exercices de mathématiques

oraux x-ens

analyse 4

Serge Francinou
Hervé Gianella
Serge Nicolas

CASSINI

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
ORAUX X-ENS

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard. *Probabilités 1*
2. J. Hubbard. B. West. *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell. V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor. *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas. *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou. *Algèbre, arithmétique et Maple*
10. S. Francinou. H. Gianella. S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 1*
11. S. Francinou. H. Gianella. S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 1*
12. S. Francinou. H. Gianella. S. Nicolas. *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*
13. S. Francinou. H. Gianella. S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 2*
14. S. Francinou. H. Gianella. S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 3*
15. H. Krivine. *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod. Ph. Protter, *L'essentiel en théorie des probabilités*
17. M. Willem. *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
19. B. Randé. *Problèmes corrigés. Concours 2002 et 2003 (MP)*
20. D. Perrin, *Mathématiques d'école*
21. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2004 (MP)*
22. P. Bourgade. *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*
23. V. Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*
24. R. Sá Earp. E. Toubiana, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*
25. L. Di Menza. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
26. B. Candelpergher, *Calcul intégral*
27. J. Hubbard. B. West. *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 1*
28. J. Hubbard. B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 2*
29. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 3*
30. C. Zuily. *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
31. B. Makarov *et al.*. *Problèmes d'analyse réelle*
32. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 4*
33. E. Lehman, *Mathématiques pour l'étudiant de 1re année, vol. 1, Algèbre et Géométrie*

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome IV

CASSINI

SERGE FRANCINOU, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques, est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Charlemagne.

HERVÉ GIANELLA, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques, est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal d'Orsay.

SERGE NICOLAS, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques, est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

ISBN 978-2-84225-157-4.

© Cassini, Paris, 2012.
Nouveau tirage, 2016.

Introduction

Cet ouvrage est le quatrième et dernier tome d'analyse d'un recueil d'exercices de mathématiques destiné à la préparation des oraux des concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique. Il comporte sept tomes, trois d'algèbre et quatre d'analyse.

La vocation première des Écoles normales est de former des chercheurs ou des enseignants-chercheurs. Le concours d'entrée vise donc à détecter les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à la recherche. À l'oral, on jugera avant tout la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche. On ne sera pas surpris que les exercices posés aient un contenu mathématique riche, qu'ils soient très éloignés du simple exercice technique, d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif. Ils pourraient apparaître excessivement difficiles, si on perdait de vue le déroulement concret de l'épreuve. L'oral des ENS est un long dialogue (l'épreuve dure environ cinquante minutes, comme d'ailleurs à l'École polytechnique) entre le candidat et l'examinateur, qui tout au long de l'épreuve fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion du candidat et tester ses réactions. Il est d'ailleurs impossible de rendre pleinement compte dans un recueil d'exercices du caractère oral de l'épreuve.

L'École polytechnique, quant à elle, est plus généraliste. Les exercices posés au concours sont de facture plus classique et, en règle générale, l'examinateur intervient moins. C'est au candidat de montrer sa maîtrise du programme dans la résolution d'un exercice dont la difficulté est cependant très variable. Certains sont proches des exercices d'ENS. Les énoncés circulent d'ailleurs d'un concours à l'autre, ou peuvent même être repris d'exercices d'Olympiades.

Les énoncés qui figurent dans ce recueil ont été donnés entre 1996 et 2011. Ils sont extraits pour l'essentiel des listes publiées chaque année par la RMS (*Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* aux éditions Vuibert jusqu'en 2003 et désormais *Revue de la filière Mathématiques* aux éditions e.net) dont nous remercions les auteurs pour l'aide précieuse qu'ils apportent ainsi aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires. Il s'agit de versions communiquées par les étudiants, reflétant la compréhension que ceux-ci ont eue de l'exercice et le déroulement conjoncturel de leur oral, comme le montrent les variations d'une année à l'autre pour un même exercice. Nous n'avons pas hésité à les modifier, pour rectifier des erreurs, compléter un énoncé

quand manifestement l'exercice s'est arrêté avant que le résultat que l'examinateur avait en vue ne soit atteint, ou ajouter des indications.

