnant par l'absurde. Soient s et s' deux éléments distincts de $[0, \mathrm{L}[$ tels que $\mathrm{F}'(s) = \mathrm{F}'(s')$. Les tangentes à $\partial\mathrm{K}$ en $\mathrm{F}(s)$ et $\mathrm{F}(s')$ sont parallèles et K est inclus dans la bande limité par ces droites. De plus on sait que K est dans le demi-plan qui est à gauche de la tangente orientée par $\mathrm{F}'(s)$. Cette condition ne peut pas être réalisée en $\mathrm{F}(s)$ et $\mathrm{F}(s')$. Donc F' est injective sur $[0, \mathrm{L}[$. On en déduit que $\theta([0, \mathrm{L}[)$ est un intervalle de longueur inférieure ou égale à 2π. Donc $\theta(\mathrm{L}) - \theta(0) = 0$ ou 2π. De plus θ est croissante (car $k \geqslant 0$) et injective sur $[0, \mathrm{L}[$ (comme F') donc $\theta(\mathrm{L}) - \theta(0) = 2\pi$. On conclut enfin que $\mathcal{A}(\mathrm{K}_\delta \setminus \mathrm{K}) = \delta\mathrm{L} + \pi\delta^2$ et donc

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathrm{K}_\delta) = \mathcal{A}(\mathrm{K}) + \delta\mathrm{L} + \pi\delta^2}. \ \triangleleft$$

Cette égalité constitue la formule de Steiner-Minkowski. La formule reste vérifiée pour un compact convexe quelconque du plan. On la démontre d'abord pour les polygones puis on l'étend aux convexes compacts quelconques par passage à la limite. Elle se généralise en dimension d, l'ensemble K_δ *étant défini de la même manière ; de même, on la démontre d'abord pour les polytopes. Si on note* V *le volume dans* $\mathbb{R}^d$*, pour un convexe compact quelconque* K *de* $\mathbb{R}^d$*, il existe des scalaires* $\mathrm{L}_i(\mathrm{K})$ *(*$0 \leqslant i \leqslant d$*) tels que, pour tout* $\delta > 0$*, on ait*

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}_\delta) = \sum_{i=0}^{d} \mathrm{L}_i(\mathrm{K})\delta^i,$$

où $\mathrm{L}_0(\mathrm{V}) = \mathrm{V}(\mathrm{K})$*,* $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}) = \mathcal{A}(\mathrm{K})$*, aire de* K *(sa longueur si* $d = 2$*) et* $\mathrm{L}_d(\mathrm{K}) = \beta(d)$*, volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^d$*. On en déduit la* formule de la peinture *:* $\mathcal{A}(\mathrm{K}) = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\mathrm{V}(\mathrm{K}_\delta) - \mathrm{V}(\mathrm{K})}{\delta} \cdot$ *Si on recouvre la frontière* *de* K *d'une couche de peinture d'épaisseur infiniment mince, le volume de peinture* $\mathrm{V}(\mathrm{K}_\delta) - \mathrm{V}(\mathrm{K})$ *est égal à* $\delta\mathcal{A}(\mathrm{K})$*, en se limitant aux termes du premier ordre. Si par exemple,* K *est la boule unité de* $\mathbb{R}^d$*, alors* K_δ *est une boule de rayon* $1+\delta$*, de volume* $(1+\delta)^d\beta(d)$*. On en déduit que* $\mathcal{A}(\mathrm{K}) = d\beta(d)$*.*

Les deux exercices qui suivent concernent des questions de point fixe pour des applications continues stabilisant un compact convexe.

2.25. Théorème de Kakutani

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie, K un convexe compact non vide E. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \dfrac{1}{n}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + u + \cdots + u^{n-1})$.

1. Montrer que $\mathrm{H} = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} u_n(\mathrm{K}) \neq \emptyset$.

2. Montrer que $x \in \mathrm{H}$ si et seulement si $u(x) = x$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Comme u_n est continue, $u_n(\mathrm{K})$ est un compact et comme u_n est linéaire, $u_n(\mathrm{K})$ est convexe. On observe aussi que si $x \in \mathrm{K}$ alors $u_n(x) = \dfrac{x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)}{n} \in \mathrm{K}$ car K est convexe. Ainsi, $u_n(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$. On va essayer d'utiliser le théorème des compacts emboîtés. On a déjà $u_2(\mathrm{K}) \subset u_1(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$. Toutefois si $y = \dfrac{x + u(x) + u^2(x)}{3} \in u_3(\mathrm{K})$ on ne voit pas pourquoi y serait aussi dans $u_2(\mathrm{K})$. En revanche si $y = \dfrac{x + u(x) + u^2(x) + u^3(x)}{4} \in u_4(\mathrm{K})$ on peut écrire $y = \dfrac{x' + u(x')}{2}$ avec $x' = \dfrac{x + u^2(x)}{2}$ de sorte que $y \in u_2(\mathrm{K})$. Cette idée se généralise. Montrons que si n divise m alors $u_m(\mathrm{K}) \subset u_n(\mathrm{K})$. Posons $m = kn$ avec $k \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathrm{K}$ on a

$$u_m(x) = \frac{1}{kn}\sum_{i=0}^{kn-1} u^i(x) = \frac{1}{kn}\sum_{\ell=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-1} u^{\ell n + j}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} u^j(x') = u_n(x')$$

avec $x' = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell n}(x) \in \mathrm{K}$ (car K est convexe). On a donc montré que si n divise m alors $u_m(\mathrm{K}) \subset u_n(\mathrm{K})$. La suite $(u_{n!}(\mathrm{K}))_{n\geqslant 1}$ est donc une suite décroissante de compacts convexes non vides. Ainsi, $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} u_{n!}(\mathrm{K})$ est un compact non vide. Il est inclus dans $\mathrm{H} = \bigcap_{n \geqslant 1} u_n(\mathrm{K})$, car $u_{n!}(\mathrm{K}) \subset u_n(\mathrm{K})$ pour tout n et en fait égal à H, car l'inclusion inverse est évidente. Donc H est également un convexe compact non vide.

2. Il est clair que si $u(x) = x$, alors $u_n(x) = x$ pour tout n et donc $x \in \mathrm{H}$. Inversement, soit $x \in \mathrm{H}$. Pour tout n il existe donc un vecteur $y_n \in \mathrm{K}$ tel que $x = u_n(y_n)$. On a alors :

$$u(x) - x = \frac{u^n(y_n) - y_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car les suites $(y_n)_{n \geqslant 1}$ et $(u^n(y_n))_{n \geqslant 1}$ sont dans K donc bornées. Ainsi, $u(x) = x$. $\lhd$

Le résultat reste vrai en dimension infinie avec la même démonstration, à condition de prendre u continu. On en déduit facilement que si $u_1, \ldots, u_p$ sont des endomorphismes qui stabilisent K *et qui commutent deux à deux, alors les u_i ont un point fixe commun dans* K. *Plus précisément, l'ensemble des points fixes communs aux u_i est un compact convexe non vide. La propriété a été démontrée pour $p = 1$ dans l'exercice. Si elle est vrai au rang p, l'ensemble des points fixes communs à $u_1, \ldots, u_p$ est un compact convexe* H *non vide, stable par u_{p+1}, car u_{p+1} commute avec $u_1, \ldots, u_p$. L'ensemble des points de* H *stables par u_{p+1} est donc un compact convexe non vide.*

Le lecteur connaissant la propriété de Borel-Lebesgue pourra même généraliser cela à une famille commutative quelconque $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'endomorphismes stabilisant K *(résultat connu sous le nom de théorème de Kakutani commutatif).*

La première question de l'exercice suivant est très souvent posée à l'oral.

2.26. Application 1-lipschitzienne dans un compact convexe

Soit X un compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ une application 1-lipschitzienne.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe.

2. Montrer que si la norme est euclidienne, l'ensemble des points fixes de f est un compact convexe.

3. Montrer que si la norme n'est pas euclidienne, le résultat précédent peut être faux.

4. Pour une norme quelconque, si x et y sont des points fixes de f, montrer qu'il existe toujours un point fixe z de f tel que

$$\|x - z\| = \|y - z\| = \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. L'idée est de se ramener à une application contractante en perturbant un peu f. Soit x_0 un élément quelconque de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'application $f_n : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ qui à x associe $\left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{1}{n} x_0$. L'application f_n prend ses valeurs dans X, car $f_n(x)$ est un barycentre à coefficients positifs de deux points de X et X est convexe. Pour x et y dans X on a

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(y) - f(x)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|y - x\|$$

donc f_n est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-lipschitzienne, donc contractante. L'ensemble X étant complet puisque compact, f_n possède un (unique) point fixe u_n. La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ du compact X possède une valeur d'adhérence u : il existe une suite extraite $(u_\varphi(n))_{n \geqslant 0}$ qui converge vers u. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(u_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)} x_0 = u_{\varphi(n)}.$$

Par passage à la limite, f étant continue puisque lipschitzienne, on obtient $f(u) = u$. Donc f admet au moins un point fixe dans X.

2. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points fixes de f. Il est non vide d'après la question précédente. Si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ qui converge vers x, on a, par continuité de f,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n = x,$$

donc x appartient à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est fermé. Comme il est inclus dans le compact X, il est lui-même compact.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}$ est convexe. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$. On a

$$\begin{aligned} \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| &\leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \\ &\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \leqslant (1 - \lambda)\|x - y\| + \lambda\|x - y\| \\ &\leqslant \|x - y\|. \end{aligned}$$

Ainsi toutes les inégalités sont des égalités : de la première, on déduit que $f(z)$ appartient au segment $[f(x), f(y)] = [x, y]$. De la seconde, on déduit que $\|x - f(z)\| = \|x - z\|$. Cela définit un point unique du segment $[x, y]$. On a donc $f(z) = z$. Le point z appartient à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est convexe.

3. La preuve précédente reposait sur le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour une norme euclidienne. Pour une norme quelconque l'ensemble $\mathcal{C}$ reste toujours compact mais il n'est pas forcément convexe. Munissons par exemple $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par

$\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$. Considérons le compact convexe $\mathrm{X} = \left[0, \frac{1}{2}\right]^2$ et l'application $f : (x,y) \longmapsto (x, x^2)$. On a clairement $f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}$ et pour (x,y), (x',y') deux points de X,

$$\begin{aligned}\|f(x,y) - f(x',y')\| &= \|(x-x', x^2 - {x'}^2)\| \\ &= \max(|x-x'|, |x-x'|(x+x')) \\ &\leqslant |x-x'| \leqslant \|(x,y)-(x',y')\|.\end{aligned}$$

Ainsi f est 1-lipschitzienne, mais l'ensemble des points fixes de f qui est l'arc de parabole $\left\{(x,x^2),\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$ n'est pas convexe.

4. Soient x et y deux points fixes de f et $\mathrm{K} = \{z \in \mathrm{X},\ \|x-z\| = \|y-z\| = \frac{1}{2}\|x-y\|\}$. Il s'agit de démontrer que K contient un point fixe de f. Pour cela nous allons démontrer que K est un convexe compact non vide, stable par f et appliquer le résultat de la première question.

• L'ensemble K n'est pas vide, car il contient $\frac{1}{2}(x+y)$, qui est dans X, car celui-ci est convexe.

• Montrons que K est fermé. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de K qui converge vers z. On a, par continuité de la norme,

$$\|x-z\| = \lim_{n\to+\infty} \|x-z_n\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$$

et de même, $\|y-z\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$. Ainsi z est dans K, donc K est fermé et par suite compact car il est inclus dans le compact X.

• Soit z et z' deux éléments de K, $\lambda \in [0,1]$, $w = \lambda z + (1-\lambda)z'$. On a

$$\begin{aligned}\|x-w\| &= \|\lambda(x-z) + (1-\lambda)(x-z')\| \leqslant \lambda\|x-z\| + (1-\lambda)\|x-z'\| \\ &= \frac{1}{2}\lambda\|x-y\| + \frac{1}{2}(1-\lambda)\|x-y\| = \frac{1}{2}\|x-y\|.\end{aligned}$$

On montre de même que $\|y-w\| \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|$. On en déduit que

$$\|x-y\| \leqslant \|x-w\| + \|y-w\| \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| \leqslant \|x-y\|.$$

Ainsi les inégalités sont des égalités donc on a $\|x-w\| = \|y-w\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$ et w appartient à K. Cela montre que K est convexe.

• Soit $z \in \mathrm{K}$. On a

$$\|x - f(z)\| = \|f(x) - f(z)\| \leqslant \|x-z\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$$

et de même $\|y - f(z)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - y\|$. On en déduit comme dans le point précédent que $f(z)$ appartient à K. Ainsi K est stable par f.

D'après la question 1, la restriction de f à K possède un point fixe. ◁

Les exercices qui terminent ce chapitre sont consacrés au thème de la connexité par arcs (la notion générale de connexité n'est pas au programme des classes préparatoires).

2.27. Existence d'un extremum

> Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que $f^{-1}(a)$ est compact pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que f admet un extremum global.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On peut déjà noter que le résultat est faux pour $n = 1$: il suffit de prendre $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ par exemple. Quitte à ajouter une constante à f on peut supposer que 0 est dans l'image de f. Soit $\mathrm{K} = f^{-1}(0)$. C'est par hypothèse un compact non vide $\mathbb{R}^n$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{K} \subset \overline{\mathrm{B}(0, r)}$. La fonction f ne s'annule plus sur $\mathrm{C} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}$ et cet ensemble est connexe par arcs (c'est cette propriété qui est fausse en dimension 1). Donc f garde un signe constant sur C.

Sur le compact $\overline{\mathrm{B}(0, r)}$ la fonction continue f admet un minimum m et un maximum M avec $m \leqslant 0 \leqslant \mathrm{M}$. Si f est strictement positive sur C alors m est le minimum global de f et si f est strictement négative sur C alors M est le maximum global de f. ◁

2.28. Complémentaire d'un hyperplan

> Soit E un espace normé réel et H un hyperplan de E. Montrer que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit φ une forme linéaire sur E dont le noyau est H. Les ensembles H, $\mathrm{H}^+ = \{x \in \mathrm{E},\, \varphi(x) > 0\}$ et $\mathrm{H}^- = \{x \in \mathrm{E},\, \varphi(x) < 0\}$ sont convexes (en effet si on a par exemple $\varphi(x) > 0$, $\varphi(y) > 0$ et $t \in [0, 1]$, on en déduit $\varphi(tx + (1 - t)y = t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) > 0)$ donc connexes par arcs. Nous savons (voir l'exercice 1.27) que H est fermé si et seulement si φ est continue.

• Supposons H fermé et montrons que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H} = \mathrm{H}^+ \cup \mathrm{H}^-$ n'est pas connexe par arcs. Pour cela on va montrer qu'il est impossible de trouver un chemin continu inclus dans $E \setminus H$ qui joint un vecteur $e \in H^+$ au vecteur $-e \in H^-$. En effet, si un tel chemin $\gamma : [0,1] \to E$ existait, la fonction continue $\varphi \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ prendrait en 0 une valeur strictement positive et en 1 une valeur strictement négative mais ne s'annulerait jamais. Cela contredirait évidemment le théorème des valeurs intermédiaires.

• La situation précédente est évidemment celle que l'on observe en dimension finie. Supposons maintenant que H n'est pas fermé, c'est-à-dire que φ n'est pas continue. Dans ce cas l'hyperplan H est dense dans E (car $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient strictement H) mais il est tout de même assez spectaculaire que $E \setminus H$ soit connexe par arcs. Prenons $e \in H^+$, par exemple tel que $\varphi(e) = 1$. Comme H^+ et H^- sont connexes par arcs, il nous suffit de construire un arc continu inclus dans $E \setminus H$ qui joint e et $-e$. Le sous-espace affine $\varphi^{-1}(1) = e + H$ est également dense dans E. On peut donc trouver une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de ce sous-espace qui converge vers $-e$. On peut supposer que de plus que $x_1 = e$. Considérons alors l'application $\gamma : [0,1] \to E$ définie de la manière suivante : $\gamma(0) = -e$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad \gamma(t) = x_k + (k+1)(1-kt)(x_{k+1} - x_k).$$

Autrement dit, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, γ est simplement le paramétrage du segment qui joint x_k à x_{k+1}. Il est clair que γ est continu sur $]0,1]$. Le fait que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $-e$ implique la continuité en 0. En effet, si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut trouver N tel que $\|x_n + e\| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Par convexité de la boule fermée de centre $-e$ et de rayon ε on a $\|\gamma(t) + e\| = \|\gamma(t) - \gamma(0)\| \leqslant \varepsilon$ dès que $t < \frac{1}{N}$. L'arc continu γ ainsi construit vérifie $\gamma(0) = -e$ et $\gamma(1) = e$ et comme pour tout $t \in]0,1]$ on a $\varphi(\gamma(t)) = 1$ l'image de l'arc est bien incluse dans $E \setminus H$. $\triangleleft$

Pour résoudre l'exercice suivant on pourra utiliser le théorème de Riesz (voir exercice 2.1).

2.29. Complémentaire d'un compact

Soit E un espace normé réel de dimension infinie et K un compact de E. Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On suppose K non vide sans quoi le résultat est évident. Comme K est compact il est borné et on peut trouver $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Il est clair que le complémentaire de la boule ouverte $B(0, R)$ est connexe par arcs. Il nous suffit donc de montrer que tout point $x \in B(0, R)$ qui n'est pas dans K peut être relié par un chemin continu de $E \setminus K$ à un point de norme strictement supérieure à R. On va voir qu'on peut même y arriver par un segment. Soit $R' > 0$ tel que $B(0, R) \subset B(x, R')$. Supposons que pour tout vecteur unitaire u la demi-droite $x + \mathbb{R}_+ u$ rencontre K. Cela implique que l'application $f : K \to S(x, R')$ qui à $y \in K$ associe $f(y) = x + R' \dfrac{y - x}{\|y - x\|}$ est surjective. Or f est clairement continue donc on en déduit que $S(x, R') = f(K)$ est compact, ce qui est faux puisque E est de dimension infinie (théorème de Riesz). Il existe donc une demi-droite issue de x qui ne rencontre pas K et cela permet de conclure. ◁

2.30. Ensembles de Julia

Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = P \circ P \circ \cdots \circ P$ (n facteurs). Soit K_P l'ensemble des nombres complexes z tels que la suite $(P_n(z))$ est bornée.

1. Déterminer K_{X^2}.

2. Montrer que K_P est non vide.

3. Montrer que K_P est compact.

4. Montrer que $\mathbb{C} \setminus K_P$ est connexe par arcs.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n = X^{2^n}$. La suite $(P_n(z)) = (z^{2^n})$ est bornée si, seulement si, $|z| \leqslant 1$.

2. Soit α une racine du polynôme $P - X$. Alors la suite $(P_n(\alpha))$ est constante donc borné. Ainsi K_P contient α donc n'est pas vide.

3. Comme le degré de P est supérieur à 2, $\dfrac{|P(z)|}{|z|}$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$. Ainsi, il existe $A > 0$ tel que $|z| > A$ implique $|P(z)| \geqslant 2|z|$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|P_{n_0}(z)| > A$, on obtient pour tout $n \geqslant n_0$, $|P_n(z)| > A$ puis $|P_{n+1}(z)| \geqslant 2|P_n(z)|$, donc $|P_n(z)|$ tend vers $+\infty$ et z n'appartient à K_P. Cela montre en particulier que si $z \in K_p$ alors $|z| \leqslant A$. Donc K_P est borné.

Montrons que K_P est fermé. D'après ce qui précède, $z \in K_P$ si, et seulement si, $|P_n(z)| \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit (z_k) une suite d'éléments de K_P qui converge vers z. On a, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $|P_n(z_k)| \leqslant A$. Par continuité de P_n, on en déduit $|\mathrm{P}_n(z)| \leqslant \mathrm{A}$ pour tout n. Donc $z \in \mathrm{K}_\mathrm{P}$. L'ensemble K_P est un fermé borné donc un compact de $\mathbb{C}$.

4. D'après la question précédente, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}_\mathrm{P} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{U}_n$, où

$$\mathrm{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ \ |\mathrm{P}_n(z)| > \mathrm{A}\}.$$

La suite C_n est croissante. Supposons démontré que chaque C_n est connexe par arcs. Pour x et y dans $\in \mathbb{C} \setminus \mathrm{K}_\mathrm{P}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x, y) \in \mathrm{C}_n^2$. Comme C_n est connexe par arcs, il existe un chemin dans C_n et donc dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}_\mathrm{P}$ de x à y. Ainsi $\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}_\mathrm{P}$ est connexe par arcs. Pour conclure, il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme. *Pour tout* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$*, non constant, et tout* $\mathrm{R} > 0$*, l'ensemble* $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C},\ \ |\mathrm{P}(z)| > \mathrm{R}\}$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}(z_0)$ la composante connexe par arcs de U contenant z_0. Comme U est ouvert, il en est de même de $\mathrm{U}(z_0)$. Montrons que $\mathrm{U}(z_0)$ n'est pas borné en raisonnant par l'absurde. Si $\mathrm{U}(z_0)$ est borné, alors $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{U}(z_0)}$ est compact. Si z appartient à la frontière F de $\mathrm{U}(z_0)$, alors $|\mathrm{P}(z)| = \mathrm{R}$. On en déduit que le maximum de $|\mathrm{P}|$ sur K n'est pas atteint en un point de la frontière, mais en un point z_1 de $\mathrm{U}(z_0)$. Montrons que c'est impossible si P n'est pas constant (c'est le principe du maximum).

En effet, on écrit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k(\mathrm{X} - z_1)^k$ et on choisit $r > 0$ assez petit pour que le disque fermé de centre z_1 et de rayon r soit inclus dans $\mathrm{U}(z_0)$. On a alors

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{P}(z_1 + re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant d} a_k\overline{a_\ell}r^{k+\ell} \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{d} |a_k|^2,$$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ si $k \neq 0$. On en déduit puisque le maximum de $|\mathrm{P}|$ sur $\mathrm{U}(z_0)$ est atteint en z_1,

$$2\pi \sum_{k=0}^{d} |a_k|^2 = \int_0^{2\pi} |\mathrm{P}(z_1 + re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi |\mathrm{P}(z_1)|^2 \leqslant 2\pi |a_0|^2.$$

On a donc $a_k = 0$ si $k \geqslant 1$, ce qui impossible car on suppose que P n'est pas constant. On a donc démontré par l'absurde que $\mathrm{U}(z_0)$ n'est pas borné.

Or comme $|\mathrm{P}(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$ il existe $\mathrm{R}' > 0$ tel que $|z| > \mathrm{R}'$ implique $|\mathrm{P}(z)| > \mathrm{R}$, *i.e.* $z \in \mathrm{U}$. Autrement dit, l'ensemble connexe par arcs $\{z \in \mathbb{C}, |z| > \mathrm{R}'\}$ est contenu dans U.

Il est donc contenu dans une de ses composantes connexes par arcs. Il s'ensuit qu'il existe une seule composante connexe par arcs non bornée, et finalement U possède une unique composante connexe par arcs puisque elles sont toutes non bornées. On conclut que U est connexe par arcs. $\diamondsuit$

Cela termine l'exercice. $\triangleleft$

2.31. Injection continue

Existe-t-il une fonction continue et injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 2$?

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

On va montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 2$. Il suffit bien entendu de la faire pour $n = 2$, puisque la restriction d'une injection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ à un plan de $\mathbb{R}^n$ reste injective et continue. Supposons donc qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ injective et continue.

Soit S le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Comme S est compact et connexe par arcs son image $f(\mathrm{S})$ est compacte et connexe par arcs : c'est donc un segment $\mathrm{I} = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Comme S est compact, f réalise alors un homéomorphisme de S sur I ce qui est absurde, un cercle n'étant pas homéomorphe à un segment (en ôtant un point quelconque d'un cercle on a toujours un ensemble connexe par arcs, ce qui n'est pas le cas pour un segment).

Plus élémentairement, on peut introduire les antécédents α et β de a et b par f. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors que f atteint toutes les valeurs de $]a, b[$ deux fois, une fois pour chaque arc de cercle délimité par les points α et β, ce qui contredit l'injectivité de f. $\triangleleft$

Dans l'exercice suivant on utilisera le fait qu'un ouvert V *connexe par arcs est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut pas se partitionner en deux ouverts disjoints non vides. En effet supposons qu'une telle partition* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2$ *soit possible. La fonction* $f : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ *qui envoie les éléments de* V_1 *sur* -1 *et ceux de* V_2 *sur* 1 *est alors continue car constante sur un voisinage de chaque point. Prenons* $x_1 \in \mathrm{V}_1$ *et* $x_2 \in \mathrm{V}_2$*. Il existe un chemin continu* $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{V}$ *tel que* $\gamma(0) = x_1$ *et* $\gamma(1) = x_2$*. On aboutit alors à une contradiction en considérant* $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *qui est continue et passe de la valeur* -1 *à la valeur* 1 *sans s'annuler, ce qu'interdit le théorème des valeurs intermédiaires.*

2.32. Distance à la frontière

Soit $(\mathrm{E}, \| \|)$ un espace normé réel de dimension finie, Ω un ouvert connexe par arcs non vide de E, tel que $\overline{\Omega}$ soit compact. On considère une fonction continue $f : \Omega \to \Omega$ telle que $f(\Omega)$ soit ouvert. Montrer qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $d(x_0, \partial\Omega) = d(f(x_0), \partial\Omega)$ où $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Il nous faut prouver que la fonction $\varphi : x \mapsto d(x, \partial\Omega) - d(f(x), \partial\Omega)$ s'annule sur Ω. La fonction $x \mapsto d(x, \partial\Omega)$ est continue sur E car 1-lipschitzienne. Il en résulte que φ est continue sur Ω et comme Ω est connexe par arcs, il nous suffit de prouver que φ prend deux valeurs de signes opposés.

• Il est facile de trouver un point en lequel φ est positive : il suffit de considérer un point de l'ouvert Ω qui est à distance maximale du bord. Plus précisément, la fonction continue $x \mapsto d(x, \partial\Omega)$ atteint son maximum sur le compact $\overline{\Omega}$ disons en un point x_0. Il est clair que $x_0 \in \Omega$ (car la fonction est nulle sur $\partial\Omega$). Comme $f(x_0) \in \Omega$ on a $d(f(x_0), \partial\Omega) \leqslant d(x_0, \partial\Omega)$ donc $\varphi(x_0) \geqslant 0$.

• Il est moins facile de montrer que φ prend une valeur négative. On va raisonner par l'absurde et supposer que φ reste strictement positive sur Ω, autrement dit que pour tout $x \in \Omega$, $f(x)$ est strictement plus près du bord de Ω que x. Soit $y \in \Omega$ un point adhérent à $f(\Omega)$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points de Ω telle que $f(x_n)$ converge vers y. Par compacité de $\overline{\Omega}$ on peut, quitte à prendre une sous-suite, supposer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point $x_\infty \in \overline{\Omega}$. Si $x_\infty \in \Omega$, alors par continuité de f on a $y = f(x_\infty) \in f(\Omega)$. Sinon $x_\infty \in \partial\Omega$ et $d(x_n, \partial\Omega)$ tend vers 0. Comme $d(f(x_n), \partial\Omega) < d(x_n, \partial\Omega)$ pour tout n, on en déduit par passage à la limite que $d(y, \partial\Omega) = 0$ donc que $y \in \partial\Omega$ ce qui est faux. Ce second cas est donc exclu. On vient donc de montrer que tout point de Ω adhérent à $f(\Omega)$ est dans $f(\Omega)$ autrement dit que $f(\Omega)$ est un fermé relatif de Ω ou encore que $\Omega \setminus f(\Omega)$ est ouvert. Comme par hypothèse $f(\Omega)$ est aussi ouvert et non vide et comme Ω est connexe on en déduit (voir la remarque qui précède l'exercice) que $f(\Omega) = \Omega$ *i.e.* que f est surjective.

En particulier f atteint le point x_0 défini dans le point précédent et si $x_1 \in \Omega$ est tel que $f(x_1) = x_0$ on a clairement $\varphi(x_1) \leqslant 0$ et la contradiction avec notre hypothèse. $\triangleleft$

L'exercice suivant doit être pris comme un exercice de combinatoire plus que comme un exercice de topologie.

2.33. Dénombrement

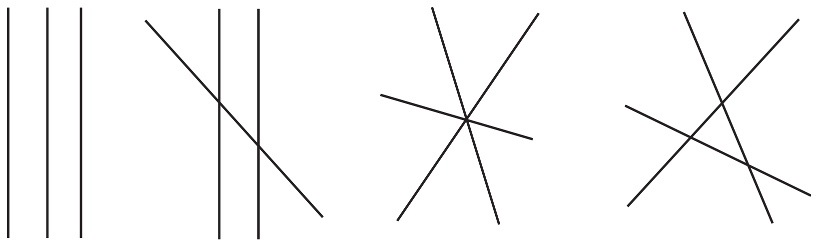
1. Quel est le nombre maximal de composantes connexes par arcs du complémentaire de la réunion de n droites de $\mathbb{R}^2$?

2. Pour n, d dans $\mathbb{N}^*$ on note $c(n, d)$ le nombre maximal de composantes connexes du complémentaire de la réunion de n hyperplans de $\mathbb{R}^d$. Calculer $c(n, d)$.

(**École polytechnique**)

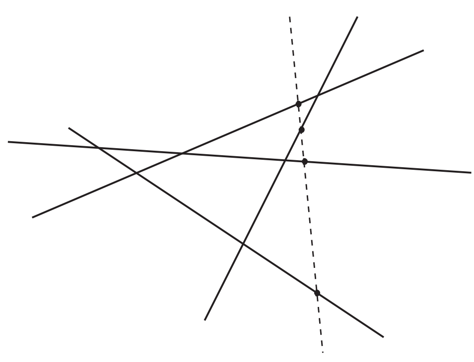
▷ **Solution.**

1. Notons c_n le nombre cherché. On commence bien entendu par regarder les petites valeurs de n. Une droite délimite deux demi-plans ouverts convexes, donc connexes par arcs, et on a $c_1 = 2$. Prenons deux droites. Si elles sont parallèles on a seulement 3 composantes connexes, mais si elles sont sécantes on en a 4. Donc $c_2 = 4$. Prenons 3 droites :



Si elles sont parallèles toutes les trois, il y a 4 composantes connexes, si deux des trois droites sont parallèles et la troisième est sécante aux deux premières, il y en a 6, si les trois droites sont sécantes en un même point il y en a aussi 6 et sinon il y en a 7. On a donc $c_3 = 7$.

En fait, c_n sera le nombre de composantes lorsque les droites sont en position générale, c'est-à-dire sans que deux des droites ne soient parallèles ou trois des droites sécantes. On va chercher une relation de récurrence. Soit n droites délimitant c_n régions. Ajoutons une droite de



plus qui est sécante avec les n premières et qui ne passe pas par un point d'intersection des n premières droites. Cette droite rencontre alors $n+1$ composantes connexes qu'elle coupe en deux.

On a donc $c_{n+1} \geqslant c_n + n + 1$. En fait il y a égalité. En effet, soient $n+1$ droites qui délimitent c_{n+1} composantes. Si on en enlève une il reste au moins $c_{n+1} - n - 1$ composantes donc $c_{n+1} - n - 1 \leqslant c_n$. On a alors immédiatement $c_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + c_1 = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

2. On va encore chercher une relation de récurrence en admettant que le nombre maximal de composantes est obtenu pour des hyperplans en position générale (bien qu'intuitive cette notion ne se définit pas si facilement que cela...). Considérons n hyperplans $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n$ de $\mathbb{R}^d$ en position générale. Il en est de même des $n-1$ hyperplans $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_{n-1}$ qui délimitent donc $c(n-1, d)$ régions. L'hyperplan H_n n'est parallèle à aucun des H_i et les sous-espaces affines $\mathrm{F}_k = \mathrm{H}_n \cap \mathrm{H}_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ sont des hyperplans affines de H_n en position générale qui délimitent $c(n-1, d-1)$ régions. Ces régions sont les traces sur H_n des composantes connexes de $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \mathrm{H}_k$ qui sont coupées en deux par H_n. On a donc

$$c(n, d) = c(n-1, d) + c(n-1, d-1).$$

Il est alors possible de donner une expression explicite de $c(n, d)$ en utilisant les coefficients binomiaux. En effet, on a vu dans la question précédente que $c(n, 2) = \dfrac{n(n-1)}{2} + n + 1 = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2$. Montrons par récurrence sur d que $c(n, d) = \sum\limits_{k=0}^{d} \mathrm{C}_n^k$. L'initialisation est vue. Supposons que cela est vrai en dimension $d-1$. Pour prouver que c'est vrai en dimension d on procède par récurrence sur n. On a $c(0, d) = 1$ et la formule est correcte avec la convention $\mathrm{C}_n^k = 0$ pour $k > n$. Si la formule est vraie au rang $n-1$ on a

$$\begin{aligned} c(n, d) &= c(n-1, d) + c(n-1, d-1) = \sum_{k=0}^{d} \mathrm{C}_{n-1}^k + \sum_{k=0}^{d-1} \mathrm{C}_{n-1}^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{d} (\mathrm{C}_{n-1}^k + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}) = \sum_{k=0}^{d} \mathrm{C}_n^k \end{aligned}$$

en vertu de la formule de Pascal. ◁

2.34. Connexité d'un cône

Soit p et q deux entiers $\geqslant 2$ et X le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+q}$ d'équation

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 = y_1^2 + \cdots + y_q^2.$$

1. Étudier la connexité par arcs de X.

2. Même question pour $\mathrm{X} \setminus \{0\}$. (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. L'ensemble X est le cône isotrope de la forme quadratique q : $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - y_1^2 - \cdots - y_q^2$. Il est bien entendu connexe par arcs puisque tout point de ce cône est relié au sommet $(0, \ldots, 0)$ par un segment.

2. L'ensemble $\mathrm{X} \setminus \{0\}$ reste connexe par arcs. En effet, prenons deux points $\mathrm{M} = (a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q)$ et $\mathrm{N} = (c_1, ..., c_p, d_1, ..., d_q)$ dans cet ensemble. Toute la demi-droite $\{t\mathrm{N},\, t > 0\}$ est incluse dans $\mathrm{X} \setminus \{0\}$ donc, quitte à remplacer N par un point de cette demi-droite on peut supposer que $c_1^2 + \cdots + c_p^2 = a_1^2 + \cdots + a_p^2$. On a alors nécessairement $d_1^2 + \cdots + d_q^2 = b_1^2 + \cdots + b_q^2$. On utilise maintenant le fait qu'en dimension $n \geqslant 2$ les sphères de $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arcs. Il est possible de trouver $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^p$ et $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^q$ continues telles que $\varphi(0) = (a_1, ..., a_p)$, $\varphi(1) = (c_1, ..., c_p)$, $\psi(0) = (b_1, ..., b_q)$ et $\psi(1) = (d_1, ..., d_q)$ et où ψ (resp. ψ) prend ses valeurs dans la sphère de centre l'origine et de rayon $\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_p^2}$ (resp. $\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_q^2}$). Le chemin continu $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ est alors à valeurs dans $\mathrm{X} \setminus \{0\}$ et permet de joindre M à N. ◁

Le lecteur trouvera des exercices sur la connexité par arcs dans des espaces de matrices dans les tomes algèbre 2 (exercice 3.1, 4.18 et 4.19) et algèbre 3 (exercice 1.35 sur la connexité de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$*, exercice 3.23 sur les composantes connexes de l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives).*

Chapitre 3

Espaces de Banach, espaces de Hilbert

Rappelons que, si $(\mathrm{E}, \|, \|)$ *est un espace vectoriel normé, une suite* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *de* E *est dite de Cauchy lorsqu'elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathrm{N},\ \forall p \geqslant \mathrm{N},\ \|x_n - x_p\| \leqslant \varepsilon.$$

Une suite qui converge est de Cauchy et lorsque la réciproque est vraie, c'est-à-dire lorsque toute suite de Cauchy de E *converge, on dit que* E *est complet ou qu'il s'agit d'un espace de Banach (en l'honneur de Stefan Banach (1892-1945) l'un des pères de l'Analyse Fonctionnelle).*

Les premiers exercices donnent des exemples importants d'espaces complets.

3.1. Espace des fonctions continues sur un segment

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que E est complet pour la norme de la convergence uniforme.

2. Est-il complet pour la norme $\| \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$?

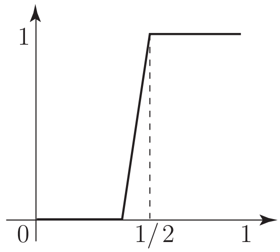
(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de E pour la norme $\| \|_\infty$. Soit $x \in [0,1]$. Pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a $|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty$ donc la suite réelle $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet elle converge vers une limite que l'on note $f(x)$. On va montrer que la fonction f ainsi définie est continue et que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver N tel que pour tous $n \geqslant \mathrm{N}$, $p \geqslant \mathrm{N}$, on ait $\|f_n - f_p\|_\infty \leqslant \varepsilon$ et donc $|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$. Dans cette inégalité on fait tendre p vers l'infini. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et $x \in [0,1]$ on a donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Le théorème de continuité des limites uniformes permet d'en déduire que f est continue et appartient donc à E.

Conclusion. L'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est complet.

2. Nous allons montrer en revanche que E n'est pas complet pour la norme $\|\ \|_1$. Pour cela, considérons pour tout $n \geqslant 2$ la fonction f_n de E affine par morceaux qui est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]$ et vaut 1 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Voici le graphe de cette fonction :



Soit $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 0$. La fonction $f_{n+p} - f_n$ est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Sur $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$, on a $|f_{n+p} - f_n| \leqslant 1$ de sorte que

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_{n+p} - f_n| \leqslant \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ pour n assez grand et $p \geqslant 0$ quelconque. La suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ est de Cauchy.

Montrons maintenant, en raisonnant par l'absurde, qu'elle ne converge pas. Supposons que $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $f \in$ E pour la norme $\|\ \|_1$. Prenons $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$. On a $\alpha \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ pour n assez grand et alors

$$\int_0^\alpha |f| = \int_0^\alpha |f - f_n| \leqslant \|f - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\int_0^\alpha |f| = 0$ et comme f est continue, f s'annule sur $[0, \alpha]$. Le réel α étant quelconque dans $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, f est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$. On montre de même que f est constante égale à 1 sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$. On tient notre contradiction puisque f n'est pas continue en $\frac{1}{2}\cdot$ Donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ diverge et l'espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\ \|_1)$ n'est pas complet. ◁

La démarche de la question 1 est très importante et doit être bien maîtrisée. L'énoncé suivant en propose une variante avec un espace de suites.

3.2. Espace des suites bornées

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme $\| \ \|$ définie par $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u \in$ E.

1. Montrer que E est complet.

2. Existe-t-il une partie dénombrable dense dans E ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E (l'indice est placé en haut), le terme général de la suite u^k étant noté u_n^k pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $i, j \geqslant k_0$, on ait $\|u^i - u^j\| \leqslant \varepsilon$.

En particulier, pour n fixé, on a $|u_n^i - u_n^j| \leqslant \varepsilon$ dès que $i, j \geqslant k_0$. Comme ε est arbitraire, on en déduit que la suite réelle $(u_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge. On note ℓ_n sa limite et ℓ la suite de terme général ℓ_n.

On va montrer que ℓ est une suite bornée (donc un élément de E) et que u^k converge vers ℓ au sens de la norme $\| \ \|$. Soit $\varepsilon > 0$ et k_0 comme ci-dessus. On a alors $|u_n^i - u_n^j| \leqslant \varepsilon$ pour $i, j \geqslant k_0$ et pour tout n. En faisant tendre j vers $+\infty$ on obtient $|u_n^i - \ell_n| \leqslant \varepsilon$ pour $i \geqslant k_0$ et n quelconque. On en déduit que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n^i - \ell_n| \leqslant \varepsilon$. La suite $u^i - \ell$ est bornée, c'est-à-dire appartient à E, et vérifie $\|u^i - \ell\| \leqslant \varepsilon$. Comme u^i est dans E, on en déduit que ℓ appartient à E. D'autre part, on a, pour tout $i \geqslant k_0$, $\|u^i - \ell\| \leqslant \varepsilon$. Comme ε est un réel strictement positif quelconque, on conclut que la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et donc que E est complet.

2. La réponse est négative. Démontrons-le en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe une partie dénombrable D qui est dense dans E et posons $\mathrm{D} = \{u^k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Il est facile de construire une suite bornée $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\|x - u^k\| \geqslant 1$ pour tout k. En effet, il suffit d'utiliser le k-ième terme de la suite x pour rendre l'écart entre x et u^k plus grand que 1. On pose par exemple $x_k = -1$ si $u_k^k \geqslant 0$ et $x_k = 1$ si $u_k^k < 0$. On a $\|x\| = 1$ et pour tout entier k,

$$\|x - u^k\| \geqslant |x_k - u_k^k| \geqslant 1.$$

Cela contredit la densité de D. ◁

Un espace normé qui contient une partie dénombrable dense est dit séparable. C'est le cas des espaces de dimension finie (ce qui découle en gros de ce que $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$) mais aussi de la plupart des espaces utilisés en Analyse Fonctionnelle, le cas des suites bornées de l'exercice étant un des rares contre-exemples.

Notons aussi que le sous-espace c (resp. c_0) formé des suites convergentes (resp. des suites qui convergent vers 0*) est fermé dans* E *donc est aussi complet pour la norme* $\| \,\|$.

Voici encore une variante avec des séries. L'exercice contient également une question de compacité qui demande de mettre en œuvre un procédé d'extraction diagonal.