Nous avons choisi de laisser quelques énoncés «bruts», ceux pour lesquels nous estimons qu'une démarche naturelle (qui peut être longue et ardue) permet de conduire à la solution. Pour d'autres exercices, nous avons pris la liberté de rajouter des questions intermédiaires, qui auraient pu être celles posées par l'examinateur. Quitte à perdre en concision, nous avons tenu à rédiger les solutions les plus pédagogiques possible, essayant d'exposer clairement les idées et démarches des raisonnements sans pour autant escamoter les détails ou calculs qui peuvent paraître évidents. On évite autant que possible l'introduction d'une astuce ou d'un objet *ad hoc* permettant d'atteindre rapidement la solution. S'il n'y a pas moyen d'expliquer l'origine de cette astuce, c'est que l'exercice est peu intéressant et que l'étudiant en tirera peu de profit.

À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices ont été regroupés thématiquement, et à l'intérieur de chaque thème, souvent par ordre de difficulté croissante. Ainsi regroupés, ils apparaîtront plus accessibles, car plongés dans leur contexte mathématique, éclairés par d'autres exercices voisins. Les introductions historiques qui ouvrent chaque chapitre, outre leur intérêt propre, visent au même but. Enfin, nous avons agrémenté les énoncés de quelques remarques préliminaires. Sans faire de rappels de cours systématiques, nous avons énoncé, voire redémontré certains résultats : lemmes classiques, intervenant dans la résolution d'un grand nombre d'exercices, ou résultats au contraire à la lisière du programme, mais utiles, pour lesquels des éclaircissements étaient nécessaires. On trouvera aussi des remarques de synthèse ou des généralisations qui, nous l'espérons, pourront amener le candidat curieux à approfondir ses connaissances. Les quelques indications bibliographiques ont le même objectif.

Le lecteur ne tirera profit de ce livre d'exercices que s'il cherche des solutions personnelles avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est indispensable. En effet, les théorèmes du programme fournissent bon nombre de schémas de démonstration.

Au-delà des étudiants en classe préparatoire, ces ouvrages intéresseront aussi les candidats au CAPES et à l'Agrégation, qui y trouveront matière à réviser les principales notions du programme, ainsi que des exemples pour nourrir un développement pour leur oral.

Voyons maintenant plus précisément le contenu de ce tome 4 d'analyse. Le premier chapitre concerne le calcul différentiel (différentiabilité, problème d'extremum, équations aux dérivées partielles, inversion...) ainsi que les intégrales doubles. Les deux suivants sont consacrés aux équations différentielles, d'abord linéaires puis non linéaires (résolution explicite, étude qualitative des solutions, domaine d'existence dans le

cas non linéaire, calcul des variations...). Le dernier chapitre, un peu plus court, porte essentiellement sur les courbes.

Comme dans les autres tomes, les exercices sont classés par thème. La difficulté est toutefois plutôt croissante : les chapitres commencent par des questions techniques ou des savoir-faire indispensables (calcul de différentielle, résolution explicite d'équations différentielles...) et se terminent souvent par des exercices difficiles qui ont pour objet de démontrer des théorèmes du niveau licence ou master (citons par exemple le principe du maximum, le théorème d'entrelacement de Sturm, le théorème de stabilité pour les équations différentielles,...).

Nous remercions Catherine et André Bellaïche pour leur relecture.

Enfin, si vous souhaitez nous contacter pour nous faire part de vos remarques, vous pouvez envoyer un courrier à l'adresse *fgn.cassini@free.fr*.

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles sont apparues au XVIII^{e} *siècle chez Euler et Clairaut, qui y ont reconnu l'outil de base du calcul différentiel à plusieurs variables (mais la notation* ∂ *ne s'est imposée que grâce à Jacobi vers 1841). S'inspirant de ce que Leibniz avait fait pour les fonctions d'une variable, ils introduisent la* différentielle totale $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$. *Ils montrent que cette expression est invariante si on fait un changement de variables. Ils utilisent aussi les dérivées secondes et constatent que le résultat ne dépend pas de l'ordre des dérivations. La condition* $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$ *pour que* $\mathrm{P}(x,y)dx + \mathrm{Q}(x,y)dy$ *soit la différentielle d'une fonction est connue de Clairaut. Euler développe également une théorie des intégrales doubles et considère qu'une équation* $f(x,y) = 0$ *induit une fonction implicite* $x \longmapsto y$ *dont il explicite les dérivées.*