3.3. Espace $\ell^1(\mathbb{N})$

> Soit $\mathrm{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum |u_n| \text{ converge}\}$ que l'on munit de la norme $\| \,\|$ définie par $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in \mathrm{E}$.
>
> **1.** Montrer que E est complet.
>
> **2.** Si u et v sont dans E, on pose $u \prec v$ si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. Une suite croissante et majorée de E pour l'ordre $\prec$ converge-t-elle ?
>
> **3.** Soient a et b dans E, avec $a \prec b$ et $\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{E},\ a \prec x \prec b\}$. Montrer que X est compact.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Donnons-nous une suite de Cauchy $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ de E. Par définition, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ \|u^p - u^q\| \leqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ |u_n^p - u_n^q| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie que la suite $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge vers un réel que nous noterons ℓ_n. Nous allons montrer que la suite $\ell = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E et que la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ au sens de la norme $\| \ \|$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \geqslant 0$. D'après $(*)$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geqslant p_0$ et $q \geqslant p_0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^p - u_n^q| \leqslant \varepsilon$ et, *a fortiori*, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^p - u_n^q| \leqslant \varepsilon$. Faisons tendre q vers l'infini dans cette dernière inégalité. Pour tout $p \geqslant p_0$, on a $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^p - \ell_n| \leqslant \varepsilon$. Cette inégalité étant valable pour tout $\mathrm{N} \geqslant 0$, on en déduit que la série $\sum |u_n^p - \ell_n|$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^p - \ell_n| \leqslant \varepsilon$.

Il s'ensuit que $u^p - \ell$ est dans E (pour $p \geqslant p_0$) et, comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell = u^p - (u^p - \ell)$ est bien dans E. Nous venons de démontrer que si $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant p_0$, on a $\|u^p - \ell\| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans E.

Conclusion. E est un espace de Banach.

2. Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de E, majorée par une suite v de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u^p \prec u^{p+1} \prec v$ et donc $u_n^p \leqslant u_n^{p+1} \leqslant v_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. À n fixé, la suite $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante majorée de $\mathbb{R}$, qui converge vers un réel que nous noterons ℓ_n. Posons alors $\ell = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons que ℓ est dans E. Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $u_n^p \leqslant \ell_n \leqslant v_n$ pour tout n, on a $|u_n^p - \ell_n| \leqslant |u_n^p - v_n| \leqslant |u_n^p| + |v_n|$ et le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure que $\sum |u_n^p - \ell_n|$ converge. Donc $u^p - \ell$ est dans E et E étant un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in$ E.

Montrons enfin que $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Comme à n fixé, $u_n^0 \leqslant u_n^p \leqslant \ell_n$ pour tout p, on a $|u_n^p - \ell_n| \leqslant |u_n^0 - \ell_n|$. Il existe $\mathrm{N} \geqslant 0$ tel que $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} |u_n^0 - \ell_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, la somme finie $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^p - \ell_n|$ tend vers 0 puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} u_n^p = \ell_n$ pour tout n. Il existe p_0 tel que

$$\forall p \geqslant p_0, \quad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^p - \ell_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $p \geqslant p_0$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^p - \ell_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u^p - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Conclusion. La suite $(u^p)_{p\geqslant 0}$ converge vers u.

3. Soit $(u^p)_{p\geqslant 0}$ une suite de X. Il s'agit de montrer qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point de X.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant u_n^p \leqslant b_n$. À n fixé, la suite $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. Elle est donc justiciable du théorème de Bolzano-Weierstrass. On conçoit bien que l'on peut faire une extraction à $n = 0$, puis à $n = 1$, $n = 2$,... et ce, une infinité de fois. Plus rigoureusement, il s'agit de mettre en place un procédé diagonal.

Soit $\varphi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_0^{\varphi_0(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un réel ℓ_0. Comme $(u_1^{\varphi_0(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_1^{\varphi_0(\varphi_1(p))})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un réel ℓ_1. On réitère le procédé. Au rang n, comme $(u_{n+1}^{\varphi_0(\varphi_1(\dots\varphi_n(p)\dots)})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $\varphi_{n+1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{n+1}^{\varphi_0(\dots\varphi_n(\varphi_{n+1}(p))\dots)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un réel ℓ_{n+1}.

On a donc une infinité de fonctions $\varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes. Posons, pour p entier naturel, $\psi(p) = \varphi_0(\varphi_1(\dots(\varphi_p(p))))$. Alors $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. En effet, on a $\varphi_{p+1}(p+1) \geqslant p+1 > p$, donc

$$\varphi_0(\dots\varphi_p(\varphi_{p+1}(p+1))) > \varphi_0(\dots\varphi_p(p)) \quad \text{i.e. } \psi(p+1) > \psi(p)$$

puisque $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p$ est strictement croissante. De plus, si $p \geqslant n$, on a $k_p = \varphi_{n+1} \circ \cdots \circ \varphi_p(p) \geqslant p$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} k_p = +\infty$, et par composition des limites

$$u_n^{\psi(p)} = u_n^{\varphi_0(\dots(\varphi_n(k_p))} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell_n.$$

Faisons le bilan : on a construit $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^{\psi(p)}$ tend vers $\ell_n \in [a_n, b_n]$ lorsque p tend vers l'infini. Soit $\ell = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il nous reste à prouver que $\ell \in \mathrm{E}$ et que $u^{\psi(p)}$ converge vers ℓ dans E. À n fixé, $|a_n - \ell_n| \leqslant b_n - a_n$. Comme $b - a \in \mathrm{E}$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure que $a - \ell \in \mathrm{E}$ et finalement $\ell \in \mathrm{E}$ puisque E est un sous-espace.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathrm{N} \geqslant 0$ tel que $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (b_n - a_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^{\psi(p)} - \ell_n| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0,$$

pour p assez grand, on a $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^{\psi(p)} - \ell_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour p assez grand,

$$\|u^{\psi(p)} - \ell\| \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n^{\psi(p)} - \ell_n| + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (b_n - a_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui traduit $\lim\limits_{p\to+\infty} u^{\psi(p)} = \ell$.

Conclusion. L'ensemble X est compact. $\lhd$

Avec le résultat de l'exercice 2.10 il est facile de donner une caractérisation des parties compactes de ℓ^1 : ce sont les parties X *qui sont fermées, bornées et équisommables, c'est-à-dire telles que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \mathrm{X}, \quad \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} |u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Il est aisé de voir que l'exemple de l'exercice vérifie ces conditions.

L'exercice suivant ressemble au précédent mais il est plus facile. Sans être centré sur la complétude, il permet de tester le candidat sur l'ensemble du cours de topologie.

3.4. Espace des polynômes

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N(P)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\mathrm{P}^{(k)}(0)|}{k!}\cdot$

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. On pose $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k^2}\cdot$ Montrer que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E. Converge-t-elle ?

3. La dérivation de E est-elle continue ?

4. On pose pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $\psi_n(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(n)}(0)$. Montrer que ψ_n est une forme linéaire continue et calculer sa norme.

5. On dit que P précède Q, ce que l'on note $\mathrm{P} \prec \mathrm{Q}$, lorsque pour tout entier n, $\mathrm{P}^{(n)}(0) \leqslant \mathrm{Q}^{(n)}(0)$. Soient P et Q fixés. On pose,

$$\mathrm{G} = \{\mathrm{R} \in \mathrm{E},\ \mathrm{R} \prec \mathrm{P}\} \qquad \mathrm{H} = \{\mathrm{R} \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q} \prec \mathrm{R}\}.$$

Montrer que G et H sont des fermés de E et que leur intersection est compacte.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On remarque que la somme qui intervient dans la définition de N(P) est finie, pour tout polynôme P : il s'agit simplement de la somme des valeurs absolues des coefficients de P. On en déduit facilement que N est une norme.

2. Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on a $\mathrm{P}_m - \mathrm{P}_n = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k^2}$ et par conséquent $\mathrm{N}(\mathrm{P}_m - \mathrm{P}_n) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot$ La série $\sum \frac{1}{k^2}$ étant convergente, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier N tel que $\sum_{k=\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$. Pour $n, m \geqslant \mathrm{N}$, on a $\mathrm{N}(\mathrm{P}_m - \mathrm{P}_n) < \varepsilon$ et la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est donc de Cauchy.

Montrons qu'elle ne converge pas. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge vers un polynôme P de degré d et considérons un entier $n > d$. Pour $d < k \leqslant n$ le terme de degré k de $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}$ est $\frac{\mathrm{X}^k}{k^2}\cdot$ On en déduit que $\mathrm{N}(\mathrm{P}_n - \mathrm{P}) \geqslant \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{(d+1)^2}\cdot$ C'est absurde car $\mathrm{N}(\mathrm{P}_n - \mathrm{P})$ converge vers 0.

Conclusion. La suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy, mais elle ne converge pas. L'espace (E, N) n'est pas complet.

3. Montrons que la dérivation n'est pas continue. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N}(\mathrm{X}^n) = 1$ et $\mathrm{N}((\mathrm{X}^n)') = \mathrm{N}(n\mathrm{X}^{n-1}) = n$. On en déduit que

$\dfrac{\mathrm{N}((\mathrm{X}^n)')}{\mathrm{N}(\mathrm{X}^n)} = n$. Le rapport $\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{P}')}{\mathrm{N}(\mathrm{P})}$ n'est pas borné quand P décrit $\mathrm{E}\setminus\{0\}$. La dérivation est linéaire, mais n'est pas continue.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. L'application ψ_n est clairement linéaire. Montrons qu'elle est continue. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a

$$|\psi_n(\mathrm{P})| = |\mathrm{P}^{(n)}(0)| = n!\frac{|\mathrm{P}^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant n!\mathrm{N}(\mathrm{P}),$$

par définition de N. On en déduit que ψ est continue et que

$$|||\psi||| = \sup_{\mathrm{P}\in\mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{|\psi_n(\mathrm{P})|}{\mathrm{N}(\mathrm{P})} \leqslant n!.$$

Le rapport $\dfrac{|\psi_n(\mathrm{P})|}{\mathrm{N}(\mathrm{P})}$ vaut $n!$ pour $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ donc la majoration est une égalité : $|||\psi||| = n!$.

5. Montrons que G est fermé. La démonstration est identique pour H. Soit $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans G qui converge vers $\mathrm{R} \in \mathrm{E}$. Il faut montrer que R est dans G. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$|\mathrm{R}^{(n)}(0) - \mathrm{R}_k^{(n)}(0)| \leqslant n!\mathrm{N}(\mathrm{R} - \mathrm{R}_k).$$

On en déduit que la suite $(\mathrm{R}_k^{(n)}(0))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{R}^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sachant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{R}_k^{(n)}(0) \geqslant \mathrm{P}^{(n)}(0)$, on obtient

$$\mathrm{R}^{(n)}(0) = \lim_{k\to+\infty} \mathrm{R}_k^{(n)}(0) \geqslant \mathrm{P}^{(n)}(0).$$

Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, R est dans G et G est fermé.

Montrons que $\mathrm{K} = \mathrm{G}\cap\mathrm{H}$ est compact. Soit $d = \max(\deg \mathrm{P}, \deg \mathrm{Q})$ et $\mathrm{R} \in \mathrm{K}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}^{(n)}(0) \leqslant \mathrm{R}^{(n)}(0) \leqslant \mathrm{Q}^{(n)}(0)$. Si $n > d$, alors $\mathrm{P}^{(n)}(0) = \mathrm{Q}^{(n)}(0) = 0$ et donc $\mathrm{R}^{(n)}(0) = 0$. Donc K est inclus dans $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$. Or K est fermé dans E, car c'est l'intersection des deux fermés G et H, donc *a fortiori*, il est fermé dans $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

Montrons qu'il est borné. Si $\mathrm{R} \in \mathrm{K}$ et $n \leqslant d$, alors $\mathrm{P}^{(n)}(0) \leqslant \mathrm{R}^{(n)}(0) \leqslant \mathrm{Q}^{(n)}(0)$ et donc $|\mathrm{R}^{(n)}(0)| \leqslant \max(|\mathrm{P}^{(n)}(0)|, |\mathrm{Q}^{(n)}(0)|)$. On en déduit que

$$\mathrm{N}(\mathrm{R}) \leqslant \sum_{k=0}^{d} \frac{\max(|\mathrm{P}^{(k)}(0)|, |\mathrm{Q}^{(k)}(0)|)}{k!}.$$

Le terme de droite étant une constante, cela montre que K est borné. Donc K est un fermé borné de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Quelle que soit la norme choisie, et en particulier pour la norme N, les fermés bornés de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$ sont compact. Donc K est un compact de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$ et *a fortiori* un compact de E. ◁

3.5. Espace des fonctions lipschitziennes

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Est-il complet pour la norme $\| \|_\infty$?

3. Si $f \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{K}(f)$ la borne inférieure des constantes de Lipschitz pour f. S'agit-il d'une norme sur E ?

4. Vérifier que l'application $\mathrm{N} : f \mapsto \mathrm{K}(f)+|f(0)|$ est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\| \|_\infty$?

5. L'espace (E, N) est-il complet ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La fonction nulle est lipschitzienne et si $f \in \mathrm{E}$ est K-lipschitzienne et $g \in \mathrm{E}$ est K$'$-lipschitzienne, il est aisé de voir, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\lambda f+\mu g$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda|\mathrm{K}+|\mu|\,\mathrm{K}'$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.

2. L'espace E n'est pas fermé dans $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ donc n'est pas complet. En effet, E contient clairement le sous-espace des fonctions polynômes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue non lipschitzienne, comme par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$. Par le théorème de Weierstrass, on sait qu'il existe une suite de fonctions polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. Cette suite est une suite de Cauchy de E mais elle ne converge pas dans E.

3. D'après la question 1, on a $\mathrm{K}(f + g) \leqslant \mathrm{K}(f) + \mathrm{K}(g)$ pour tout couple $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. Il est aussi facile de voir que $\mathrm{K}(\lambda f) = |\lambda|\mathrm{K}(f)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$. En revanche, l'axiome de séparation n'est pas rempli : si $\mathrm{K}(f) = 0$, on peut seulement dire que f est constante. Donc $f \mapsto \mathrm{K}(f)$ est une semi-norme mais n'est pas une norme sur E.

4. De ce qui précède, il résulte que N vérifie l'inégalité triangulaire et est homogène. De plus, si $\mathrm{N}(f) = 0$, on a f constante et $f(0) = 0$, donc f nulle. Ainsi N est bien une norme sur E. Pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [0, 1]$ on a $|f(x) - f(0)| \leqslant \mathrm{K}(f)x \leqslant \mathrm{K}(f)$ donc $|f(x)| \leqslant \mathrm{K}(f) + |f(0)| = \mathrm{N}(f)$. Par suite $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$ pour toute fonction f de E.

En revanche il n'est pas possible de contrôler $\mathrm{N}(f)$ à l'aide de la norme infinie de f. Considérons $f_n : x \mapsto \sin nx$ pour $n \geqslant 1$. Il s'agit clairement d'une fonction de E. Comme $f_n' : x \mapsto n \cos nx$ la fonction f_n est n-lipschitzienne par le théorème des accroissements finis. En fait, comme le taux d'accroissement $\dfrac{\sin nx}{x}$ tend vers n lorsque x tend vers 0^+, on a $\mathrm{K}(f_n) = n$ et donc $\mathrm{N}(f_n) = n$. Mais $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n. Cela prouve que les normes N et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

5. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy pour la norme N. Comme

$\| \|_\infty \leqslant$ N d'après la question précédente, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi de Cauchy pour la norme infinie. Or on sait que l'espace $\mathcal{C}^0([0,1], \| \|_\infty)$ est complet (voir l'exercice 3.1). La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f. On va montrer que $f \in \mathrm{E}$ puis que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f au sens de N. Comme on a $|\mathrm{K}(f_n)-\mathrm{K}(f_p)| \leqslant \mathrm{K}(f_n-f_p) \leqslant \mathrm{N}(f_n-f_p)$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, la suite $(\mathrm{K}(f_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc vers un réel positif K. Pour $(x,y) \in [0,1]^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \mathrm{K}(f_n)|x-y|$. En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $|f(x)-f(y)| \leqslant \mathrm{K}|x-y|$. Donc f est K-lipschitzienne. Montrons pour finir que $\mathrm{N}(f_n - f)$ tend vers 0. Comme $f_n(0)$ tend vers $f(0)$ il suffit de prouver que $\mathrm{K}(f_n - f)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse on peut trouver un rang N tel que $\mathrm{K}(f_n - f_p) \leqslant \varepsilon$ lorsque n et $p \geqslant \mathrm{N}$. Pour n et $p \geqslant \mathrm{N}$, x et y dans $[0,1]$, on a donc $|f_n(y) - f_p(y) - f_n(x) + f_p(x)| \leqslant \varepsilon|x-y|$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f_n(y) - f(y) - f_n(x) + f(x)| \leqslant \varepsilon|x-y|.$$

Donc pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $\mathrm{K}(f_n - f) \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve le résultat. $\lhd$

L'étude des espaces métriques généraux n'étant plus au programme des classes préparatoires nous avons écarté les énoncés les plus anciens qui concernent cette notion. Certains espaces fonctionnels ont toutefois des topologies naturelles qui ne découlent pas forcément d'une norme. C'est par exemple le cas de l'espace des fonctions continues sur un ouvert Ω *de* $\mathbb{R}^n$*, lorsqu'on s'intéresse à la convergence uniforme sur tous les compacts de* Ω*. L'énoncé suivant montre, dans le cas de* $\mathbb{R}^2$*, que cette notion de convergence est donnée par une distance, et que l'espace métrique ainsi obtenu est complet.*

Rappelons qu'une distance sur un ensemble E *est une application de* E^2 *dans* $\mathbb{R}_+$ *notée* $(x,y) \longmapsto d(x,y)$ *telle que*

(i) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$ *;*
(ii) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ d(x,y) = d(y,x)$ *;*
(iii) $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$*.*

On dit alors que (E,d) *est un espace métrique.*

Pour aborder l'exercice, la seule chose à savoir est la définition d'une suite de Cauchy d'un espace métrique (E,d) *: c'est une suite* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *telle que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* N *tel que* $d(x_n,x_p) \leqslant \varepsilon$ *lorsque* $n,p \geqslant \mathrm{N}$*. L'espace* E *est complet lorsque toutes les suites de Cauchy convergent.*

3.6. Convergence compacte

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{D}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant n\}$ et pour $f \in \mathrm{E}$, $\nu_n(f) = \sup\limits_{x \in \mathrm{D}_n} |f(x)|$. Enfin, pour f et g dans E, on pose

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(f-g)}{1+\nu_n(f-g)}.$$

Montrer que d est une distance sur E, pour laquelle E est complet.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Montrons tout d'abord que d est une distance.

• d est bien définie car si $(f,g) \in \mathrm{E}^2$, $\dfrac{1}{2^n} \dfrac{\nu_n(f-g)}{1+\nu_n(f-g)} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série qui définit $d(f,g)$ converge. Il est clair que d est à valeurs positives.

• Montrons que d est séparatrice : soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ tel que $d(f,g) = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(f-g)}{1+\nu_n(f-g)} = 0 \text{ et } \quad \nu_n(f-g) = 0.$$

Il s'en suit que $f-g$ est nulle sur D_n pour tout n et finalement nulle sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. On a donc $f = g$ et la réciproque est immédiate.

• d est clairement symétrique : si $(f,g) \in \mathrm{E}^2$, $d(f,g) = d(g,f)$.

• Montrons que d vérifie l'inégalité triangulaire : soit $(f,g,h) \in \mathrm{E}^3$. De la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de l'application $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}$ et de l'inégalité

$$\frac{u+v}{1+u+v} \leqslant \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v},$$

valable pour u et v positifs, on déduit

$$\frac{\nu_n(f-h)}{1+\nu_n(f-h)} \leqslant \frac{\nu_n(f-g)+\nu_n(g-h)}{1+\nu_n(f-g)+\nu_n(g-h)} \leqslant \frac{\nu_n(f-g)}{1+\nu_n(f-g)} + \frac{\nu_n(g-h)}{1+\nu_n(g-h)}.$$

En divisant par 2^n et en sommant sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$d(f,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h).$$

Montrons maintenant que (E, d) est un espace complet. Rappelons le résultat essentiel suivant : si K est un compact, $\mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach (voir l'exercice 3.1 pour le cas $\mathrm{K} = [0,1]$; la démonstration est identique dans le cas général).

Soit $(f_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de E. On a donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant k_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ d(f_k, f_{k+p}) \leqslant \varepsilon$$

soit encore

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant k_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(f_k - f_{k+p})}{1 + \nu_n(f_k - f_{k+p})} \leqslant \varepsilon\right).$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ donnés, on peut trouver k_0 entier naturel tel que pour tout $k \geqslant k_0$ et tout $p \geqslant 0$

$$\frac{\nu_n(f_k - f_{k+p})}{1 + \nu_n(f_k - f_{k+p})} \leqslant \eta.$$

On désire contrôler $\nu_n(f_k - f_{k+p}) = u$ et on contrôle $t = \dfrac{u}{1+u}\cdot$ Cette relation équivaut à $u = \dfrac{t}{1-t}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1-t}$ est continue en 0, donc si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut choisir $\eta > 0$ tel que pour tout $0 \leqslant t \leqslant \eta$, $\dfrac{t}{1-t} \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, si k_0 est un entier associé à cette valeur de η, on a $\nu_n(f_k - f_{k+p}) = \|f_{k|\mathrm{D}_n} - f_{k+p|\mathrm{D}_n}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant k_0$ et tout $p \geqslant 0$. On vient donc de prouver que la suite $(f_{k|\mathrm{D}_n})_{k\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}^0(\mathrm{D}_n, \mathbb{R})$. Comme D_n est compact, $(\mathcal{C}^0(\mathrm{D}_n, \mathbb{R}), \nu_n)$ est un espace de Banach : il existe donc une fonction continue $g_n : \mathrm{D}_n \to \mathbb{R}$ vers laquelle la suite $f_{k|\mathrm{D}_n}$ converge uniformément. Cela vaut pour tout entier n donc la suite (f_k) converge simplement sur $\mathbb{R}^2$ vers un fonction g telle que $g_{|\mathrm{D}_n} = g_n$ pour tout $n \geqslant 0$ (par unicité de la limite, la fonction g_{n+1} est un prolongement de g_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g est limite uniforme sur D_n de la suite de fonctions continues f_k, donc est continue sur D_n. Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $g \in \mathrm{E}$. Il reste à montrer que $(f_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers g pour la distance d. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. D'autre part, par hypothèse, il existe $k_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall k \geqslant k_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(f_k - f_{k+p})}{1 + \nu_n(f_k - f_{k+p})} \leqslant \varepsilon.$$

Sur $(\mathcal{C}^0(\mathrm{D}_n, \mathbb{R}), \nu_n)$, l'application ν_n est continue. Par conséquent $\lim\limits_{p\to+\infty} \nu_n(f_k - f_{k+p}) = \nu_n(f_k - g_n) = \nu_n(f_k - g)$. En faisant tendre p vers l'infini, il s'ensuit que, pour $k \geqslant k_0$,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(f_k - g)}{1 + \nu_n(f_k - g)} \leqslant \varepsilon.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^n}\dfrac{\nu_n(f_k-g)}{1+\nu_n(f_k-g)} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, on obtient, pour $k \geqslant k_0$,

$$d(f_k,g)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\nu_n(f_k-g)}{1+\nu_n(f_k-g)} \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2^n}\frac{\nu_n(f_k-g)}{1+\nu_n(f_k-g)}+\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \leqslant 2\varepsilon.$$

Il en résulte que $(f_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers f pour la distance d.

Conclusion. L'espace (E,d) est un espace métrique complet. $\triangleleft$

Pour préciser la remarque qui précède l'exercice montrons qu'il n'existe pas de norme sur E *qui définit la même topologie que d. Supposons par l'absurde qu'une telle norme existe et notons* B *sa boule unité ouverte. Par hypothèse, cette boule est ouverte pour la topologie définie par d donc il existe $r>0$ tel que $\{f\in \mathrm{E},\, d(0,f)<r\}\subset \mathrm{B}$. Choisissons* N *tel que $\sum\limits_{k=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^k}<r$. Toute fonction f qui est nulle sur* $\mathrm{D_N}$ *vérifie $d(0,f)<r$ donc est dans* B*. Mais c'est absurde car si f est une telle fonction non nulle (et il en existe), alors $\lambda f\in\mathrm{B}$ pour tout réel λ.*

Voici un exercice un peu plus géométrique qui donne une caractérisation, certes anecdotique, des boules ouvertes d'un espace de Banach

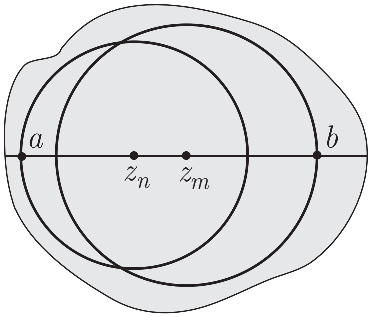
3.7. Une caractérisation des boules ouvertes d'un Banach

> Soit E un espace de Banach, et Ω un ouvert borné non vide de E. On suppose que pour tout $(x,y)\in\Omega^2$, il existe une boule B contenue dans Ω et contenant x et y. Montrer que Ω est une boule ouverte.
>
> (**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Soit $d=\sup\limits_{(x,y)\in\Omega^2}\|x-y\|$ le diamètre de Ω. C'est un nombre réel, puisque Ω est supposé borné. Pour tout $n\geqslant 1$, il existe $(x_n,y_n)\in\Omega^2$ tel que $\|x_n-y_n\|\geqslant d-\dfrac{1}{n}$. Il existe par hypothèse une boule B_n, de centre z_n et de rayon $r_n>0$, contenant x_n et y_n et incluse dans Ω. On peut supposer qu'il s'agit d'une boule fermée quitte à prendre un rayon un peu plus petit.

On va montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Pour cela on va vérifier qu'il s'agit d'une suite de Cauchy et exploiter la complétude de E. Soit $n\leqslant m$ deux entiers. Supposons $z_n\neq z_m$.



Les points a et b étant définis sur la figure ci-dessus, on a

$$d \geqslant \|a-b\| = \|a-z_n\| + \|z_n-z_m\| + \|z_m-b\| = \|z_n-z_m\| + r_n + r_m.$$

Or, $2r_n \geqslant \|x_n - y_n\| \geqslant d - \dfrac{1}{n}$ car x_n et y_n sont dans B_n. On obtient donc

$$\|z_n - z_m\| \leqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Cette inégalité demeure évidemment valable si $z_n = z_m$. Il en résulte que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy. Comme E est complet, elle converge et on note z sa limite. Il semble naturel de conjecturer que Ω est la boule ouverte $\mathrm{B}\Big(z, \dfrac{d}{2}\Big)$.

Soit x un point de $\mathrm{B}\Big(z, \dfrac{d}{2}\Big)$. Posons $\eta = \dfrac{d}{2} - \|z-x\| > 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x - z_n\| \leqslant \|x-z\| + \|z - z_n\| \leqslant \|x-z\| + \frac{1}{n} = \frac{d}{2} - \eta + \frac{1}{n}.$$

Comme $\dfrac{d}{2} \leqslant r_n + \dfrac{1}{2n}$, on a $\|x - z_n\| \leqslant r_n - \eta + \dfrac{3}{2n}$ et à partir d'un certain rang $\|x - z_n\| \leqslant r_n$. Donc x est dans B_n pour n assez grand et en particulier $x \in \Omega$. On a donc une première inclusion : $\mathrm{B}\Big(z, \dfrac{d}{2}\Big) \subset \Omega$.

Comme le diamètre de Ω est égal à d, on a $\Omega \subset \overline{\mathrm{B}\Big(z, \dfrac{d}{2}\Big)}$. Enfin, Ω étant ouvert, on a nécessairement $\Omega = \mathrm{B}\Big(z, \dfrac{d}{2}\Big)$. $\triangleleft$

Notons que le résultat n'est plus vrai si on enlève l'hypothèse Ω *borné : par exemple si* E *est un plan euclidien, un demi-plan ouvert fournit un contre-exemple.*

Le résultat de l'exercice suivant est en revanche fondamental et le lecteur en aura déjà rencontré une application dans l'exercice 1.10.

3.8. Prolongement des applications uniformément continues

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F}$. On suppose A dense dans E, f uniformément continue et F complet. Montrer que f admet un unique prolongement continu $\tilde{f}$ à E tout entier.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• *Unicité.* Soit $\tilde{f}$ répondant au problème et $x \in \mathrm{E}$. Prenons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x (c'est possible car A est dense dans E). Alors, par continuité de $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$$

et par unicité de la limite, $\tilde{f}(x)$ est uniquement déterminé.

• *Existence.* Soit x dans E. Comme A est dense dans E, on peut prendre une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. Montrons que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, il suffit de vérifier qu'elle est de Cauchy puisque F est complet. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f pour ε. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est de Cauchy. Il existe donc un rang n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$, $\|a_n - a_m\| \leqslant \eta$ et il s'ensuit que $\|f(a_n) - f(a_m)\| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers une limite ℓ.

Montrons que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x choisie. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de A qui converge vers x. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ le module d'uniforme continuité associé. Pour n assez grand, $\|a_n - b_n\| \leqslant \eta$ et donc $\|f(a_n) - f(b_n)\| \leqslant \varepsilon$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) - f(b_n) = 0$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

On prend naturellement pour $\tilde{f}(x)$ la limite de la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Clairement $\tilde{f}$ prolonge f à E (pour $x \in \mathrm{A}$ on peut prendre la suite constante $a_n = x$ pour tout n).

Montrons pour finir que $\tilde{f}$ est continue. En fait, on va même prouver que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse $\eta > 0$ tel que si $(x, y) \in \mathrm{A}^2$, avec $\|x - y\| < \eta$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$. Soit x et y dans E tels que $\|x - y\| < \eta$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de A qui convergent vers x et y respectivement. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|a_n - b_n\| = \|x - y\| < \eta$, pour n assez grand, $\|a_n - b_n\| < \eta$ et donc $\|f(a_n) - f(b_n)\| \leqslant \varepsilon$. En faisant tendre n vers l'infini on a $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\| \leqslant \varepsilon$. Donc η est un ε-module de continuité uniforme pour $\tilde{f}$, et $\tilde{f}$ est bien uniformément continue. ◁

Parmi les nombreuses applications de ce résultat, citons par exemple une construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux (ou *mieux réglées) sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans un espace de Banach, en prolongeant l'intégrale des fonctions en escalier qui est elle facile à définir.*

L'exercice suivant présente quelques résultats sur les espaces uniformément convexes. La dernière question montre notamment que la norme triple d'une forme linéaire continue sur un tel espace est toujours atteinte (voir l'exercice 1.28).

3.9. Espaces de Banach uniformément convexes

Soit V un espace de Banach. On dit que V est uniformément convexe lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathrm{B}^2,\ \left(\|x-y\| \geqslant \varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta \right),$$

B étant la boule unité fermée de V.

1. $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\| \ \|_2$ est-il uniformément convexe ? Reprendre la même question pour la norme $\| \ \|_1$ définie par $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

2. Soit V un espace uniformément convexe et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de V telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n,p\to+\infty} \|u_n + u_p\| = 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

3. Soit V un espace uniformément convexe et K un convexe fermé non vide de V. Montrer que K contient un unique élément de norme minimale.

4. Soit V un espace uniformément convexe et f une forme linéaire continue non nulle. Montrer qu'il existe un unique élément x_0 de norme 1 tel que $\|\!|f|\!\| = f(x_0)$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

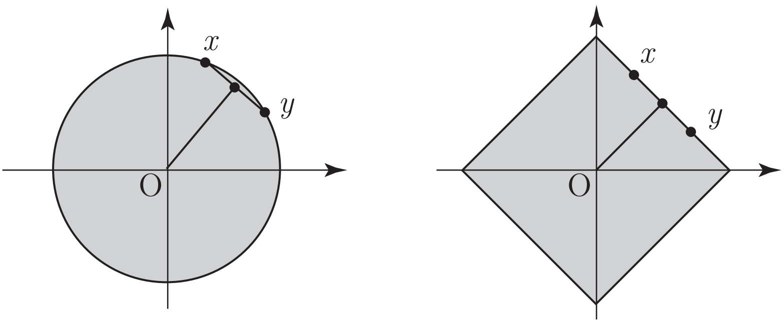
1. Montrons que $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne est uniformément convexe. Soit $(x,y) \in \mathrm{B}^2$. Par le théorème de la médiane on a

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) \leqslant 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\|x-y\|_2 \geqslant \varepsilon$, alors $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$ et il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}$ pour vérifier la définition.

Notons que cette démonstration est valable pour tout espace de Hilbert.

En revanche $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \ \|_1$ n'est pas uniformément convexe. Pour $\varepsilon \in]0,1[$, considérons les vecteurs $x = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\right)$ et $y = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$. On a $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, $\|x-y\|_1 = \varepsilon$ et $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_1 = 1$. Il ne peut donc pas exister de réel $\delta > 0$ vérifiant la définition. La figure suivante représente la boule B dans les deux cas considérés.



2. Avant d'appliquer la propriété d'uniforme convexité aux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se ramène à une suite à valeurs dans B. Comme $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$ il existe un rang N tel que $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. On pose alors $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \in \mathrm{B}$. Pour $n, p \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$v_n + v_p = \frac{1}{\|u_n\|}(u_n + u_p) + \left(\frac{1}{\|u_p\|} - \frac{1}{\|u_n\|}\right)u_p.$$

On en déduit par l'inégalité triangulaire que

$$\left|\|v_n + v_p\| - \frac{\|u_n + u_p\|}{\|u_n\|}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\|u_p\|} - \frac{1}{\|u_n\|}\right| \|u_p\|,$$

puis que

$$|\|v_n + v_p\| - 2| \leqslant \left|\frac{\|u_n + u_p\|}{\|u_n\|} - 2\right| + \left|1 - \frac{\|u_p\|}{\|u_n\|}\right|.$$

Sachant que $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$ et $\lim_{n,p\to+\infty} \|u_n + u_p\| = 2$, on a donc $\lim_{n,p\to+\infty} \|v_n + v_p\| = 2$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donné par l'uniforme convexité de V. Puisque $\lim_{n,p\to+\infty} \left\|\frac{v_n + v_p}{2}\right\| = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n, p > n_0$,

$\left\|\dfrac{v_n+v_p}{2}\right\| > 1-\delta$. Par contraposition de l'implication qui figure dans la définition de l'uniforme convexité, on en déduit que, pour $n, p > n_0$, $\|v_n - v_p\| < \varepsilon$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Comme V est supposé complet elle converge, disons vers un vecteur v. Sachant que, pour $n > \mathrm{N}$, $u_n = \|u_n\| v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers v.

3. Soit $\alpha = \inf\{\|x\|, x \in \mathrm{K}\}$. Par définition de la borne inférieure, on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \alpha$.

• Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et 0 appartient à K car K est fermé. Dans ce cas 0 est l'unique vecteur de K de norme minimale.

• Si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\dfrac{1}{\alpha} x_n\right\| = 1$. D'autre part, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{x_n + x_p}{2} \in \mathrm{K}$ par convexité et on a donc $\alpha \leqslant \left\|\dfrac{x_n+x_p}{2}\right\| \leqslant \dfrac{\|x_n\| + \|x_p\|}{2}$. On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n,p\to+\infty} \left\|\dfrac{x_n+x_p}{2}\right\| = \alpha$. Ainsi, la suite $\left(\dfrac{x_n}{\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la question précédente. On en déduit qu'elle converge, et donc que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Appelons x la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque K est fermé, x appartient à K et $\|x\| = \alpha$ par continuité de la norme. Montrons que x est le seul élément de K de norme α. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $y \in \mathrm{K}$ tel que $\|y\| = \alpha$ et $y \neq x$. Considérons $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\|x-y\|}{\alpha}\right[$ et $\delta > 0$ correspondant. On a alors $\left(\dfrac{1}{\alpha}x, \dfrac{1}{\alpha}y\right) \in \mathrm{B}^2$ et $\left\|\dfrac{1}{\alpha}x - \dfrac{1}{\alpha}y\right\| \geqslant \varepsilon$. On en déduit $\left\|\dfrac{\frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta$, c'est-à-dire $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leqslant \alpha - \alpha\delta$. Or $\dfrac{x+y}{2}$ appartient à K puisque K est convexe, et cela est contraire à la définition de α. Donc K possède un unique élément de norme minimale.

4. Soit $\mathrm{K} = f^{-1}(|\!|\!| f |\!|\!|)$. Comme f n'est pas nulle, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ et K n'est pas vide. De plus, f est continue, donc K est fermé. Enfin K est convexe, puisque c'est un sous-espace affine de V. D'après la question précédente, K possède un unique élément x_0 de norme minimale. Nous allons montrer que $\|x_0\| = 1$.

Par définition de la norme triple on a $|\!|\!| f |\!|\!| = f(x_0) \leqslant \|x_0\| \, |\!|\!| f |\!|\!|$ et donc $\|x_0\| \geqslant 1$. Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \operatorname{Ker} f$. Le vecteur $\dfrac{|\!|\!| f |\!|\!|}{f(x)} x$ appartient à K et on a donc, par définition de x_0, $\dfrac{|\!|\!| f |\!|\!| \|x\|}{|f(x)|} \geqslant \|x_0\|$, c'est-à-dire $\|x_0\| \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant |\!|\!| f |\!|\!|$. Cela reste vrai pour tout x non nul de E. En passant à la borne supérieure on en déduit que $\|x_0\| |\!|\!| f |\!|\!| \leqslant |\!|\!| f |\!|\!|$ et donc $\|x_0\| \leqslant 1$. Finalement $\|x_0\| = 1$ et x_0 est l'unique élément de E de norme 1 dont l'image par f est $|\!|\!| f |\!|\!|$, puisque K contient un seul élément de norme minimale. ◁

Un des intérêts de cette notion géométrique d'uniforme convexité tient au théorème de Milman-Pettis qui affirme que tout espace uniformément convexe est réflexif (c'est-à-dire canoniquement isomorphe à son bidual).

L'énoncé suivant montre qu'un espace de Banach séparable est isométrique à un quotient de l'espace ℓ^1. La dernière question fait donc intervenir la notion d'espace vectoriel quotient et nous renvoyons le lecteur au tome 1 d'algèbre (page 260) pour des rappels sur ce sujet.

3.10. Espaces de Banach séparables

Soit X un espace de Banach réel. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X dense dans la boule unité fermée B de X. On note $\ell^1 = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty\}$. Soit φ l'application de ℓ^1 dans X qui à $(a_n)_{n\geqslant 0}$ associe le vecteur $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.

1. Montrer que φ est bien définie et continue.

2. Montrer que φ est surjective.

3. Montrer qu'on définit une norme sur l'espace quotient $\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi$ en posant $\mathrm{N}(\overline{a}) = \inf\limits_{b\in\overline{a}} \|b\|_1$, puis que l'espace X est isométrique à $(\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi, \mathrm{N})$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^1$. On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\|a_n x_n\| \leqslant |a_n| \|x_n\| \leqslant |a_n|$$

de sorte que la série $\sum a_n x_n$ est absolument convergente et donc convergente, puisque X est complet. Cela justifie la définition de φ. Il est clair que φ est linéaire. L'espace ℓ^1 est naturellement muni de la norme définie par $\|a\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On a la majoration

$$\|\varphi(a)\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n x_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|_1,$$

ce qui montre que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant 1$.

2. Pour montrer que φ est surjective il suffit, par linéarité, de montrer qu'elle atteint tous les vecteurs unitaires. Soit $x \in \mathrm{X}$ de norme 1. On veut montrer l'existence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$. Comme $x \in \mathrm{B}$ on peut déjà trouver n_1 tel que $\|x - x_{n_1}\| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$ Le vecteur $2x - 2x_{n_1}$ est alors dans B et comme la suite $(x_k)_{k>n_1}$ reste dense dans B on peut trouver $n_2 > n_1$ tel que $\|2x - 2x_{n_1} - x_{n_2}\| \leqslant \frac{1}{2}$. Poursuivons avec la même idée. Le vecteur $4x - 4x_{n_1} - 2x_{n_2}$ est dans B et on peut trouver $n_3 > n_2$ tel que $\|4x - 4x_{n_1} - 2x_{n_2} - x_{n_3}\| \leqslant \frac{1}{2}$. Par récurrence on construit ainsi une suite strictement croissante d'indices $(n_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall p \geqslant 1, \quad \|2^p x - 2^p x_{n_1} - \cdots - 2x_{n_p}\| \leqslant 1.$$

Cela s'écrit aussi

$$\forall p \geqslant 1, \quad \|x - x_{n_1} - \cdots - \frac{1}{2^{p-1}} x_{n_p}\| \leqslant \frac{1}{2^p}\cdot$$

Il suffit alors de poser $a_n = 0$ si n n'est pas l'un des entiers n_k et $a_{n_k} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ pour tout $k \geqslant 1$. Il est clair que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est dans ℓ^1 avec $\|a\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 2$, et que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n = \varphi(a)$.

On en déduit que $1 = \|x\| = \|\varphi(a)\| \leqslant |||\varphi|||\|a\| = 2|||\varphi|||$ *donc que* $|||\varphi||| \geqslant \frac{1}{2}$. *Mais évidemment on peut très bien reprendre la construction précédente en remplaçant le réel* $\frac{1}{2}$ *par un réel quelconque de* $]0,1[$. *Il en résulte donc que* $|||\varphi||| = 1$.

3. Montrons un résultat plus général. Soit E un espace normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E (c'est bien le cas du sous-espace $\operatorname{Ker}\varphi$). On pose $\mathrm{N}(\overline{x}) = \inf\limits_{y\in\overline{x}} \|y\|$ pour toute classe $\overline{x}$ de E/F et on va prouver qu'il s'agit d'une norme. La positivité est évidente. Supposons que $\mathrm{N}(\overline{x}) = 0$. On peut donc trouver une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de F telle que $\|x + f_n\| \to 0$. Mais alors la suite $(-f_n)$ converge vers x et comme F est fermé $x \in \mathrm{F}$ et $\overline{x} = 0$. L'axiome d'homogénéité est évident. Passons à l'inégalité triangulaire. Soient $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$ et $(f_1, f_2) \in \mathrm{F}^2$. On a

$$\mathrm{N}(\overline{x_1} + \overline{x_1}) \leqslant \|x_1 + f_1 + x_2 + f_2\| \leqslant \|x_1 + f_1\| + \|x_2 + f_2\|$$

et il suffit de passer à la borne inférieure sur f_1 puis sur f_2 pour obtenir $\mathrm{N}(\overline{x_1} + \overline{x_1}) \leqslant \mathrm{N}(\overline{x_1}) + \mathrm{N}(\overline{x_2})$. Donc N est bien une norme sur l'espace quotient E/F.