Apparaissent les premières équations aux dérivées partielles issues de la physique (équation de Laplace $\Delta u = 0$, *équation des ondes, équation de la chaleur). Un seul de ces problèmes est étudié au* XVII^{e}*siècle, celui des cordes vibrantes* $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ *: d'Alembert donne la solution générale* $y = \mathrm{F}(ct + x) + \mathrm{G}(ct - x)$ *lorsque* c *est constante. Il faudra attendre la fin du* XIX^{e} *siècle pour que soient développées des méthodes efficaces de résolution des équations aux dérivées partielles. Une des motivations du calcul différentiel est la recherche d'extrema. Euler, généralisant des travaux antérieurs, écrit la fonction dont on recherche les extrema sous la forme* $\int_a^b \mathrm{F}(x, y', \ldots, y^{(n)})dx$, *où* y *est une fonction inconnue. Il arrive à la célèbre « équation d'Euler » :*

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y''}\right) - \cdots = 0,$$

qui jette les bases du calcul des variations. La méthode est considérablement simplifiée par Lagrange. Mais il faudra encore un siècle et le développement des espaces fonctionnels pour asseoir le calcul des variations sur des bases solides.

Aux fonctions de plusieurs variables est liée l'étude des surfaces. C'est Gauss qui le premier utilise la représentation des coordonnées x, y, z *d'un point courant d'une surface comme fonction de deux paramètres* u *et* v.

Sous l'influence de Cauchy, on se préoccupe tout au long du XIX^{e} *siècle de reprendre les découvertes du siècle précédent pour en*

préciser la validité. Ainsi H.A. Schwarz prouve en 1873 que la formule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *est valable sous réserve de la continuité d'un des deux membres. Peano donne l'exemple de la fonction* $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *prolongée par continuité en* $(0,0)$*, pour laquelle la permutation des dérivées n'est pas licite. À la même époque, apparaissent les premières démonstrations du théorème des fonctions implicites. On introduit différentes expressions différentielles (déterminants wronskien et hessien, crochets de Lie, invariants intégraux) qui tendent à une algébrisation du calcul différentiel. Dès l'apparition du calcul vectoriel vers 1850, Heaviside et Gibbs s'attachent, par l'élaboration de l'analyse vectorielle, à donner aux expressions avec les dérivées partielles des gradient, rotationnel, divergence... des significations intrinsèques, indépendantes du système de coordonnées choisi. Il faudra attendre l'édification de l'analyse tensorielle et du calcul différentiel extérieur pour expliquer l'origine de ces notions. Enfin, au début du* XX^{e} *siècle, O. Stolz et M. Fréchet donnent la notion intrinsèque de différentielle pour une application d'un espace vectoriel normé* E *dans un espace vectoriel normé* F*, ouvrant la voie au calcul différentiel moderne.*

Les premiers exercices concernent justement cette notion de différentiabilité.

1.1. Étude de différentiabilité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+2\pi) - f(x) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $\mathrm{F}(r\cos t, r\sin t) = (r\cos f(t), r\sin f(t))$ pour tout couple $(r,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. À quelle condition F est-elle différentiable en $(0,0)$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Supposons que F est différentiable en $(0,0)$ et notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de sa différentielle. Il existe donc une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de limite nulle en $(0,0)$ telle que

$$\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{F}(0,0) + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y).$$

En prenant $r = 0$ on voit que $\mathrm{F}(0,0) = (0,0)$. Appliquons l'hypothèse. Pour tout $(r,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} r\cos f(t) = ar\cos t + br\sin t + r\varepsilon_1(r\cos t, r\sin t) \\ r\sin f(t) = cr\cos t + dr\sin t + r\varepsilon_2\varepsilon(r\cos t, r\sin t) \end{cases}$$

où ε_1 et ε_2 sont les fonctions coordonnées de ε. En prenant $r > 0$ on peut simplifier par r et en faisant ensuite tendre r vers 0 il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{A}\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos f(t) \\ \sin f(t)\end{pmatrix}.$$

Cela montre qu'un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ est envoyé par A sur un vecteur unitaire. Par homogénéité, l'application linéaire canoniquement associée à A conserve la norme euclidienne et A est une matrice orthogonale. Deux cas se présentent.