Cela s'applique donc au quotient $\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi$. L'application φ induit alors une bijection linéaire $\overline{\varphi}$ entre $\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi$ et X. On va montrer que cette bijection est une isométrie, l'espace $\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi$ étant muni de la norme quotient. Cela découle assez simplement de la remarque donnée à la fin de la question précédente. En effet, soit $x \in \mathrm{X}$ et $a \in \ell^1$ un antécédent de x par φ. On veut prouver que $\|x\| = \mathrm{N}(\overline{a})$. Comme $x = \varphi(a)$, on a $\|x\| \leqslant |||\varphi||| \|a\|_1 \leqslant \|a\|_1$ et comme cela vaut pour tout antécédent a de x, on a $\|x\| \leqslant \mathrm{N}(\overline{a})$. Mais on a vu à la fin de la question précédente, que pour tout $r \in]0,1[$ on peut trouver un antécédent a de x tel que $\|a\|_1 = \dfrac{1}{r}\|x\|$. On a alors $r\mathrm{N}(\overline{a}) \leqslant \|x\|$ et en faisant tendre r vers 1 on récupère l'inégalité inverse. D'où le résultat. $\triangleleft$

Le fait que $\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi$ *est isométrique à* X *implique notamment la complétude de* $\ell^1/\operatorname{Ker}\varphi$. *En fait le lecteur pourra prouver plus généralement que si* E *est un espace de Banach et* F *un sous-espace fermé de* E, *alors le quotient* E/F *est aussi un Banach pour la norme quotient définie ci-dessus.*

L'exercice suivant concerne les algèbres de Banach complexes. Par définition, une algèbre de Banach est une algèbre unitaire A *munie d'une norme* $\| \ \|$, *telle que* $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ *pour tout couple* $(a,b) \in \mathrm{A}^2$, *et qui est complète pour cette norme. Lorsque* E *est un espace de Banach, l'algèbre* $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ *des endomorphismes continus de* E *munie de la norme triple induite par la norme de* E *est une algèbre de Banach. Cet exemple fondamental pourra servir de guide dans la résolution de l'exercice.*

3.11. Spectre d'un élément d'une algèbre de Banach complexe

Soit A une algèbre de Banach complexe d'unité e. Pour $x \in \mathrm{A}$ on pose

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda e - x \text{ non inversible}\}.$$

1. Montrer que $\sigma(x)$ est un compact de $\mathbb{C}$. On admettra pour la suite que $\sigma(x)$ est toujours non vide.

2. On suppose que tout élément non nul de A est inversible. Que peut-on dire de A ?

3. Pour x et y dans A, comparer $\sigma(xy)$ et $\sigma(yx)$.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Notons G le groupe des éléments inversibles de l'algèbre A. Pour prouver que $\sigma(x)$ est fermé, il est naturel de commencer par montrer que G est un ouvert de A.

Si $x \in \mathrm{A}$, on a $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$ pour tout $n \geqslant 1$ par sous-multiplicativité de la norme. Il en résulte que si $\|x\| < 1$ alors la série $\sum x^n$ est absolument convergente et donc convergente puisque A est complète. Si on note y sa somme on a $xy = yx = y - e$ et cela prouve que $e - x$ est inversible d'inverse y. On vient donc de montrer que la boule ouverte de centre e et de rayon 1 est incluse dans G. Il est alors facile de transporter ce résultat en tout point de G.

Soit $x_0 \in \mathrm{G}$ et $h \in \mathrm{A}$ tel que $\|h\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$. On a alors $\|hx_0^{-1}\| \leqslant \|h\|\|x_0^{-1}\| < 1$. On en déduit que $e - hx_0^{-1} \in \mathrm{G}$, puis que $x_0 - h = (e - hx_0^{-1})x_0$ appartient à G. Donc G contient la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $\|x_0^{-1}\|^{-1}$. Ainsi G est ouvert et par conséquent l'ensemble $\mathrm{A} \setminus \mathrm{G}$ des éléments non inversibles de A est fermé.

Soit $x \in \mathrm{A}$ et $f_x : \lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \lambda e - x \in \mathrm{A}$. La fonction f_x est continue car

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2, \quad \|f_x(\lambda) - f_x(\lambda')\| \leqslant |\lambda - \lambda'|\|e\|.$$

Comme $\sigma(x)$ est l'image réciproque par f_x de $\mathrm{A} \setminus \mathrm{G}$ il est fermé dans $\mathbb{C}$. De plus, si $|\lambda| > \|x\|$ alors, d'après ce qui précède, $e - \lambda^{-1}x \in \mathrm{G}$ et $\lambda e - x \in \mathrm{G}$ donc λ n'appartient pas à $\sigma(x)$. Autrement dit si $\lambda \in \sigma(x)$ alors $|\lambda| \leqslant \|x\|$ donc $\sigma(x)$ est borné.

Conclusion. L'ensemble $\sigma(x)$ est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{C}$. C'est un compact.

La non-vacuité de $\sigma(x)$ n'est pas triviale et nécessite quelques résultats sur les fonctions holomorphes.

2. Supposons que $\mathrm{G} = \mathrm{A} \setminus \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{A}$ et $\lambda \in \sigma(x)$ (on a admis que $\sigma(x)$ est non vide). Comme $\lambda e - x$ n'est pas inversible, il est nul et $x = \lambda e$. Ainsi $\mathrm{A} = \mathbb{C}e$ et il est facile de voir que l'application $\varphi : \lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \lambda e \in \mathrm{A}$ est un isomorphisme d'algèbre. Nous venons de démontrer que A est isomorphe au corps $\mathbb{C}$.

Le résultat de cette question constitue le théorème de Gelfand-Mazur.

3. Lorsque $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'ensemble $\sigma(x)$ est le spectre de l'endomorphisme x, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres. On a alors $\sigma(xy) = \sigma(yx)$ pour deux endomorphismes x et y quelconques, car xy et yx ont le même polynôme caractéristique. Notons que lorsque E est de dimension infinie le spectre $\sigma(x)$ d'un endomorphisme $x \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas forcément réduit à l'ensemble des valeurs propres : une valeur propre est un scalaire λ tel que $\lambda \operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - x$ n'est pas injectif, mais en dimension infinie un endomorphisme injectif n'est pas nécessairement inversible et on a donc seulement l'inclusion $\operatorname{Sp} x \subset \sigma(x)$.

Nous allons voir que dans le cas d'une algèbre de Banach quelconque les ensembles $\sigma(xy)$ et $\sigma(yx)$ sont presque égaux seul le scalaire 0 posant un problème. En effet, soit $\lambda \neq 0$. Montrons que $\lambda \in \sigma(xy)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma(yx)$. Cela revient à démontrer que $\lambda e - xy \in \mathrm{G}$ si et seulement $\lambda e - yx \in \mathrm{G}$ ou encore que $e - \lambda^{-1}xy \in \mathrm{G}$ si et seulement si $e - \lambda^{-1}yx \in \mathrm{G}$.

Dans le cas où $|\lambda^{-1}|\|x\|\|y\| < 1$ on a $\|\lambda^{-1}xy\| < 1$ et $\|\lambda^{-1}yx\| < 1$ puisque la norme est une norme d'algèbre et nous savons alors, d'après la question 1, que $e - \lambda^{-1}xy$ et $e - \lambda^{-1}yx$ sont dans G avec

$$(e - \lambda^{-1}xy)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n}(xy)^n \quad \text{et} \quad (e - \lambda^{-1}yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n}(yx)^n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(e - \lambda^{-1}yx)^{-1} &= e + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} y(xy)^{n-1}x \\ &= e + \lambda^{-1}y\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n}(xy)^n\right)x \\ &= e + \lambda^{-1}y(e - \lambda^{-1}xy)^{-1}x.\end{aligned}$$

Inspirons-nous de ce résultat pour traiter le cas général [1]. Supposons que $e - \lambda^{-1}xy \in \mathrm{G}$ et notons t son inverse. Montrons qu'alors $e - \lambda^{-1}yx \in \mathrm{G}$, et a pour inverse $u = e + \lambda^{-1}ytx$. Pour cela, calculons $(e - \lambda^{-1}yx)u$:

$$(e - \lambda^{-1}yx)u = e - \lambda^{-1}yx + \lambda^{-1}ytx - \lambda^{-2}yxytx.$$

Or, par définition de t, $(e - \lambda^{-1}xy)t = e$, et donc $-e + t - \lambda^{-1}xyt = 0$, puis

$$-\lambda^{-1}yx + \lambda^{-1}ytx - \lambda^{-2}yxytx = 0.$$

On en déduit que $(e - \lambda^{-1}yx)u = e$ et on montre de même que $u(e - \lambda^{-1}yx) = e$. Ceci prouve que $e - \lambda^{-1}yx \in \mathrm{G}$. Comme x et y jouent des rôles symétriques, on a bien l'équivalence voulue.

Conclusion. Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda \in \sigma(xy)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma(yx)$ autrement dit

$$\boxed{\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}}.$$

Il reste à examiner si on a nécessairement $\sigma(xy) = \sigma(yx)$, c'est-à-dire si $0 \in \sigma(xy)$ équivaut à $0 \in \sigma(yx)$, soit encore si $xy \in \mathrm{G}$ équivaut à $yx \in \mathrm{G}$.

• Montrons que si A est de dimension finie, la réponse est positive. Soit $(x, y) \in \mathrm{A}^2$ tel que $xy \in \mathrm{G}$. Montrons qu'alors x et y sont dans G. Considérons pour cela l'application $\varphi_x : a \in \mathrm{A} \longmapsto ax \in \mathrm{A}$. L'application φ_x est clairement linéaire. Montrons qu'elle est injective. Soit $a \in \mathrm{A}$ tel que $ax = 0$. Par hypothèse, xy est inversible : il existe $z \in \mathrm{A}$ tel

1. Le lecteur rencontrera cette même idée dans l'exercice 3.2 du tome 1 d'algèbre.

que $xyz = e$. On a alors : $a = axyz = 0yz = 0$. Le noyau de φ_x est réduit à $\{0\}$ et φ_x est injective. Comme A est de dimension finie, φ_x est bijective. En particulier, il existe $x' \in \mathrm{A}$ tel que $x'x = e$. Si on considère maintenant l'application $\psi_x : a \in \mathrm{A} \longmapsto xa \in \mathrm{A}$, on a $xa = 0$ qui implique $a = x'xa = 0$. L'application ψ_x est elle aussi linéaire et injective. Il existe donc $x'' \in \mathrm{A}$ tel que $xx'' = e$. Ainsi x est inversible à droite et à gauche, donc inversible. On a donc $x \in \mathrm{G}$ et $y = x^{-1}(xy) \in \mathrm{G}$. On en déduit $yx \in \mathrm{G}$. Étant donnés les rôles symétriques joués par x et y, on a bien l'équivalence voulue.

Conclusion. Si A est de dimension finie alors, pour tout $(x, y) \in \mathrm{A}^2$, on a $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

• En revanche si A n'est pas de dimension finie, on peut ne pas avoir $\sigma(xy) = \sigma(yx)$. Donnons un exemple. Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \ell^2(\mathbb{C})$ des suites de carré sommable, muni de la norme canonique définie, pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ par

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2.$$

L'espace E muni de cette norme est un espace de Banach (c'est en fait un espace de Hilbert, voir l'exercice 3.18 ci-après). Considérons l'algèbre A des endomorphismes continus de E, munie de la norme associée. Comme E est un espace de Banach, A est une algèbre de Banach, dont l'unité est id_{E}.

Considérons les éléments de A suivants : $x : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $y : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (0, u_0, u_1, \ldots)$. On a, pour tout $u \in \mathrm{E}$, $\|x(u)\| \leqslant \|u\|$ et $\|y(u)\| \leqslant \|u\|$ donc x et y appartiennent à A. On a, pour tout $u = (u_n) \in \mathrm{E}$, $xy(u) = u$ donc $xy = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \in \mathrm{G}$. Mais, pour tout $u = (u_n) \in \mathrm{A}$, $yx(u) = (0, u_1, u_2, \ldots)$. L'application yx n'est pas injective, car toutes les suites dont tous les termes sauf le premier sont nuls ont pour image 0 par yx. *A fortiori*, yx n'est pas inversible. On a donc $0 \notin \sigma(xy)$ et $0 \in \sigma(yx)$. Dans cet exemple, $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$. $\lhd$

Les exercices suivants concernent le théorème de Baire.

3.12. Le théorème de Baire

Soit E un espace vectoriel normé complet.

1. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E. Montrer que l'ensemble $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E.

2. Soit $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide de E. Montrer que $\mathrm{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n$ est encore d'intérieur vide.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Montrons qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $\|a-x\| < r$. Comme la boule $\mathrm{B}(a,r)$ est ouverte, elle rencontre l'ouvert dense Ω_0. Il existe donc $x_0 \in \mathrm{E}$ et $0 < r_0 \leqslant 1$ tels que la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(x_0,r_0)$ soit incluse dans $\mathrm{B}(a,r)\cap\Omega_0$ (cette intersection est ouverte). L'ouvert $\mathrm{B}(x_0,r_0)$ rencontre l'ouvert dense Ω_1. Il existe donc $x_1 \in \mathrm{E}$ et $0 < r_1 \leqslant \frac{1}{2}$ tels que $\overline{\mathrm{B}}(x_1,r_1) \subset \mathrm{B}(x_0,r_0)\cap\Omega_1$. On poursuite la construction des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(r_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence : si $x_0,\dots,x_{n-1}$ sont définis, ainsi que $r_0,\dots,r_{n-1}$, l'ouvert $\mathrm{B}(x_{n-1},r_{n-1})$ rencontre l'ouvert dense Ω_n. Il existe donc $x_n \in \mathrm{E}$ et $0 < r_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ tels que $\overline{\mathrm{B}}(x_n,r_n) \subset \mathrm{B}(x_{n-1},r_{n-1})\cap\Omega_n$.

Les boules fermées $\overline{\mathrm{B}}(x_n,r_n)$ sont emboîtées : il s'ensuit que si $n \geqslant \mathrm{N}$ et $m \geqslant \mathrm{N}$, x_n et x_m sont tous deux dans $\overline{\mathrm{B}}(x_\mathrm{N},r_\mathrm{N})$ et

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|x_n - x_\mathrm{N}\| + \| x_\mathrm{N} - x_m\| \leqslant \frac{2}{2^\mathrm{N}} = \frac{1}{2^{\mathrm{N}-1}}.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est donc de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers un élément $x \in \mathrm{E}$.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $x_n \in \overline{\mathrm{B}}(x_\mathrm{N},r_\mathrm{N})$. Comme $\overline{\mathrm{B}}(x_\mathrm{N},r_\mathrm{N})$ est fermée, la limite x est encore dans cette boule. En particulier, $x \in \Omega_\mathrm{N}$ et $x \in \mathrm{B}(a,r)$ puisque $\overline{\mathrm{B}}(x_\mathrm{N},r_\mathrm{N}) \subset \cdots \subset \overline{\mathrm{B}}(x_0,r_0) \subset \mathrm{B}(a,r)$. On conclut que $x \in \Omega\cap\mathrm{B}(a,r)$.

Conclusion. L'ensemble Ω est dense dans E.

2. Soit Ω_n le complémentaire de F_n pour $n \in \mathbb{N}$. Alors Ω_n est un ouvert dense de E, donc l'intersection Ω des Ω_n est dense d'après la question précédente, et le complémentaire de Ω, qui est égal à la réunion des F_n, est sans point intérieur. ◁

Le théorème de Baire est à la base de nombreux résultats généraux sur les espaces de Banach : théorème de Banach-Steinhaus (voir l'exercice 3.13 ci-après), théorème de l'application ouverte (voir les exercices 1.37 et 1.38 pour des cas particuliers),... On en déduit aussi qu'un espace normé de dimension dénombrable (comme $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par exemple) ne peut pas être complet : en effet, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de l'espace considéré, les sous-espaces $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont tous fermés et d'intérieur vide et leur réunion est égale à l'espace entier.

3.13. Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace de Banach, F un espace normé et $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $(\mathrm{T}_i(x))_{i\in\mathrm{I}}$ est bornée dans F. Montrer que la famille $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est bornée dans $\mathcal{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

L'outil essentiel est le théorème de Baire utilisé comme suit : si $n \geqslant 1$ on pose $\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{E}, \forall i \in \mathrm{I}, |\mathrm{T}_i(x)| \leqslant n\}$. Les F_n sont des fermés de E et l'hypothèse affirme que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{F}_n.$$

Or l'intérieur de E est E, qui n'est pas vide. Donc, comme E est complet, d'après le théorème de Baire l'un des fermés F_n au moins est d'intérieur non vide. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{B}}(a,r) \subset \mathrm{F}_\mathrm{N}$. Or lorsqu'une application linéaire est bornée sur une boule fermée il est facile d'en déduire une majoration de sa norme triple. En effet, soit $y \in \mathrm{E}$ avec $\|y\| \leqslant 1$. Comme $a + ry \in \overline{\mathrm{B}}(a,r)$, on a pour tout $i \in \mathrm{I}$

$$\|\mathrm{T}_i(a+ry)\| \leqslant \mathrm{N} \quad \text{et} \quad r\|\mathrm{T}_i(y)\| \leqslant \mathrm{N} + \|\mathrm{T}_i(a)\|.$$

Donc $\|\mathrm{T}_i(y)\| \leqslant \dfrac{\mathrm{N}+\|\mathrm{T}_i(a)\|}{r}$ et par suite $\|\!|\mathrm{T}_i|\!\| \leqslant \dfrac{\mathrm{N}+\|\mathrm{T}_i(a)\|}{r}$ et ce pour tout $i \in \mathrm{I}$. ◁

Nous regroupons ci-après plusieurs applications moins théoriques du théorème de Baire. Bien que celui-ci ne soit pas au programme des classes préparatoires, l'application suivante reste par exemple très régulièrement posée aux oraux. Il s'agit d'une généralisation de l'exercice 4.23 du tome 1 d'analyse.

3.14. Le lemme de Croft

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x \geqslant 0$ la suite $f(nx)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

La question est nettement plus facile si on suppose f uniformément continue (voir l'exercice 4.23 du tome analyse 1), et ce cas particulier est fréquemment posé en première question. Pour le cas où f est seulement continue, on va utiliser le théorème de Baire. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On considère pour tout entier n,

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathbb{R}_+,\ \forall p \geqslant n,\ |f(px)| \leqslant \varepsilon\} = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in \mathbb{R}_+,\ |f(px)| \leqslant \varepsilon\}.$$

En tant qu'intersection de parties fermées, F_n est un fermé de $\mathbb{R}$. Par hypothèse, on a $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{F}_n = \mathbb{R}_+$. Comme $\mathbb{R}_+$ n'est pas d'intérieur vide, d'après le théorème de Baire, l'un au moins des ensembles F_n est d'intérieur non vide. Soient donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\alpha < \beta$ tel que $]\alpha, \beta[\subset \mathrm{F}_\mathrm{N}$. Pour tout $p \geqslant \mathrm{N}$ et tout x dans $]\alpha, \beta[$ on a $|f(px)| \leqslant \varepsilon$. Mais pour p assez grand, les intervalles $]p\alpha, p\beta[$ et $](p+1)\alpha, (p+1)\beta[$ se coupent (il suffit que $(p+1)\alpha < p\beta$ *i.e.* que p soit plus grand que $\dfrac{\alpha}{\beta - \alpha}$). Il en résulte que $\bigcup\limits_{p \geqslant \mathrm{N}}]p\alpha, p\beta[$ contient un intervalle de la forme $]\mathrm{A}, +\infty[$. On a pour tout $y \geqslant \mathrm{A}$, $|f(y)| \leqslant \varepsilon$. Comme ε était arbitraire, on a prouvé que f tend vers 0 en $+\infty$. ◁

L'exercice suivant est à rapprocher de l'exercice 6.2 du tome 1 d'algèbre. On y démontre, en utilisant le théorème de Baire, qu'une suite de sous-espaces de même dimension d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire commun.

3.15. Supplémentaire commun

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $p < n$ et $(\mathrm{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces de dimension p.

1. Montrer que $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_k \neq \mathrm{E}$.

2. En déduire l'existence d'un sous-espace vectoriel W de E tel que $\mathrm{W} \oplus \mathrm{F}_k = \mathrm{E}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Comme les F_k sont des sous-espaces de dimension $p < n$, ils sont sans point intérieur (en effet, si F est un sous-espace et si $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{F}$ avec $r > 0$, alors $\mathrm{B}(a, r) - a = \mathrm{B}(0, r) \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{E} = \bigcup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*} \mathrm{B}(0, \lambda r) \subset \mathrm{F}$). D'après le théorème de Baire, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_k$ est sans point intérieur, et en particulier il ne peut pas être égal à E.

2. Montrons l'existence de W par récurrence sur $n-p$. Si $n-p=1$, d'après ce qui précède, il existe $x \in \mathrm{E}$ qui n'appartient à aucun des hyperplans F_k. Clairement, si on pose $\mathrm{W} = \mathbb{R}x$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W} \oplus \mathrm{F}_k = \mathrm{E}$.

Supposons le résultat vrai au rang $n-p-1$ avec $n-p \geqslant 2$. D'après la question 1, il existe $x \in \mathrm{E} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_k$. Notons pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}'_k = \mathrm{F}_k \oplus \mathbb{R}x$. Ce sont des sous-espaces de dimension $p+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe W' supplémentaire commun à tous les F'_k. Posons enfin $\mathrm{W} = \mathrm{W}' \oplus \mathbb{R}x$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{E} = \mathrm{W}' \oplus (\mathrm{F}_k \oplus \mathbb{R}_x) = (\mathrm{W}' \oplus \mathbb{R}x) \oplus \mathrm{F}_k = \mathrm{W} \oplus \mathrm{F}_k$$

par associativité. Donc W est un supplémentaire commun aux F_k. ◁

On peut donner un résultat plus général avec une preuve qui n'utilise pas de topologie : si K *est un corps infini et* I *un ensemble d'indice avec* $|\mathrm{I}| < |\mathrm{K}|$*, un* K*-espace vectoriel* E *ne peut pas être réunion d'une famille* $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *de sous-espaces stricts.*

Comme dernière application, voici une question difficile de convergence uniforme.

3.16. Convergence uniforme

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+\lambda) - f(x) = 0$. Montrer que pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}_+$ cette convergence est uniforme en $\lambda \in [a,b]$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On fixe $0 \leqslant a < b$. Il s'agit de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \geqslant 0,\ \forall x \geqslant \mathrm{A},\ \forall \lambda \in [a,b],\ |f(x+\lambda) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons cette convergence non uniforme sur $[a,b]$. Par conséquent, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que pour tout $\mathrm{A} \geqslant 0$, il existe $x_\mathrm{A} \geqslant \mathrm{A}$ et $\lambda_\mathrm{A} \in [a,b]$ tels que $|f(x_\mathrm{A} + \lambda_\mathrm{A}) - f(x_\mathrm{A})| > \varepsilon'$. Travaillons séquentiellement : en prenant pour A les termes d'une suite qui tend vers $+\infty$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui diverge vers $+\infty$ et une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ du segment $[a,b]$ telles que $|f(x_n+\lambda_n) - f(x_n)| > \varepsilon'$ pour tout n. Par compacité du segment $[a, b]$, on peut très bien supposer que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une valeur λ_∞ quitte à la remplacer par une de ses sous-suites. Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\varepsilon' < |f(x_n + \lambda_n) - f(x_n + \lambda_\infty)| + |f(x_n + \lambda_\infty) - f(x_n)|. \quad (*)$$

L'hypothèse permet de dire que le second terme tend vers 0. Le point délicat est de majorer le premier terme et c'est pour ce faire que l'on utilise le théorème de Baire. Soit $\varepsilon > 0$ qui sera précisé à la fin. On pose pour tout n, $\mathrm{F}_n = \{\lambda \in [a, b],\ \forall x \geqslant n,\ |f(x + \lambda) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}$. On a

$$\mathrm{F}_n = \bigcap_{x\geqslant n} \{\lambda \in [a, b], |f(x + \lambda) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Pour $x \geqslant n$, fixé l'ensemble $\{\lambda \in [a, b], |f(x+\lambda)-f(x)| \leqslant \varepsilon\}$ est un fermé de $[a, b]$, car c'est l'image réciproque du fermé $[0, \varepsilon]$ par une fonction continue. Il en découle que F_n est fermé en tant qu'intersection d'une famille de fermés. Par hypothèse on a

$$[a, b] = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathrm{F}_n.$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet et comme $[a, b]$ est d'intérieur non vide, le théorème de Baire assure l'existence d'un entier N tel que F_N soit d'intérieur non vide. On peut donc trouver $\alpha < \beta$ dans $[a, b]$ tels que $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{F}_\mathrm{N}$. Par conséquent,

$$\forall x \geqslant \mathrm{N}, \quad \forall \lambda \in [\alpha, \beta], \quad |f(x + \lambda) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $x \geqslant \mathrm{N}$ et tout $t \in [0, \beta - \alpha]$,

$$|f(x + t) - f(x)| \leqslant |f(x + t) - f(x + t + \alpha)| + |f(x + t + \alpha) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

car $t + \alpha \in [\alpha, \beta]$.

Reprenons alors l'inégalité $(*)$ ci-dessus : pour n assez grand, on a $x_n + \lambda_n$ et $x_n + \lambda_\infty \geqslant \mathrm{N}$ et $|\lambda_n - \lambda_\infty| \leqslant \beta - \alpha$ donc

$$|f(x_n + \lambda_n) - f(x_n + \lambda_\infty)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Comme $|f(x_n + \lambda_\infty) - f(x_n)|$ tend vers 0, ce terme est aussi inférieur à ε pour n assez grand. On en déduit que pour n assez grand, $\varepsilon' \leqslant 3\varepsilon$. C'est évidemment absurde car on peut prendre $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon'}{3}\cdot$

Conclusion. La convergence de $x \mapsto f(x + \lambda) - f(x)$ vers 0 est uniforme pour $\lambda \in [a, b]$. $\lhd$

Nous avons regroupé maintenant des exercices qui concernent les espaces de Hilbert, c'est-à-dire les espaces préhilbertiens complets. On commence par les aspects géométriques et l'important théorème de projection sur un convexe fermé qui généralise le cas de la dimension finie étudié dans l'exercice 1.43 du tome algèbre 3. L'argument de compacité utilisé pour établir l'existence du projeté est ici remplacé par un argument de complétude.

3.17. Projection sur un convexe fermé

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de H.

1. Soit $x \in \mathrm{E}$.

a. Montrer qu'il existe $y \in \mathcal{C}$ tel que $\|y-x\| = d(x, \mathcal{C})$. Vérifier l'unicité de y. Le point y est appelé *projeté orthogonal de x sur $\mathcal{C}$.*

b. Soit $y \in \mathcal{C}$. Démontrer que y est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathcal{C}$, $\langle y-x, y-z\rangle \leqslant 0$.

2. On note p l'application qui a un élément de H associe son projeté sur $\mathcal{C}$. Montrer que p est 1-lipschitzienne.

3. On suppose que $\mathcal{C}$ est un sous-espace fermé de H. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{H}$, $x - p(x) \in \mathcal{C}^{\perp}$. En déduire que $\mathrm{H} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$. Que peut-on dire de p ?

4. Soit f une forme linéaire continue sur H. Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{H}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{H}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1.a. On pose $d = d(x, \mathcal{C}) = \inf\limits_{h \in \mathcal{C}} \|x-h\|$. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que, pour tout n, $\|h_n - x\|^2 \leqslant d^2 + \dfrac{1}{n}$. On a, pour tout $(z, z') \in \mathrm{H}^2$,

$$\|z-z'\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|z'\|^2 - \|z+z'\|^2.$$

On en déduit, pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{aligned}\|h_n - h_p\|^2 &= 2\|h_n - x\|^2 + 2\|h_p - x\|^2 - \|h_n + h_p - 2x\|^2 \\ &= 2\|h_n - x\|^2 + 2\|h_p - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(h_n + h_p) - x\right\|^2 \\ &\leqslant 2d^2 + \frac{2}{n} + 2d^2 + \frac{2}{p} - 4d^2 \leqslant \frac{2}{n} + \frac{2}{p},\end{aligned}$$

puisque $\dfrac{1}{2}(h_n + h_p) \in \mathcal{C}$. On en déduit que la suite (h_n) est de Cauchy, donc convergente, puisque H est complet. On note y sa limite. Comme $\mathcal{C}$ est fermé, $y \in \mathcal{C}$. Par continuité de la norme, on a $\|y-x\| = d = d(x, \mathcal{C})$.

Montrons l'unicité de y. Supposons qu'il existe $y' \neq y$ dans $\mathcal{C}$ tel que $\|y' - y\| = d$. On a par la même égalité,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2}(y+y') - x\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{2}(x-y) - \frac{1}{2}(x-y')\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2) - \frac{1}{4}\|y-y'\|^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{4}\|y-y'\|^2 < d^2,\end{aligned}$$

ce qui est impossible car $\dfrac{1}{2}(y+y') \in \mathcal{C}$. Donc y est unique.

b. Supposons que y est le projeté de x. Considérons $z \in \mathcal{C}$. Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)y + \lambda z \in \mathcal{C}$, donc

$$\|x - (1-\lambda)y - \lambda z\| = \|x - y + \lambda(y-z)\| \geqslant \|x-y\|.$$

En développant, on en déduit

$$\|x-y\|^2 + 2\lambda\langle x-y, y-z\rangle + \lambda^2\|y-z\|^2 \geqslant \|x-y\|^2.$$

On obtient, pour $\lambda \in \,]0,1]$, $2\langle x-y, y-z\rangle + \lambda\|y-z\|^2 \geqslant 0$, puis en faisant tendre λ vers 0, $\langle y-x, y-z\rangle \leqslant 0$.

Réciproquement, si cette condition est réalisée, on a, pour tout $z \in \mathcal{C}$,

$$\|z-x\|^2 = \|(y-x)-(y-z)\|^2 = \|y-x\|^2 + \|y-z\|^2 - 2\langle y-x, y-z\rangle \geqslant \|y-x\|^2,$$

donc y est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{C}$.

2. Soit $(x,x') \in \mathrm{H}^2$, $y = p(x)$, $y' = p(x')$. On a, d'après la question précédente, $\langle y-x, y-y'\rangle \leqslant 0$ et $\langle y'-x', y'-y\rangle \leqslant 0$. On en déduit en additionnant, $\langle y-y', y-x+x'-y'\rangle \leqslant 0$ et donc $\|y-y'\|^2 \leqslant \langle x-x', y-y'\rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on en déduit

$$\|y-y'\|^2 \leqslant \|x-x'\|\,\|y-y'\|$$

et donc $\|y-y'\| \leqslant \|x-x'\|$. Ainsi l'application p est 1-lipschitzienne donc continue.

3. Soit $x \in \mathrm{H}$, $y = p(x)$. Si $z \in \mathcal{C}$, alors $t = y - z \in \mathcal{C}$ donc d'après la question 1, $\langle y-x, y-t\rangle = \langle y-x, z\rangle \leqslant 0$. Comme $-z \in \mathcal{C}$, on a aussi $\langle y-x, -z\rangle \leqslant 0$ et donc $\langle y-x, z\rangle = 0$. Cela est vrai pour tout $z \in \mathcal{C}$ donc $x - p(x) = x - y$ appartient à $\mathcal{C}^\perp$. En écrivant $x = p(x) + x - p(x)$, on voit que $\mathrm{H} = \mathcal{C} + \mathcal{C}^\perp$. La somme est évidemment directe. La décomposition $x = p(x) + x - p(x)$ montre que p est la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ au sens habituel. Elle est donc linéaire.

4. Traitons d'abord l'existence. Si f est l'application nulle, le vecteur $a = 0$ convient. Sinon $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace strict de H, fermé car

f est continue. D'après la question précédente, $\mathrm{H} = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $(\operatorname{Ker} f)^\perp \neq \{0\}$ car $\operatorname{Ker} f \neq \mathrm{H}$. Soit $h \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, non nul. Alors $f(h) \neq 0$ et, pour tout $x \in \mathrm{H}$, $x - \dfrac{f(x)}{f(h)} h \in \operatorname{Ker} f$. On a donc

$$0 = \left\langle h, x - \frac{f(x)}{f(h)} h \right\rangle = \langle h, x \rangle - \frac{f(x)}{f(h)} \|h\|^2,$$

ce qui équivaut à

$$f(x) = \left\langle \frac{f(h)}{\|h\|^2} h, x \right\rangle.$$

Le vecteur $a = \dfrac{f(h)}{\|h\|^2} h$ convient.

Montrons l'unicité. Soit $a' \in \mathrm{H}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{H}$, $f(x) = \langle a, x\rangle = \langle a', x\rangle$ et donc $\langle a - a', x\rangle = 0$. En particulier $\|a - a'\|^2 = 0$, donc $a' = a$.

Le résultat de cette question constitue le théorème de représentation de Riesz-Fréchet.

Dans l'exercice suivant, on rencontre le modèle d'espace de Hilbert séparable, à savoir l'espace ℓ^2 des suites de carrés sommables.

3.18. Espace ℓ^2

Soit $\mathrm{H}_1 = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \sum n^2 a_n^2 < +\infty\}$,

$\mathrm{H}_0 = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \sum a_n^2 < +\infty\}$,

$\mathrm{H}_{-1} = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \sum \dfrac{a_n^2}{n^2} < +\infty\}$.

1. Définir des produits scalaires sur les H_i et montrer qu'ils sont complets pour les normes associées.

2. Pour $b \in \mathrm{H}_{-1}$, montrer que $\Lambda_b : \mathrm{H}_1 \to \mathbb{R}$ qui à $(a_n)_{n\geqslant 1}$ associe $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ est une forme linéaire continue sur H_1. Quelle est sa norme ? Réciproquement, toute forme linéaire continue sur H_1 est-elle de ce type ?

3. Montrer que la boule unité de H_1 est une partie compacte de H_0.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Traitons un cas plus général qui inclut les trois exemples proposés. Pour $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ suite de réels strictement positifs, notons H_w l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telles que la série $\sum w_n a_n^2$ converge. Si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont dans H_w, de l'inégalité $(a_n+b_n)^2 \leqslant 2a_n^2+2b_n^2$, on déduit que la suite $(a_n+b_n)_{n\geqslant 1}$ est également dans H_w. Comme H_w est clairement stable par la multiplication externe par les scalaires, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $b=(b_n)_{n\geqslant 1}$ dans H_w on pose

$$\langle a,b\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n a_n b_n.$$

Cette série converge car $2a_nb_n \leqslant a_n^2+b_n^2$ pour tout n. On définit ainsi une forme bilinéaire symétrique positive sur H_w. Elle est définie positive car les réels w_n sont tous strictement positifs, et on a donc un produit scalaire sur H_w.

Montrons maintenant que H_w est complet. Soit $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H_w. Posons, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{A}_k=(a_{k,n})_{n\geqslant 1}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour $k,\ell\geqslant k_0$, on ait $\|\mathrm{A}_k-\mathrm{A}_\ell\|\leqslant\varepsilon$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(a_{k,n}-a_{\ell,n})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, on a $|a_{k,n}-a_{\ell,n}|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{w_n}}$ si $k,\ell\geqslant k_0$ et on en déduit que la suite réelle $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par conséquent, elle converge et on note a_n sa limite. En reprenant l'inégalité précédente, on obtient, pour $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ et $k,\ell\geqslant k_0$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n(a_{k,n}-a_{\ell,n})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

En faisant tendre ℓ vers $+\infty$, on obtient, pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\geqslant k_0$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n(a_{k,n}-a_n)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

L'entier $k\geqslant k_0$ étant fixé, cette inégalité vraie pour tout $\mathrm{N}\geqslant 1$ montre que la suite de la variable n de terme général $a_{k,n}-a_n$ appartient à H_w. La suite $(a_{k,n})_{n\geqslant 1}=\mathrm{A}_k$ étant dans H_w, on en déduit que la suite $\mathrm{A}=(a_n)_{n\geqslant 1}$ appartient aussi à H_w, puisque celui-ci est un espace vectoriel. En faisant, pour $k\geqslant k_0$, tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(a_{k,n}-a_n)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

c'est-à-dire $\|\mathrm{A}_k-\mathrm{A}\|\leqslant\varepsilon$. La suite $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers A ce qui montre la complétude de H_w.

Cela s'applique aux exemples de l'énoncé en prenant respectivement $w_n = n^2$, $w_n = 1$ ou $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Dans ce qui précède, on aurait pu en fait se contenter de traiter le cas où $w_n = 1$ pour tout n. En effet, il est facile de vérifier que l'application qui à $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{H}_w$ associe la suite $(\sqrt{w_n}a_n)_{n\geqslant 1}$ est une isométrie entre H_w et H_0 (qui correspond au cas $w_n = 1$ pour tout n).

2. Cette question se propose de décrire le dual topologique de H_1.

• Soit $b = (b_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{H}_{-1}$. Si $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{H}_1$, alors on a pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n|a_n|\frac{|b_n|}{n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n^2 a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n^2}{n^2}} \leqslant \|a\|\|b\|,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela montre que la série $\sum a_n b_n$ converge absolument. On peut donc définir une application Λ_b par

$$a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{H}_1 \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

L'application Λ_b est clairement linéaire. C'est une forme linéaire sur H_1. Ce qui précède montre en outre que, pour tout $a \in \mathrm{H}_1$, $|\Lambda_b(a)| \leqslant \|a\|\|b\|$ donc Λ_b est continue et $|||\Lambda_b||| \leqslant \|b\|$.

Montrons qu'en fait $|||\Lambda_b||| = \|b\|$. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, soit $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\begin{cases} a_n = \dfrac{b_n}{n^2} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N} \\ a_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ La suite a appartient clairement à H_1, $\|a\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} n^2 a_n^2} = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{b_n^2}{n^2}}$ et $\Lambda_b(a) = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{b_n^2}{n^2}$. On en déduit que

$$|||\Lambda_b||| \geqslant \frac{|\Lambda_b(a)|}{\|a\|} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n^2}{n^2}}.$$

Cela étant vrai pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $|||\Lambda_b||| \geqslant \|b\|$. Compte tenu de l'inégalité démontrée précédemment, on a bien $|||\Lambda_b||| = \|b\|$.

• Réciproquement, soit Λ une forme linéaire continue sur H_1. Montrons qu'il existe $b \in \mathrm{H}_{-1}$ tel que $\Lambda = \Lambda_b$. Pour trouver la suite b, il est naturel d'appliquer Λ sur les suites $e_n = (\delta_{p,n})_{p\geqslant 1}$ qui sont clairement dans H_1. On pose donc $b_n = \Lambda(e_n)$ pour tout $n \geqslant 1$ et on va prouver que la suite b ainsi définie est dans H_{-1} puis que $\Lambda = \Lambda_b$.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et la suite $a = (a_n)_{\geqslant 1} \in \mathrm{H}_1$ définie par

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{b_n}{n^2} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N} \\ a_n = 0 & \text{si } n > \mathrm{N}. \end{cases}$$

Autrement dit, on a $a = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{b_n}{n^2} e_n$. Par linéarité, on en déduit

$$\Lambda(a) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n \Lambda(e_n) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n^2}{n^2}.$$

Comme $\|a\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{b_n^2}{n^2}}$, on a donc $\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{b_n^2}{n^2}} = \dfrac{|\Lambda(a)|}{\|a\|} \leqslant \|\!|\Lambda|\!\|$. Cela étant vrai pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \dfrac{b_n^2}{n^2}$ converge et b appartient à H_{-1}.

Par construction les formes linéaires continues Λ et Λ_b sont égales sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\geqslant 1}$. Or celui-ci est dense dans H_1. En effet, si $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{H}_1$ et $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} n^2 a_n^2 \leqslant \varepsilon$ et donc $\|a - \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n e_n\| \leqslant \varepsilon$. On conclut que $\Lambda = \Lambda_b$.

Conclusion. Si on note H_1' l'espace des formes linéaires continues sur H_1 (*i.e.* le dual topologique de H_1), on vient de prouver que l'application

$$\Phi : b \in \mathrm{H}_{-1} \longmapsto \Lambda_b \in \mathrm{H}_1'$$

est une bijection isométrique.

3. Considérons la boule unité $\mathrm{B} = \{(a_n) \in \mathrm{H}_1, \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 a_n^2 \leqslant 1\}$ de H_1. Comme H_1 est inclus dans H_0, c'est vrai *a fortiori* de B. Démontrons que B est compacte dans H_0 en montrant que B vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de tout suite de B, on peut extraire une suite convergente dans B pour la norme de H_0. Soit donc $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de B. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_k = (a_{k,n})_{n\geqslant 1}$.

• On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{A}_k\|^2 = \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 a_{k,n}^2 \leqslant 1$. On en déduit que, pour $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a $|a_{k,n}| \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente. Montrons qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{\varphi(k),n})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On construit φ par extractions successives, afin d'obtenir la propriété voulue pour toutes les valeurs de n, en utilisant un procédé diagonal.

La suite $(a_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée ; il existe donc une suite extraite $(a_{\varphi_1(k),1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, où φ_1 est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On construit ensuite une suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_n(k),n})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Les applications $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant construites, on considère la suite $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_n(k),n+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Elle est bornée. On peut donc en extraire une suite convergente $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_n\circ\varphi_{n+1}(k),n+1})_{k\in\mathbb{N}}$. D'où l'existence de φ_{n+1}.

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(k+1) = \varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(\varphi_{k+1}(k+1)) \geqslant \varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(k+1) > \varphi(k),$$

donc φ est strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \geqslant n$, on a

$$\varphi(k) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1} \circ \ldots \varphi_k(k).$$

L'application $k \longmapsto \varphi_{n+1} \circ \ldots \circ \varphi_k(k)$ est strictement croissante car

$$\varphi_{n+1}\circ\ldots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(k+1) \geqslant \varphi_{n+1}\circ\ldots\circ\varphi_k(k+1) > \varphi_{n+1}\circ\ldots\circ\varphi_k(k).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{\varphi(k),n})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(a_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n(k),n})_{k\in\mathbb{N}}$. Elle est donc convergente. L'application φ a donc les propriétés voulues.

• Notons, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{\varphi(k),n}$ et considérons la suite $\mathrm{A} = (a_n)_{n\geqslant 1}$. Montrons que A appartient à B et que la suite $(\mathrm{A}_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A dans H_0. On a, pour $(k, \mathrm{N}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n^2 a_{\varphi(k),n}^2 \leqslant \|\mathrm{A}_{\varphi(k)}\|^2 \leqslant 1.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} n^2 a_n^2 \leqslant 1$, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Ceci montre que $\sum n^2 a_n^2$ converge et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 a_n^2 \leqslant 1$. Ainsi A appartient à B.

Remarquons que pour toute suite $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ de B et $n_0 \geqslant 1$, on a

$$1 \geqslant \sum_{n\geqslant n_0} n^2 a_n^2 \geqslant n_0^2 \sum_{n\geqslant n_0} a_n^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. On a alors, pour tout $(a_n) \in \mathrm{B}$, $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n^2 < \varepsilon^2$. On obtient en particulier, avec les notations précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n\geqslant n_0} (a_n - a_{\varphi(k),n})^2 \leqslant 2 \sum_{n\geqslant n_0} a_n^2 + 2 \sum_{n\geqslant n_0} a_{\varphi(k),n}^2 \leqslant 4\varepsilon^2.$$

On a, par ailleurs, $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}(a_n-a_{\varphi(k),n})^2=0$. Il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour $k\geqslant k_0$, on ait $\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}(a_n-a_{\varphi(k),n})^2<\varepsilon^2$. On a alors, pour $k\geqslant k_0$,

$$\sum_{n\geqslant 1}(a_n-a_{\varphi(k),n})^2\leqslant 5\varepsilon^2,$$

c'est-à-dire $\|\mathrm{A}_{\varphi(k)}-\mathrm{A}\|=\sqrt{\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_n-a_{\varphi(k),n})^2}\leqslant\sqrt{5}\varepsilon$, la norme étant celle de H_0. La suite $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A dans H_0.

Conclusion. De tout suite de B, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de B, pour la norme de H_0. Donc B est compact dans H_0. $\lhd$

L'exercice suivant utilise le théorème du point fixe de Picard qui est une des conséquences essentielles de la complétude et qui intervient par exemple dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz ou du théorème d'inversion locale. Comme il n'est plus explicitement aux programmes des classes préparatoires, nous en rappelons l'énoncé et la démonstration. Le théorème du point fixe s'énonce ainsi : si E *est un espace de Banach et* $f:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{E}$ *une application contractante (c'est-à-dire* k*-lipschitzienne avec* $k\in[0,1[$*),* f *possède un point fixe unique. Toute suite* (u_n) *de* E *vérifiant* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *converge vers ce point fixe.*

En effet, supposons que f *est* k*-lipschitzienne et considérons* (u_n) *la suite définie par* $u_0\in\mathrm{E}$ *quelconque et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*. On a pour* $n\in\mathbb{N}^*$, $\|u_{n+1}-u_n\|=\|f(u_n)-f(u_{n-1})\|\leqslant k\|u_n-u_{n-1}\|$ *et donc* $\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant k^n\|u_1-u_0\|$*. La série de terme général* $u_{n+1}-u_n$ *est absolument convergente donc convergente, puisque* E *est complet. Cela équivaut à la convergence de la suite* (u_n)*. Comme* f *est continue, puisque lipschitzienne, la limite de la suite* (u_n) *est un point fixe* α *de* f*. Si* β *est un autre point fixe de* f*, on a* $\|\beta-\alpha\|=\|f(\beta)-f(\alpha)\|\leqslant k\|\beta-\alpha\|$ *et donc* $\beta=\alpha$*, puisque* $k<1$*. Ainsi* f *possède un seul point fixe vers lequel converge* (u_n) *pour toute valeur de* u_0*.*

3.19. Racine carrée d'un opérateur strictement accrétif

Soit H un espace de Hilbert réel. On note $\mathcal{L}_c(\mathrm{H})$ l'espace des endomorphismes continus de H muni de la norme d'opérateur et B la boule unité ouverte de $\mathcal{L}_c(\mathrm{H})$.

1. Soit $t \in \mathrm{B}$. Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{2}(u^2 + t)$ de $\mathcal{L}_c(\mathrm{H})$ dans lui-même possède un unique point fixe dans B.

2. Soit $f \in \mathcal{L}_c(\mathrm{H})$ vérifiant $\langle f(x), x\rangle \geqslant a\langle x, x\rangle$ pour un certain réel $a > 0$. Montrer l'existence de $g \in \mathcal{L}_c(\mathrm{H})$ tel que $g^2 = f$ et $\langle g(x), x\rangle \geqslant b\langle x, x\rangle$ pour un certain $b > 0$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Pour alléger les notations, la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(\mathrm{H})$ sera notée avec seulement deux barres.

1. On a bien entendu envie d'appliquer le théorème du point fixe et on pour cela on va chercher une partie fermée de H (donc complète), stable par φ, sur laquelle la restriction de φ est contractante. Notons $r = \|t\| < 1$. Si $\|u\| \leqslant r$, alors on a $\|u^2\| \leqslant \|u\|^2 \leqslant r^2 \leqslant r$ et $\|\varphi(u)\| \leqslant r$. Par conséquent la boule fermée B' de centre 0 et de rayon r est stable par φ. De plus si u et v sont dans B' on a, grâce aux propriétés de la triple norme,

$$\begin{aligned}\|\varphi(v) - \varphi(u)\| &= \frac{1}{2}\|v^2 - u^2\| = \frac{1}{2}\|v(v-u) + (v-u)u\| \\ &\leqslant \frac{\|v\| + \|u\|}{2}\|v - u\| \leqslant r\|v-u\|,\end{aligned}$$

de sorte que la restriction de φ à B' est r-contractante. Le théorème du point fixe assure l'existence et l'unicité d'un point fixe α dans B'. Montrons pour finir que φ ne peut pas avoir un autre point fixe β dans B. Cela découle de la majoration ci-dessus, avec $u = \alpha$ et $v = \beta$: on aurait $\|\beta - \alpha\| \leqslant \dfrac{\|\beta\| + \|\alpha\|}{2}\|\beta - \alpha\|$ et cela impose $\beta = \alpha$, car $\dfrac{\|\beta\| + \|\alpha\|}{2} < 1$.

2. On va essayer d'appliquer la question précédente et d'obtenir g comme point fixe de φ pour un choix judicieux de t. Comme $\varphi(g) = g$ est équivalent à $(g - \mathrm{Id})^2 = \mathrm{Id} - t$, on est tenté de poser $t = \mathrm{Id} - f$. Le problème est que ce t n'est pas nécessairement dans B. Prenons plutôt $t = \mathrm{Id} - \lambda f$ avec $\lambda > 0$ à choisir. Pour $x \in \mathrm{H}$ on a

$$\begin{aligned}\|t(x)\|^2 = \|x - \lambda f(x)\|^2 &= \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, f(x)\rangle + \lambda^2\|f(x)\|^2 \\ &\leqslant (1 - 2a\lambda + \lambda^2\|f\|^2)\|x\|^2.\end{aligned}$$

et $\|t\| \leqslant \sqrt{1 - 2a\lambda + \lambda^2\|f\|^2}$. Pour λ assez petit, on a bien $\|t\| < 1$. Soit c le point fixe donné dans la question précédente, avec cette valeur de t. Il vérifie $(c - \mathrm{Id})^2 = \mathrm{Id} - t = \lambda f$. Posons alors $g = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}(\mathrm{Id} - c)$. On a alors $g^2 = f$ et il reste à montrer que g vérifie la seconde condition imposée.

Pour cela on écrit que $\|c\| \leqslant \|t\|$ (comme on l'a vu dans la question 1). Pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a donc

$$\|c(x)\|^2 = \|x - \sqrt{\lambda} g(x)\|^2 = \|x\|^2 + \lambda \|g(x)\|^2 - 2\sqrt{\lambda}\langle x, g(x)\rangle \leqslant \|t\|^2 \ \|x\|^2$$

ce qui implique $2\sqrt{\lambda}\langle x, g(x)\rangle \geqslant (1 - \|t\|^2)\|x\|^2 \geqslant (2a\lambda - \lambda^2\|f\|^2)\|x\|^2$. C'est le résultat attendu avec $b = a\sqrt{\lambda} - \dfrac{1}{2}\lambda^{\frac{3}{2}}\|f\|^2$. $\triangleleft$

Dans l'exercice suivant, on considère un espace de Hilbert H *possédant une famille totale dénombrable. Une famille totale est une famille orthonormée engendrant un sous-espace dense. On démontre qu'il est isomorphe à* ℓ_2 *et que la boule unité de* H *est compacte pour la convergence faible définie ainsi : une suite* (x_n) *de* H *converge faiblement vers* x *si, pour tout* $y \in \mathrm{H}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$*. Par contre, comme* H *est de dimension infini, la boule unité de* H *n'est pas compacte pour la topologie d'espace vectoriel normé de* H *(qu'on appelle topologie forte par opposition à l'autre), d'après le théorème de Riesz (exercice 2.1).*

3.20. Compacité faible de la boule unité d'un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert. On suppose qu'il existe une suite orthonormale $(e_i)_{i\geqslant 1}$ de H telle que $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\geqslant 1}$ soit dense dans H. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de la boule unité fermée de H.

1. Montrer qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ et $x^* \in \mathrm{H}$ tels que, pour tout $y \in \mathrm{H}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle = \langle x^*, y\rangle$. Montrer que $\|x^*\| \leqslant 1$.

2. Que peut on dire quand $\|x^*\| = 1$?

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Si x^* vérifie les conditions voulues, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, e_i\rangle = \langle x^*, e_i\rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Pour $(n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a $|\langle x_n, e_i\rangle| \leqslant \|x_n\| \, \|e_i\| \leqslant 1$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\langle x_n, e_i\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$, dont on peut extraire une suite convergente. Par un procédé diagonal (cf. exercices 3.3 et 3.18), on peut construire une extraction φ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, e_i\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note alors x_i^* sa limite. Il s'agit de déterminer $x^* \in \mathrm{H}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\langle x^*, e_i\rangle = x_i^*$. On va montrer que le vecteur $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i^* e_i$ convient.

Soit $x \in \mathrm{H}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tel que $\|x - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i\| \leqslant \varepsilon$. Comme $\sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_N)$, on a *a fortiori* $\|x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i\| \leqslant \varepsilon$. Pour tout $p \geqslant N$, $\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $\sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ donc

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi la série $\sum \langle x, e_i \rangle e_i$ converge vers x et par continuité de la norme

$$\|x\|^2 = \lim_{N \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle^2.$$

La série $\sum \langle x, e_i \rangle^2$ converge donc et a pour somme $\|x\|^2$.

On a en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, e_i \rangle^2 \leqslant 1$ et donc, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{N} \langle x_{\varphi(n)}, e_i \rangle^2 \leqslant 1$. Par passage à la limite on obtient $\sum_{i=1}^{N} {x_i^*}^2 \leqslant 1$. Comme ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que la série $\sum {x_i^*}^2$ converge et que $\sum_{i=1}^{+\infty} {x_i^*}^2 \leqslant 1$.

Soit $(\lambda_i)_{\geqslant 1}$ une suite telle que $\sum \lambda_i^2$ converge. Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\|S_{N+p} - S_N\|^2 = \left\| \sum_{i=N+1}^{N+p} \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=N+1}^{N+p} {\lambda_i}^2 \leqslant \sum_{i=N+1}^{+\infty} {\lambda_i}^2$$

et comme $\sum {\lambda_i}^2$ converge, ceci tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Ainsi la suite (S_N) est de Cauchy donc elle converge, puisque H est complet. On note $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i e_i$ sa limite. Par continuité du produit scalaire, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle x, e_i \rangle = \lim_{N \to +\infty} \langle S_N, e_i \rangle = \lambda_i,$$

car $\langle S_N, e_i\rangle = \lambda_i$ si $N \geqslant i$. On a de plus, d'après ce qui a été vu plus haut, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2$.

En appliquant ce qui précède à $\lambda_i = x_i^*$, on voit que l'on peut poser $x^* = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^* e_i$. On a alors $\langle x^*, e_i\rangle = x_i^*$, pour tout $i \geqslant 1$ et $\|x^*\| \leqslant 1$. Il reste à démontrer que, pour tout $y \in H$, $\lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle = \langle x^*, y\rangle$. Pour tout $(x, y) \in H^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\langle x+y, e_i\rangle^2 - \sum_{i=1}^{+\infty}\langle x-y, e_i\rangle^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle.\end{aligned}$$

D'autre part les séries $\sum\langle x, e_i\rangle^2$ et $\sum\langle y, e_i\rangle^2$ convergent (et ont pour somme $\|x\|^2$ et $\|y\|^2$ respectivement), donc on peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{i=N+1}^{+\infty}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty}\langle x, e_i\rangle^2}\sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty}\langle y, e_i\rangle^2} \leqslant \|x\|\sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty}\langle y, e_i\rangle^2}.$$

Soit $y \in H$. On a pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}|\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle - \langle x^*, y\rangle| &= |\langle x_{\varphi(n)} - x^*, y\rangle|\\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{N}\langle x_{\varphi(n)} - x^*, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle\right| + \|x_{\varphi(n)} - x^*\|\sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty}\langle y, e_i\rangle^2}\\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{N}\langle x_{\varphi(n)} - x^*, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle\right| + 2\sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty}\langle y, e_i\rangle^2},\end{aligned}$$

car $\|x_{\varphi(n)}\| \leqslant 1$ et $\|x^*\| \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que la deuxième somme soit $\leqslant \varepsilon$. Comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n\to+\infty}\langle x_{\varphi(n)} - x^*, e_i\rangle = 0$, la première somme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, pour n assez grand, on a $|\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle - \langle x^*, y\rangle| \leqslant 2\varepsilon$. On a donc $\lim_{n \to +\infty}\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle = \langle x^*, y\rangle$.

On a démontré que de toute suite de la boule unité fermée de H*, on peut extraire une suite qui converge faiblement. Autrement dit, la boule unité de* H *est compacte pour la topologie faible.*

Par contre, (x_n) *ne possède pas nécessairement de sous-suite convergente, car la boule unité de* H *n'est pas compacte, puisque* H *n'est pas* *de dimension finie. Si on considère la suite* (e_n)*, elle converge faiblement vers le vecteur nul. En effet, pour tout* $y \in \mathrm{H}$*, on a* $\lim_{n\to+\infty}\langle e_n, y\rangle = 0 = \langle 0, y\rangle$*, car la série* $\sum\langle e_n, y\rangle^2$ *converge, mais* (e_n) *ne contient aucune sous-suite convergente, puisque, pour* $i \neq j$*,* $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$*.*

Il ressort de ce qui précède que tout élément x *de* H *s'écrit* $\sum_{i=1}^{+\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$ *et qu'étant donnée une suite* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *de réels, il existe* $x \in \mathrm{H}$ *tel que, pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$*,* $\langle x, e_i\rangle = x_i$ *si, et seulement si,* $\sum x_i^2$ *converge. L'application* $x \longmapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de* H *sur l'espace vectoriel* ℓ^2 *des suites réelles de carré sommable. C'est en effet un isomorphisme d'espaces vectoriels qui respecte le produit scalaire car, pour* $(x, y) \in \mathrm{H}^2$*,* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle$*.*

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{\varphi(n)} - x^*\|^2 = \|x_{\varphi(n)}\|^2 + \|x^*\|^2 - 2\langle x_{\varphi(n)}, x^*\rangle \leqslant 2 - 2\langle x_{\varphi(n)}, x^*\rangle.$$

D'après la question précédente, on a $\lim_{n\to+\infty}\langle x_{\varphi(n)}, x^*\rangle = \langle x^*, x^*\rangle = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2 - 2\langle x_{\varphi(n)}, x^*\rangle = 0$ et *a fortiori*

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_{\varphi(n)} - x^*\| = 0.$$

La suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x^* pour la norme de H. ◁

3.21. Parties faiblement bornées

Soit E un espace de Hilbert et A une partie de E. On considère la propriété :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \exists c_x \in \mathbb{R}_+, \forall a \in \mathrm{A}, |\langle x, a\rangle| \leqslant c_x \quad (*)$$

1. Donner des exemples de parties A vérifiant $(*)$.

2. On veut prouver que si A vérifie $(*)$, alors A est bornée. Le démontrer si E est de dimension finie.

3. On suppose E de dimension infinie et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe A non bornée qui vérifie $(*)$. Soit $(m_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. Construire par récurrence deux suites $(x_k)_{k\geqslant 1} \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}^*}$ et $(a_k)_{k\geqslant 1} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}^*}$ telles que $\|x_k\| = 1$, $|\langle x_k, a_k\rangle| \geqslant m_k$ et $x_k \perp \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}, a_1, \dots, a_{k-1})$ pour tout k.

4. Conclure.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Pour $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{A}$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de majorer $|\langle x, a\rangle|$ par $\|x\|\|a\|$, donc toute partie A bornée vérifie $(*)$. On va voir dans la suite de l'exercice que la réciproque est vraie.

2. Supposons E de dimension finie n et considérons $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A une partie vérifiant $(*)$. Pour tout $a \in \mathrm{A}$ on a

$$\|a\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, a\rangle^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_{e_i}^2,$$

ce qui prouve que la partie A est bornée.

3. On suppose que E n'est pas de dimension finie et qu'il existe une partie A non bornée vérifiant $(*)$. Comme A n'est pas bornée, on peut trouver $a_1 \in \mathrm{A}$ tel que $\|a_1\| > m_1$. En prenant $x_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$, on a $\|x_1\| = 1$ et $|\langle x_1, a_1\rangle| = \|a_1\| > m_1$.

Supposons $x_1, \ldots, x_{k-1}, a_1, \ldots, a_{k-1}$ construits avec $k \geqslant 2$. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_1, \ldots, a_{k-1})$. Comme F est de dimension finie, on sait que $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$. Notons p (resp. q) la projection orthogonale sur $\mathrm{F}^{\perp}$ (resp. F). Imaginons que pour tout vecteur unitaire x de $\mathrm{F}^{\perp}$ et tout vecteur $a \in \mathrm{A}$, on ait $|\langle a, x\rangle| < m_k$. On a alors, par homogénéité, $|\langle a, x\rangle| \leqslant m_k\|x\|$, pour tout $x \in \mathrm{F}^{\perp}$. On en déduit, pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$\|p(a)\|^2 = \langle a, p(a)\rangle \leqslant m_k\|p(a)\| \text{ et donc } \|p(a)\| \leqslant m_k$$

(c'est vrai si $p(a) = 0$ car $m_k \geqslant 0$). D'autre part, pour tout $x \in \mathrm{F}$ et tout $a \in \mathrm{A}$, on a $|\langle x, q(a)\rangle| = |\langle x, a\rangle| \leqslant c_x$, donc la partie $q(\mathrm{A})$ de F vérifie l'hypothèse $(*)$. Puisque F est de dimension finie, elle est bornée, disons par une constante M, d'après la question précédente. On a alors pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$\|a\|^2 = \|p(a)\|^2 + \|q(a)\|^2 \leqslant m_k^2 + \mathrm{M}^2,$$

ce qui est impossible puisque A n'est pas bornée. On peut donc trouver x_k unitaire dans $\mathrm{F}^{\perp}$ et a_k dans A tels que $|\langle x_k, a_k\rangle| \geqslant m_k$. Cela achève la construction des deux suites par récurrence.

4. On construit un élément x de E que l'on définit comme somme d'une série et qui met en défaut l'hypothèse $(*)$. On considère une suite $(x_k, a_k)_{\geqslant 1}$ comme dans la question précédente, les m_k étant à choisir et on pose $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x_k}{k^2}\cdot$ Cette série est convergente car absolument convergente et E complet. On note $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{k^2}$ la somme partielle. On a, pour $n \geqslant p$, $\langle s_n, a_p\rangle = \langle s_p, a_p\rangle$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\langle x, a_p\rangle = \langle s_p, a_p\rangle = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}\langle x_k, a_p\rangle.$$

On en déduit

$$|\langle x, a_p\rangle| \geqslant \frac{1}{p^2}|\langle x_p, a_p\rangle| - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2}|\langle x_k, a_p\rangle| \geqslant \frac{m_p}{p^2} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{c_{x_k}}{k^2}.$$

Pour avoir $|\langle x, a_p\rangle| \geqslant p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de prendre

$$m_p = p^2\left(p + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{c_{x_k}}{k^2}\right).$$

C'est possible. Il faut prendre $m_1 = 1$, construire a_1 et x_1 tels que $|\langle x_1, a_1\rangle| \geqslant 1$, puis une fois les suites (x_k) et (a_k) étant construites jusqu'au rang $p-1$, choisir $m_p = p^2\left(p + \sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{c_{x_k}}{k^2}\right)$ et construire x_p et a_p comme il est expliqué dans la question précédente. On a alors $|\langle x, a_p\rangle| \geqslant p$ pour tout $p \geqslant 1$. Le vecteur x apporte donc la contradiction recherchée.

Conclusion. Les parties A de E qui vérifient $(*)$ sont les parties bornées. $\lhd$

On peut noter que le résultat de l'exercice est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus (exercice 3.13). En effet, considérons, pour tout $a \in \mathrm{A}$, *la forme linéaire* $\mathrm{T}_a : x \longmapsto \langle x, a\rangle$. *Elle est continue, de norme* $\|a\|$. *Par hypothèse, pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *la famille* $(\mathrm{T}_a(x))_{a\in \mathrm{A}}$ *est bornée. On en déduit que la famille* $(\mathrm{T}_a)_{a\in\mathrm{A}}$ *est bornée dans* $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathbb{R})$, *c'est-à-dire que* A *est borné.*

Il n'est pas difficile de montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée d'un espace euclidien* E *et* $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ *une famille telle que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k - \varepsilon_k\|^2 < 1$, *alors la famille* $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ *est encore une base de* E. *En effet, supposons qu'il existe des réels non tous nuls* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\varepsilon_i = 0$. *On a alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,*

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i - \varepsilon_)\|^2 &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\|(e_i - \varepsilon_)\|\right)^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^{n} \|e_i - \varepsilon_i\|^2 < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.\end{aligned}$$

C'est impossible car $\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$*. L'énoncé suivant généralise ce résultat à une famille totale d'un espace de Hilbert (une famille totale est une famille orthonormée qui engendre un sous-espace dense).*

3.22. Suite proche d'une suite totale

Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit G un sous-espace de H, dense dans H, et $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ linéaire et continue. On note j l'injection canonique de G dans H et on suppose $\|\!|j-f|\!\| < 1$. Montrer qu'il existe un unique prolongement linéaire continu de f à H. On le note g. Montrer que g est bijective et que g^{-1} est continue.

2. Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une suite orthonormale de H qui engendre un sous-espace dense. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une seconde suite de H telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}\|e_n-\varepsilon_n\|^2 < 1$. Montrer que la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ est libre et qu'elle engendre un sous-espace dense dans H.

3. Le résultat précédent reste-t-il vrai si $\sum_{n=0}^{+\infty}\|e_n-\varepsilon_n\|^2 \leqslant 1$?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La construction qui suit est proche de celle de l'exercice 3.8, où on prolonge une application uniformément sur un sous-ensemble dense.

Soit $x \in \mathrm{H}$. Puisque G est dense dans H, il existe une suite (x_n) d'éléments de G qui converge vers x. Si le prolongement g de f existe, on a nécessairement $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, ce qui montre l'unicité de g.

On démontre l'existence. Avec les mêmes notations, la suite (x_n) est de Cauchy et pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on a $\|f(x_n)-f(x_p)\| \leqslant \|\!|f|\!\|\|x_n-x_p\|$. La suite $(f(x_n))$ est donc aussi de Cauchy et, comme H est complet, elle converge (dans H). Montrons que la limite ne dépend pas du choix de la suite (x_n) de G convergeant vers x. Si (y_n) converge également vers x, la suite (x_n-y_n) converge vers 0 et comme $\|f(x_n)-f(y_n)\| \leqslant \|\!|f|\!\|\|x_n-y_n\|$, la suite $(f(x_n)-f(y_n))$ converge vers 0 : les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont même limite. On peut donc poser $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

L'application g ainsi définie prolonge f, car si $x \in \mathrm{G}$, on peut prendre pour (x_n) la suite constante égale à x et on trouve alors $g(x) = f(x)$. Montrons que g est linéaire. Soit $(x,y)\in\mathrm{H}^2$, (x_n) et (y_n) deux suites de G tendant vers x et y respectivement et $\lambda\in\mathbb{R}$. La suite $(\lambda x_n + y_n)$ est à valeurs dans G et converge vers $\lambda x + y$, donc par définition

$$g(\lambda x + y) = \lim_{n\to+\infty} f(\lambda x_n + y_n) \lim_{n\to+\infty} \lambda f(x_n) + f(y_n) = \lambda g(x) + g(y),$$

par linéarité de f et de la limite.

Enfin, si (x_n) est une suite de G convergeant vers x, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_n)\| \leqslant |||f||| \|x_n\|$. Par passage à la limite et grâce à la continuité de la norme, on en déduit $\|g(x)\| \leqslant |||f||| \|x\|$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathrm{H}$, on en déduit que g est continue et que $|||g||| \leqslant |||f|||$. Comme g prolonge f, sa triple norme est plus grande et $|||g||| = |||f|||$.

Montrons que g est bijective. Exploitons pour cela l'hypothèse sur $j - f$. Soit $x \in \mathrm{H}$ et (x_n) une suite de G convergeant vers x. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - f(x_n)\| = \|j(x_n) - f(x_n)\| \leqslant |||j - f||| \|x_n\|$. Par passage à la limite et en utilisant la continuité de la norme, on obtient $|x - f(x)\| \leqslant |||j - f||| \|x\|$. On a donc $|||\,\mathrm{Id}_\mathrm{H} - g||| \leqslant |||j - f||| < 1$. On sait que H étant complet, l'ensemble des endomorphismes continus de H, muni de la norme triple associé est lui aussi complet. Posons $h = \mathrm{Id}_\mathrm{H} - g$ et $k = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n$. Cette série converge absolument, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|||h^n||| \leqslant |||h|||^n$ et $|||h||| < 1$. Donc k est un endomorphisme continu de H. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ on a $g \circ \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} h^n = (\mathrm{Id}_\mathrm{H} - h) \circ \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} h^n = \mathrm{Id}_\mathrm{H} - h^{n+1}$. Comme $h^{\mathrm{N}+1}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, on en déduit $g \circ k = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$. On montre de même que $k \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$. Ainsi g est bijective et $k = g^{-1}$. L'application g^{-1} est donc continue.

2. Notons G le sous-espace vectoriel engendré par la suite (e_n). Par hypothèse, G est dense dans H. Il existe une unique application linéaire f de G dans H telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(e_n) = \varepsilon_n$. Montrons que $j - f$ est continue de norme strictement inférieure à 1. Soit $x \in \mathrm{G}$. Il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_\mathrm{N})$ dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}+1}$ tels que $x = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n e_n$. On en déduit que

$$j(x) - f(x) = x - f(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n (e_n - \varepsilon_n).$$

On majore $\|j(x) - f(x)\|^2$:

$$\|j(x) - f(x)\|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |\lambda_n|\, \|e_n - \varepsilon_n\|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \|e_n - \varepsilon_n\|^2\right),$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La suite (e_n) étant orthonormale, on a $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n^2 = \|x\|^2$. On obtient donc

$$\|j(x)-f(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\|e_n-\varepsilon_n\|^2\right) \leqslant \|x\|^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\|e_n-\varepsilon_n\|^2\right).$$

On en déduit que $j-f$ est continue de norme triple inférieure ou égale à $\sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|e_n-\varepsilon_n\|^2}<1$.

L'application j étant évidemment continue, de norme 1, on en déduit que $f=j-(j-f)$ est continue. On peut appliquer le résultat de la question 1. et considérer le prolongement g de f à H. L'application g est bijective donc injective. *A fortiori*, l'application f est injective. La suite (ε_n) qui est l'image de la suite libre (e_n) par une application injective est elle-même libre.

Soit $y\in\mathrm{H}$. Comme g est bijective, il existe $x\in\mathrm{H}$ tel que $y=g(x)$. Soit (x_n) une suite de G convergeant vers x. Par définition de g, on a $y=g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$. Tout élément de H est limite d'une suite de $f(\mathrm{G})$. Donc $f(\mathrm{G})$ est dense dans H. Mais par définition de f, $f(\mathrm{G})=\mathrm{Vect}(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite (ε_n) engendre bien un sous-espace dense dans H.

3. Montrons que la condition $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|e_n-\varepsilon_n\|^2\leqslant 1$ ne suffit pas en donnant un contre-exemple. On choisit $\varepsilon_0=0$ et pour $n\geqslant 1$, $\varepsilon_n=e_n$. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|e_n-\varepsilon_n\|^2=1$. On voit déjà que la famille (ε_n) n'est pas libre. Posons $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}=\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Supposons qu'il existe une suite (x_n) de F qui converge vers e_0. Comme $e_0\in\mathrm{F}^\perp$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\langle e_0,x_n\rangle=0$. Par continuité du produit scalaire, on en déduit, en faisant tendre n vers l'infini, $\langle e_0,e_0\rangle=0$ et donc $e_0=0$. Ainsi e_0 n'appartient pas $\bar{\mathrm{F}}$ et F n'est pas dense dans E. $\lhd$

3.23. Condition suffisante pour avoir un inverse continu

Soit H un espace de Hilbert complexe et f un endomorphisme continu de H tel que $\langle f(x),x\rangle$ soit réel pour tout x et tel qu'existe $\alpha>0$ vérifiant $\langle f(x),x\rangle\geqslant\alpha\|x\|^2$ pour tout $x\in\mathrm{H}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,f$ est fermé dans H et que $(\mathrm{Im}\,f)^\perp=\{0\}$.

2. En déduire que f a un inverse continu et que $\|\!|f^{-1}|\!\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha}$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Notons que f est injectif car si $f(x)=0$ alors $\|x\|=0$ et $x=0$. Montrons que $\mathrm{Im}\,f$ est fermé de manière séquentielle. Soit $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathrm{Im}\,f$ qui converge vers un point $y\in\mathrm{H}$. Pour tout n, on note x_n

l'antécédent de y_n par f. On montre que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on a en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\alpha\|x_n - x_p\|^2 \leqslant \langle y_n - y_p, x_n - x_p\rangle \leqslant \|y_n - y_p\|\ \|x_n - x_p\|.$$

Il en découle que $\|x_n - x_p\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|y_n - y_p\|$ pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ (c'est trivial dans le cas où $x_n = x_p$). Comme la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy, il en est de même de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, et celle-ci converge. Si on note x sa limite, la continuité de f montre que $f(x) = y$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{Im} f$ est fermé.

Si $x \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ alors $x \perp f(x)$ donc $\alpha\|x\|^2 = 0$ et $x = 0$.

2. On utilise le théorème de projection sur un convexe fermé pour démontrer que $\operatorname{Im} f = \mathrm{E}$ (exercice 3.17 question 3). Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous espace fermé de E, on a $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Im} f$, d'après la question 1. Comme f est injective, c'est un automorphisme.

Si $x \in \mathrm{H}$, alors $\alpha\|f^{-1}(x)\|^2 \leqslant \langle x, f^{-1}(x)\rangle \leqslant \|f^{-1}(x)\|\ \|x\|$ et donc $\|f^{-1}(x)\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x\|$. Ainsi f^{-1} est continue et $|\!|\!| f^{-1} |\!|\!| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$. ◁

3.24. Endomorphismes inversibles à gauche dans un espace de Hilbert

Soit E un espace de Hilbert complexe. On note $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes continus de E et

$$\mathrm{G(E)} = \{u \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E}),\quad \exists v \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E}),\quad v\circ u = id_{\mathrm{E}}\}.$$

1. Donner des exemples d'endomorphismes appartenant à G(E).

2. On prend $\mathrm{E} = \ell^2(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $\mathrm{S} : (x_n)_{n\geqslant 0} \longmapsto (0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ appartient à G(E).

3. Soit $u \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})$. Montrer l'équivalence entre :

(*i*) $u \in \mathrm{G(E)}$;

(*ii*) $\exists \mathrm{C} > 0, \forall x \in \mathrm{E}, \|u(x)\| \geqslant \mathrm{C}\|x\|$;

(*iii*) $\operatorname{Im} u$ est fermée et la corestriction $\overline{u}$ de u sur $\operatorname{Im} u$ est inversible d'inverse continu.

4. Montrer que G(E) est un ouvert de $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$.

5. Soit T l'endomorphisme de $\ell^2(\mathbb{C})$ défini par $\mathrm{T}((x_n)_{n\geqslant 0}) = (x_{n+1})_{n\geqslant 0}$. Déterminer $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C},\quad \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \in \mathrm{G(E)}\}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Tout élément u de $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ inversible et possédant un inverse continu appartient à G(E) (prendre $v = u^{-1}$). En fait, on peut démontrer que si E est un espace de Banach tout isomorphisme continu de E possède un inverse continu (c'est le théorème de Banach). Si E est de dimension finie, G(E) est égal au groupe linéaire de E.

2. E est muni de la norme définie par $\|(x_n)_{n\geqslant 0}\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$. Pour tout $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^2(\mathbb{C})$, on a

$$\|\mathrm{S}((x_n)_{n\geqslant 0})\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2} = \|(x_n)_{n\geqslant 0}\|.$$

L'endomorphisme S est donc continue et $\|\!|\mathrm{S}|\!\| = 1$.

Soit T l'endomorphisme de E défini par $\mathrm{T}((x_n)_{n\geqslant 0}) = (x_{n+1})_{n\geqslant 0}$. Pour tout $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^2(\mathbb{C})$, on a

$$\|\mathrm{T}((x_n)_{n\geqslant 0})\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2} \leqslant \|(x_n)_{n\geqslant 0}\|.$$

L'endomorphisme T est continue et $\|\!|\mathrm{T}|\!\| \leqslant 1$. Il est clair que $\mathrm{T} \circ \mathrm{S} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. On en déduit que S appartient à G(E).

3. Montrons que (*i*) implique (*ii*). Soit $u \in \mathrm{G(E)}$ et $v \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $v \circ u = id_\mathrm{E}$. Notons que $\|\!|v|\!\| \neq 0$, car v ne peut être l'application nulle. On a, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\|x\| = \|v \circ u(x)\| \leqslant \|\!|v|\!\| \|u(x)\| \text{ et donc } \|u(x)\| \geqslant \frac{1}{\|\!|v|\!\|}\|x\|,$$

ce qui est la propriété voulue, avec $\mathrm{C} = \dfrac{1}{\|\!|v|\!\|}\cdot$

Montrons que (*ii*) implique (*iii*). Pour montrer que $\operatorname{Im} u$ est fermée, considérons y, limite d'une suite d'éléments de $\operatorname{Im} u$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que $\lim_{n\to+\infty} u(x_n) = y$. Par hypothèse, on a, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_n - x_p\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{C}}\|u(x_n) - u(x_p)\|.$$

La suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy, puisqu'elle converge vers y, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers x. On a alors, puisque u est continue,

$$y = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = u(x).$$

Ainsi, y appartient à $\operatorname{Im} u$, ce qui démontre que $\operatorname{Im} u$ est fermée.

Notons ensuite que u est injective. En effet, $u(x) = 0$ implique $\mathrm{C}\|x\| = 0$ et donc $x = 0$, puisque $\mathrm{C} > 0$. La corestriction de u à $\operatorname{Im} u$ réalise est donc un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im} u$. Montrons que sa bijection réciproque w est continue. Soit $y \in \operatorname{Im} u$ et $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$. On a par hypothèse

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{C}}\|u(x)\|, \quad \text{c'est-à-dire } \|w(y)\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{C}}\|y\|.$$

Cela montre que w est continue.

Supposons enfin que (*iii*) est réalisée. On reprend les mêmes notations et on note w l'inverse de $\overline{u}$ qui appartient à $\mathcal{L}_c(\operatorname{Im} f)$. Pour étendre w à E, il suffit de composer w et la projection orthogonale p sur $\operatorname{Im} u$. Celle-ci peut être définie, car E est complet et $\operatorname{Im} u$ fermée (cf. exercice 3.17), et elle est continue. On pose donc $v = w \circ p$. C'est un endomorphisme de E, continu, car p et w le sont. Enfin, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$v \circ u(x) = w \circ p(u(x)) = w(u(x)) = w \circ \overline{u}(x) = x,$$

par définition de w. Ainsi, v a toutes les propriétés voulues, ce qui achève la démonstration de l'équivalence des trois propriétés.

4. Soit $u \in \mathrm{G(E)}$. Il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $\|u(x)\| \geqslant \mathrm{C}\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Soit $f \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $\|\!|f - u|\!\| \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{2}\cdot$ On a, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|f(x) - u(x)\| \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{2}$ et donc

$$\|f(x)\| \geqslant \|u(x)\| - \|f(x) - u(x)\| \geqslant \frac{\mathrm{C}}{2}\|x\|.$$

La question précédente montre que f appartient à G(E). Ainsi G(E) contient la boule fermée de centre u et de rayon $\dfrac{\mathrm{C}}{2}$. On en déduit que G(E) est un ouvert de $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$.

5. • Nous avons démontré dans la question 2 que T appartient à $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$. Il en est de même de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathrm{E} = \ell_2(\mathbb{C})$. On a alors $\|(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id_E})(x)\| \geqslant |\lambda|\|x\| - \|\mathrm{T}(x)\|$. Nous avons démontré précédemment que $\|\mathrm{T}(x)\| \leqslant \|x\|$. On en déduit que

$$\|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E})(x)\| \geqslant (|\lambda| - 1)\|x\|.$$

Si $|\lambda| > 1$, ceci montre que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ vérifie la propriété (*ii*), et donc que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ appartient à G(E).

• Montrons qu'a contrario, si $|\lambda| \leqslant 1$, alors $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ n'appartient pas à G(E) car ne vérifie pas (*ii*). Il faut choisir x tel que $\mathrm{T}(x) - \lambda x$ soit petit sans que x ne le soit. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$x_n = \begin{cases} \lambda^n & \text{si } n < n_0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant n_0. \end{cases}$$

On a $x_{n+1} - \lambda x_n = 0$ si $n \neq n_0 - 1$ et $x_{n_0} - \lambda x_{n_0-1} = -\lambda^{n_0}$. On en déduit

$$\|\mathrm{T}(x) - \lambda x\| = |\lambda^{n_0}|.$$

On calcule $\|x\|$. On obtient

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{n_0-1} |\lambda^n|^2 = \begin{cases} n_0 & \text{si } |\lambda| = 1 \\ \dfrac{1-|\lambda|^{2n_0}}{1-|\lambda|^2} & \text{si } |\lambda| \neq 1. \end{cases}.$$

On obtient $\dfrac{\|\mathrm{T}(x) - \lambda x\|}{\|x\|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n_0}} & \text{si } |\lambda| = 1 \\ \dfrac{|\lambda|^{n_0}\sqrt{1-|\lambda|^2}}{\sqrt{1-|\lambda|^{2n_0}}} & \text{si } |\lambda| < 1. \end{cases}$ Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n_0 \to +\infty} \dfrac{\|\mathrm{T}(x) - \lambda x\|}{\|x\|} = 0$. Ceci est contradictoire avec l'existence de $\mathrm{C} > 0$ tel que, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{C})$ $\|\mathrm{T}(x) - \lambda x\| \geqslant \mathrm{C}\|x\|$. La propriété (ii) n'est pas vérifiée et $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'appartient pas à $\mathrm{G(E)}$.

Conclusion. $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ appartient à $\mathrm{G(E)}$ si, et seulement si, $|\lambda| > 1$. $\lhd$

Chapitre 4

Intégrales généralisées

La théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque actuellement au programme des classes préparatoires se rapproche de celle de Lebesgue mais en se limitant au cadre restreint des fonctions continues par morceaux. Cela permet toutefois de disposer, en l'admettant, du puissant théorème de convergence dominée dont il est aisé de déduire les théorèmes indispensables à l'étude des intégrales à paramètre (continuité, dérivation sous le signe intégral).

Historiquement, Lebesgue est amené à proposer une nouvelle théorie de l'intégrale pour dépasser les limites de celles de Riemann que l'on peut résumer ainsi : les difficultés dans la définition des intégrales dites « impropres » (ou « généralisées » i.e définies sur un intervalle quelconque), les hypothèses trop contraignantes des théorèmes de convergence (qui nécessitent une convergence uniforme) et le champ trop restreint d'application de l'intégrale (qui est inadaptée à des fonctions « trop discontinues » comme la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$*). En 1902, Lebesgue dans sa thèse délaisse l'idée de prendre une subdivision du segment* $[a,b]$ *pour plutôt considérer la mesure des images réciproques des éléments d'une partition de l'ensemble des valeurs de* f*. Cette nouvelle intégrale prolonge celle de Riemann, s'applique à une classe plus vaste de fonctions*[1] *et permet de disposer d'un théorème de convergence aux hypothèses nettement plus faibles que la convergence uniforme : une convergence simple et la domination par une fonction intégrable permettent d'écrire*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

C'est le théorème de convergence dominée.