• Si A est une matrice de rotation il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et on a alors $f(t) \equiv t + \theta\ [2\pi]$. Ainsi il existe un entier $k(t)$ tel que $f(t) = t + \theta + 2k(t)\pi$. Comme nous n'avons aucune hypothèse de continuité sur f la fonction $t \longmapsto k(t)$ n'est pas nécessairement constante.

• De même si A est une matrice de réflexion droite il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ et on a alors $f(t) \equiv -t + \alpha\ [2\pi]$. Il existe alors une fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(t) = \alpha - t + 2k(t)\pi$ pour tout t.

On peut faire la synthèse. Supposons que f soit de l'une des deux formes ci-dessus. La condition $f(x + 2\pi) - f(x) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bien vérifiée. Dans le premier cas F est une rotation et dans le second cas F est une réflexion droite : dans les deux cas elle est différentiable en $(0, 0)$. ◁

Dans l'étude d'un problème portant sur des fonctions de plusieurs variables il est souvent intéressant de commencer par regarder le problème correspondant pour des fonctions d'une variable.

1.2. Différentiabilité du maximum de plusieurs fonctions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. On pose $f = \max(f_1, \ldots, f_p)$.

1. Montrer que si toutes les fonctions f_i sont continues en $x_0 \in \Omega$ alors f est continue en x_0.

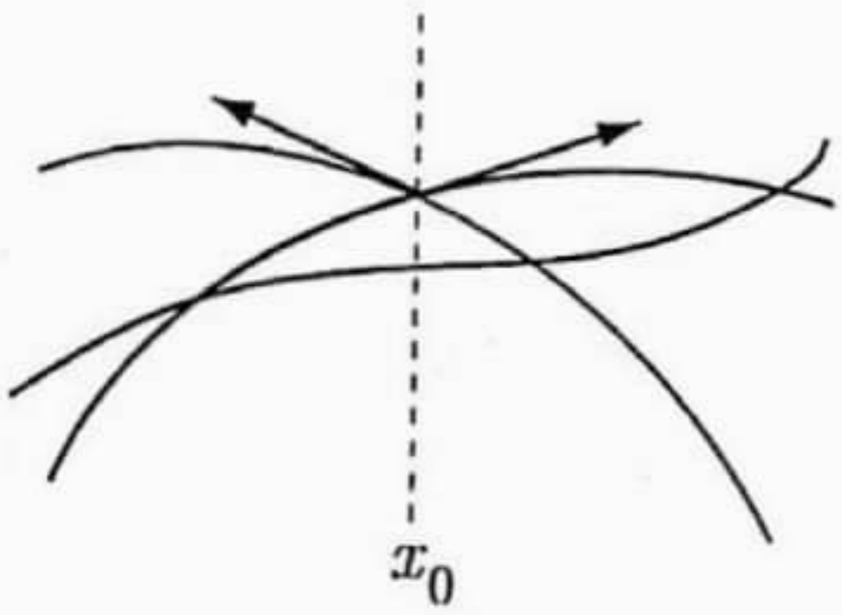
2. On suppose que toutes les fonctions f_i sont différentiables en $x_0 \in \Omega$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit différentiable en x_0.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. L'identité $\max(f_1, f_2) = \dfrac{|f_1 - f_2| + f_1 + f_2}{2}$ montre que par composition, $\max(f_1, f_2)$ est continue en x_0 dès lors que f_1 et f_2 le sont. Comme $\max(f_1, \ldots, f_p) = \max(\max(f_1, \ldots, f_{p-1}), f_p)$ une récurrence immédiate permet de conclure.

2. Commençons par regarder le cas $n = 1$, c'est-à-dire le cas de fonctions d'une seule variable réelle. La figure suivante montre le problème qui peut survenir lorsque le maximum $f(x_0)$ est atteint pour plusieurs fonctions :



Graphiquement, pour que f soit dérivable en x_0 il semble nécessaire que toutes les dérivées $f_i'(x_0)$ lorsque $f(x_0) = f_i(x_0)$ soient égales. En effet, supposons f dérivable en x_0 et notons $g_i = f - f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$: ces fonctions sont dérivables en x_0 et $0 = \max(g_1, \ldots, g_p)$. Pour tous les indices i tels que $g_i(x_0) = 0$, g_i présente manifestement un maximum en x_0 et nécessairement $g_i'(x_0) = 0$ ce qui donne $f_i'(x_0) = f'(x_0)$.

Réciproquement, supposons que $f_i'(x_0) = f_j'(x_0)$ pour tous i, j tels que $f_i(x_0) = f_j(x_0) = f(x_0)$ et montrons que f est dérivable en x_0. On note $\mathrm{J} = \{i \in [\![1, p]\!],\ f_i(x_0) = f(x_0)\}$, $a = f_k'(x_0)$ pour $k \in \mathrm{J}$ et $\mathrm{F}_i = \{x \in \Omega,\ f_i(x) = f(x)\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Si $i \notin \mathrm{J}$ il existe par continuité un voisinage ouvert U_i de x_0 contenu dans Ω tel que $f_i(x) < f(x)$ pour $x \in \mathrm{U}_i$. On note pour U l'intersection des U_i qui est un voisinage ouvert de x_0. Sur U, on a alors

$$f(x) = \max_{i \in \mathrm{J}} f_j(x).$$

Or pour chaque j dans J on a

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_j(x_0) + f_j'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f_{j_0}(x_0) + f_{j_0}'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \end{aligned}$$

quand x tend vers x_0. Puisque le maximum d'une famille finie de fonctions négligeables devant $x - x_0$ quand x tend vers x_0 est lui aussi négligeable devant $x - x_0$ quand x tend vers x_0, on en déduit que

$$f(x) = f_{j_0}(x_0) + f_{j_0}'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

autrement dit que f est dérivable en x_0, de dérivée f'_{j_0}.

Passons maintenant au cas général. Supposons f différentiable en x_0. Écrivons $x_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ et fixons $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors la fonction d'une variable définie au voisinage de x_k par

$$x \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} f_i(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$$

est dérivable en x_k. Cela entraîne que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$ pour tous les indices $i \in [\![1, p]\!]$ tels que $f_i(x_0) = f(x_0)$. Comme cela vaut pour tout k on a nécessairement $\mathrm{d}f_{x_0} = \mathrm{d}(f_i)_{x_0}$ pour tout i tel que $f_i(x_0) = f(x_0)$.

Réciproquement supposons que les différentielles $\mathrm{d}(f_i)_{x_0}$ coïncident pour tout i tel que $f_i(x_0) = f(x_0)$. Notons u cette différentielle commune, $\mathrm{J} = \{i \in [\![1, p]\!],\ f_i(x_0) = f(x_0)\}$ et $\mathrm{F}_i = \{x \in \Omega.\ f_i(x) = f(x)\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Comme précédemment, si $i \notin \mathrm{J}$, il existe par continuité un voisinage ouvert U_i de x_0 contenu dans Ω tel que $f_i(x) < f(x)$ pour $x \in \mathrm{U}_i$. L'intersection $\mathrm{U} = \bigcap_{i \notin \mathrm{J}} \mathrm{U}_i$ est un voisinage ouvert de x_0. Sur U, on a alors

$$f(x) = \max_{i \in \mathrm{J}} f_j(x).$$

Or pour chaque j dans J on a

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_j(x_0) + \mathrm{d}(f_j)_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \\ &= f_{j_0}(x_0) + u(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \end{aligned}$$

quand x tend vers x_0. Puisque le maximum d'une famille finie de fonctions négligeables devant $\|x - x_0\|$ quand x tend vers x_0 est lui aussi négligeable devant $x - x_0$ quand x tend vers x_0, on en déduit que

$$f(x) = f_{j_0}(x_0) + u(x - x_0) + o(\|x - x_0\|),$$

autrement dit f est différentiable en x_0, de différentielle u.