Précisons le vocabulaire et les notations utilisés ici. Si I *est un intervalle quelconque et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux on dit que* f *est intégrable (ou sommable) sur* I *s'il existe* $\mathrm{M} \geqslant 0$ *tel que pour tout segment* K *contenu dans* I *on a* $\int_{\mathrm{K}} |f| \leqslant \mathrm{M}$*. On définit dans ce cas l'intégrale sur* I *de* f *en commençant par le cas où* f *est positive (par* $\int_{\mathrm{I}} f = \sup_{\mathrm{K}\subset\mathrm{I}} \int_{\mathrm{K}} f$ *où* K *parcourt les segments de* I*) et en séparant partie positive/partie négative dans le cas général (et même partie réelle/partie imaginaire pour une fonction à valeurs complexes).*

1. Mais il n'est pas question d'en profiter ici...

La plupart du temps l'intégrabilité d'une fonction f est simplement prouvée par le théorème de comparaison suivant : supposons par exemple $\mathrm{I} = [a, b[$ *avec* $a < b \leqslant +\infty$ *et soit* $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une autre fonction continue par morceaux ; si g est intégrable sur* I *et si on a* $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ *lorsque* $x \to b$ *alors f est aussi intégrable sur* I. *Bien entendu le résultat demeure si f est négligeable devant g ou équivalente à g en b. Lorsque l'intervalle* I *est ouvert,* $\mathrm{I} =]a, b[$, *ou coupe en deux et on étudie l'intégrabilité au voisinage de a et au voisinage de b. Dans bien des cas les fonctions de référence* $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ *sont utiles : une telle fonction est intégrable au voisinage de* $+\infty$ *(respectivement* 0^+*) si et seulement si* $\alpha > 1$ *(respectivement* $\alpha < 1$*).*

Restons dans le cas où $\mathrm{I} = [a, b[$ *avec* $a < b \leqslant +\infty$. *Si f est intégrable sur* I, *le calcul de son intégrale se ramène à une limite puisque*

$$\int_{[a,b[} f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Il est important de noter que la limite de droite ci-dessus peut exister sans que f soit intégrable sur $[a, b[$. *On parle alors d'intégrale (semi)-convergente* [2] *et la limite est notée* $\int_a^b f(t)\,dt$ *: la notation* $\int_{\mathrm{I}} f$ *sera exclusivement réservée au cas où la fonction f est intégrable sur* I.

Dans le premier exercice qui suit il s'agit clairement d'intégrales semi-convergentes.

4.1. Existence d'une intégrale

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $-\infty$ et que $\int_0^{+\infty} f$ existe. Justifier l'existence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$. Notons $\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$. Par deux changements de variables affines, on a

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}} = \int_{\mathrm{A}+a}^{\mathrm{B}+a} f - \int_{\mathrm{A}+b}^{\mathrm{B}+b} f = \int_{\mathrm{B}+b}^{\mathrm{B}+a} f + \int_{\mathrm{A}+a}^{\mathrm{A}+b} f.$$

Le premier terme tend vers 0 quand B tend vers l'infini puisque

2. Il s'agit de la notion d'intégrale généralisée au sens de Riemann anciennement au programme des classes préparatoires.

$$\int_{B+b}^{B+a} f = \int_{B+b}^{+\infty} f - \int_{B+a}^{+\infty} f \xrightarrow[B\to+\infty]{} 0.$$

Quant au second, il converge vers $\ell(b-a)$ quand A tend vers $-\infty$. En effet, prenons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \leqslant M$, on a $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Si A est suffisamment proche de $-\infty$, le segment $[A+a, A+b]$ est contenu dans $]-\infty, M]$ et par intégration de l'inégalité, on obtient

$$\ell(b-a) - (b-a)\varepsilon \leqslant \int_{A+a}^{A+b} f \leqslant \ell(b-a) + (b-a)\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat. On conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ell(b-a)$. $\triangleleft$

Au cours de ce chapitre le lecteur rencontrera plusieurs exercices sur la transformée de Laplace. Si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, sa transformée de Laplace est par définition la fonction $\mathrm{L}f$: $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$. *Par le théorème de comparaison, il est clair que si l'intégrande $g(x,t) = f(t)e^{-xt}$ est intégrable pour une certaine valeur x_0, alors il l'est pour tout $x \geqslant x_0$. Ainsi, s'il est non vide, l'ensemble des valeurs de x telles que $g(x,\cdot)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est un intervalle non majoré. Sa borne inférieure peut être appelée l'abscisse de convergence absolue de la transformée de Laplace. Mais on peut aussi s'intéresser aux valeurs de x pour lesquelles l'intégrale est seulement semi-convergente. L'exercice suivant montre qu'on obtient encore un intervalle non majoré (contenant évidemment le précédent).*

4.2. Domaine de convergence d'une transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\mathrm{d}t$ existe. Montrer que pour tout $x \geqslant a$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$ existe.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

On a la majoration suivante : pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \geqslant a$, $|f(t)e^{-xt}| \leqslant |f(t)|e^{-at}$ si bien que si $t \longmapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en va de même pour $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ par le théorème de comparaison.

Démontrons que c'est encore le cas si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\mathrm{d}t$ existe sans que $t \longmapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable. Comme f est continue, l'application

$$\mathrm{F} : \mathrm{X} \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^{\mathrm{X}} f(t)e^{-at}\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1.$$

Soit $\mathrm{X} \geqslant 0$ et $x > a$. On note $u = x - a > 0$. Pour $\mathrm{X} \geqslant 0$, par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{X}} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{F}'(t)e^{-ut}\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{F}(t)e^{-ut}\right]_0^{\mathrm{X}} + u\int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(t)e^{-ut}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{F}(\mathrm{X})e^{-u\mathrm{X}} + u\int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(t)e^{-ut}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme F admet une limite finie et est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et par théorème de comparaison $t \longmapsto \mathrm{F}(t)e^{-ut}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la limite quand X tend vers $+\infty$ de $\int_0^{\mathrm{X}} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$ existe et vaut

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = u\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)e^{-ut}\mathrm{d}t. \lhd$$

Le lecteur pourra retenir que l'intégration par parties est une technique très efficace pour transformer des intégrales semi-convergentes en des intégrales absolument convergentes. Il y a plusieurs exemples de cela dans la suite.

Nous poursuivons ce chapitre par quelques exercices sur des questions d'intégrabilité.

4.3. Question d'intégrabilité (1)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable. Pour $x \neq 0$, on pose $g(x) = f\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_{-\infty}^0 g(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La fonction $\varphi : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x^2}$ est strictement positive. Elle induit donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant φ_1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\varphi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et un autre $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant φ_2 de $\mathbb{R}_-^*$ sur $\varphi(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le cours, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) si, et seulement si, la fonction $y \longmapsto f(y)\left(\varphi_1^{-1}\right)'(y)$ (resp. $y \longmapsto f(y)\left(\varphi_2^{-1}\right)'(y)$) est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or si $y \in \mathbb{R}$, $x = \varphi_1^{-1}(y)$ et $x' = \varphi_2^{-1}(y)$ sont les racines distinctes du trinôme $\mathrm{X}^2 - y\mathrm{X} - 1$. Ainsi, on a

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad x' = \frac{y - \sqrt{y^2+4}}{2} < 0.$$

Comme $\left(\varphi_i^{-1}\right)' > 0$ pour $i = 1, 2$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\varphi_1^{-1}(y) + \varphi_2^{-1}(y)\right) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = 1,$$

on en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \left(\varphi_i^{-1}\right)' \leqslant 1$ et finalement,

$$0 \leqslant |f(y)|\left(\varphi_i^{-1}\right)'(y) \leqslant |f(y)|.$$

Comme f est supposée intégrable, le théorème de comparaison assure que $y \longmapsto f(y)\left(\varphi_i^{-1}\right)'(y)$ est intégrable pour $i = 1$ et $i = 2$. On conclut donc que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Toujours d'après le théorème de changement de variable pour les fonctions intégrables, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}+^*} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_-^*} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\varphi_1^{-1}\right)'(y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\varphi_2^{-1}\right)'(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\left(\varphi_1^{-1}\right)'(y) + \left(\varphi_2^{-1}\right)'(y)\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y. \lhd\end{aligned}$$

L'énoncé suivant reprend cette question et la complète.

4.4. Question d'intégrabilité (2)

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact.

1. On pose $\varphi : x \longmapsto h\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$. Montrer que φ est continue à support compact. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} \varphi$.

2. Soit maintenant, pour $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < b_{n-1} < a_n$, $\varphi : x \longmapsto h\left(\dfrac{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}{(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})}\right)$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} \varphi$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Notons que φ se prolonge par continuité en 0 (avec $\varphi(0) = 0$) puisque h est nulle au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Comme $\dfrac{x^2-1}{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$, φ est nulle pour x au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$: elle est donc à support compact. Le reste de la première question correspond à l'objet de l'exercice précédent.

2. On a traité dans la question précédente le cas $a_1 = -1$, $b_1 = 0$ et $a_2 = 1$. On va étendre ce résultat. Posons tout d'abord $b_0 = -\infty$ et $b_n = +\infty$. Pour les mêmes raisons que précédemment, au voisinage de b_i, la fonction φ est nulle et $\int_{\mathbb{R}} h$ a donc un sens. On va procéder au découpage suivant

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \varphi.$$

Considérons la fraction rationnelle $\mathrm{F} = \dfrac{(\mathrm{X}-a_1)\cdots(\mathrm{X}-a_n)}{(\mathrm{X}-b_1)\cdots(\mathrm{X}-b_{n-1})}\cdot$ On peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} h(\mathrm{F}(x))\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{b_{i-1}}^{b_i} h(\mathrm{F}(x))\mathrm{d}x.$$

On va, dans chacune des intégrales $\int_{b_{i-1}}^{b_i} h(\mathrm{F}(x))\mathrm{d}x$, faire le changement de variable $y = \mathrm{F}(x)$.

Pour x tendant vers $+\infty$ (ou $-\infty$), on a $\mathrm{F}(x) \sim x$ et donc $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{F} = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{F} = -\infty$. Soit $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Les limites en b_{i-1}^+ et b_i^- sont $\pm\infty$ et sont opposées l'une de l'autre, car seul le facteur $x - a_{i-1}$ change de signe. Nécessairement, la limite de F est $+\infty$ en b_i^- et $-\infty$ en b_i^+. On en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que tout $y \in \mathbb{R}$ possède au moins un antécédent par F dans chaque intervalle $]b_{i-1}, b_i[$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

De plus, la fraction F se décompose en éléments simples de la manière suivante

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + \mathrm{C} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\mathrm{X} - b_i},$$

avec $\mathrm{C}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$. Compte-tenu des limites en b_i^+ et b_i^-, les α_i sont strictement négatifs. Comme $\mathrm{F}' = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{\alpha_i}{(\mathrm{X} - b_i)^2}$, il apparaît que la dérivée de F reste strictement positive sur le domaine de définition. En particulier, F est strictement monotone sur chaque intervalle $]b_{i-1}, b_i[$ et y possède un unique antécédent dans cet intervalle. Notons le x_i. L'application $x \longmapsto \mathrm{F}(x)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]b_{i-1}, b_i[$ sur $\mathbb{R}$ puisque F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, strictement croissante et sa dérivée ne s'annule pas. Les fonctions $y \longmapsto x_i$ sont $\mathcal{C}^\infty$ et on est autorisé à employer la formule de changement de variable dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi &= \sum_{i=1}^{n} \int_{b_{i-1}}^{b_i} h(\mathrm{F}(x))\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y} \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(y) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Calculons $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y}$. Si x est dans $\mathbb{R} \backslash \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, l'équation $\mathrm{F}(x) = y$ équivaut à

$$(x - a_1) \cdots (x - a_n) - y(x - b_1) \cdots (x - b_{n-1}) = 0.$$

C'est une équation polynomiale en x de degré n et compte-tenu de ce qui précède, il y a exactement n racines (distinctes) qui sont $x_1, \ldots, x_n$. Or la somme $x_1 + \cdots + x_n$ n'est autre que l'opposé du coefficient de x^{n-1} dans l'équation polynomiale :

$$x_1 + \cdots + x_n = a_1 + \cdots + a_n + y.$$

Par dérivation on obtient $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y} = 1$ et finalement

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} h(u)\mathrm{d}u}. \ \triangleleft$$

Le théorème de comparaison n'a bien entendu pas de réciproque : par exemple si f est intégrable au voisinage de $+\infty$ on ne peut pas dire que f est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ (cherchez un contre-exemple !). Une hypothèse de monotonie supplémentaire permet toutefois d'avoir le résultat comme le montre l'exercice suivant.

4.5. Fonction intégrable monotone

1. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux décroissante et intégrable. Étudier $\lim\limits_{x \to 0} xf(x)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux décroissante et intégrable. Montrer que $xf(x) \to 0$ en $+\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $x \in]0,1]$. Comme f est décroissante et intégrable sur $]0,x]$ il suffit d'observer que

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x f(x)\mathrm{d}t = xf(x) \geqslant 0$$

puisque l'intégrale de gauche tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

2. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite en $+\infty$ qui est forcément nulle puisque f est intégrable. Pour tout $x \geqslant 0$, on peut minorer ainsi la tranche entre $x/2$ et x :

$$\int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{x/2}^x f(x)\mathrm{d}t = \frac{xf(x)}{2} \geqslant 0.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t = 0$, on conclut par comparaison que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. ◁

Le lecteur trouvera la version discrète pour les séries de la seconde question dans l'exercice 3.10 du tome analyse 1.

Il est très important de noter une différence essentielle avec les séries : une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ *ne tend pas forcément vers* 0 *en* $+\infty$ *(un exemple est donné dans la solution ci-après). Toutefois une hypothèse supplémentaire sur la fonction (par exemple son uniforme continuité) va permettre d'obtenir ce résultat.*

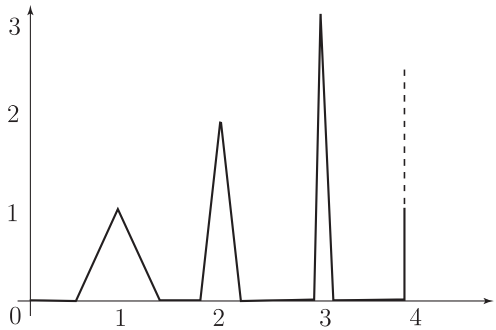
4.6. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (1)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose f et f'^2 intégrables. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Rappelons avant toute chose que f peut être intégrable sans avoir de limite en $+\infty$; f peut même ne pas être bornée au voisinage de $+\infty$ et être continue et intégrable. Pour avoir un exemple il suffit de prendre une fonction continue affine par morceaux dont le graphe est formé de pics dont les aires successives forment une série convergente :



Sur l'exemple de la figure on a pris des triangles centrés en chaque entier $n \geqslant 1$ avec une hauteur égale à n et une base de largeur $\dfrac{1}{n^3}\cdot$ L'aire est alors égale à $\dfrac{1}{2n^2}$, ce qui est le terme d'une série convergente.

Dans notre exercice l'intégrabilité de f'^2 doit donc être utilisée. On va voir qu'elle induit une certaine régularité de f. En effet, pour $x < y$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'\right| = \left|\int_x^y 1 \times f'\right| \leqslant \sqrt{\int_x^y 1}\sqrt{\int_x^y f'^2}$$

de sorte qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| \leqslant \mathrm{K}\sqrt{|y-x|}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est höldérienne de rapport $1/2$. Il est facile de montrer qu'une fonction höldérienne est uniformément continue : soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \varepsilon^2/\mathrm{K}^2$. Alors, si $|y - x| \leqslant \eta$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}}\mathrm{K} = \varepsilon$. On conclut alors avec le lemme suivant (et la version analogue en $-\infty$) :

Lemme. *Soit* $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable et uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+$. *Alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de g pour ε. Prenons $x \geqslant 0$ et $y = x + \eta$. Alors, si $x \leqslant t \leqslant y$, $|g(x) - g(t)| \leqslant \varepsilon$, et $|g(t)| \geqslant |g(x)| - \varepsilon$. Par conséquent :

$$\int_x^y |g| \geqslant |g(x)|(y - x) - \varepsilon(y - x) = \eta(|g(x)| - \varepsilon).$$

D'où $|g(x)| \leqslant \varepsilon + \dfrac{1}{\eta}\displaystyle\int_x^y |g| \leqslant \varepsilon + \dfrac{1}{\eta}\int_x^{+\infty} |g|$. Comme g est intégrable, il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que pour $x \geqslant \mathrm{A}$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} |g| \leqslant \varepsilon\eta$. Par conséquent, si $x \geqslant \mathrm{A}$, $|g(x)| \leqslant 2\varepsilon$. Cela prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. $\diamondsuit$

Conclusion. La fonction f tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. $\lhd$

Dans l'exercice suivant, on utilise le lemme qui vient d'être démontré : une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ admet une limite nulle en $+\infty$.

4.7. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (2)

> Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f''^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
>
> **1.** Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
>
> **2.** Montrer que f tend également vers 0 en $+\infty$.
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, comme f est $\mathcal{C}^2$, $f'(x) - f'(y) = \displaystyle\int_x^y f''$ et on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant \int_{[x,y]} |f''| \leqslant \sqrt{\int_{[x,y]} 1}\sqrt{\int_{[x,y]} f''^2} \leqslant \mathrm{K}\sqrt{|y-x|},$$

où $\mathrm{K} = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f''^2}$. La fonction f' est donc $\dfrac{1}{2}$-höldérienne et en particulier uniformément continue.

Raisonnons par l'absurde et supposons que f' ne tende pas vers 0 en $+\infty$. Dans ces conditions,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \mathrm{A} \geqslant 0,\ \exists x \geqslant \mathrm{A},\ |f'(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Considérons un tel ε. On pose $x_0 = 0$. Il est possible de trouver un réel $x_1 \geqslant x_0 + 1 = 1$ avec $|f'(x_1)| \geqslant \varepsilon$. Si $x_0, \ldots, x_n$ sont construits, on choisit $x_{n+1} \geqslant x_n + 1$ tel que $|f'(x_n)| \geqslant \varepsilon$. Il y a une infinité de termes de cette suite tels que $f'(x_n) \geqslant 0$ ou une infinité de termes tels que $f'(x_n) \leqslant 0$. Quitte à extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à changer f en $-f$, on dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, $f'(x_n) \geqslant \varepsilon$.

Prenons η un module d'uniforme continuité de f' pour $\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$ Alors, si $x \in [x_n - \eta, x_n + \eta]$, $f'(x)$ reste supérieur à $\dfrac{\varepsilon}{2}$. En particulier, f est strictement croissante sur cet intervalle et change de signe au plus une fois. En particulier, sur $[x_n-\eta, x_n]$ ou sur $[x_n, x_n+\eta]$ elle garde un signe constant. Il s'ensuit que l'intégrale de $|f|$ sur cet intervalle en question est supérieure ou égale à l'aire d'un triangle de base η et de hauteur $\dfrac{\varepsilon}{2}$. On en déduit dans les deux cas que

$$\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f| \geqslant \frac{\eta\varepsilon}{4}, \text{ et } \textit{a fortiori } \int_{x_n-\eta}^{+\infty} |f| \geqslant \frac{\eta\varepsilon}{4}.$$

Or la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergeant vers $+\infty$, les intégrales $\int_{x_n-\eta}^{+\infty} |f|$ convergent vers 0 puisque f est intégrable, ce qui constitue une contradiction avec la minoration précédente.

On conclut que f' tend vers 0 en $+\infty$.

2. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant 1$ et comme sur le segment $[0, \mathrm{A}]$, la fonction f' est continue, elle y est en particulier bornée. Au total, f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et f est donc lipschitzienne et en particulier uniformément continue. Comme f est intégrable, on en déduit d'après le lemme de l'exercice 4.6 que f tend également vers 0 en $+\infty$. ◁

4.8. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (3)

> Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $f + f'$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
>
> **1.** Montrer que f est bornée.
>
> **2.** Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On a $2ff' = (f+f')^2 - f^2 - f'^2$ et en intégrant entre 0 et x, f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$f(x)^2 - f(0)^2 = \int_0^x (f+f')^2 - \int_0^x f^2 - \int_0^x f'^2 \leqslant \int_0^x (f+f')^2,$$

d'où $f(x)^2 \leqslant f(0)^2 + \int_0^{+\infty} (f+f')^2$. Ainsi f^2 est majorée et la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $y \leqslant x$, on a

$$f(x)^2 - f(y)^2 = \int_y^x (f+f')^2 - \int_y^x f^2 - \int_x^y f'^2 \leqslant \int_y^x (f+f')^2.$$

et $f(x)^2 \leqslant f(y)^2 + \int_y^x (f+f')^2$. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que pour tout $\mathrm{A} \leqslant y$, on a $\int_y^{+\infty} (f+f')^2 \leqslant \varepsilon$. Par ailleurs, il existe $y_0 \geqslant \mathrm{A}$ tel que $f(y_0)^2 \leqslant \varepsilon$. En effet, dans le cas contraire, f^2 n'est pas intégrable et en considérant

$$f^2(x) - f^2(0) = \int_0^x (f+f')^2 - \int_0^x f^2 - \int_0^x f'^2 \leqslant \int_0^x (f+f')^2 - \int_0^x f^2$$

le terme majorant diverge vers $-\infty$ ce qui est absurde. Ainsi pour tout $x \geqslant y_0$, on a

$$f(x)^2 \leqslant f(y_0)^2 + \int_{y_0}^x (f+f')^2 \leqslant f(y_0)^2 + \int_{y_0}^{+\infty} (f+f')^2 \leqslant 2\varepsilon,$$

et le fonction f tend bien vers 0 en l'infini. $\lhd$

4.9. Sur l'intégrabilité d'un produit

1. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, bornée et $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que uv est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que, pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction uv est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que u est bornée.

3. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que, pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} uv$ est semi-convergente. Montrer que u est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

1. C'est évident car $|uv| \leqslant \|u\|_\infty |v|$. Comme v est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\|u\|_\infty |v|$ puis uv le sont également par théorème de comparaison.

2. En remplaçant éventuellement u par $|u|$, on peut supposer $u \geqslant 0$. Il faut démontrer que u est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$. La démonstration est identique. On raisonne par l'absurde et on suppose que u n'est pas bornée, c'est-à-dire pas majorée sur $\mathbb{R}_+$.

On peut construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, strictement croissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u(a_n) \geqslant n$. En effet, u n'est pas majorée par 1, d'où l'existence de a_1. D'autre part, $a_1, \dots, a_n$ étant construits, la fonction u est majorée sur $[0, a_n + 1]$ car elle est continue ; elle n'est donc pas majorée sur $[a_n + 1, +\infty[$ et il existe $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$ tel que $u(a_{n+1}) \geqslant n + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u étant continue, il existe un segment I_n d'intérieur non vide, contenant a_n tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}_n$, on a $u(x) \geqslant \frac{n}{2} \cdot$ On peut supposer les segments I_n disjoints.

On construit alors une fonction $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $v(x) = 0$ si $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathrm{I}_n} v = \frac{1}{n^2}$ (il suffit de déterminer sur chaque intervalle I_n une fonction continue, nulle aux extrémités de I_n et telle que $\int_{\mathrm{I}_n} v = \frac{1}{n^2}$). La fonction v est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} v = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot$ En revanche, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathrm{I}_n} uv \geqslant \frac{n}{2} \int_{\mathrm{I}_n} v \geqslant \frac{1}{2n}$$

et donc $\int_0^{a_{n+1}} uv \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \cdot$ La fonction uv n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a la contradiction cherchée.

3. On va prendre une fonction v telle que uv soit proche de $|u|$. Considérons la fonction $v : t \longmapsto \frac{u(t)}{|u(t)| + e^{-|t|}} \cdot$ C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée puisque pour tout réel t, $|v(t)| \leqslant \frac{|u(t)|}{|u(t)| + e^{-|t|}} \leqslant 1$. Par hypothèse, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} uv$ est semi-convergente. Comme la fonction $uv : t \longmapsto \frac{u^2(t)}{|u(t)| + e^{-|t|}}$ est positive elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Considérons $w = |u| - uv$. On a pour tout réel t, $w(t) = \frac{|u(t)|e^{-|t|}}{|u(t)| + e^{-|t|}}$ et donc $0 \leqslant w(t) \leqslant e^{-|t|}$. La fonction $t \longmapsto e^{-|t|}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, w est également intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $|u| = w + uv$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que u est intégrable sur $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Au lieu de la fonction $t \longmapsto e^{-|t|}$, n'importe quelle fonction intégrable et strictement positive conviendrait.

Les prochains exercices sont consacrés à des calculs d'intégrales généralisées. Comme pour les intégrales définies on essaye de se ramener à des fractions rationnelles par des changements de variables. En effet, lorsqu'on dispose de la factorisation sur $\mathbb{R}$ du dénominateur d'une fraction rationnelle réelle, il est possible de calculer explicitement sa décomposition en éléments simples et ensuite une primitive. Les éléments de première espèce en $\frac{1}{(x-a)^n}$ $(a \in \mathbb{R})$ s'intègrent en $\ln|x-a|$ si $n = 1$ et $\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ si $n \geqslant 2$. Pour les éléments de deuxième espèce, un changement de variable affine permet de se ramener à $\frac{1}{(x^2+1^2)^n} \cdot$ Il suffit alors de poser $t = \arctan x$ pour réduire le problème à l'intégration *d'un polynôme trigonométrique. Bien sûr, lorsque $n = 1$, on retiendra directement la formule*

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \mathit{Cte}.$$

L'exercice suivant regroupe divers calculs explicites d'intégrales de fonctions rationnelles posés lors d'oraux à l'école polytechnique.

4.10. Calcul d'intégrales (1)

> **1.** Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + x^4} \, \mathrm{d}x$.
>
> **2.** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^2 \mathrm{d}x$.
>
> **3.** Soit $a, b > 0$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Avant de commencer, notons qu'une fraction rationnelle F est équivalente en $\pm\infty$ à cx^n où c est une constante non nulle et n est le degré de F. En un pôle réel a de F on a un équivalent de la forme $\dfrac{c}{(x-a)^k}$ où c est non nul et $k \geqslant 1$. Il résulte du théorème de comparaison que si J est un intervalle non majoré ou non minoré, F est intégrable sur J si et seulement si F n'a aucun pôle dans J et $\deg \mathrm{F} \leqslant -2$. Cette condition est bien vérifiée pour les trois exemples proposés ici ce qui justifie l'existence des intégrales à calculer.

1. Posons $f : x \longmapsto \dfrac{1 - x^2}{1 - x^2 + x^4}$ et $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$. Comme f est paire on a $\mathrm{I} = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f$. Opérons le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, ce qui est licite car $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone :

$$\mathrm{I} = -2\int_{+\infty}^{0} \frac{1 - (1/y)^2}{1 - (1/y)^2 + (1/y)^4} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{y^2 - 1}{y^4 - y^2 + 1} \mathrm{d}y = -\mathrm{I}.$$

On conclut que

$$\boxed{\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + x^4} \mathrm{d}x = 0}.$$

2. Il s'agit d'un élément simple de deuxième espèce et le changement de variable classique à appliquer est $t = \arctan x$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2 t)}{(1+\tan^2 t)^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\cdot\end{aligned}$$

3. On a

$$\frac{1}{\mathrm{X}^2+a^2}-\frac{1}{\mathrm{X}^2+b^2}=\frac{b^2-a^2}{(\mathrm{X}^2+a^2)(\mathrm{X}^2+b^2)}\cdot$$

Par conséquent, si $a \neq b$, on peut écrire

$$\mathrm{J}(a,b)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)\mathrm{d}x,$$

ce qui donne

$$\mathrm{J}(a,b)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\left[\arctan\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{b}\left[\arctan\frac{x}{b}\right]_{-\infty}^{+\infty}\right)=\frac{\pi}{ab(a+b)}\cdot$$

Si $a=b$, on peut poser $y=\dfrac{x}{a}$ qui est un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone pour se ramener à l'intégrale calculée à la question précédente :

$$\mathrm{J}(a,a)=a\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}y}{(a^2+a^2y^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2}=\frac{\pi}{2a^3}\cdot$$

Il est également possible d'invoquer un passage à la limite. À $b>0$ fixé, la fonction $g:(a,x)\longmapsto\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ est continue. Prenons $\alpha>0$. On a alors pour $a>\alpha$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant g(a,x)\leqslant g(\alpha,x)$ avec $g(\alpha,.)$ intégrable. Cette domination nous assure que la fonction $a\longmapsto\int_{\mathbb{R}}g(a,x)\mathrm{d}x$ est continue sur $]\alpha,+\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque la continuité est une propriété locale. Ainsi

$$\mathrm{J}(a,b)=\frac{\pi}{ab(a+b)}\xrightarrow[a\to b]{}\mathrm{J}(a,a)=\frac{\pi}{2a^3}\cdot$$

Conclusion. Pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{ab(a+b)}}.\ \triangleleft$$

L'exemple de l'exercice suivant est nettement plus technique.

4.11. Calcul d'intégrale (2)

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}\cdot$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1+x^4+x^8}$. Elle est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de comparaison puisque lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), on a $f(x) \sim \dfrac{1}{x^8}\cdot$

Décomposons la fraction $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{X}^8+\mathrm{X}^4+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$. Commençons par faire ce travail pour

$$\mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{Y}^4+\mathrm{Y}^2+1} = \frac{1}{(\mathrm{Y}^2+1)^2-\mathrm{Y}^2} = \frac{1}{(\mathrm{Y}^2-\mathrm{Y}+1)(\mathrm{Y}^2+\mathrm{Y}+1)}\cdot$$

Compte-tenu de la parité de la fraction G, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{\mathrm{Y}^4+\mathrm{Y}^2+1} = \frac{a\mathrm{Y}+b}{\mathrm{Y}^2+\mathrm{Y}+1} + \frac{-a\mathrm{Y}+b}{\mathrm{Y}^2-\mathrm{Y}+1}\cdot$$

En multipliant le tout par $\mathrm{Y}^2+\mathrm{Y}+1$ puis en évaluant en j, on obtient

$$aj+b = \frac{1}{j^2-j+1} = -\frac{1}{2j} = -\frac{j^2}{2} = \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}\cdot$$

Comme $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $a = b = \dfrac{1}{2}\cdot$ Comme $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}(\mathrm{X}^2)$, on obtient

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1} + \frac{-\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^2+1}\right).$$

Décomposons en éléments simples chaque terme. On a

$$\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1 = (\mathrm{X}^2+1)^2-\mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1) \text{ et}$$

$$\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^2+1 = (\mathrm{X}^2+1)^2-3\mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2-\sqrt{3}\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\sqrt{3}\mathrm{X}+1)$$

Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1} = \frac{\alpha\mathrm{X}+\beta}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} + \frac{-\alpha\mathrm{X}+\beta}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} \quad \text{et}$$

$$\frac{-\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^2+1} = \frac{\gamma\mathrm{X}+\delta}{\mathrm{X}^2+\sqrt{3}\mathrm{X}+1} + \frac{-\gamma\mathrm{X}+\delta}{\mathrm{X}^2-\sqrt{3}\mathrm{X}+1}\cdot$$

On multiplie la première égalité par $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$ et on évalue en j : $\dfrac{j^2+1}{-2j} = \dfrac{1}{2} = \alpha j + \beta$, ce qui donne par identification $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{2}\cdot$ Pour la deuxième, l'identification des termes constants donne $\delta = \dfrac{1}{2}\cdot$ L'identification sur le terme en X^2 donne $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Au final, on obtient

$$\mathrm{F} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} + \frac{1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2+\sqrt{3}\mathrm{X}+1} + \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2-\sqrt{3}\mathrm{X}+1}\right).$$

La contribution à l'intégrale du premier terme est égale à celle du second : il suffit d'effectuer le changement de variable $y = -x$ pour le constater. De plus, par le changement de variable $z = y + 1/2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1/2)^2+3/4} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+3/4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot$$

Le traitement des deux derniers membres est plus délicat car chacune des fonctions n'est pas intégrable. Cependant, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(-x^2+1)\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)\mathrm{d}x.$$

En faisant le changement de variable $y = -x$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(-x^2+1)\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)\mathrm{d}x,$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right) &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x^2+\sqrt{3}x+1)\right]_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\mathrm{A}^2+\sqrt{3}\mathrm{A}+1}{\mathrm{A}^2-\sqrt{3}\mathrm{A}+1}\right),\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand A tend vers l'infini. Au final, il reste

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{4}\left(2\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot \quad \triangleleft$$

L'exercice suivant est un classique où l'on obtient la valeur d'une intégrale sans qu'il soit possible d'expliciter une primitive de la fonction intégrée.

4.12. Calcul d'intégrale (3)

Calculer $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La fonction $f : t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \ln(\sin t)$ est continue. Comme $\sin t \sim t$ quand t tend vers 0, on en déduit que $\ln \sin t \sim \ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ si bien que, par théorème de comparaison f est intégrable sur $\mathrm{J} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Notons I l'intégrale de f sur J. Par le changement de variable affine, $u = \frac{\pi}{2} - t$, il apparaît que la fonction $u \longmapsto \ln(\cos u)$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\mathrm{d}u.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 2\mathrm{I} &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(2t)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On opère le changement de variable affine $v = 2t$ et on obtient

$$2\mathrm{I} = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin v \,\mathrm{d}v,$$

avec $v \longmapsto \ln \sin v$ intégrable sur $]0, \pi[$. Or le graphe de cette fonction présente une symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$ et finalement $\int_0^{\pi} \ln \sin v \,\mathrm{d}v = 2\mathrm{I}$.

Conclusion. On a $\boxed{\mathrm{I} = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$. ◁

4.13. Calcul d'intégrale (4)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose f dérivable en 0 et $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ intégrable sur $[1, +\infty[$. Soit $(a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{a}{b}\cdot$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Il y a une improprété en 0 et en $+\infty$. En 0, l'improprété est fausse, car pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(bx)-f(ax)}{x} = b\frac{f(bx)-f(0)}{bx} - a\frac{f(ax)-f(0)}{ax} \xrightarrow[x\to 0]{} (b-a)f'(0).$$

et la fonction intégrée se prolonge donc par continuité. Pour $\mathrm{X} \geqslant 1$, on a

$$\int_1^{\mathrm{X}} \frac{|f(bx)|}{x}\mathrm{d}x \underset{\boxed{\mathrm{y=bx}}}{=} \int_b^{b\mathrm{X}} \frac{|f(y)|}{y/b}\frac{\mathrm{d}y}{b} = \int_b^{b\mathrm{X}} \frac{|f(y)|}{y}\mathrm{d}y \leqslant \int_b^{+\infty} \frac{|f(y)|}{y}\mathrm{d}y.$$

Donc $x \mapsto \dfrac{f(bx)}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. De même pour $x \mapsto \dfrac{f(ax)}{x}\cdot$

En conclusion, $x \longmapsto \dfrac{f(bx)-f(ax)}{x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour $\mathrm{X} > 0$ on pose $\mathrm{I_X} = \displaystyle\int_{\mathrm{X}}^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$. On a :

$$\mathrm{I_X} = \int_{\mathrm{X}}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{X}}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x.$$

En effectuant le changement de variable $y = bx$ dans la première et $y = ax$ dans la seconde, on obtient

$$\mathrm{I_X} = \int_{b\mathrm{X}}^{+\infty} \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y - \int_{a\mathrm{X}}^{+\infty} \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y = \int_{b\mathrm{X}}^{a\mathrm{X}} \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y.$$

Il s'agit de montrer que $\left|\mathrm{I_X} - f(0)\ln\dfrac{a}{b}\right| \xrightarrow[\mathrm{X}\to 0^+]{} 0$. Remarquons que $f(0)\ln\dfrac{a}{b} = \displaystyle\int_{b\mathrm{X}}^{a\mathrm{X}} \frac{f(0)}{y}\,\mathrm{d}y$ ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{I_X} - f(0)\ln\frac{a}{b}\right| &= \left|\int_{b\mathrm{X}}^{a\mathrm{X}} \frac{f(y)-f(0)}{y}\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{[a\mathrm{X},b\mathrm{X}]} \frac{|f(y)-f(0)|}{y}\mathrm{d}y \\ &\leqslant \sup_{y\in[a\mathrm{X},b\mathrm{X}]} |f(y)-f(0)| \int_{[a\mathrm{X},b\mathrm{X}]} \frac{\mathrm{d}y}{y} \\ &\leqslant \sup_{y\in[a\mathrm{X},b\mathrm{X}]} |f(y)-f(0)| \left|\ln\frac{a}{b}\right| \xrightarrow[\mathrm{X}\to 0]{} 0,\end{aligned}$$

puisque f est continue en 0. On conclut que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{a}{b}}. \lhd$$

Des cas particuliers de cet exercice sont souvent posés. En voici deux exemples.

4.14. Calcul d'intégrale (5)

> Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$.
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

La fonction $f : x \in \,]0,1[\, \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$ est continue et se prolonge par continuité en 0 et en 1 en posant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Comme $x \longmapsto -\ln x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ le changement de variable $y = -\ln x$ est légitime et on a

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x = -\int_{+\infty}^0 \frac{e^{-y}-1}{-y}e^{-y}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}-e^{-2y}}{y}\mathrm{d}y.$$

En reproduisant la solution de l'exercice 4.13 avec $f : y \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-y}$, $a = 2$ et $b = 1$, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln 2}. \lhd$$

4.15. Calcul d'intégrale (6)

> Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

C'est encore une application du résultat de l'exercice 4.13. En effet, si on pose $f(x) = \arctan(1/x)$ pour $x > 0$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x} &= \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{\pi x}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x}\\ &= \frac{f(x)-f(\pi x)}{x},\end{aligned}$$

en vertu de la relation $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ valable pour tout $x > 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Dans ces conditions, f est dérivable en 0 puisque

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\arctan 1/x - \pi/2}{x} = -\frac{\arctan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1.$$

Il reste à vérifier que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. On a pour x tendant vers $+\infty$,

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan 1/x}{x} \sim \frac{1}{x^2}$$

et le théorème de comparaison permet de conclure. Toutes les hypothèses sont donc vérifiées si bien que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln \pi}. \lhd$$

4.16. Calcul d'intégrale (7)

Soit a, b dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}\mathrm{d}t$.

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

La fonction $f : t \longmapsto e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Comme $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-a^2t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, le théorème de comparaison nous assure de l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $x = at$ est donc licite et donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-a^2b^2x^{-2}}\mathrm{d}x.$$

Posons pour $\lambda \geqslant 0$, $\mathrm{I}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\lambda x^{-2}}\mathrm{d}x$. La fonction I est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\mathrm{F} : (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longmapsto e^{-x^2-\lambda x^{-2}}$ est continue et on a la domination suivante :

$$\forall \lambda \geqslant 0,\ \ \forall x > 0,\ \ 0 \leqslant e^{-x^2-\lambda x^{-2}} \leqslant e^{-x^2},$$

avec $x \longmapsto e^{-x^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La méthode classique consiste alors à trouver une équation différentielle vérifiée par I. La fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}(\lambda, x) = -\frac{e^{-x^2-\lambda x^{-2}}}{x^2}.$$

L'inégalité $\left|\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}(\lambda, x)\right| \leqslant \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}$ ne constituerait pas une domination intéressante puisque la fonction qui majore n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Prenons $\lambda_0 > 0$. Pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, on a alors

$$\forall x > 0,\ \ \left|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}(\lambda, x)\right| \leqslant \frac{e^{-x^2-\lambda_0 x^{-2}}}{x^2} = \varphi(x).$$

Cette fois-ci, φ est bien intégrable car elle se prolonge par continuité en 0 et en $+\infty$ elle est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$. Le théorème de dérivation nous assure donc que I est dérivable sur $[\lambda_0, +\infty[$ et finalement sur tout $\mathbb{R}_+^*$, la dérivabilité étant une propriété locale et

$$\mathrm{I}'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2-\lambda x^{-2}}}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Le dénominateur $\dfrac{1}{x^2}$ fait penser au changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui le rend licite) et qui transforme $\mathbb{R}_+^*$ en lui-même :

$$\mathrm{I}'(\lambda) = \int_{+\infty}^0 e^{-y^{-2}-\lambda y^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda z^{-2}-z^2}\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{I}(\lambda)}{\sqrt{\lambda}},$$

en posant $z = \sqrt{\lambda}y$. On en déduit l'existence d'une constante K telle que pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{I}(\lambda) = \mathrm{K}e^{-2\sqrt{\lambda}}$. Par continuité, $\mathrm{I}(0) = \mathrm{K}$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir l'exercice 4.29 pour un calcul de l'intégrale de Gauss), on obtient $\mathrm{I}(\lambda) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{\lambda}}$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}}. \ \lhd$$

4.17. Formule des résidus pour les fractions rationnelles

Soit P, Q dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \leqslant \deg \mathrm{Q} - 2$. On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)} \mathrm{d}t = i\pi \sum_{\alpha \in \Omega} \varepsilon(\alpha)\mu(\alpha)$$

où Ω est l'ensemble des pôles de la fraction $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, $\varepsilon(\alpha)$ le signe de la partie imaginaire de α et $\mu(\alpha)$ le coefficient de $\dfrac{1}{\mathrm{X}-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F.

Application : calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} \mathrm{d}t$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La fraction F est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'a pas de pôle réel et intégrable car de degré $\leqslant -2$ (on a $\mathrm{F}(x) = \mathcal{O}(x^{-2})$ en $\pm\infty$). Le théorème de décomposition en éléments simple nous assure que F est une combinaison linéaire de termes $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-\alpha)^k}$ avec $k \geqslant 1$ et $\alpha \in \Omega$. Or si $k \geqslant 2$, nous disposons d'une primitive d'un tel élément simple et plus précisément :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^k} = \left[-\frac{1}{k-1} \frac{1}{(t-\alpha)^{k-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Finalement, seuls les termes $\dfrac{1}{\mathrm{X}-\alpha}$ vont donner une contribution à l'intégrale. Il est à remarquer que $t \longmapsto \dfrac{1}{t-\alpha}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Cependant la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha}$ existe ; en effet, si on écrit $\alpha = a+ib$ avec a, b réels et $b \neq 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} &= \int_{-x}^{x} \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-x}^{x} \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} \mathrm{d}t + ib \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^2+b^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(x-a)^2+b^2}{(x+a)^2+b^2} + ib \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^2+b^2} \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} ib \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^2+b^2} = ib \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+|b|^2} = \frac{ib\pi}{|b|} = i\pi\varepsilon(\alpha).
\end{aligned}$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \mathrm{F}(t)\mathrm{d}t$, par linéarité de l'intégrale, on obtient la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)}\mathrm{d}t = i\pi \sum_{\alpha\in\Omega} \varepsilon(\alpha)\mu(\alpha).$$

Cela s'applique directement à $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Q} = 1 + \mathrm{X}^4$. Les racines de Q sont les racines quatrièmes de -1, elles sont simples. Si α désigne une racine de Q, le coefficient de $\dfrac{1}{\mathrm{X}-\alpha}$ est $\dfrac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{Q}'(\alpha)} = \dfrac{1}{4\alpha} = -\dfrac{\alpha^3}{4}\cdot$ Notons $\alpha_0 = e^{i\pi/4}$. Les autres racines sont $i\alpha_0$, $-\alpha_0$ et $-i\alpha_0$ (les deux dernières étant à partie imaginaire négative) si bien que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = 2i\pi\left(-\frac{\alpha_0^3}{4} - \frac{i^3\alpha_0^3}{4}\right) = -\frac{i\pi}{2}(e^{i3\pi/4} - ie^{i3\pi/4}) \text{ et}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}. \triangleleft$$

Les exercices qui suivent sont consacrés à des inégalités intégrales. Le lecteur trouvera une version pour les intégrales définies de l'inégalité de Hardy qui suit dans l'exercice 1.12 du tome analyse 2.