Conclusion. La fonction f est différentiable en x_0 si, et seulement si, les différentielles en ce point des fonctions f_i telles que $f_i(x_0) = f(x_0)$ sont égales deux à deux. ◁

Si C *est un convexe fermé de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *et si* $x \in \mathbb{R}^n$ *il existe un unique point* y *de* C *réalisant la distance de* x *à* C. *De plus on a* $\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$ *pour tout point* $z \in$ C, *ce qui signifie lorsque* x *n'est pas dans le convexe que* C *est entièrement situé du côté de l'hyperplan passant par* y *et orthogonal au segment* $[x, y]$, *qui ne contient pas* x. *Le lecteur trouvera ce théorème important dans l'exercice 1.43 du tome algèbre 3 et sa généralisation à un fermé complet d'un espace préhilbertien dans l'exercice 3.17 du tome analyse 3. L'énoncé suivant, qui rappelait ce résultat au candidat, s'intéresse à la différentiabilité de l'application* $x \longmapsto d(x, \mathrm{C})$.

1.3. Différentiabilité de la distance à un convexe fermé

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in \mathrm{U}$. On suppose qu'il existe deux applications h_1 et h_2 de U dans $\mathbb{R}$, différentiables en x_0 telles que $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$ et $h_1(x_0) = h_2(x_0)$. Montrer que f est différentiable en x_0.

2. On suppose maintenant que f est 1-lipschitzienne et qu'il existe un segment $[a, b] \subset \mathrm{U}$ tel que $f(b) - f(a) = \|b - a\|$. Montrer que f est différentiable en tout point de $]a, b[$.

3. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \longmapsto d(x, \mathrm{C})$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{C}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Commençons par montrer que h_1 et h_2 ont la même différentielle en x_0. On a $h_1(x_0) = h_2(x_0) = f(x_0)$ et donc, au voisinage de x_0, $h_1(x) - h_2(x) = \mathrm{d}(h_1 - h_2)_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$. Supposons que l'on ait $(\mathrm{d}h_1)_{x_0} \neq (\mathrm{d}h_2)_{x_0}$ et prenons $u \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Ker} \mathrm{d}(h_1 - h_2)_{x_0}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $(h_1 - h_2)(x_0 + tu) = t\mathrm{d}(h_1 - h_2)_{x_0}(u) + o(t)$. Pour t assez petit $(h_1 - h_2)(x_0 + tu)$ a le signe de $t\mathrm{d}(h_1 - h_2)_{x_0}(u)$. Mais $h_1 - h_2$ ne garde alors pas un signe constant au voisinage de x_0 ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $(\mathrm{d}h_1)_{x_0} = (\mathrm{d}h_2)_{x_0}$.

Les inégalités vérifiées par f deviennent donc au voisinage de x_0,

$$f(x_0) + (\mathrm{d}h_1)_{x_0} + o(\|x - x_0\|) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + (\mathrm{d}h_1)_{x_0} + o(\|x - x_0\|).$$

On en déduit $f(x) = f(x_0) + (\mathrm{d}h_1)_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ et f est différentiable en x_0 avec $(\mathrm{d}f)_{x_0} = (\mathrm{d}h_1)_{x_0} = (\mathrm{d}h_2)_{x_0}$.

2. L'application f étant 1-lipschitzienne, on a pour tout $x \in \mathrm{U}$,

$$f(b) - f(x) \leqslant \|x - b\| \quad \text{et} \quad f(x) - f(a) \leqslant \|x - a\|.$$

Si l'on pose $h_1(x) = f(b) - \|x - b\|$ et $h_2(x) = f(a) + \|x - a\|$, on obtient, pour tout $x \in \mathrm{U}$, $h_1(x) \leqslant f(x) \leqslant h_2(x)$. La fonction $x \longmapsto \|x\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donc h_1 et h_2 sont différentiables sur $]a, b[$. De plus, si x_0 appartient à $]a, b[$, alors

$$\|x_0 - a\| + \|x_0 - b\| = \|b - a\| = f(b) - f(a).$$

On a donc $h_1(x_0) = h_2(x_0)$ et de la question 1 on déduit que f est différentiable en x_0.

Conclusion. L'application f est différentiable en tout point de $]a, b[$.