4.18. Inégalité de Hardy

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2.$$

3. La constante 4 est-elle optimale ?

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Notons F la primitive de f s'annulant en 0. On a $g(x) = \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$ pour $x > 0$: g est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $g(x) = \dfrac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x}$, $g(x)$

tend vers $f(0)$ quand x tend vers 0. En posant $g(0) = f(0)$, on prolonge g par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

2. Prenons $0 < u < v$. On a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_u^v g(x)^2 \mathrm{d}x = \int_u^v \frac{\mathrm{F}(x)^2}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\mathrm{F}(x)^2}{x}\right]_u^v + \int_u^v \frac{2\mathrm{F}(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{F}(u)^2}{u} - \frac{\mathrm{F}(v)^2}{v} + 2\int_u^v \frac{\mathrm{F}(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\mathrm{F}(u)^2}{u} + 2\int_u^v \frac{\mathrm{F}(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x, \\ &\leqslant \frac{\mathrm{F}(u)^2}{u} + 2\sqrt{\int_u^v \frac{\mathrm{F}(x)^2}{x^2}\mathrm{d}x}\sqrt{\int_u^v f^2(x)\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il reste donc

$$\int_u^v g^2 \leqslant \frac{\mathrm{F}(u)^2}{u} + 2\sqrt{\int_u^v g^2}\sqrt{\int_u^v f^2},$$

ce qui donne en faisant tendre u vers 0,

$$\int_0^v g^2 \leqslant 2\sqrt{\int_0^v g^2}\sqrt{\int_0^v f^2} \text{ car } \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{F}(u)^2}{u} = 0.$$

Si $\int_0^v g^2 > 0$, on a après simplification, $\int_0^v g^2 \leqslant 4\int_0^v f^2$, ce qui est aussi vrai si $\int_0^v g^2 = 0$. Ainsi, pour tout $v > 0$, on a

$$\int_0^v g^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de la fonction positive g^2 et l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} g^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2.$$

3. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondrait à f et g colinéaires, ce qui donne une équation différentielle de la forme $x\mathrm{F}' = \lambda\mathrm{F}$ (avec λ constante) et on en arrive à f de la forme $x \longmapsto x^\alpha$. Malheureusement, f^2 doit être intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui implique $2\alpha < -1$ (intégrabilité en $+\infty$) et $2\alpha > -1$ (intégrabilité en 0). Ces deux conditions sont incompatibles. Cela nous invite toutefois à considérer la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ mais en la modifiant aux bords pour assurer l'intégrabilité. Soit $n \geqslant 1$ et f définie par

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/\sqrt{x} \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant n \\ \dfrac{\sqrt{n}}{x} \text{ si } x \geqslant n. \end{cases}$$

Dans ces conditions, $\int_0^{+\infty} f^2 = 2 + \ln n$. Quant à g, pour $1 \leqslant x \leqslant n$, on a

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\int_0^1 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\cdot$$

Un calcul de l'intégrale de g^2 entre 1 et n donne $4\ln n - 7 + \dfrac{8}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n}\cdot$ Soit C une constante pour laquelle l'inégalité de la question 2 est vérifiée. En particulier,

$$\int_1^n g^2 \leqslant \int_0^{+\infty} g^2 \leqslant \mathrm{C}\int_0^{+\infty} f^2 = 2\mathrm{C} + \mathrm{C}\ln n.$$

Comme $\int_1^n g^2 \sim 4\ln n$ lorsque n tend vers l'infini, on obtient $4 \leqslant \mathrm{C}$. Donc 4 est la meilleure constante possible. $\lhd$

L'exercice s'interprète comme un calcul de norme triple. Notons L^2 *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$ *et de carré intégrable et munissons le de la norme de la convergence en moyenne quadratique. L'application* $\mathrm{T} : f \longmapsto g$ *est un endomorphisme de* L^2 *d'après les deux premières questions et l'inégalité de Hardy montre qu'il est continu avec* $|||\mathrm{T}||| = 2$*. On dispose plus généralement d'inégalités de Hardy pour les espaces* L^p $(p > 1)$*. On obtient* $|||\mathrm{T}||| = \dfrac{p}{p-1}\cdot$

L'énoncé suivant fait justement démontrer, dans le cas d'intégrales doubles, l'inégalité de Minkowski qui montre que pour tout $p > 1$ *l'application* $f \longmapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathrm{I}} |f|^p\right)^{1/p}$ *est une norme sur l'espace des fonctions continues sur l'intervalle* I *telles que* $|f|^p$ *soit intégrable.*

4.19. Inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski

Soit $p, q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\mu > 0$. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{(a\mu)^p}{p} + \dfrac{(b/\mu)^q}{q}\cdot$

2. *Inégalité de Hölder.* Soit I un intervalle, $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles que f^p et g^q sont intégrables. Montrer que fg est intégrable et que l'on a

$$\int_{\mathrm{I}} fg \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{1/q}.$$

3. *Inégalité de Minkowski.* Soit $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p sont intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ est intégrable et que l'on a

$$\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On peut écrire, par convexité de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} ab = (a\mu)(b/\mu) &= \exp\left(\frac{1}{p}(p\ln(a\mu)) + \frac{1}{q}(q\ln(b/\mu))\right) \\ &\leqslant \frac{1}{p}e^{p\ln(a\mu)} + \frac{1}{q}e^{q\ln(b/\mu)} \leqslant \frac{(a\mu)^p}{p} + \frac{(b/\mu)^q}{q}. \end{aligned}$$

2. Posons $\alpha = \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{1/q}$. Si $\alpha = 0$, f^p étant continue et positive, on en déduit que f est nulle sauf sur un ensemble fini. L'inégalité est alors triviale. Il en va de même si $\beta = 0$. Supposons $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors d'après la question 1 appliquée avec $\mu = 1$, $a = \dfrac{f}{\alpha}$ et $b = \dfrac{g}{\beta}$ on a

$$\frac{fg}{\alpha\beta} \leqslant \frac{1}{p}\frac{f^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{g^q}{\beta^q}.$$

Le théorème de comparaison assure donc que fg est intégrable. De plus, comme $\alpha^p = \int_{\mathrm{I}} f^p$ et $\beta^q = \int_{\mathrm{I}} g^q$, en intégrant l'inégalité précédente, on obtient

$$\frac{\int_{\mathrm{I}} fg}{\alpha\beta} \leqslant \frac{1}{p}\frac{\alpha^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{\beta^q}{\beta^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant par $\alpha\beta$, on obtient l'inégalité demandée.

3. Supposons que I est un segment $[a, b]$ $(a < b)$. L'inégalité est triviale si $\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p = 0$. Supposons que $\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p > 0$. Par l'inégalité précédente, il vient

$$\int_{\mathrm{I}} f(f+g)^{p-1} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^{(p-1)q}\right)^{1/q},$$

$$\int_{\mathrm{I}} g(f+g)^{p-1} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Or $(p-1)q = p$ donc en sommant les deux inégalités, on obtient

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p \leqslant \left(\left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}\right) \left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/q},$$

ce qui donne en divisant par $\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/q}$ l'inégalité demandée.

Si I est un intervalle quelconque, pour $a < b$ dans I, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)^p &\leqslant \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Comme $(f+g)^p$ est positive, l'inégalité précédente prouve qu'elle est intégrable sur I et l'on a

$$\boxed{\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}}. \triangleleft$$

Il en découle de ce qui précède que l'ensemble $\mathcal{L}^p(\mathrm{I})$ *des fonctions continues par morceaux sur* I *à valeurs complexes telles que* $|f|^p$ *est intégrable est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues par morceaux de* I *dans* $\mathbb{C}$ *et que* $\| \ \|_p : f \longmapsto \left(\int_{\mathrm{I}} |f|^p\right)^{1/p}$ *définit une semi-norme sur* $\mathcal{L}^p(\mathrm{I})$.

4.20. Inégalité de Kolmogorov

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec f et f'' de carré intégrable.

1. Montrer que f' est de carré intégrable.

2. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$.

3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $x \geqslant 0$. On peut écrire par intégration par parties

$$\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x ff''.$$

Or, ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $\mathrm{A} \geqslant 0$,

$$\int_0^{\mathrm{A}} |ff''| \leqslant \sqrt{\int_0^{\mathrm{A}} f^2}\sqrt{\int_0^{\mathrm{A}} f''^2} \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f''^2}.$$

Dans ces conditions, $\displaystyle\int_0^x ff''$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

Raisonnons par l'absurde et supposons f'^2 non intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Vu ce qui précède, $f(x)f'(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque en $+\infty$. Cela implique classiquement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}f^2(x) = +\infty$, ce qui contredit clairement l'intégrabilité de f^2. Ainsi, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et par un raisonnement analogue, on démontre qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_-$: donc f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. L'intégration par parties faite à la question précédente assure que la quantité ff' admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ puisque f'^2 et ff'' sont intégrables. Ces limites sont forcément nulles car sinon la fonction intégrable f^2, de dérivée $2ff'$ aurait une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ ce qui est impossible. Ainsi, en prenant $y < x$ dans $\mathbb{R}$ pour écrire

$$\int_y^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(y)f'(y) - \int_y^x ff'',$$

et en faisant tendre x vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff''.$$

Comme pour $\mathrm{A} \geqslant 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} |ff''| \leqslant \sqrt{\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f^2}\sqrt{\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f''^2} \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f''^2},$$

et par passage à la limite, on obtient

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f'^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff'' \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} ff''\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |ff''| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f''^2}.$$

En élevant au carré, l'inégalité demandée est prouvée.

3. Cette dernière question fait l'objet de l'exercice 4.6. Comme ${f'}^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction f est 1/2-höldérienne donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Le lemme montré dans l'exercice 4.6 prouve alors qu'elle tend vers 0 en $\pm\infty$. ◁

4.21. Inégalité de Weyl

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' et $x \longmapsto xf(x)$ sont de carré sommable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} {f'}^2(t)\mathrm{d}t}.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $x \geqslant 0$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^x 1.f(t)^2\mathrm{d}t &= \Big[tf(t)^2\Big]_0^x - 2\int_0^x tf(t)f'(t)\mathrm{d}t \\ &= xf(x)^2 - 2\int_0^x tf(t)f'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $t \longmapsto tf(t)$ et $t \longmapsto f'(t)$ sont de carré intégrable, le cours assure que $t \longmapsto tf(t)f'(t)$ est intégrable (car $2|tf(t)f'(t)| \leqslant t^2f(t)^2 + f'(t)^2$). La fonction f est de carré sommable puisque elle est négligeable en $+\infty$ devant $xf(x)$. Les termes $\int_0^x f(t)^2\mathrm{d}t$ et $\int_0^x tf(t)f'(t)\mathrm{d}t$ ont donc une limite finie en $+\infty$ et par conséquent, il en va de même de $xf(x)^2$. Notons $\mathrm{C} = \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)^2$. Si $\mathrm{C} > 0$, alors $f(x)^2 \sim \dfrac{\mathrm{C}}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Cela contredit l'intégrabilité de f^2. Donc $\mathrm{C} = 0$ et le passage à la limite donne

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2\mathrm{d}t = -2\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

La suite est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)^2\mathrm{d}t &\leqslant 2\int_0^{+\infty} t|f(t)||f'(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} {f'}^2(t)\mathrm{d}t}. \lhd\end{aligned}$$

4.22. Une inégalité intégrale

Soient a et b des réels vérifiant $a \geqslant b > 0$ et $c = 1 - \dfrac{(a-b)^2}{(1+a+b)^2}\cdot$ Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ continûment dérivables, décroissantes et telles que la fonction $t \longmapsto f(t)t^{2a}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que c est la meilleure des constantes k telles que, pour toute $f \in \mathcal{E}$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant k \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit $f \in \mathcal{E}$ et J l'ensemble des réels strictement positifs α tels que la fonction $t \longmapsto f(t)t^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $\alpha > 0$, la fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit donc de vérifier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. On en déduit que si $\alpha \in$ J et $\beta \leqslant \alpha$, alors $\beta \in$ J, car pour $t \geqslant 1$, on a $f(t)t^\beta \leqslant f(t)t^\alpha$. Par hypothèse, $2a$ appartient à J. On en déduit que $2b$ et $a+b$ sont dans J, car $0 < 2b \leqslant a+b \leqslant 2a$.

Si $\alpha \in$ J, transformons $\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^\alpha \mathrm{d}t$ en intégrant par parties ; c'est possible car f est de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(t)t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}f(x) - \frac{1}{\alpha+1}\int_0^x f'(t)t^{\alpha+1}\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

La fonction f étant positive et f' négative, on en déduit pour tout $x \geqslant 0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\int_0^x |f'(t)|t^{\alpha+1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha+1}\int_0^x f'(t)t^{\alpha+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)t^\alpha \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^\alpha \mathrm{d}t.$$

On en déduit que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}f'(t)t^{\alpha+1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que $\dfrac{1}{\alpha+1}f(x)x^{\alpha+1}$ a une limite finie en $+\infty$. On la note ℓ. Si $\ell \neq 0$ alors $f(x)x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\alpha+1)\ell}{x}$, ce qui contredit le fait que α appartient à J. On a donc $\ell = 0$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}+} f(t)t^\alpha \mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha+1}\int_{\mathbb{R}_+} f'(t)t^{\alpha+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}\int_{\mathbb{R}_+} |f'(t)|t^{\alpha+1}\mathrm{d}t. \quad (**)$$

Cela est vrai en particulier pour $\alpha = 2a, 2b$ et $a+b$. L'inégalité demandée va résulter de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\int_{\mathbb{R}_+} |f'(t)|t^{a+b+1}\mathrm{d}t$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$|f'(t)|t^{a+b+1} = \left(\sqrt{|f'(t)|}t^{a+\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{|f'(t)|}t^{b+\frac{1}{2}}\right).$$

On en déduit que

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} |f'(t)|t^{a+b+1}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} |f'(t)|t^{2a+1}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}_+} |f'(t)|t^{2b+1}\mathrm{d}t.$$

En utilisant $(**)$, on obtient

$$(a+b+1)^2\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (2a+1)^2(2b+1)^2 \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{(2a+1)(2b+1)}{(a+b+1)^2} \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t.$$

Mais on remarque que

$$c = \frac{(1+a+b)^2-(a-b)^2}{(1+a+b)^2} = \frac{(2a+1)(2b+1)}{(1+a+b)^2}.$$

On a donc démontré que, pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant c\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t.$$

Il reste à montrer que c est la meilleure constante possible, c'est-à-dire que c est la borne supérieure de

$$\left\{\frac{\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t}\right\}_{f\in\mathcal{E}, f\neq 0}.$$

Pour cela, nous allons considérer une fonction f proche d'une constante.

Soit $x \geqslant 0$. Considérons une fonction f appartenant à $\mathcal{E}$ telle, pour tout $t \in [0, x]$, on a : $f(t) = 1$ et $f(t) = 0$ sur $[x+1, +\infty[$. Pour construire f, il suffit de prendre sur $[x, x+1]$ une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et telle que

$$f(x) = 1, f(x+1) = f'(x) = f'(x+1) = 0.$$

On a alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \left(\int_0^x t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \frac{1}{(1+a+b)^2}x^{2a+2b+2},$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x+1} t^{2a}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+2a}(x+1)^{2a+1} \text{ et de même,}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x+1} t^{2b}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+2b}(x+1)^{2b+1}.$$

On en déduit que

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{a+b}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2a}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{2b}\mathrm{d}t} \geqslant c\frac{x^{2a+2b+2}}{(x+1)^{2a+2b+2}}.$$

Sachant que $\lim_{x\to+\infty} c\dfrac{x^{2a+2b+2}}{(x+1)^{2a+2b+2}} = c$, on conclut que c est la meilleure constante possible. $\triangleleft$

4.23. Majoration du reste

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante, continue par morceaux et $\alpha > 0$. On suppose que $t \longmapsto t^\alpha f(t)$ est sommable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour $x > 0$ on a,

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)x}\right)^\alpha \int_0^{+\infty} f(u)u^\alpha \mathrm{d}u.$$

On pourra commencer par le cas où f est la fonction caractéristique d'un intervalle $[0, \mathrm{A}]$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

On suit l'indication. Soit $\mathrm{A} > 0$ et $f = \chi_{[0,\mathrm{A}]}$. Pour $x \geqslant \mathrm{A}$ l'inégalité demandée est triviale. Soit $x \in]0, \mathrm{A}[$. On souhaite montrer que

$$\mathrm{A} - x \leqslant \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)x}\right)^\alpha \frac{\mathrm{A}^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Si on divise par A cela équivaut, en posant $t = x/\mathrm{A} \in]0, 1[$, à

$$(1-t)t^\alpha \leqslant \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}.$$

On est donc ramené à majorer la fonction $\psi(t) = (1-t)t^\alpha$ sur l'intervalle $]0,1[$. Elle y est dérivable avec $\psi'(t) = t^{\alpha-1}(\alpha - (\alpha+1)t)$. Ainsi, ψ est croissante puis décroissante et atteint un maximum en $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\cdot$ Or, on a précisément

$$\psi\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) = \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\cdot$$

Prenons maintenant pour f une fonction décroissante en escalier sur $[0,\mathrm{A}]$ et nulle sur $]\mathrm{A},+\infty[$. Soient $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_p = \mathrm{A}$ les points de discontinuité de f et $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p > 0$ les valeurs de f sur les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$. Si on pose $f_1 = \lambda_1\chi_{[0,x_p]}$, $f_2 = (\lambda_2-\lambda_1)\chi_{[0,x_{p-1}]}, \ldots, f_p = (\lambda_p - \lambda_{p-1})\chi_{[0,x_1]}$, la fonction f coïncide avec $f_1 + \cdots + f_p$ sauf éventuellement aux points x_i. Comme la valeur de l'intégrale ne dépend pas des valeurs de f en ces points, on obtient l'inégalité souhaitée pour f par linéarité puisque d'après le point précédent elle est vérifiée pour les f_i.

Prenons enfin f décroissante et continue par morceaux quelconque. Comme $t \longmapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$ (sinon elle aurait une limite $\ell > 0$ et $t^\alpha f(t) \sim \ell t^\alpha$ ne serait pas intégrable). Il est aisé de construire une suite (f_n) de fonctions en escalier décroissantes vérifiant $0 \leqslant f_n \leqslant f$ qui converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$. On a pour tout n,

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)x}\right)^\alpha \int_0^{+\infty} f_n(u)u^\alpha \mathrm{d}u.$$

Le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite et d'obtenir le résultat pour f. $\lhd$

Nous abordons maintenant une série d'exercices consacrés à l'intégration d'une suite ou d'une série de fonctions et notamment au théorème de convergence dominée. Le premier offre une preuve de la célèbre formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

4.24. Formule de Stirling

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t = n!$.

2. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n n!.$$

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = 0$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-n}^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

4. Retrouver ainsi la formule de Stirling.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\mathrm{d}t$. On a $\mathrm{I}_0 = 1$ et en intégrant par parties, on obtient $\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = n!$. Plus rapidement on peut dire que $\mathrm{I}_n = \Gamma(n+1)$ où Γ est la fonction d'Euler.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_{-n}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t$. En faisant le changement de variable $u = n + t$, on obtient

$$\mathrm{J}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^n e^n e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n!.$$

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{K}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t$. Par le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, on obtient

$$\mathrm{K}_n = \sqrt{n} \int_1^{+\infty} (1+u)^n e^{-nu}\mathrm{d}u = \sqrt{n} \int_1^{+\infty} \left((1+u)e^{-u}\right)^n \mathrm{d}u.$$

La fonction $\varphi : u \longmapsto (1+u)e^{-u}$ est intégrable et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\varphi(1) = \dfrac{2}{e}\cdot$ On a donc, pour $u \geqslant 1$,

$$(\varphi(u))^n \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} \varphi(u).$$

On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \mathrm{K}_n \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} \int_1^{+\infty} \varphi(u)\mathrm{d}u.$$

D'où l'on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = 0.$$

Posons enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{L}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$ donne $\mathrm{L}_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+u)^n e^{-nu}\mathrm{d}u$. Pour éliminer le terme dépendant de n devant l'intégrale, on fait le changement de variable $v = u\sqrt{n}$ et on obtient

$$\mathrm{L}_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-v\sqrt{n}}\mathrm{d}v.$$

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$\begin{cases} f_n(v) = \left(1+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-v\sqrt{n}} \text{ si } |v| < \sqrt{n}, \\ f_n(v) = 0 \text{ si } |v| \geqslant \sqrt{n}. \end{cases}$$

La fonction f_n est continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{L}_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n$. Pour v fixé et $n > v^2$, on a $f_n(v) = e^{n\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)-v\sqrt{n}}$. Quand n tend vers $+\infty$, on a

$$n\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) - v\sqrt{n} = n\left(\frac{v}{\sqrt{n}} - \frac{v^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - v\sqrt{n} = -\frac{v^2}{2} + o(1).$$

On en déduit que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}$. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $v \longmapsto e^{-\frac{v^2}{2}}$. On aimerait conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{L}_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v$. Il suffit pour cela de vérifier la condition de domination.

Un étude de fonction ou la formule de Taylor avec reste intégral montre que, pour tout $x > -1$, on a

$$\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdot$$

On en déduit que, pour tout $v \in \mathbb{R}$ et $n > v^2$, on a

$$\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{v}{\sqrt{n}} - \frac{v^2}{2n} + \frac{v^3}{3n\sqrt{n}},$$

et donc

$$n\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) - v\sqrt{n} \leqslant -\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3\sqrt{n}} \leqslant -\frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{3} \leqslant -\frac{v^2}{6},$$

car $v \leqslant \sqrt{n}$. On en déduit que, pour tout $v \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant f_n(v) \leqslant e^{-\frac{v^2}{6}}$. La fonction $v \longmapsto e^{-\frac{v^2}{6}}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{L}_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v.$$

Cette limite est égale à $\sqrt{2\pi}$ (voir l'exercice 4.29). On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}_n = \sqrt{2\pi}.$$

4. Des questions précédentes, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{K}_n + \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}_n = \sqrt{2\pi}.$$

Il en résulte la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$ ◁

Le calcul de certaines intégrales passe par un développement en série suivi d'une interversion de sommation. Rappelons les diverses possibilités permettant de justifier un échange entre une intégrale et une somme infinie. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *la somme d'une série de fonctions qui converge simplement sur un intervalle* I*. On suppose* f *et les* f_n *continues par morceaux. On a les trois théorèmes suivants :*

1. Si I *est un segment (ou plus généralement un intervalle borné) et si la convergence de la série est uniforme sur* I *alors on a* $\int_{\mathrm{I}} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

2. Dans le cas général la convergence uniforme n'est pas suffisante. En revanche si la série $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ *converge, alors il est encore légitime d'écrire* $\int_{\mathrm{I}} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$*. On appellera ce résultat le théorème d'intégration terme à terme.*

3. Dans certains cas ce résultat ne s'applique pas (par exemple pour $f(t) = \dfrac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ *sur* $\mathrm{I} =]0,1[$ *; on a bien l'égalité* $\ln 2 = \int_{]0,1[} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ *mais la série des intégrales est semi-convergentes et* $\int_{]0,1[} |f_n| = \dfrac{1}{n+1}$ *est le terme général d'une série divergente). Dans ce type de situation on pourra chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série. Cela fonctionne très bien pour l'exemple précédent même s'il est aussi possible de procéder directement puisque le reste de la série géométrique se calcule explicitement.*

Signalons enfin que le théorème de convergence monotone (cas où les fonctions f_n *sont toutes positives) n'est actuellement plus au programme des classes préparatoires.*

4.25. Interversion série-intégrale

Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La fonction $f : t \in]0,1] \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue et on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$. D'après le théorème de comparaison f est intégrable sur $]0,1]$.

En développant $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ en série entière sur $[0,1[$, on a :

$$\mathrm{I} = \int_{]0,1[} f = \int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\ln t) t^{2n} \mathrm{d}t$$

Admettons que l'on puisse intervertir intégration et sommation. Il vient :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{]0,1[} (\ln t) t^{2n} \mathrm{d}t.$$

Pour $x \in]0,1]$ on trouve, en intégrant par parties,

$$\int_x^1 (\ln t) t^{2n} \mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t) t^{2n+1}}{2n+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\mathrm{d}t$$

ce qui tend vers $-\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ lorsque $x \to 0$. On a donc $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Justifions enfin l'interversion de la série et de l'intégrale : la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |(\ln t) t^{2n}|\mathrm{d}t$ est la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ qui converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme la permutation est licite.

Conclusion. On a $\mathrm{I} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = -\mathrm{C}$ où $\mathrm{C} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ est la *constante de Catalan*; à 10^{-7} près elle vaut 0.9159655. ◁

4.26. Sur la convergence L^1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, f_n : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux intégrables sur I. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers f.

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$. Montrer que

$$\int_{\mathrm{I}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \int_{\mathrm{I}} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} f.$$

2. Donner un contre-exemple à 1 dans le cas où on ne suppose pas $f_n \geqslant 0$.

3. Montrer que

$$\int_{\mathrm{I}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \int_{\mathrm{I}} |f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} |f|.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Une implication est évidente. En effet on a pour tout n,

$$\left|\int_{\mathrm{I}} f_n - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f_n - f|$$

donc si $\int_{\mathrm{I}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\int_{\mathrm{I}} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} f$.

Réciproquement, si $\int_{\mathrm{I}} f_n \to \int_{\mathrm{I}} f$ et si la suite (f_n) est à termes positifs, on note que l'on a également $f \geqslant 0$ et on pose $g_n = |f_n - f| + f - f_n$. Par hypothèse la suite (g_n) converge simplement vers 0. On note que $g_n = 2\max(0, f - f_n)$. Comme f_n est positive pour tout n, on a $0 \leqslant g_n \leqslant 2f$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int_{\mathrm{I}} g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, $\int_{\mathrm{I}} g_n = \int_{\mathrm{I}} |f_n - f| + \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} f_n$ et $\int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} f_n$ converge vers 0. On en déduit que $\int_{\mathrm{I}} |f_n - g| \to 0$.

2. On construit une suite de fonctions (f_n) intégrables sur $\mathbb{R}_+$, convergeant simplement vers 0 et telle que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\int_{\mathbb{R}_+} |f_n|$ ne tende pas vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant n$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{1+x^2}\cdot$ On obtient

$$\int_n^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) = n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Sur $[0, n[$ on prend f_n affine et telle que $\int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x = -1$; pour cela il suffit de prendre $f_n(0) = -\dfrac{2}{n}$ et $\lim\limits_{n^-} f_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{x^2}\cdot$ Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n > x$, on a

$$f_n(x) = \frac{2}{n^2}x - \frac{2}{n}\cdot$$

On en déduit que (f_n) converge simplement vers 0. Enfin, par construction $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

3. Supposant que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient

$$\left|\int_{\mathrm{I}} |f_n| - \int_{\mathrm{I}} |f|\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} ||f_n| - |f|| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} |f|$.

Réciproquement, si $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} |f|$, on a, d'après la question 1, puisque $(|f_n|)$ converge vers $|f|$,

$$\int_{\mathrm{I}} ||f_n| - |f|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On pose $h_n = |f_n - f| - \big||f_n| - |f|\big|$. Par hypothèse la suite (h_n) converge vers 0. On vérifie que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$0 \leqslant |x - y| - \big||x| - |y|\big| \leqslant (|x| + |y|) - (|x| - |y|) \leqslant 2|y|.$$

On a donc

$$0 \leqslant h_n \leqslant 2|f|.$$

Du théorème de convergence dominée on déduit que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} h_n = \int_{\mathrm{I}} |f_n - f| - \int_{\mathrm{I}} ||f_n| - |f||$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} ||f_n| - |f|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\triangleleft$

Nous abordons maintenant le thème très riche des intégrales à paramètre. Les deux premiers exercices conduisent au calcul de l'intégrale classique de Dirichlet en utilisant la transformation de Laplace.

4.27. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (1)

En étudiant la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(**École normale supérieure, École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• On note $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longmapsto e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$. Pour $x > 0$ la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle se prolonge par continuité en 0 par $f(x,0) = 1$ et que pour t tendant vers $+\infty$, $f(x,t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Montrons que F est aussi définie en 0. On intègre par parties ; pour $\mathrm{X} \geqslant 1$ on a

$$\int_1^{\mathrm{X}} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^{\mathrm{X}} - \int_1^{\mathrm{X}} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Or, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque c'est un $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. L'intégrale entre 1 et X admet donc une limite quand X tend vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

En particulier F est définie en 0.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ *n'est pas intégrable sur* $\mathbb{R}_+$. *En effet, si tel était le cas, comme sin*$^2 \leqslant |\sin|$, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ *serait intégrable sur* $[1, +\infty[$. *Or ce n'est pas le cas. En effet, pour* $\mathrm{X} \geqslant 1$, *on a*

$$\int_1^{\mathrm{X}} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \int_1^{\mathrm{X}} \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt = \frac{\ln \mathrm{X}}{2} - \int_1^{\mathrm{X}} \frac{\cos 2t}{t}\,dt.$$

Or, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{X}} \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ *vaut* $\displaystyle\int_2^{2\mathrm{X}} \frac{\cos u}{u}\,du$ *par le changement de variable* $u = 2t$. *Par une intégration par parties, on montre que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ *converge si bien que*

$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \int_1^{\mathrm{X}} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = +\infty.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ *converge sans que* $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ *soit intégrable.*

• Montrons que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$ on a :

$$\forall t > 0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin t| \leqslant e^{-at}.$$

Comme $t \longmapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cette domination nous assure que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\mathrm{d}t = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Il existe $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x>0$, $\mathrm{F}(x)=\mathrm{C}-\arctan x$. Comme $|\mathrm{F}(x)|\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a $\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}\cdot$ Ainsi, pour tout $x>0$, on a

$$\mathrm{F}(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x.$$

• Pour montrer que $\mathrm{F}(0)=\frac{\pi}{2}$, il suffit donc de vérifier que F est continue en 0. Comme la fonction $t\longmapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable, l'emploi direct du théorème de convergence dominée est voué à l'échec. Nous allons au préalable effectuer une intégration par parties. Comme il y a deux impropretés, nous allons scinder le problème : on pose $\mathrm{F}_1(x)=\int_0^1 e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ et $\mathrm{F}_2(x)=\int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. La fonction F_1 est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car on dispose de la domination

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin t|\leqslant 1,$$

et la fonction constante 1 est bien intégrable sur $]0,1]$. Vérifions la continuité de F_2 qui est la partie imaginaire de $\mathrm{G}(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\mathrm{d}t$ (il sera plus facile de faire l'intégration par parties sur G) : pour $\mathrm{X}\geqslant 1$, on a

$$\int_1^{\mathrm{X}}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i-x}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^{\mathrm{X}} + \frac{1}{i-x}\int_1^{\mathrm{X}}\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Comme $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$, la fonction $t\longmapsto\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable et

$$\mathrm{G}(x)=\frac{e^{i-x}}{x-i}+\frac{1}{i-x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Or la fonction $x\longmapsto\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\mathrm{d}t$ est continue car $(x,t)\longmapsto\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times[1,+\infty[$ et on dispose de la domination par une fonction intégrable $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$. On en déduit que G est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc F_2 et F le sont aussi.

Conclusion. On a $\boxed{\mathrm{F}(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}}$. ◁

Une autre solution pour la continuité de F *en* 0 *consiste à intégrer par parties en introduisant* $\mathrm{G}: x\mapsto\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$. *Comme* G *a une limite* *finie en* $+\infty$ *on voit que pour tout* $x > 0$ *on a* $\mathrm{F}(x) = x\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{G}(t)\,dt$. *En quantifiant on montre alors que* $\mathrm{F}(x)$ *tend vers* $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{G} = \mathrm{F}(0)$ *lorsque* $x \to 0^+$.

L'exercice suivant donne une autre méthode pour le calcul de cette même intégrale, toujours à l'aide d'une transformée de Laplace.

4.28. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (2)

Soit $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ où $x \geqslant 0$.

1. Vérifier que φ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Calculer pour $x > 0$, $\varphi(x) + \varphi''(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Posons pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}\cdot$ Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de dire que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$ et tout $k \geqslant 0$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{(-1)^k t^k e^{-tx}}{1+t^2}\cdot$ Fixons $a > 0$. Si $x \geqslant a$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{e^{-ta}t}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{pour } t \text{ voisin de } +\infty.$$

Cette domination par une fonction intégrable assure que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$, et donc sur $]0, +\infty[$ puisque a est quelconque, et que $\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$. Comme on a pour tout $x \geqslant a$,

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \frac{e^{-ta}t^k}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{pour } t \text{ voisin de } +\infty$$

on montre de même que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Il vient alors pour $x > 0$

$$\varphi(x) + \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}(1+t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$$

Enfin comme $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ on a $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$.

2. Fixons $x > 0$ et montrons l'existence de $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$. Soit $\mathrm{X} \geqslant x$. On a

$$\begin{aligned}\int_x^{\mathrm{X}} \frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t &= \int_0^{\mathrm{X}} \frac{\sin t \cos x}{t}\mathrm{d}t - \int_x^{\mathrm{X}} \frac{\cos t \sin x}{t}\mathrm{d}t \\ &= \cos x \int_x^{\mathrm{X}} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{\mathrm{X}} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \quad (*)\end{aligned}$$

Les deux intégrales ont une limite en $+\infty$ dès que $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Lemme. *L'intégrale* $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{it}}{t}\,dt$ *converge.*

Démonstration. Avec toujours $\mathrm{X} \geqslant x$, on a en intégrant par parties :

$$\int_x^{\mathrm{X}} \frac{e^{it}}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_x^{\mathrm{X}} - \int_x^{\mathrm{X}} \frac{e^{it}}{i}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

On a $\left|\dfrac{e^{i\mathrm{X}}}{i\mathrm{X}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{X}} \xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} 0$. Donc le crochet admet $\dfrac{ie^{ix}}{x}$ comme limite lorsque X tend vers $+\infty$. D'autre part, pour $t > 0$, $\left|\dfrac{e^{it}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $t \longmapsto \dfrac{e^{it}}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ par le théorème de comparaison. Le résultat en découle. $\diamondsuit$

On a donc

$$\psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

ce qui montre que ψ est $\mathcal{C}^\infty$ puisque $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ et $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t}$ le sont sur $[x, +\infty[$. On a en particulier

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= -\cos x \frac{\sin x}{x} - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \sin x \frac{\cos x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t, \\ \psi''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \frac{\sin^2 x}{x} - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t + \frac{\cos^2 x}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \psi(x).\end{aligned}$$

Par conséquent ψ, tout comme φ, est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 : $y'' + y = \dfrac{1}{x}\cdot$ Les deux fonctions diffèrent donc d'une solution de l'équation homogène associée et il existe donc $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \mathrm{A}\cos(x-\theta) + \psi(x).$$

Or, $\psi(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puisque $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Nous savons que $\mathrm{A}\cos(x-\theta)$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ seulement dans le cas où $\mathrm{A} = 0$. Comme φ a bien une limite en $+\infty$, A est nul et

$$\boxed{\forall x > 0,\ \varphi(x) = \psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t}.$$

3. Nous avons $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot$ Comme φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$\frac{\pi}{2} = \varphi(0) = \lim_0 \varphi = \lim_0 \psi$$

et il suffit de prouver que $\displaystyle\lim_0 \psi = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. D'après la question précédente, on a pour $x > 0$,

$$\psi(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t.$$

Pour le premier terme, $\cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrons que

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On a, pour $x \in \,]0,1]$,

$$\begin{aligned}
\left|\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sin x \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right| + \sin x \int_x^1 \left|\frac{\cos t}{t}\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{A}\sin x + \sin x \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{avec } \mathrm{A} = \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \mathrm{A}\sin x + \sin x |\ln x| \leqslant \mathrm{A}\sin x + x|\ln x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait. On conclut donc que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$. $\lhd$

Une autre intégrale célèbre qui intervient très souvent est l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ *qui vaut* $\sqrt{\pi}$. *L'exercice suivant en offre une preuve particulièrement courte.*

4.29. Intégrale de Gauss

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Relier f' à $\mathrm{F} : x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et en déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La fonction $\varphi : (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1] \longmapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier, $\varphi(x,.)$ est intégrable sur $[0,1]$ pour tout x et pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

Or pour segment I de $\mathbb{R}$, la fonction continue $(x,t)\longmapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ est bornée sur le compact $\mathrm{I}\times[0,1]$. Les constantes étant intégrables sur $[0,1]$, le théorème de dérivation assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et donc sur $\mathbb{R}$, la dérivabilité et la continuité étant des propriétés locales. De plus, on a pour tout x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $u = xt$.

2. On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -2\mathrm{F}'(x)\mathrm{F}(x)$. Comme f et F sont $\mathcal{C}^1$, il vient

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x 2\mathrm{F}'\mathrm{F} = \mathrm{F}(0)^2 - \mathrm{F}(x)^2 = -\mathrm{F}(x)^2.$$

Comme $\mathrm{F}\geqslant 0$, on a $\mathrm{F}(x) = \sqrt{f(0)-f(x)}$. Or $f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. En effet, c'est une conséquence du théorème de convergence dominée car pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$,

$$0\leqslant \varphi(x,t)\leqslant \frac{1}{1+t^2},$$

avec $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x,t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. On obtient au final que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, autrement dit

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}. \ \triangleleft$$

4.30. Intégrale de Fresnel (1)

> **1.** Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ et calculer la valeur commune.
>
> On pose pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\,\mathrm{d}x$.
>
> **2.** Montrer que F est continue. Étudier la limite de F en $+\infty$.
>
> **3.** Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\mathrm{F}'(t)$ pour $t > 0$.
>
> **4.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Les deux intégrales existent : on a des fractions rationnelles sans pôle réel de degré -2 et -4 qui sont donc des $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ lorsque $x \to \pm\infty$. Notons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}\cdot$ On a par parité $\mathrm{I} = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\cdot$ On est en droit d'effectuer sur cette intégrale le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ car il est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1/y^4+1}\,\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y.$$

Toujours par parité, on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}\cdot$ Passons au calcul de l'intégrale. On a d'après ce qui précède et par parité

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x$$

L'application $\varphi : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2+2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot$$

On obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

2. On pose $f(t,x) = \dfrac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}$ pour $x, t \in \mathbb{R}_+$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^2$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\right| \leqslant \frac{1}{|x^2+i|} = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Cette domination par une fonction intégrable nous assure de la continuité de F. D'autre part, pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} f(t,x) = 0$. Le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty} 0 = 0.$$

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $0 < a < b$. Pour $t \in \,]a,b[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-2te^{-(x^2+i)t^2}\right| = 2te^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-a^2x^2}.$$

Cette domination par une fonction intégrable nous assure que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'il s'agit là d'une propriété locale. De plus, on a

$$\mathrm{F}'(t) = -2t\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+i)t^2}\mathrm{d}x = -2te^{-it^2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}x.$$

Comme $y = xt$ est un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, on peut l'appliquer dans la dernière intégrale pour se ramener à celle de la gaussienne (voir exercice 4.29) :

$$\mathrm{F}'(t) = -2te^{-it^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\frac{\mathrm{d}y}{t} = -\sqrt{\pi}e^{-it^2}.$$

4. Comme F admet des limites finies en 0^+ et $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{F}'$ converge. Plus précisément,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{F}' = \lim_{+\infty} \mathrm{F} - \lim_{0} \mathrm{F} = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+i}.$$

Autrement dit, nous avons $\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+i}$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{x^2-i}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

En passant au conjugué, il vient $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)}$. ◁

En particulier, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\,dx.$$

L'énoncé donne un autre calcul de ces intégrales à l'aide d'une forme différentielle. Cette dernière est complexe au sens où elle s'écrit $\omega(x,y) = \mathrm{P}(x,y)dx + \mathrm{Q}(x,y)dy$ *avec les fonctions* $\mathrm{P},\mathrm{Q} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *On remarquera qu'en faisant intervenir simplement les parties réelles et imaginaires de* P *et* Q, *on peut écrire* $\omega(x,y) = \omega_1(x,y) + i\omega_2(x,y)$, ω_1 *et* ω_2 *étant des formes différentielles classiques (de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$*). Il apparaît alors que les théorèmes usuels sur les formes différentielles (en particulier, le théorème de Poincaré et la nullité d'une intégrale curviligne sur un lacet d'une forme exacte) restent valables pour ce genre de forme différentielle « complexe ».*

4.31. Intégrale de Fresnel (2)

1. On considère la forme différentielle ω définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ par : $(x,y) \longmapsto e^{-z^2}\mathrm{d}z = e^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$ où $z = x+iy$. Montrer que l'intégrale curviligne sur le contour délimitant la portion du disque fermé centré en 0, de rayon R entre l'angle $\theta = 0$ et l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ est nulle. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$.

2. On pose $\mathrm{F}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{(i-t)x^2}\mathrm{d}x$ pour $t > 0$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

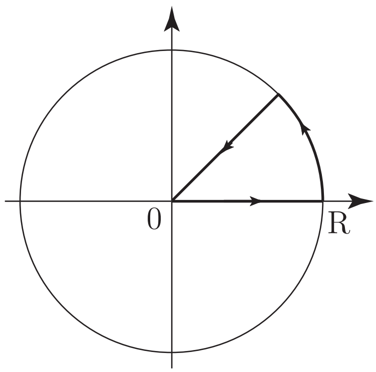
3. Donner une équation différentielle vérifiée par F.

4. En déduire F.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Voici pour commencer une figure représentant le contour de l'énoncé. On choisit de l'orienter dans le sens direct mais cela importe peu puisque l'intégrale de ω sur le contour va être nulle (changer l'orientation change l'intégrale en son opposée).



Pour montrer que l'intégrale curviligne est nulle, il suffit de vérifier que la forme ω est exacte. Comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, le théorème de Poincaré nous dit qu'il suffit de vérifier qu'elle est fermée. Posons $\mathrm{P}(x,y) = e^{-z^2}$ et $\mathrm{Q}(x,y) = ie^{-z^2}$ pour $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = -2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = i\left(-2(x+iy)e^{-(x+iy)^2}\right).$$

Ce calcul peut s'effectuer en écrivant $e^{-z^2} = e^{y^2-x^2}e^{-2ixy}$*, en dérivant par rapport à* y *(resp.* x*) et en regroupant les facteurs pour faire apparaître à nouveau* $e^{-(x+iy)^2}$*. Cependant, il n'échappe pas au lecteur que l'on obtient (pour la première) ce que l'on calcule si on dérive formellement* $y \longmapsto x+iy \longmapsto e^{-(x+iy)^2}$ *comme composée de fonctions puisque*

$$\frac{\mathrm{d}(x+iy)^2}{\mathrm{d}y} = 2i(x+iy) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}e^{-z^2}}{\mathrm{d}z} = -ze^{z^2}.$$

Il faut être alors conscient que nous sortons du cadre du programme des classes préparatoires puisque la seconde fonction est une fonction dérivable de la variable complexe : $z \longmapsto e^{-z^2}$*. On peut retenir que l'on définit de manière analogue au cas réel les fonctions dérivables de la variable complexe définies sur un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et à valeurs complexes : on parle alors de fonctions holomorphes. Les fonctions développables en série entière sont holomorphes sur leur disque ouvert de convergence (et la dérivée s'obtient par dérivation terme à terme). Les théorèmes d'opérations restent valables, ainsi que celui concernant la dérivée d'une composée*[3] *ce qui justifie le calcul proposé.*

3. Et la première fonction peut être de la variable réelle comme ici.

On a bien $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$ et la forme ω est effectivement fermée.

Le contour $\mathcal{C}$ étant orienté dans le sens trigonométrique on paramètre le rayon pour $\theta = 0$, par $x = t$ et $y = 0$ (autrement dit $z = t$) avec $t \in [0, \mathrm{R}]$, l'arc de cercle par $x = \mathrm{R}\cos t$, $y = \mathrm{R}\sin t$ (autrement dit $z = \mathrm{R}e^{it}$) avec $t \in [0, \pi/4]$ et enfin le rayon pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ par $x = t\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $y = t\sin\dfrac{\pi}{4}$ (autrement dit $z = te^{i\pi/4}$) avec $t \in [0, \mathrm{R}]$. On a donc

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{-z^2}\mathrm{d}z = 0 = \int_0^{\mathrm{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 e^{2it}}\mathrm{R}ie^{it}\mathrm{d}t - \int_0^{\mathrm{R}} e^{-it^2}e^{i\pi/4}\mathrm{d}t.$$

Montrons que le deuxième terme tend vers 0 lorsque $\mathrm{R} \to +\infty$. On a

$$\left|\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 e^{2it}}\mathrm{R}ie^{it}\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{R}\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2\cos u}\mathrm{d}u.$$

En faisant le changement de variable $v = \dfrac{\pi}{2} - u$ et en utilisant l'inégalité classique $\sin v \geqslant \dfrac{2}{\pi}v$ sur $[0, \pi/2]$, il vient

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2\cos u}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2\sin v}\mathrm{d}v \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\mathrm{R}^2 v}{\pi}}\mathrm{d}v,$$

ce qui implique

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2\cos u}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2\mathrm{R}^2 v}{\pi}}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2\mathrm{R}^2}\cdot$$

Ainsi, on a $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 e^{2it}}\mathrm{R}ie^{it}\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)$ qui tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. On en déduit que (voir l'exercice 4.29 pour le calcul de l'intégrale de Gauss)

$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{R}} e^{-it^2}e^{i\pi/4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$ converge (sans que l'intégrande soit intégrable) et sa valeur est $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4}$. Par parité et en passant au conjugué, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$ converge et que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4} = \sqrt{\pi}\frac{1+i}{\sqrt{2}}}.$$

2. La fonction $f : (t, x) \longmapsto e^{(i-t)x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $|f(t, x)| = e^{-tx^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$

ou $-\infty$. On en déduit que $f(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par le théorème de comparaison. De plus, si on fixe $a>0$, pour $t>a$, on a la domination suivante

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-x^2 e^{(i-t)x^2}\right| = x^2 e^{-tx^2} \leqslant x^2 e^{-ax^2}.$$

Cette dernière fonction, indépendante de t, est un $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ et en $-\infty$: elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et en vertu du théorème de dérivation, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'il s'agit là d'une propriété locale. Pour $t>0$, on a

$$\mathrm{F}'(t) = -\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{(i-t)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Par intégration par parties on a, pour $\mathrm{A}<\mathrm{B}$,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} x.2(i-t)xe^{(i-t)x^2}\,\mathrm{d}x = \left[xe^{(i-t)x^2}\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} e^{(i-t)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque A tend vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, le crochet tend vers 0 par croissance comparée et en passant à la limite

$$\boxed{2(i-t)\mathrm{F}'(t) = \mathrm{F}(t)}.$$

4. La fonction F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2(i-t)}\,y$ et comme $\dfrac{1}{2(i-t)} = -\dfrac{t+i}{2(1+t^2)} = -\dfrac{t}{2(1+t^2)} - \dfrac{i}{2(1+t^2)}$, il existe une constante C telle que pour tout $t>0$,

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{C}\exp\left(-\frac{1}{4}\ln(1+t^2) - \frac{i\arctan t}{2}\right) = \frac{\mathrm{C}}{(1+t^2)^{1/4}}e^{-\frac{1}{2}i\arctan t}.$$

Il est naturel de penser que si F admet une limite en 0, il s'agit de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$. Comme la fonction $x \longmapsto e^{ix^2}$ n'est pas intégrable, il est exclu de le démontrer directement à l'aide du théorème de convergence dominée. Nous allons classiquement utiliser une intégration par parties pour nous ramener à des fonctions intégrables. On pose $\mathrm{F}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$. Pour $t \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{F}(t) = 2\int_0^1 e^{(i-t)x^2}\,\mathrm{d}x + 2\int_1^{+\infty} e^{(i-t)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Comme $(t,x) \longmapsto e^{(i-t)x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et $|e^{(i-t)x^2}| \leqslant 1$ avec la fonction constante 1 intégrable sur $[0,1]$, on en déduit par le théorème de continuité que $t \longmapsto \int_0^1 e^{(i-t)x^2}\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Traitons le second terme comme convenu par intégration par parties. Si $\mathrm{X} > 1$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{X}} e^{(i-t)x^2}\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{X}} 2(i-t)xe^{(i-t)x^2}\frac{1}{2(i-t)x}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{e^{(i-t)x^2}}{2(i-t)x}\right]_1^{\mathrm{X}} + \frac{1}{2(i-t)}\int_1^{\mathrm{X}} \frac{e^{(i-t)x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} \frac{e^{(i-t)}}{2(i-t)} + \frac{1}{2(i-t)}\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-t)x^2}}{x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi, le second terme s'exprime comme suit :

$$\int_1^{+\infty} e^{(i-t)x^2}\mathrm{d}x = \frac{e^{(i-t)}}{2(i-t)} + \frac{1}{2(i-t)}\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-t)x^2}}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale est bien définie puisque $\dfrac{e^{(i-t)x^2}}{x^2}$ est majorée en module par $\dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Comme la majoration est indépendante de t, on en déduit encore par le théorème de continuité que $t \longmapsto \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{(i-t)x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Au final, comme $t \longmapsto \dfrac{e^{(i-t)}}{2(i-t)} + \dfrac{1}{2(i-t)}\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{(i-t)x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$ est continue, la fonction F est continue en 0 et on a $\mathrm{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$, si bien que pour $t \geqslant 0$,

$$\boxed{\mathrm{F}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{1+t^2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{i}{2}\arctan t}}. \lhd$$

Voici maintenant une série de six exercices sur les intégrales à paramètre pour s'exercer à utiliser les théorèmes de continuité, dérivabilité dans diverses situations. De plus ils contiennent souvent des questions de nature asymptotique (limite ou équivalent au bord,...).

4.32. Intégrale à paramètre (1)

Pour $x > 1$ on pose $f(x) = \int_1^{+\infty} e^{it^x}\,dt$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa continuité.

2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Comme le module de l'intégrande vaut 1, il ne peut être intégrable. Si f est définie, l'intégrale en question doit être semi-convergente. C'est ce que nous allons vérifier par un changement de variable et une intégration par parties.

Soit $x > 1$, $X \geqslant 1$ et $I_X = \int_1^x e^{it^x}\,dt$. Faisons le changement de variable $u = t^x$ ($t = u^{1/x}$) dans I_X :

$$I_X = \frac{1}{x}\int_1^{X^x} \frac{e^{iu}}{u^{1-1/x}}\,du.$$

Notons $J_v = \int_1^v \frac{e^{iu}}{u^{1-1/x}}\,du$ et procédons à une intégration par parties :

$$J_v = \left[\frac{e^{iu}}{iu^{1-1/x}}\right]_1^v + \int_1^v \frac{1}{i}(1-1/x)\frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}\,du.$$

Or la fonction $u \longmapsto \frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car son module est $u \longmapsto \frac{1}{u^{2-1/x}}$ et $2 - \frac{1}{x} > 1$. Donc J_v admet une limite quand v tend vers $+\infty$ qui est

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{1-1/x}}\,du = ie^i - i(1-1/x)\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}\,du.$$

Ainsi $f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} I_X = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{iu}}{u^{1-1/x}}\,du$ est bien défini.

Étudions la continuité de f : pour utiliser les théorèmes du cours, on cherche à les appliquer sur des fonctions intégrables. On va donc utiliser le fait que pour $x > 1$,

$$f(x) = \frac{ie^i}{x} - i(1/x - 1/x^2)\int_1^{+\infty}\frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}\,du,$$

de sorte qu'il suffit de vérifier la continuité de $x \longmapsto \int_1^{+\infty}\frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}\,du$. L'application $(u, x) \in [1, +\infty[\times]1, +\infty[\longmapsto \frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}$ est continue et si on fixe $x_0 > 1$, pour $x \geqslant x_0$, on a la domination

$$\forall u \in [1, +\infty[, \quad \left| \frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}} \right| \leqslant \frac{1}{u^{2-1/x_0}}.$$

Comme $2 - \dfrac{1}{x_0} > 1$, la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{u^{2-1/x_0}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et le cours assure alors que $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{2-1/x}}\, \mathrm{d}u$ est continue sur $[x_0, +\infty[$ et il en va de même pour f. La continuité étant une propriété locale, f est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Comme $f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{1-1/x}}\, \mathrm{d}u$, il est naturel de penser que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}\, \mathrm{d}u$ en $+\infty$. Pour cela, nous allons montrer que la différence $xf(x) - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}\, \mathrm{d}u$ tend vers 0 en $+\infty$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}\, \mathrm{d}u$ est non nul, ce qui prouvera la conjecture.

Commençons par le dernier point : on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} > 1$ (voir les exercices 4.27 et 4.28 pour une preuve) et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u \leqslant 1$ car $0 \leqslant \sin u \leqslant u$ pour $u \in [0, 1]$, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u > 0$ et finalement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}\, \mathrm{d}u$ est non nul.

Notons pour $x > 1$,

$$\Delta(x) = xf(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} e^{iu} \left(\frac{1}{u^{1-1/x}} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u.$$

Une majoration par l'intégrale du module nous donnerait une intégrale divergente. Nous allons encore une fois procéder par intégration par parties. Notons pour $\mathrm{X} \geqslant 1$,

$$\Delta_{\mathrm{X}}(x) = \int_1^{\mathrm{X}} e^{iu} \left(\frac{1}{u^{1-1/x}} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u$$

On a

$$\Delta_{\mathrm{X}}(x) = \left[\frac{e^{iu}}{i} \left(\frac{1}{u^{1-1/x}} - \frac{1}{u} \right) \right]_1^{\mathrm{X}} + \int_1^{\mathrm{X}} \frac{e^{iu}}{i} \left(\frac{1 - 1/x}{u^{2-1/x}} - \frac{1}{u^2} \right) \mathrm{d}u.$$

Le dernier terme correspondant à une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$ et le crochet ayant une limite, on peut faire tendre X vers $+\infty$ pour obtenir

$$\Delta(x) = 0 + i \int_1^{+\infty} \underbrace{e^{iu} \left(\frac{1 - 1/x}{u^{2-1/x}} - \frac{1}{u^2} \right)}_{=\varphi_x(u)} \mathrm{d}u.$$

Pour $x \geqslant 2$, on a

$$|\varphi_x(u)| \leqslant \frac{1}{u^{3/2}} + \frac{1}{u^2}\cdot$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(u) = 0$, le théorème de convergence dominée assure que Δ tend vers 0 en $+\infty$. On conclut que $\boxed{f(x) \sim \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}\mathrm{d}u}$. ◁

4.33. Intégrale à paramètre (2)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}\mathrm{d}t$.

1. Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de f.

2. Déterminer la limite et un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ par $g(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+1}}\cdot$ Elle est continue. Pour tout réel x, on a $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1]$. Si $x \leqslant 0$, alors, on a pour $t > 0$, $g(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ et comme $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, $g(x,\cdot)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty]$. En revanche si $x > 0$, alors on a en $+\infty$ $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+1}} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $[1,+\infty]$.

Conclusion. La fonction $f : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} g(x,t)\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et pour $(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{t^2+t}} = -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\cdot$$

Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $x \geqslant a$ et tout $t > 0$ on a la domination

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-ta}.$$

La fonction $t \longmapsto e^{-at}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ et que, pour $x > a$,

$$f'(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t.$$

Cela étant vrai pour tout $a > 0$, on conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • On commence par l'étude en $+\infty$. Pour $x > 0$, le changement de variable $u = tx$ est légitime et donne

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u^2+ux}}\mathrm{d}u.$$

On en déduit que, pour $x > 0$, on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u,$$

(la fonction $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$). On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrons qu'en fait, on a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

On a $\sqrt{x}f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(x,u)\mathrm{d}u$ avec $h(x,u) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{u^2+ux}}e^{-u}$. Pour tout $u > 0$, $h(x,u) \to \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ lorsque $x \to +\infty$ et de plus on a la domination suivante : $|h(x,u)| \leqslant \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ pour tout $x > 0$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure.

Par le changement de variable $u = v^2$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v^2}\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\mathrm{d}v = \sqrt{\pi} \text{ (cf. exercice 4.29).}$$

Conclusion. On a $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}}$.

• Quand x tend vers 0, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u^2+ux}}$ tend vers $\dfrac{e^{-u}}{u}\cdot$ La fonction $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ mais pas sur $]0,1]$. On pressent que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en 0 et qu'un équivalent de $f(x)$ sera obtenu en ne considérant que des intégrales sur $]0,1]$. Précisons cela.

Pour $0 < x \leqslant 2$, on a

$$f(x) \geqslant \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u^2+ux}}\mathrm{d}u \geqslant \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-u}}{u+\frac{x}{2}}\mathrm{d}u$$

car $\left(u+\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant u^2+ux$, donc $f(x) \geqslant e^{\frac{x}{2}} \int_{[\frac{x}{2},+\infty[} \frac{e^{-v}}{v}\mathrm{d}v \geqslant e^{\frac{x}{2}} \int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{e^{-v}}{v}\mathrm{d}v$ grâce au changement de variable $v = u + \frac{x}{2}\cdot$ La fonction $v \longmapsto \frac{e^{-v}}{v}$ n'étant pas intégrable sur $]0,1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0} \int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{e^{-v}}{v}\mathrm{d}v = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

On peut dire plus car $\frac{e^{-v}}{v} \underset{v\to 0}{\sim} \frac{1}{v}\cdot$ Ces fonctions étant positives et non intégrables sur $]0,1]$, on en déduit que

$$\int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{e^{-v}}{v}\mathrm{d}v \underset{x\to 0}{\sim} \int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{1}{v}\mathrm{d}v = -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

En considérant la fonction $f_1 : x \longmapsto e^{\frac{x}{2}} \int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{e^{-v}}{v}\mathrm{d}v$, on obtient donc

$$f(x) \geqslant f_1(x) \text{ pour } 0 < x \leqslant 2 \text{ et } f_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

Mais, d'autre part, on peut écrire, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u^2+ux}}\mathrm{d}u + \int_{[1,+\infty[} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u^2+ux}}\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+ux}}\mathrm{d}u + \int_{[1,+\infty[} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u = f_2(x). \end{aligned}$$

On calcule facilement $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+ux}}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+ux}} &= \left[\ln(u+\frac{x}{2}+\sqrt{u^2+ux})\right]_0^1 \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x}}{\frac{x}{2}}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x. \end{aligned}$$

On a donc $f(x) \leqslant f_2(x)$ pour $x > 0$ et $f_2(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$. Comme f est encadrée par deux fonctions équivalentes en 0 on a

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x}. \triangleleft$$

4.34. Intégrale à paramètre (3)

Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que s est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Donner un développement de s en série de fractions rationnelles.

3. Montrer que $s(x) \sim \dfrac{\pi}{2x}$ au voisinage de 0^+.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Considérons l'application $\varphi : (x,t) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \longmapsto \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1} \in \mathbb{R}$. Pour $x > 0$, $|\varphi(x,t)| \to \dfrac{1}{x}$ lorsque t tend vers 0 et

$$|\varphi(x,t)| \leqslant \frac{1}{e^{xt}-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On en déduit que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: s est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction φ est continue sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$. De plus, pour tout $a > 0$, on a, pour $x \geqslant a$,

$$|\varphi(x,t)| = \frac{|\sin t|}{e^{xt}-1} \geqslant \frac{|\sin t|}{e^{at}-1} = |\varphi(a,t)|,$$

la fonction $t \longmapsto |\varphi(a,t)|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (relation de domination). Le théorème de continuité sous le signe $\int$ permet d'affirmer que s est continue sur $[a,+\infty[$. Cela étant vrai pour tout $a > 0$, s est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On va utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-u}\cdot$ On a, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x,t) = \frac{\sin t\, e^{-xt}}{1-e^{-xt}} = \sin t\, e^{-xt}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nxt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t\, e^{-nxt}.$$

Soit $x > 0$ fixé. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $f_n : t \longmapsto \sin t\, e^{-nxt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{(-nx+i)t}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\,\frac{-1}{-nx+i} = \frac{1}{1+n^2x^2}\cdot$$

Il faut maintenant justifier l'interversion de la sommation et de l'intégration. Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas bien car il est difficile d'avoir mieux que la majoration :

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| \leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-nxt}\mathrm{d}t = \frac{1}{nx}$ et la série harmonique diverge. On va plutôt utiliser le théorème de convergence dominée en l'appliquant à la suite des sommes partielles. Posons $\mathrm{S}_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t)$. La suite (S_n) converge simplement vers $\varphi(x,\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a la domination suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\, \forall t > 0,\, |\mathrm{S}_n(t)| = \left|\sin t \sum_{k=1}^{n} e^{-kxt}\right| = \left|\sin t \frac{1-e^{-nxt}}{e^{xt}-1}\right| \leqslant \frac{|\sin t|}{e^{xt}-1}\cdot$$

La fonction majorante est intégrable et indépendante de n. On a donc,

$$\boxed{s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}}.$$

3. Pour déterminer un équivalent de s en 0^+, on utilise le développement de la question 2 et une comparaison série-intégrale. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1+(n+1)^2x^2} \leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

En sommant les inégalité obtenues quand n décrit $\mathbb{N}$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leqslant s(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2},\ \text{c'est-à-dire}$$

$$\frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \leqslant s(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \leqslant s(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}\cdot$$

Conclusion. On en déduit que $\boxed{s(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$. ◁

4.35. Intégrale à paramètre (4)

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\mathrm{M} > 0$ telle que, pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}.$$

> **1.** Montrer que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
>
> **2.** Calculer la limite en 0^+ de $h(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}-1}{x} f(t)\mathrm{d}t$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On a, pour $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $\frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)| \leqslant \frac{2}{x}|f(t)|$, ce qui justifie l'existence de $\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)|\mathrm{d}t$. On a, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|e^{itx}-1| = |e^{itx/2} - e^{-itx/2}| = 2\left|\sin \frac{tx}{2}\right|.$$

La fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'où l'on déduit par imparité que $|\sin t| \geqslant \frac{2|t|}{\pi}$ si $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $x = \frac{1}{n}$ dans la relation donnée dans l'énoncé et on obtient :

$$\mathrm{M} \geqslant \int_{\mathbb{R}} 2n\left|\sin \frac{t}{2n}\right| |f(t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_{-\pi n}^{\pi n} 2n\left|\sin \frac{t}{2n}\right| |f(t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_{-\pi n}^{\pi n} \frac{2|t|}{\pi}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\pi n}^{\pi n} |tf(t)| \leqslant \frac{\pi \mathrm{M}}{2}\cdot$$

Cela montre que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\varphi : (x,t) \longmapsto \frac{e^{itx}-1}{x} f(t)$ pour $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour t fixé, $\varphi(x,t)$ tend vers $itf(t)$ lorsque x tend vers 0^+. De plus, la fonction $u \longmapsto e^{iu}$ étant 1-lipschitzienne par le théorème des accroissements finis, on a la domination $|\varphi(x,t)| \leqslant |tf(t)|$ pour tout $x > 0$. Comme cette fonction est intégrable d'après la question 1, le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = i\int_{\mathbb{R}} tf(t)\mathrm{d}t$. ◁

4.36. Intégrale à paramètre (5)

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.

3. Donner un équivalent en 0 de f.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. • La fonction $g : (x,t) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \longmapsto \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$. Soit $a > 0$ et $x \geqslant a$. On a

$$1+t+t^{x+1} \geqslant 1+t \geqslant 1+t^{a+1} \quad \text{si } 0 < t \leqslant 1,$$

$$1+t+t^{x+1} \geqslant 1+t^{x+1} \geqslant 1+t^{a+1} \quad \text{si } t \geqslant 1.$$

On a donc, pour tout $t > 0$,

$$0 \leqslant g(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^{a+1}}.$$

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^{a+1}}$ étant continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et indépendante de x, le théorème de continuité sous le signe $\int$ s'applique : la fonction f est définie et continue sur $[a, +\infty[$. Cela étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• De même, la fonction g admet sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$ une dérivée partielle par rapport à x. Pour $(x,t) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln t \, t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})^2}$$

et cette fonction est continue. Soit encore $a > 0$, $x \geqslant a$ et $t > 0$. On a alors :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln t| \frac{t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})^2} \leqslant \frac{|\ln t|}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \frac{|\ln t|}{1+t^{a+1}}.$$

La fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{|\ln t|}{1+t^{a+1}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} |\ln t|$; la fonction $t \longmapsto |\ln t|$ et donc φ est est intégrable sur $]0, 1]$. De même, $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{x+1}} = o\left(\frac{1}{t^{1+\frac{x}{2}}}\right)$ et la fonction φ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et indépendante de x. Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ s'applique : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$f'(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} -\frac{\ln t \, t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})^2} \mathrm{d}t.$$

Cela étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculons la limite de $g(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$. On obtient $\frac{1}{1+t}$ pour $0 < t < 1$, $\frac{1}{3}$ lorsque $t = 1$ et 0 si $t > 1$. On a vu dans la question 1 que $|g(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $x \geqslant 2$. Le théorème de convergence dominée permet donc de dire que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} g(x,t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x,t) = \frac{1}{1+2t}$ mais la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+2t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On soupçonne que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. On le démontre. On a pour $t \geqslant 1$ et $x > 0$,

$$1 + t + t^{x+1} \leqslant 3t^{x+1} \text{ et donc } g(x,t) \geqslant \frac{1}{3t^{x+1}}.$$

On en déduit que, pour $x > 0$, on a

$$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{3t^{x+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{3x}.$$

On obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

3. Cherchons un équivalent de $f(x)$ en 0. On a, pour $x > 0$, d'une part,

$$0 \leqslant \int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{x+1}} - \int_1^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})} \\ &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1. \end{aligned}$$

Cela montre que la différence $f(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{x+1}}$ est bornée. Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ en 0^+, on en déduit que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{x+1}}.$$

Calculons cette dernière intégrale. Le changement de variable $u = \ln t$ donne, pour $x > 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t + t^{x+1}} = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}u}{1 + e^{ux}} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{1 + e^{-ux}} \mathrm{d}u$$
$$= \left[-\frac{1}{x} \ln(1 + e^{-ux}) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln 2}{x} \cdot$$

Conclusion. On obtient l'équivalent $\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}}$.

4.37. Intégrale à paramètre (6)

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle avec $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ en l'infini. Montrer que pour x tendant vers 1^-, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o(\ln(1 - x)).$$

2. Soit $\mu \in \,]0, 1[$. On pose $\mathrm{I}_\mu = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \mu^2 t^2)}} \cdot$ Donner un équivalent de I_μ lorsque μ tend vers 1^-.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il s'agit d'un lemme classique (voir l'exercice 3.23 du tome analyse 2) puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$. Il convient de le redémontrer. Par comparaison, la série entière définissant f est de rayon supérieur ou égal à 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \cdot$ Ainsi, on a pour $x \in \,]0, 1[$

$$|f(x)| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{n_0 - 1} a_n x^n \right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leqslant \left| \sum_{n=0}^{n_0 - 1} a_n x^n \right| + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$\leqslant \left| \sum_{n=0}^{n_0 - 1} a_n x^n \right| + \varepsilon |\ln(1 - x)|.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\left| \sum\limits_{n=0}^{n_0 - 1} a_n x^n \right|}{|\ln(1 - x)|} = 0$, pour x proche de 1 par valeurs inférieures, on a

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon |\ln(1-x)| + \varepsilon |\ln(1-x)| = 2\varepsilon |\ln(1-x)|.$$

On conclut que pour x tendant vers 1^-, $f(x) = o(\ln(1-x))$.

2. Il convient de vérifier que I_μ est bien définie pour $\mu \in]0,1[$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\mu^2 t^2)}}$ est continue sur $[0,1[$ et en 1, elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{2(1-\mu^2)}\sqrt{1-t}}\cdot$ Elle est donc intégrable en vertu du théorème de comparaison. Pour $x \in [0,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{-1/2} x^n$ et donc formellement, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\mu &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{n}{-1/2} \mu^{2n} t^{2n} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{n}{-1/2} \left(\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \right) \mu^{2n}.
\end{aligned}$$

Laissons pour plus tard la justification de l'interversion série-intégrale et notons $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. En posant $x = \arcsin t$ (changement de variable licite car de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone), on trouve que $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x$. On reconnaît là les intégrales de Wallis d'indices pairs (cf. exercice 1.43 du tome analyse 2). Il est alors classique de vérifier par une intégration par parties que $2n\alpha_n = (2n-1)\alpha_{n-1}$ et on obtient

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2n}\alpha_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\alpha_0,$$

ce qui donne $\alpha_n = \dfrac{(2n)!}{4^n n!^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ en faisant apparaître les facteurs pairs pour obtenir $(2n)!$ au numérateur. Par ailleurs, on a par la même opération

$$\begin{aligned}
(-1)^n \binom{n}{-1/2} &= \frac{(1/2)(1/2+1)\cdots(1/2+n-1)}{n!} = \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2^n n!} \\
&= \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.
\end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons

$$\mathrm{I}_\mu = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!^2}{4^n (n!)^2} \right)^2 \mu^{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^2 \mu^{2n}.$$

En utilisant au choix la formule de Stirling (prouvée dans l'exercice 4.24) ou l'équivalent classique des intégrales de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

(voir l'exercice 1.35 du tome analyse 2) on obtient $\alpha_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et le coefficient de la série entière en μ ci-dessus est donc équivalent à $\frac{1}{2n}\cdot$

D'après la première question, la différence entre I_μ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^{2n}}{2n}$ est négligeable devant $\ln(1-\mu)$. Or, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln(1-\mu^2) \sim -\frac{1}{2}\ln(1-\mu)$ lorsque $\mu \to 1^-$. On conclut donc que lorsque μ tend vers 1^-, on a

$$\boxed{\mathrm{I}_\mu \sim -\frac{1}{2}\ln(1-\mu)}.$$

Il reste à justifier l'interversion série-intégrale pratiquée au début de la question. Si on appelle f_n la fonction $t \longmapsto (-1)^n\binom{n}{-1/2}\frac{(\mu t)^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}$, cette fonction est positive, intégrable sur $[0,1[$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction continue. Comme $\sum \int_0^1 f_n = \sum \frac{2}{\pi}\alpha_{2n}\mu^{2n}$ est une série convergente, le théorème d'intégration terme à terme nous assure de la validité de l'interversion. $\lhd$

L'énoncé suivant concerne la très importante transformée de Fourier et fait démontrer la formule d'inversion dans l'espace de Schwartz des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide.

4.38. Inversion de Fourier

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^n f^{(k)}(x) = 0$. Pour $f \in \mathcal{S}$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\mathrm{d}x.$$

On dit que f^* est la transformée de Fourier de f.

1. Montrer que $f^* \in \mathcal{S}$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}$ telle que $f(0) = 0$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$. Montrer que $g \in \mathcal{S}$ et en déduire que $\int_{\mathbb{R}} f^*(y)\mathrm{d}y = 0$.

3. Soit $f_0 : x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Montrer que $f_0^* = f_0$.

4. Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrer que $f^{**}(0) = f(0)$ et en déduire que, pour tout réel x, $f^{**}(x) = f(-x)$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Remarquons, tout d'abord que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et que si f est dans $\mathcal{S}$ alors toutes les dérivées de f sont dans $\mathcal{S}$, ainsi que les fonctions de la forme $x \longmapsto x^n f^{(k)}(x)$. Tout cela résulte aisément de la formule de Leibniz.

Soit $f \in \mathcal{S}$. La fonction $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x)e^{-ixy} \in \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial y^k}(x,y) = f(x)(-ix)^k e^{-ixy}$ et donc

$$\left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k}(x,y)\right| = |f(x)||x|^k$$

et la fonction $x \longmapsto f(x)x^k$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisqu'au voisinage de l'infini, $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{k+2}}\right)$. On en déduit que f^* est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour $k \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$f^{*(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)^k e^{-ixy} \mathrm{d}x.$$

Des remarques précédentes, il résulte que $h_k : x \longmapsto f(x)(-ix)^k$ appartient à $\mathcal{S}$ et que $f^{*(k)}$ est égale à $(h_k)^*$. Pour démontrer que $f^* \in \mathcal{S}$ il suffit donc de vérifier que f^* est à décroissance rapide *i.e.* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{|y| \to +\infty} y^n f^*(y) = 0.$$

En effet, en appliquant cela à h_k on obtient que les dérivées successives de f^* sont aussi à décroissance rapide.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on obtient, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} yf^*(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) y e^{-ixy} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[f(x)(ie^{-ixy}) \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f'(x)(-ie^{-ixy}) \mathrm{d}y \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x = i(f')^*(y), \end{aligned}$$

car $|f(x)ie^{-ixy}| = |f(x)| = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $|x|$ tend vers l'infini.

En réitérant le procédé, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$y^{n+1} f^*(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1} i^{n+1} \int_{\mathbb{R}} f^{(n+1)}(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x.$$

On en déduit la majoration

$$|y^{n+1} f^*(y)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1} \int_{\mathbb{R}} |f^{(n+1)}(x)| \mathrm{d}x \text{ puis },$$

$$|y^n f^*(y)| \leqslant \frac{1}{|y|} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1} \int_{\mathbb{R}} |f^{(n+1)}(x) \mathrm{d}x.$$

On en déduit que $\lim\limits_{|y| \to +\infty} |y^n f^*(y)| = 0$. Cela suffit pour conclure que, pour tout $f \in \mathcal{S}$, $f^* \in \mathcal{S}$ autrement dit que $\mathcal{S}$ est stable par la transformation de Fourier.

2. • La fonction f' étant $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \longmapsto f'(tx)$ est également $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On remarque que, pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \left[\frac{1}{x} f(tx)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)}{x}$, car $f(0) = 0$. En appliquant la formule de Leibniz, on démontre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_k$ telles que, pour tout $x \neq 0$,

$$g^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} a_k f^{(j)}(x) \frac{1}{x^{k-j+1}} \text{ et donc, pour } n \in \mathbb{N},$$

$$x^n g^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} a_k f^{(j)}(x) x^{n-k+j-1}.$$

Par hypothèse, pour $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on a $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^n f^{(k)}(x) = 0$ (c'est vrai, pour $n \in \mathbb{N}$ et donc *a fortiori* si $n < 0$). On en déduit que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^n g^{(k)}(x) = 0$. Donc g appartient à $\mathcal{S}$.

• D'après la question 1, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(g^*)'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x)(-ix) e^{-ixy} \mathrm{d}x.$$

On remarque que, pour tout réel x, $xg(x) = f(x)$. On l'a déjà démontré pour $x \neq 0$ et pour $x = 0$ cela résulte de $f(0) = 0$. L'intégrale précédente devient : pour tout réel y, $(g^*)'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -if(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x = -if^*(y)$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} f^*(y) \mathrm{d}y = i \int_{\mathbb{R}} g^{*\prime}(y) \mathrm{d}y = 0,$$

car $\lim\limits_{-\infty} g^* = \lim\limits_{+\infty} g^* = 0$, puisque g est dans $\mathcal{S}$.

Conclusion. Si $f(0) = 0$, alors $\int_{\mathbb{R}} f^* = 0$.

3. On note que f_0 est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \mathrm{P}_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. On en déduit alors que $\lim\limits_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x) = 0$, par croissance comparée. Donc f_0 appartient à $\mathcal{S}$.

On a, d'après la question 1, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f_0^{*\prime}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}(-ix)e^{-ixy}\mathrm{d}x.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$f_0^{*\prime}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[e^{-\frac{x^2}{2}}ie^{-ixy}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}i(-iy)e^{-ixy}\mathrm{d}y\right) = -yf_0^*(y).$$

Cette équation différentielle permet de dire qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f_0^*(y) = \mathrm{C}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ (voir l'exercice 4.29), on en déduit $f_0^*(0) = 1$, et donc $\mathrm{C} = 1$.

Conclusion. On a $f_0^* = f_0$.

4. • Si $f(0) = 0$ le résultat résulte de la question 2 puisque

$$f^{**}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f^*(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Dans le cas général on se ramène à ce cas particulier en posant $h = f - f(0)f_0$. C'est une fonction de $\mathcal{S}$ puisque $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'application $f \longmapsto f^*$ étant linéaire, on a :

$$h^{**} = f^{**} - f(0)f_0^{**} = f^{**} - f(0)f_0.$$

Sachant que $h(0) = 0$, on peut affirmer que $h^{**}(0) = 0$. On en déduit que

$$f^{**}(0) = f(0)f_0(0) = f(0).$$

• Pour établir la formule d'inversion on va se ramener en 0 par une translation. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, considérons l'application

$$f_x : t \longmapsto f(x+t).$$

Il est clair que f_x est dans $\mathcal{S}$ puisque $f_x^{(k)}(t) = f^{(k)}(x+t)$ pour tout k donc

$$t^n f_x^{(k)}(t) = \left(\frac{t}{t+x}\right)^n (t+x)^n f^{(k)}(x+t) \to 0$$

lorsque $|t| \to +\infty$. On obtient alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f_x^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+t) e^{-ity} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i(u-x)y} \mathrm{d}u = e^{ixy} f^*(y),$$

puis pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$f_x^{**}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f^*(y) e^{-iyz} \mathrm{d}y = f^{**}(z-x).$$

On a alors, d'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f_x(0) = f_x^{**}(0) = f^{**}(-x).$$

Conclusion. Nous avons donc démontré que l'application $f \longmapsto f^*$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$. La bijection réciproque est l'application $f \longmapsto g$ où g est définie par $g(x) = f^*(-x)$. $\lhd$

4.39. Développement en série d'une transformée de Laplace bilatérale

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue non nulle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \left]-\alpha, \alpha\right[$, $t \longmapsto f(t)e^{xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose $\mathrm{L}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{xt} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que L est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

2. Montrer que $\ln \mathrm{L}$ est convexe.

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

1. Soit $x \in \left]-\alpha, \alpha\right[$. On développe en série l'exponentielle pour obtenir $\mathrm{L}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^n}{n!} \mathrm{d}t$. En supposant licite l'interversion de l'intégration et de la sommation, il vient

$$\mathrm{L}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(t) t^n \mathrm{d}t$$

ce qui constitue le développement en série entière souhaité. Il reste à justifier l'interversion. Pour cela on utilise le théorème de convergence dominée pour la suite des sommes partielles de la série. Le réel x étant fixé, posons $\mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k t^k f(t)}{k!}$. La suite (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \longmapsto f(t)e^{xt}$ et on a, pour tout n et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\mathrm{S}_n(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k|t|^k|f(t)|}{k!} \leqslant f(t)\ e^{|x||t|} \leqslant f(t)\left(e^{-xt}+e^{xt}\right).$$

Par hypothèse cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ et le calcul précédent est donc justifié.

2. Comme f est continue positive et non nulle on a $\mathrm{L} > 0$ et $\ln \mathrm{L}$ est bien définie. Pour prouver la convexité de $\ln \mathrm{L}$ nous allons naturellement étudier le signe de sa dérivée seconde. Comme L est développable en série entière, elle est en particulier $\mathcal{C}^{\infty}$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant la série entière terme à terme. On a donc pour $x \in \,]-\alpha, \alpha[$,

$$\mathrm{L}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} f(t)t^n \mathrm{d}t$$

ce qui donne, si on peut échanger les sommations,

$$\mathrm{L}'(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^{n+1}}{n!} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} te^{xt} f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour justifier le calcul on procède comme dans la première question et il suffit pour cela de justifier que la fonction $t \longmapsto te^{xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour cela on choisit β tel que $|x| < \beta < \alpha$. Au voisinage de $+\infty$ on a $te^{xt}f(t) \ll e^{\beta t}f(t)$ et au voisinage de $-\infty$ on a $te^{xt}f(t) \ll e^{-\beta t}f(t)$ ce qui permet de conclure.

On aurait également pu appliquer directement le théorème de dérivation sous la signe intégral.

On montre de même que si $x \in \,]-\alpha, \alpha[$, $\mathrm{L}''(x) = \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{xt} f(t)\mathrm{d}t$. Un calcul immédiat donne $(\ln \mathrm{L})'' = \dfrac{\mathrm{L}\mathrm{L}'' - \mathrm{L}'^2}{\mathrm{L}^2}\cdot$ Or si $x \in \,]-\alpha, \alpha[$, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{L}'(x)^2 &\leqslant \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{xt} f(t)\mathrm{d}t\right]^2 = \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|t|e^{\frac{x}{2}t}\sqrt{f(t)}\right)\left(e^{\frac{x}{2}t}\sqrt{f(t)}\right)\mathrm{d}t\right]^2 \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{xt} f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{xt} f(t)\mathrm{d}t\right) = \mathrm{L}''(x)\mathrm{L}(x)\end{aligned}$$

ce qui donne $(\ln \mathrm{L})'' \geqslant 0$ et $\ln \mathrm{L}$ est bien convexe. $\triangleleft$

Les exercices suivants concernent plus particulièrement des questions asymptotiques sur les intégrales généralisées.

4.40. Comparaison d'intégrales (1)

1. Soit $f, g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continues avec $g \geqslant 0$ non intégrable. On suppose que $f = o(g)$ en $+\infty$. Montrer que $\int_1^x f = o\left(\int_1^x g\right)$.

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. On pose $\psi_\beta(x) = e^{\alpha x} x^\beta$. Montrer que pour x tendant vers l'infini, $\psi_\beta(x) \sim \dfrac{1}{\alpha}\int_1^x \psi_\beta(t)\mathrm{d}t$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$. Dans ces conditions, on a

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^x f\right| \leqslant \int_{\mathrm{A}}^x |f| \leqslant \varepsilon \int_{\mathrm{A}}^x g \leqslant \varepsilon \int_0^x g.$$

Comme g n'est pas intégrable, la limite de $x \longmapsto \int_0^x g$ en $+\infty$ est $+\infty$ puisque g est positive. Quitte à changer A, on peut supposer $\int_0^x g > 0$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$. Et dans ces conditions, on a

$$0 \leqslant \frac{\left|\int_0^x f\right|}{\int_0^x g} \leqslant \frac{\left|\int_0^{\mathrm{A}} f\right|}{\int_0^x g} + \frac{\int_{\mathrm{A}}^x |f|}{\int_0^x g} \leqslant \frac{\left|\int_0^{\mathrm{A}} f\right|}{\int_0^x g} + \varepsilon.$$

Or le rapport $\dfrac{\left|\int_0^{\mathrm{A}} f\right|}{\int_0^x g}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini et donc pour x assez grand, on a

$$0 \leqslant \frac{\left|\int_0^x f\right|}{\int_0^x g} \leqslant \frac{\left|\int_0^{\mathrm{A}} f\right|}{\int_0^x g} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela prouve que pour x tendant vers $+\infty$, on a $\int_0^x f = o\left(\int_0^x g\right)$.

2. Notons α_1 (resp. β_1) la partie réelle de α (resp. β). Par intégration par parties, on obtient pour $x \geqslant 1$,

$$\alpha \int_1^x \psi_\beta(t)\mathrm{d}t = \left[e^{\alpha t} t^\beta\right]_1^x - \beta \int_1^x e^{\alpha t} t^{\beta - 1}\mathrm{d}t.$$

On serait tenté de démontrer que la deuxième intégrale est négligeable devant la première, mais comme l'intégrande n'est pas à valeurs positives, on va plutôt montrer que $\int_1^x e^{\alpha t} t^{\beta-1}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $|e^{\alpha x} x^\beta| =$

$e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1}$. Remarquons que cette dernière quantité tend vers $+\infty$ en $+\infty$ par croissance comparée puisque $\alpha_1 > 0$ si bien que le terme constant du crochet e^{α} est négligeable devant elle. D'autre part, en la dérivant, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1}}{\mathrm{d}x} = \alpha_1 e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1} + \beta_1 e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1 - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha_1 e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1} > 0.$$

Cette dérivée est positive au voisinage de $+\infty$. On démontre, en adaptant très légèrement la preuve, que le résultat de la première question reste valable si g est seulement positive au voisinage de $+\infty$ et si f est à valeurs complexes. Comme pour x tendant vers $+\infty$, on a

$$e^{\alpha x}x^{\beta-1} = o\left(e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1}\right) = o\left(\frac{\mathrm{d}e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1}}{\mathrm{d}x}\right),$$

on peut affirmer que pour x tendant vers l'infini,

$$\int_1^x e^{\alpha t}t^{\beta-1}\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x \frac{\mathrm{d}e^{\alpha_1 t}t^{\beta_1}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right) = o\left(e^{\alpha_1 x}x^{\beta_1}\right).$$

Par conséquent,

$$\alpha\int_1^x \phi_\beta(t)\mathrm{d}t = e^{\alpha x}x^{\beta} + o\left(e^{\alpha x}x^{\beta}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\alpha x}x^{\beta} = \psi_\beta(x). \lhd$$

Notons que si l'on suppose dans la première question g intégrable, alors f l'est aussi par comparaison et cette fois-ci, ce sont les restes qui vérifient $\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} f\right)$. En effet, si $\varepsilon > 0$, il existe A réel tel que pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, $|f(x)| \leqslant g(x)$ et en intégrant entre x et $+\infty$, il vient

$$\left|\int_x^{+\infty} f\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |f| \leqslant \varepsilon\int_x^{+\infty} g,$$

ce qui prouve que le reste de f est négligeable devant celui de g. Dans l'exercice suivant, nous allons utiliser ces résultats d'intégration de la relation o.

4.41. Comparaison d'intégrales (2)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, $f(ax) \sim f(x)$ quand $x \to +\infty$.

2. Soit $a > 0$. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^x f(t)t^{a-1}\mathrm{d}t$ quand x tend vers l'infini.

3. Soit $a < 0$. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)t^{a-1}\mathrm{d}t$ quand x tend vers l'infini.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Fixons $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que pour $x \geqslant \mathrm{A}$, on a $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} \leqslant \varepsilon$. En particulier pour $x \geqslant \mathrm{A}$, on a $\left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{x}$, ce qui donne en intégrant entre x et ax :

$$\left|\int_x^{ax} \frac{f'}{f}\right| \leqslant \int_{[x,ax]} \frac{\varepsilon}{t}\mathrm{d}t = \varepsilon|\ln a|.$$

Ainsi $\left|\ln \dfrac{f(ax)}{f(x)}\right| \leqslant \varepsilon|\ln a|$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$. Cela traduit que la limite en $+\infty$ de $\ln \dfrac{f(ax)}{f(x)}$ vaut 0 et par continuité de l'exponentielle, le quotient $\dfrac{f(ax)}{f(x)}$ converge vers 1 en l'infini, autrement dit $f(ax) \sim f(x)$.

2. La fonction $g : t \longmapsto f(t)t^{a-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme il s'agit d'un $\mathcal{O}(t^{a-1})$ pour t tendant vers 0, elle est intégrable sur $]0,1]$. Par ailleurs, le quotient $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ en l'infini. Donc, par intégration de la relation o, sachant que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$,

$$\int_1^x \frac{f'}{f} = o\left(\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = o(\ln x),$$

pour x tendant vers l'infini. Ainsi, $\ln \dfrac{f(x)}{f(1)}$ s'écrit $\varepsilon(x)\ln x$ avec $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$ et $f(x) = f(1)x^{\varepsilon(x)}$. On a $f(x)x^{a-1} = f(1)x^{a-1+\varepsilon(x)}$ et pour x assez grand, $a - 1 + \varepsilon(x) \geqslant -1$ et $f(x)x^{a-1} \geqslant f(1)x^{-1} = \dfrac{f(1)}{x}$. Par théorème de comparaison, on en déduit que g n'est pas intégrable.

Soit $x \geqslant 1$. Par intégration par parties, on peut écrire

$$\int_1^x g = \left[\frac{f(t)t^a}{a}\right]_1^x - \int_1^x f'(t)\frac{t^a}{a}\mathrm{d}t.$$

Or, par hypothèse, en $+\infty$, $f'(t)t^a$ est négligeable devant $f(t)t^{a-1} = g(t)$. Donc la deuxième intégrale est négligeable devant la première si bien que

$$\int_0^x f(t)t^{a-1}\mathrm{d}t = \int_0^x g \sim \int_1^x g \sim \frac{f(x)x^a}{a}.$$

3. Prenons $b \in \,]a, 0[$. Comme il a été vu précédemment, on peut écrire $f(x) = f(1)x^{\varepsilon(x)}$ avec $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$. Pour x assez grand, $a-1+\varepsilon(x) \leqslant b-1$ et $f(x)x^{a-1} \leqslant f(1)x^{b-1} = \dfrac{f(1)}{x^{1-b}} \cdot$ Comme $1-b > 1$, la fonction $g : t \longmapsto f(t)t^{a-1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour $x \leqslant \mathrm{X}$, on obtient par intégration par parties

$$\int_x^{\mathrm{X}} g = \left[\frac{f(t)t^a}{a}\right]_x^{\mathrm{X}} - \int_x^{\mathrm{X}} f'(t)\frac{t^a}{a}\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto f'(t)t^a$ est négligeable devant g, elle est donc intégrable. De plus, pour X assez grand, on a $0 \leqslant f(\mathrm{X})\mathrm{X}^a \leqslant f(1)\mathrm{X}^b$ et par comparaison $f(\mathrm{X})\mathrm{X}^a$ tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. On en déduit en faisant tendre X vers l'infini

$$\int_x^{+\infty} g = -\frac{f(x)x^a}{a} - \int_x^{+\infty} f'(t)\frac{t^a}{a}\mathrm{d}t.$$

La deuxième intégrale est négligeable devant la première, si bien que pour x tendant vers l'infini, on obtient

$$\int_x^{+\infty} f(t)t^{a-1}\mathrm{d}t \sim -\frac{f(x)x^a}{a}. \ \triangleleft$$

4.42. Comparaison d'intégrales (3)

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{xt}\left(\int_{[|x|,+\infty[} \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

La fonction $y \longmapsto \dfrac{e^{-y}}{y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Il en résulte que la fonction

$$f : x \longmapsto \int_{[|x|,+\infty[} \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y$$

est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$ (et bien entendu $f'(x) = -\dfrac{e^{x}}{x}$ si $x < 0$ puisque f' est impaire).

Soit φ la fonction $x \longmapsto e^{xt}f(x)$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Pour intégrer φ sur $\mathbb{R}$ on doit étudier son intégrabilité au voisinage de 0 et au voisinage de $\pm\infty$.

• En 0 on a $\varphi(x) \sim f(x)$. Et il est facile de trouver un équivalent de f en 0. Pour $|x| \leqslant 1$, on a

$$f(x) = \int_{|x|}^{1} \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y + \int_{[1,+\infty[} \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y.$$

La fonction $g : y \longmapsto \dfrac{e^{-y}}{y}$ est positive et n'est pas intégrable sur $]0,1]$; on a, $g(y) \underset{y\to 0}{\sim} \dfrac{1}{y}$. Le théorème d'intégration des relations de comparaison permet d'affirmer que

$$\int_{|x|}^{1} \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y \underset{x\to 0}{\sim} \int_{|x|}^{1} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\ln|x|,$$

d'où l'on déduit que $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln|x|$. La fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$, la fonction φ est intégrable sur $[-1,0[$ et $]0,1]$.

• Cherchons maintenant un équivalent de f en $+\infty$. Pour $x > 0$, on obtient, en intégrant par parties,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \int_{[x,+\infty[} \frac{e^{-y}}{y^2}\mathrm{d}y.$$

On remarque que

$$0 \leqslant \int_{[x,+\infty[} \frac{e^{-y}}{y^2}\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{x}\int_{[x,+\infty[} \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{x}f(x) = o\left(f(x)\right).$$

On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$ et donc $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{x(t-1)}}{x}$. On en déduit que φ est intégrable sur $[1,+\infty]$ si et seulement si $t < 1$.

• Comme f est paire, on a de même, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{e^{-|x|}}{|x|}$ et donc $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{e^{x(t+1)}}{x}$. Par suite φ est intégrable sur $]-\infty,-1]$ si et seulement si $1+t > 0$.

Conclusion. L'intégrale de l'énoncé, notons-la $\mathrm{I}(t)$, est définie pour $t \in\,]-1,1[$.

Il nous faut maintenant calculer la valeur de $\mathrm{I}(t)$. Pour commencer, supposons $t \neq 0$ et calculons $\mathrm{J}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi(x)\mathrm{d}x$. On obtient, pour $0 < \alpha < \mathrm{A}$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\mathrm{A}} e^{xt}f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{t}\left(\left[e^{xt}f(x)\right]_{\alpha}^{\mathrm{A}} - \int_{\alpha}^{\mathrm{A}} e^{xt}f'(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(e^{\mathrm{A}t}f(\mathrm{A}) - e^{\alpha t}f(\alpha) + \int_{\alpha}^{\mathrm{A}} \frac{e^{xt-x}}{x}\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

On sait que

$$e^{\mathrm{A}t} f(\mathrm{A}) \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\sim} e^{\mathrm{A}t} \frac{e^{-\mathrm{A}}}{\mathrm{A}} = \frac{e^{\mathrm{A}(t-1)}}{\mathrm{A}} \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} 0,$$

car $t-1<0$. On en déduit, en faisant tendre A vers $+\infty$, que pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{[\alpha,+\infty[} e^{xt} f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{t}\left(-e^{\alpha t} f(\alpha) + \int_{[\alpha,+\infty[} \frac{e^{-x(1-t)}}{x}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(-e^{\alpha t} f(\alpha) + \int_{[(1-t)\alpha,+\infty[} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(-e^{\alpha t} f(\alpha) + f((1-t)\alpha)\right),\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = x(1-t)$ dans la deuxième intégrale. Pour calculer la limite quand α tend vers 0, on transforme cette dernière expression :

$$\begin{aligned}-e^{\alpha t} f(\alpha) + f((1-t)\alpha &= \left(1-e^{\alpha t}\right) f(\alpha) + f((1-t)\alpha) - f(\alpha)\\ &= \left(1-e^{\alpha t}\right) f(\alpha) + \int_{(1-t)\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\\ &= \left(1-e^{\alpha t}\right) f(\alpha) + \int_{(1-t)\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-x}-1}{x}\mathrm{d}x + \int_{(1-t)\alpha}^{\alpha} \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= \left(1-e^{\alpha t}\right) f(\alpha) + \int_{(1-t)\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-x}-1}{x}\mathrm{d}x + \ln\frac{1}{1-t}.\end{aligned}$$

On sait que

$$\left(1-e^{\alpha t}\right) f(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\sim} -\alpha t f(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\sim} -\alpha t \ln\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0.$$

D'autre part, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ étant intégrable sur $]0,1]$, on a :

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_{(1-t)\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-x}-1}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

On obtient finalement

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_{[\alpha,+\infty[} e^{xt} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\ln\frac{1}{1-t}.$$

On conclut que $\mathrm{J}(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$.

Calculons, toujours pour $t \neq 0$, $\int_{\mathbb{R}_-^*} e^{xt} f(x)\mathrm{d}x$. Comme f est paire, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_-^*} e^{xt} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-xt} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{J}(-t) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Finalement, on obtient, pour $t \in]-1,1[\setminus \{0\}$, $\boxed{\mathrm{I}(t) = \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}}$.

Il reste à calculer la valeur de $\mathrm{I}(0)$. Pour cela, montrons que la fonction J est continue en 0. Soit $a \in]0,1[$ et la fonction

$$\mathrm{F} : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-a,a] \longmapsto e^{xt} f(x).$$

La fonction F est continue sur $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-a,a]$, car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-a,a]$, on a

$$|f(x,t)| \leqslant e^{xa} f(x).$$

La fonction $x \longmapsto e^{xa} f(x)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et indépendante de t, on en déduit que la fonction $\mathrm{J} : t \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{xt} f(x)\mathrm{d}x$ est continue sur $[-a,a]$ et en particulier en 0. On a donc

$$\mathrm{J}(0) = \lim_{t\to 0} -\frac{\ln(1-t)}{t} = 1.$$

De la parité de f, il résulte que $\boxed{\mathrm{I}(0) = 2}$. $\triangleleft$

Dans les deux exercices suivants on sera amené à utiliser, en le démontrant, le lemme de Riemann-Lebesgue pour des intégrales généralisées. Nous renvoyons le lecteur à l'exercice 1.25 du tome analyse 2 pour la preuve de ce résultat dans le cas des intégrales définies sur un segment.

4.43. Calculs de limites

Continuité, limites en 0 et $+\infty$ de $f : x \longmapsto \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

• Montrons que f est bien définie en $x \neq 0$. Il s'agit de montrer que $g_x : y \in [0,x[\longmapsto \frac{\cos y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ est intégrable. Elle est continue, et lorsque y tend vers x, ($y \in [0,x[$), on a

$$\left|\frac{\cos y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right| = \frac{|\cos y|}{\sqrt{|x-y||x+y|}} \sim \frac{|\cos x|}{\sqrt{|x-y|}\sqrt{2|x|}}.$$

Comme $y \in [0, x[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}}$ est intégrable, d'après le théorème de comparaison g_x est intégrable.

Effectuons le changement de variable $z = -y$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \mathrm{d}y = -\int_0^{-x} \frac{\cos(-z)}{\sqrt{x^2 - (-z)^2}} \mathrm{d}z = -\int_0^{-x} \frac{\cos z}{\sqrt{x^2 - z^2}} \mathrm{d}z$$
$$= -f(-x).$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est impaire. On l'étudiera donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Soit $x > 0$. Effectuons dans $f(x)$ le changement de variable $u = \dfrac{y}{x}$ pour se débarrasser de la variable x dans les bornes d'intégration :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{x^2 - x^2u^2}} x\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u.$$

Notons $\varphi(x, u) = \dfrac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}$ pour $x \geqslant 0$ et $u \in [0, 1[$. À u fixé, $x \mapsto \varphi(x, u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \geqslant 0$ et $u \in [0, 1[$, on majore ainsi

$$|\varphi(x, u)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

avec $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$ intégrable sur $[0, 1[$. Il en résulte que $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x, u)\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \int_0^1 \varphi(0, u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin(u)]_0^1 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

On a donc $\boxed{f(0^+) = \dfrac{\pi}{2} = -f(0^-)}$.

• La limite en $+\infty$ est une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue généralisé :

Lemme. *Soit $\alpha < \beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors :*

$$\int_\alpha^\beta f(u) \cos(xu)\, du \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe a et b réels tels que $\alpha < a < b < \beta$ et

$$\int_\alpha^a |f| + \int_b^\beta |f| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout x réel, on a donc

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f(u)\cos(xu)\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_\alpha^a |f| + \left|\int_a^b f(u)\cos(xu)\mathrm{d}u\right| + \int_b^\beta |f| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f(u)\cos(xu)\mathrm{d}u\right| + \varepsilon\end{aligned}$$

Or, pour x assez grand, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on a $\left|\int_a^b f(u)\cos(xu)\mathrm{d}u\right| \leqslant \varepsilon$. Donc pour x assez grand, on a la majoration

$$\left|\int_\alpha^\beta f(u)\cos(xu)\mathrm{d}u\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme.$\diamondsuit$

On conclut donc que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0 = \lim\limits_{-\infty} f}$ puisque f est impaire. $\lhd$

Le lemme est aussi vrai en remplaçant cosinus par sinus, donc si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ *est intégrable, on a*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0.$$

Ce résultat est encore utilisé dans l'exercice suivant.

4.44. Étude d'une intégrale indéfinie

> Étudier la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \int_0^x e^{i/t}\mathrm{d}t.$
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

Comme la fonction $f : t \longmapsto e^{i/t}$ est continue sur $]0,x]$, de module constant égal à 1 avec $x \longmapsto 1$ intégrable sur $]0,x]$, elle est effectivement intégrable sur $]0,x]$ en vertu du théorème de comparaison. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit qu'il en va de même pour F. On a $\mathrm{F}(0) = 0$ et $|\mathrm{F}(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \neq 0$, donc F est continue en 0. On a pour x non nul, $\mathrm{F}'(x) = e^{i/x}$ donc F ne peut être $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Étudions cependant la dérivabilité en 0.

Si $x > 0$, on peut effectuer le changement de variable $y = \dfrac{x}{t}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone :

$$\mathrm{F}(x) = x \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy/x}}{y^2} \mathrm{d}y.$$

Le taux d'accroissement de F en 0 vaut donc

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy/x}}{y^2} \mathrm{d}y \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0,$$

en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions intégrables. C'est la même chose à gauche. Ainsi, F est dérivable en 0 et $\mathrm{F}'(0) = 0$. ◁

L'exercice suivant concerne le développement asymptotique du reste de l'intégrale de Gauss.

4.45. Série asymptotique (1)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.

1. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

2. Donner un développement asymptotique de f à un ordre arbitraire dans l'échelle des fonctions $x^m e^{-x^2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

3. On écrit ce développement $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x) + o(u_n(x))$.

Étudier la convergence simple de la série de terme général $u_n(x)$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Procédons par intégration par parties. Soit $0 \leqslant x \leqslant \mathrm{X}$. On a

$$\int_x^{\mathrm{X}} e^{-t^2} \mathrm{d}t = -\int_x^{\mathrm{X}} (-2t) e^{-t^2} \frac{1}{2t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right] - \int_x^{\mathrm{X}} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t.$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, il vient

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t.$$

Comme en $+\infty$, $\dfrac{e^{-t^2}}{2t^2} = o(e^{-t^2})$ avec $t \longmapsto e^{-t^2}$ intégrable et positive sur $[1, +\infty[$, le théorème d'intégration des relations de comparaison assure que, lorsque $x \to +\infty$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t = o(f(x)).$$

On conclut donc que pour x tendant vers $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{e^{-x^2}}{2x}\cdot$

2. L'idée est de poursuivre une succession d'intégrations par parties. Par exemple, la suivante donne par les mêmes arguments

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} \frac{(2t)e^{-t^2}}{4t^3}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \int_x^{+\infty} \frac{3e^{-t^2}}{4t^4}\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x^2}}{4x^3},$$

quand x tend vers $+\infty$ et on obtient donc

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x^3}\right).$$

Il apparaît à chaque étape $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t$. Opérons une intégration par parties sur le segment $[x, \mathrm{X}]$:

$$\int_x^{\mathrm{X}} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t = -\int_x^{\mathrm{X}} \frac{(2t)e^{-t^2}}{2t^{2n+1}}\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{-t^2}}{2t^{2n+1}}\right] - \frac{2n+1}{2}\int_x^{\mathrm{X}} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, il reste

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\mathrm{d}t.$$

Comme pour t tendant vers $+\infty$, $\dfrac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} = o\left(\dfrac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\right)$ avec $t \longmapsto \dfrac{e^{-t^2}}{t^{2n}}$ positive et intégrable sur $[1, +\infty[$, le théorème d'intégration des relations de comparaison donne

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x^{2n+1}} + o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t\right) = \frac{e^{-x^2}}{2x^{2n+1}} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\right),$$

pour x tendant vers l'infini.

On en déduit que

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1).\cdots.3.1e^{-x^2}}{2^{n+1}x^{2n+1}} + \mathrm{R}_{n+1}(x)$$

avec

$$\mathrm{R}_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1).(2n-1).\cdots.3.1}{2^{n+1}}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\mathrm{d}t = o\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\right)$$

pour x tendant vers $+\infty$. On obtient donc le développement asymptotique recherché

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!e^{-x^2}}{2^{2n+1}n!x^{2n+1}} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\right).$$

3. Nous avons pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n (2n)! e^{-x^2}}{2^{2n+1} n! x^{2n+1}}$. Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Cette limite prouve que la série $\sum u_n(x)$ diverge pour tout $x > 0$. ◁

4.46. Série asymptotique (2)

> **1.** Préciser le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
>
> **2.** Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} \mathrm{d}t$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Notons a_n le terme général de la série qui a un sens pour $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x \neq 0$, on a $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{n+1}{|x|}$ qui tend vers l'infini. La règle de D'Alembert indique que $\sum a_n$ diverge : le domaine de convergence est donc vide.

2. Pour $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable en vertu du théorème de comparaison puisque $\dfrac{e^{-xt}}{1+t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers l'infini. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour x tendant vers l'infini, e^{-xt} écrase l'intégrande si bien que l'on peut imaginer que la contribution est concentrée vers 0. Or, sur $[0, 1[$, la fraction $\dfrac{1}{1+t}$ s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$. Comme cela, n'est pas valable sur tout $\mathbb{R}_+$, on va se ramener à une somme géométrique finie en écrivant

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1 - t^{\mathrm{N}+1}}{1+t} + \frac{t^{\mathrm{N}+1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n t^n + \frac{t^{\mathrm{N}+1}}{1+t}.$$

En injectant dans l'intégrale et en remarquant que chaque intégrale existe, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mathrm{N}+1} e^{-xt}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = xt$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone nous donne

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{u^n}{x^n}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}}\cdot$$

Ainsi, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \mathrm{R_N}(x)$ avec $\mathrm{R_N}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mathrm{N}+1}e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Si nous prouvons que $\mathrm{R}_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{\mathrm{N}+1}}\right)$ pour x tendant vers ∞, nous aurons à notre disposition un développement asymptotique de f dans l'échelle des $\frac{1}{x^n}\cdot$ C'est le cas puisque

$$|\mathrm{R_N}(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{\mathrm{N}+1}e^{-xt} = \frac{(\mathrm{N}+1)!}{x^{\mathrm{N}+2}} = o\left(\frac{1}{x^{\mathrm{N}+1}}\right).$$

On conclut que pour x tendant vers l'infini

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\mathrm{N}+1}}\right)}. \triangleleft$$

Notons $\mathrm{L}_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mathrm{X}^n}(\mathrm{X}^2-1)^n$ *le n-ième polynôme de Legendre. La suite* $(\mathrm{L}_n)_{n\geqslant 0}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *lorsqu'on munit cet espace du produit scalaire intégral* $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \longmapsto \int_{-1}^{1}\mathrm{PQ}$*. La formule de Laplace montre que, pour* $x \geqslant 1$, $\mathrm{L}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta$*. L'exercice suivant revient donc à déterminer un équivalent de* $\mathrm{L}_n(x)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$, $x \geqslant 1$ *étant fixé.*

4.47. Polynômes de Legendre

Soit $x \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n\mathrm{d}\theta.$$

Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Le cas $x = 1$ étant trivial, on suppose $x > 1$. Pour simplifier les écritures on pose $x = \operatorname{ch} u$, avec $u > 0$ et donc $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} u$. On écrit

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} e^{n\ln(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u\cos\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

et on pose, pour tout $\theta \in [0,1]$, $f(\theta) = \ln(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \cos\theta)$. La fonction f est strictement décroissante sur $[0,1]$. Il va en résulter que la contribution principale à l'intégrale provient d'un voisinage de 0. Il s'agit de la méthode de Laplace que le lecteur aura déjà pu rencontrer dans les exercices 1.41 et 1.42 du tome analyse 2. Précisons tout cela en commençant par chercher un développement limité de f en 0. On a

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \ln\left(e^u - \frac{\operatorname{sh} u}{2}\theta^2 + o(\theta^2)\right) = u + \ln\left(1 - \frac{\operatorname{sh} u\, e^{-u}}{2}\theta^2 + o(\theta^2)\right) \\ &= u - \frac{\operatorname{sh} u\, e^{-u}}{2}\theta^2 + o(\theta^2). \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. Il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que, pour tout $\theta \in [0,\delta]$, on a :

$$u - \frac{\operatorname{sh} u}{2}e^{-u}\theta^2(1+\alpha) \leqslant f(\theta) \leqslant u - \frac{\operatorname{sh} u}{2}e^{-u}\theta^2(1-\alpha).$$

En intégrant ces inégalités sur $[0,\delta]$, on obtient :

$$\underbrace{e^{nu}\int_0^\delta e^{-\frac{n \operatorname{sh} u e^{-u}(1+\alpha)}{2}\theta^2}\mathrm{d}\theta}_{u_n} \leqslant \int_0^\delta e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta \leqslant \underbrace{e^{nu}\int_0^\delta e^{-\frac{n \operatorname{sh} u e^{-u}(1-\alpha)}{2}\theta^2}\mathrm{d}\theta}_{v_n}.$$

• Pour tout $\mathrm{A} > 0$, on a

$$\int_0^\delta e^{-n\mathrm{A}\theta^2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{n\mathrm{A}}}\int_0^{\delta\sqrt{n\mathrm{A}}} e^{-u^2}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{n\mathrm{A}}},$$

où $\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2}\mathrm{d}u$.

On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}},$$

où $a_n = \dfrac{e^{nu}\mathrm{I}}{\sqrt{\dfrac{n \operatorname{sh} u e^{-u}}{2}}}\cdot$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On a $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = 1$. On peut donc choisir $\alpha \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} > 1-\varepsilon$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}} < 1+\varepsilon$ et le δ correspondant. Par définition d'un équivalent, on peut trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$u_n > a_n(1-\varepsilon) \text{ et } v_n < b_n(1+\varepsilon) \text{ et donc}$$

$$a_n(1-\varepsilon) < \int_0^\delta e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta < a_n(1+\varepsilon).$$

• Nous allons maintenant démontrer que $\int_\delta^\pi e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta$ est négligeable devant a_n. La fonction f étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$ on a, pour $\theta\in[\delta,\pi]$ et $n\in\mathbb{N}$, $nf(\theta)\leqslant nf(\delta)$ et donc

$$0\leqslant\int_\delta^\pi e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_\delta^\pi e^{nf(\delta)}\mathrm{d}\theta\leqslant\pi e^{nf(\delta)}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{nf(\delta)}}{\dfrac{e^{nu}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}e^{(f(\delta)-u)}=0,$$

car $f(\delta)<f(0)=u$. On en déduit que $\int_\delta^\pi e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta$ est négligeable devant a_n. Il existe $\mathrm{N}'\in\mathbb{N}$ tel que, pour $n\geqslant\mathrm{N}'$, on a

$$0\leqslant\int_\delta^\pi e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta\leqslant a_n\varepsilon.$$

On a alors, pour $n\geqslant\mathrm{N},\mathrm{N}'$,

$$a_n(1-\varepsilon)\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant a_n(1+2\varepsilon).$$

On conclut que $\mathrm{I}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}a_n$.

C'est un résultat connu que $\mathrm{I}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir l'exercice 4.29). En remplaçant e^u par sa valeur $x+\sqrt{x^2-1}$ et $\operatorname{sh}u$ par la sienne $\sqrt{x^2-1}$, on obtient

$$a_n=\frac{e^{(n+\frac12)u}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\dfrac{n\operatorname{sh}u}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac12}}{\sqrt{\sqrt{x^2-1}}}.$$

On conclut que $\boxed{\mathrm{I}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac12}}{(x^2-1)^{\frac14}}}$. ◁

L'exercice suivant présente la fonction maximale M *de Littlewood dans le cas d'une fonction positive bornée : la valeur de* M *en un point* x *est la borne supérieure des valeurs moyennes de* f *sur les intervalles centrés en* x.

4.48. Fonction maximale de Littlewood

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, bornée. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on définit

$$m(x,t) = \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u)\mathrm{d}u \text{ et } \mathrm{M}(x) = \sup_{t>0} m(x,t).$$

1. Vérifier que $f(x) \leqslant \mathrm{M}(x) \leqslant \|f\|_\infty$.

2. Montrer que M est continue.

3. On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} x\mathrm{M}(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{d}u.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On a, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$m(x,t) \leqslant \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} \|f\|_\infty \mathrm{d}u = \|f\|_\infty.$$

Ceci entraîne que pour tout réel x, on a $\mathrm{M}(x) \leqslant \|f\|_\infty$. Le réel x étant fixé et F étant une primitive de f, on a, pour $t > 0$,

$$m(x,t) = \frac{\mathrm{F}(x+t) - \mathrm{F}(x-t)}{2t}.$$

D'après la formule des accroissements finis, il existe $c_t \in [x-t, x+t]$ tel que $m(x,t) = f(c_t)$. La fonction f étant continue, on a

$$\lim_{t \to 0} m(x,t) = \lim_{t \to 0} f(c_t) = f(x).$$

Sachant que pour tout $t > 0$, on a $m(x,t) \leqslant \mathrm{M}(x)$, on en déduit en faisant tendre t vers 0 que

$$f(x) \leqslant \mathrm{M}(x).$$

2. On suppose $\|f\|_\infty \neq 0$, sinon il n'y a rien à démontrer. Soit x_0. Pour montrer la continuité de M en x_0, on commence par majorer $|m(x,t) - m(x_0,t)|$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on peut écrire,

$$\begin{aligned} m(x,t) - m(x_0,t) &= \frac{1}{2t}\left(\int_{x-t}^{x+t} f(u)\mathrm{d}u - \int_{x_0-t}^{x_0+t} f(u)\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{1}{2t}\left(\int_{x_0+t}^{x+t} f(u)\mathrm{d}u - \int_{x_0-t}^{x-t} f(u)\mathrm{d}u\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|m(x,t) - m(x_0,t)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty |x - x_0|}{t}.$$

Mais, d'autre part, il existe $c_t \in \,]x-t, x+t[$ et $c_t^0 \in]x_0 - t, x_0 + t[$ tels que

$$m(x,t) - m(x_0,t) = f(c_t) - f(c_t^0).$$

On va majorer $|m(x,t) - m(x_0,t)|$, uniformément en t en distinguant selon que t est « petit » ou non. La fonction f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ si $|x - x_0| \leqslant \eta$. Soit x tel que $|x - x_0| \leqslant \dfrac{\eta}{3}\cdot$

Si $|t| \leqslant \dfrac{\eta}{3}$, alors on a $|c_t - c_t^0| \leqslant |x - x_0| + 2t \leqslant \eta$, d'où l'on déduit $|m(x,t) - m(x_0,t)| = |f(c_t) - f(c_t^0)| \leqslant \varepsilon$.

Si $t \geqslant \dfrac{\eta}{3}$, alors on a

$$|m(x,t) - m(x_0,t)| \leqslant \frac{3\|f\|_\infty |x - x_0|}{\eta} \leqslant \varepsilon,$$

dès que $|x - x_0| \leqslant \dfrac{\varepsilon\eta}{3\|f\|_\infty}\cdot$

Posons $\alpha = \min(\eta, \dfrac{\varepsilon\eta}{3\|f\|_\infty})$ et supposons que $|x - x_0| \leqslant \alpha$. Alors, pour tout $t > 0$, on a

$$|m(x,t) - m(x_0,t)| \leqslant \varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$m(x,t) \leqslant m(x_0,t) + \varepsilon \leqslant \mathrm{M}(x_0) + \varepsilon,$$

puis

$$\mathrm{M}(x) \leqslant \mathrm{M}(x_0) + \varepsilon.$$

On obtient de même $\mathrm{M}(x_0) \leqslant \mathrm{M}(x) + \varepsilon$ et finalement $|\mathrm{M}(x) - \mathrm{M}(x_0)| \leqslant \varepsilon$. La fonction M est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Posons $\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{d}u$. Là aussi, on peut supposer $\|f\|_\infty \neq 0$ et donc $\mathrm{I} > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x > 0$. On a, par définition,

$$\mathrm{M}(x) \geqslant m(x, x(1+\varepsilon)) \geqslant \frac{1}{2(1+\varepsilon)x} \int_{-\varepsilon x}^{(2+\varepsilon)x} f(u)\mathrm{d}u, \text{ et donc}$$

$$2x\mathrm{M}(x) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{-\varepsilon x}^{(2+\varepsilon)x} f(u)\mathrm{d}u.$$

Puisque $\dfrac{1}{1+\varepsilon}\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{-\varepsilon x}^{(2+\varepsilon)x} f(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+\varepsilon}\mathrm{I} \geqslant (1-\varepsilon)\mathrm{I}$, il existe $\mathrm{A}>0$ tel que, pour $x \geqslant \mathrm{A}$, on a

$$2x\mathrm{M}(x) \geqslant (1-2\varepsilon)\mathrm{I}.$$

Il faut maintenant démontrer une inégalité de sens inverse. Pour majorer $2x\mathrm{M}(x)$, il faut majorer $2xm(x,t)$ de manière uniforme par rapport à t. On distingue encore selon les « petites » et les « grandes » valeurs de t.

Si $x>0$ et $t \geqslant (1-\varepsilon)x$, alors on a

$$2xm(x,t) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\mathrm{I}.$$

Si on impose d'avoir de plus $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{1-\varepsilon} \leqslant (1+2\varepsilon)$ et donc

$$2xm(x,t) \leqslant (1+2\varepsilon)\mathrm{I}.$$

Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Soit B tel que $xf(x) \leqslant \varepsilon^2$ si $x \geqslant \mathrm{B}$. Soit $x>0$ et $t \leqslant (1-\varepsilon)x$. On a alors $x-t \geqslant \varepsilon x$. Si on prend $x \geqslant \dfrac{\mathrm{B}}{\varepsilon}$, on obtient

$$2xm(x,t) \leqslant \frac{2x}{2t}\int_{x-t}^{x+t} \frac{\varepsilon^2}{u}\mathrm{d}u \leqslant \frac{x\varepsilon^2}{t}\ln\frac{x+t}{x-t}.$$

On sait que $\ln\dfrac{x+t}{x-t} \leqslant \dfrac{x+t}{x-t} - 1 \leqslant \dfrac{2t}{x-t} \leqslant \dfrac{2t}{\varepsilon x}\cdot$ On en déduit que

$$2xm(x,t) \leqslant 2\varepsilon.$$

On peut supposer $\varepsilon \leqslant \dfrac{\mathrm{I}}{2}\cdot$ On obtient $2xm(x,t) \leqslant 2\varepsilon \leqslant \mathrm{I} \leqslant (1+2\varepsilon)\mathrm{I}$.

Finalement, pour $x \geqslant \dfrac{\mathrm{B}}{\varepsilon}$, on a, pour tout $t>0$, $2xm(x,t) \leqslant (1+2\varepsilon)\mathrm{I}$. On en déduit que

$$2x\mathrm{M}(x) \leqslant (1+2\varepsilon)\mathrm{I}.$$

On a donc enfin, pour $x \geqslant \max(\mathrm{A}, \dfrac{\mathrm{B}}{\varepsilon})$,

$$(1-2\varepsilon)\mathrm{I} \leqslant 2x\mathrm{M}(x) \leqslant (1+2\varepsilon)\mathrm{I}.$$

Ceci démontre que $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\mathrm{M}(x) = \mathrm{I}$ et donc que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{M}(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{d}u}. \ \triangleleft$$

Le problème d'extremum suivant est issu de la théorie des probabilités.

4.49. Calcul des variations

Soit E_α l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues telles que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, $\int_{\mathbb{R}} tf(t)\mathrm{d}t = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \alpha$. Déterminer $\inf\limits_{f\in\mathrm{E}_\alpha} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\ln f$; existe-t-il $f \in \mathrm{E}_\alpha$ réalisant ce minimum ?

Indication : pour $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ fixé, on considérera l'expression $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\ln f + \lambda\int_{\mathbb{R}} f + \mu\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,dt + \nu\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,dt$ et on cherchera $f \in \mathrm{E}_\alpha$ qui minimalise l'intégrande.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$. Comme le conseille l'énoncé, on considère, pour $f \in \mathrm{E}_\alpha$,

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(f) &= \int_{\mathbb{R}} f\ln f + \lambda\int_{\mathbb{R}} f + \mu\int_{\mathbb{R}} tf(t)\mathrm{d}t + \nu\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)(\ln f(t) + \lambda + \mu t + \nu t^2)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque λ, μ, ν sont fixés et f décrit E_α, les trois derniers termes de cette somme sont constants. Déterminer $\inf\limits_{f\in\mathrm{E}_\alpha} \int_{\mathbb{R}} f\ln f$ revient donc à déterminer $\inf\limits_{f\in\mathrm{E}_\alpha} \mathrm{L}(f)$.

Supposons qu'on ait déterminé $\widehat{f} \in \mathrm{E}_\alpha$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathrm{E}_\alpha$, on ait

$$\widehat{f}(t)(\ln\widehat{f}(t) + \lambda + \mu t + \nu t^2) \leqslant f(t)(\ln f(t) + \lambda + \mu t + \nu t^2)(*).$$

On a alors $\inf\limits_{f\in\mathrm{E}_\alpha} \mathrm{L}(f) = \mathrm{L}(\widehat{f})$.

On remarque que la condition $(*)$ est réalisée en particulier si, pour tout réel t, $\widehat{f}(t)$ est la valeur où la fonction

$$\varphi_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x(\ln x + \lambda + \mu t + \nu t^2) \in \mathbb{R}$$

atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. Une rapide étude des variations de φ_t montre qu'il faut prendre

$$\widehat{f}(t) = e^{-\nu t^2 - \mu t - \lambda - 1}.$$

Il reste à montrer qu'on peut choisir λ, μ, ν pour que la fonction $\widehat{f}$ ainsi définie appartienne à E_α. La fonction $\widehat{f}$ est clairement continue sur

$\mathbb{R}$. Pour qu'elle soit intégrable sur $\mathbb{R}$, il faut prendre $\nu > 0$. On met le trinôme $-\nu t^2 - \mu t - \lambda - 1$ sous forme canonique ; on trouve

$$-\nu\left(t+\frac{\mu}{2\nu}\right)^2 + c, \text{ avec } c = -\lambda - 1 + \frac{\mu^2}{4\nu}.$$

• En utilisant le résultat classique $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ (cf. l'exercice 4.29), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f} = e^c \int_{\mathbb{R}} e^{-\nu\left(t+\frac{\mu}{2\nu}\right)^2}\mathrm{d}t = e^c \int_{\mathbb{R}} e^{-\nu t^2}\mathrm{d}t = \frac{e^c}{\sqrt{\nu}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{e^c\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu}}.$$

• On calcule de même

$$\int_{\mathbb{R}} t\widehat{f}(t)\mathrm{d}t = e^c \int_{\mathbb{R}} te^{-\nu\left(t+\frac{\mu}{2\nu}\right)^2}\mathrm{d}t = e^c \int_{\mathbb{R}} \left(t - \frac{\mu}{2\nu}\right) e^{-\nu t^2}\mathrm{d}t = -e^c\frac{\mu}{2\nu}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu}},$$

car $\int_{\mathbb{R}} te^{-\nu t^2}\mathrm{d}t = 0$, puisque la fonction qu'on intègre est impaire. La condition $\int_{\mathbb{R}} t\widehat{f}(t)\mathrm{d}t = 0$ donne donc $\mu = 0$.

• Enfin, on calcule $\int_{\mathbb{R}} t^2\widehat{f}(t)\mathrm{d}t = e^c\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-\nu t^2}\,\mathrm{d}t$ en intégrant par parties : la fonction $t \longmapsto te^{-\nu t^2}$ a pour primitive $t \longmapsto -\dfrac{1}{2\nu}e^{-\nu t^2}$. Sachant que $\lim\limits_{|t|\to+\infty} te^{-\nu t^2} = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} t^2\widehat{f}(t)\mathrm{d}t = \frac{e^c}{2\nu}\int_{\mathbb{R}} e^{-\nu t^2}\mathrm{d}t = \frac{e^c}{2\nu}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu}}.$$

Les conditions $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f} = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2\widehat{f}(t) = \alpha$ donnent $e^c = \dfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}}$ et $\dfrac{1}{2\nu} = \alpha$. On obtient donc finalement $\mu = 0$, $\nu = \dfrac{1}{2\alpha}$ et $e^c = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}$, ce qui détermine λ.

On conclut que la borne inférieure cherchée est atteinte pour la fonction

$$\boxed{\widehat{f} : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}}.$$

On calcule alors cette borne inférieure :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\ln\widehat{f} &= \int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi\alpha) - \frac{t^2}{2\alpha}\right)\widehat{f}(t)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\alpha)\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}} t^2\widehat{f}(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\alpha) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\inf_{f\in\mathrm{E}_\alpha}\int_{\mathbb{R}} f\ln f = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\alpha) - \frac{1}{2}}. \lhd$$

Les coefficients λ, μ, ν sont appelés des multiplicateurs de Lagrange*. Ils sont utilisés dans tout problème d'extremum sous contraintes (la variable, élément d'un espace vectoriel est soumise à certaines conditions) dont le type le plus simple est la recherche du maximum d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, la variable $x \in \mathbb{R}^n$ étant soumise à des contraintes de la forme $g(x) = 0$ ou $g(x) \leqslant 0$, où g est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Ici la variable est une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ et positive et les contraintes sont $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, $\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,dt = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,dt = \alpha$.*

Une fonction positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale égale à 1 est une densité de probabilité*. Si X est une variable aléatoire de densité f, les conditions $\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,dt = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,dt = \alpha$ signifient que X est d'espérance nulle et de variance α. L'entropie de X est égale par définition à $-\int_{\mathbb{R}} f \ln f$. L'exercice montre que parmi les variables X d'espérance nulle et de variance fixée, celle qui est d'entropie maximale est celle qui suit une loi normale (cela reste vrai si on impose que l'espérance soit égale à une constante quelconque).*

Table des matières