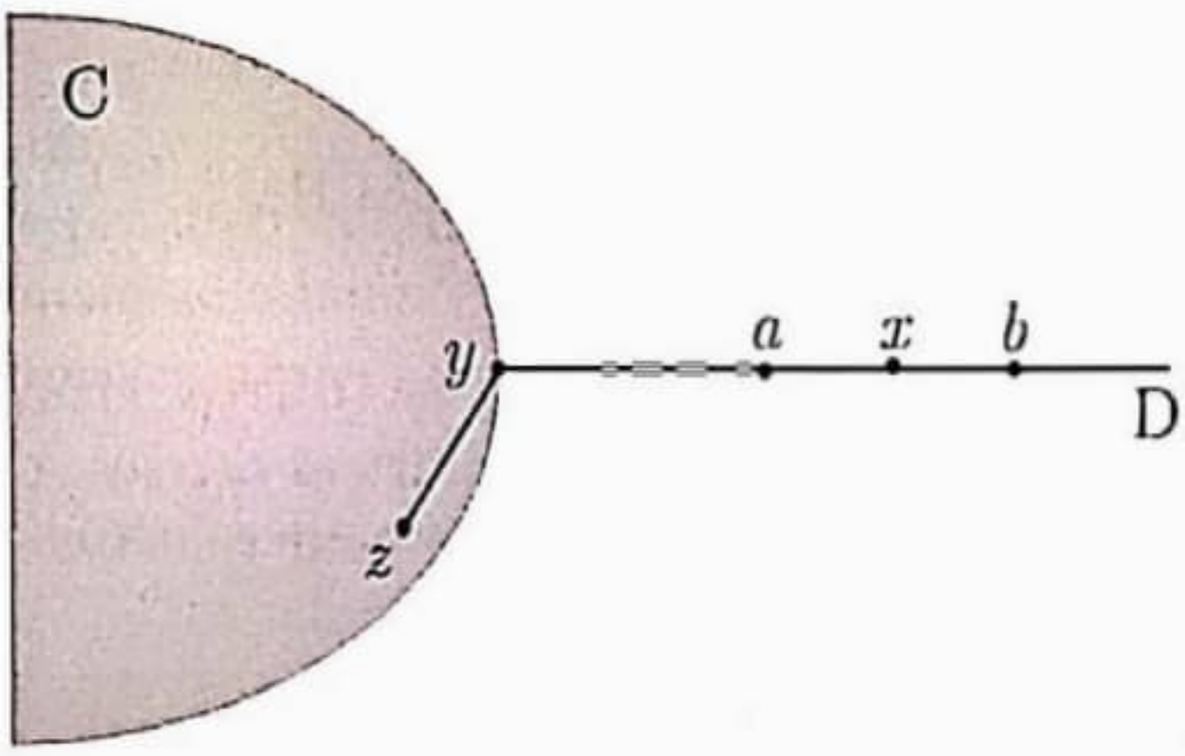
3. On va utiliser la question précédente. Posons $\mathrm{U} = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{C}$ et considérons l'application $f : x \in \mathrm{U} \longmapsto d(x, \mathrm{C}) \in \mathbb{R}$. Montrons pour

commencer que f est 1-lipschitzienne. Pour $(x, x', y) \in \mathrm{U} \times \mathrm{U} \times \mathrm{C}$, on a : $f(x') \leqslant \|x' - y\| \leqslant \|x' - x\| + \|x - y\|$. Ceci étant vrai pour tout y de C, on en déduit $f(x') \leqslant \|x' - x\| + f(x)$, c'est-à-dire $f(x') - f(x) \leqslant \|x' - x\|$. Par symétrie on a $f(x) - f(x') \leqslant \|x' - x\|$. D'où le résultat annoncé.

Soit $x \in \mathrm{U}$ et y l'unique point de C tel que $d(x, \mathrm{C}) = \|x - y\|$. Soit D la demi-droite d'origine y contenant x. Si $x' \in \mathrm{D}$ et $z \in \mathrm{C}$ on a

$$\|x' - z\|^2 = \|x' - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x' - y, y - z\rangle \geqslant \|x' - y\|^2$$

car le produit scalaire $\langle x'-y, y-z\rangle$ a le signe de $\langle x-y, y-z\rangle$ et il est positif (voir le rappel fait avant l'exercice). On en déduit que $d(x', \mathrm{C}) = \|x'-y\|$. En particulier $\mathrm{D} \setminus \{y\} \subset \mathrm{U}$. Choisissons a, b sur D et de part et d'autre de x.



On a

$$f(b) - f(a) = \|b - y\| - \|a - y\| = \|b - a\|$$

donc f est différentiable sur $]a, b[$ et en particulier au point x.

Conclusion. La fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{C}$. ◁

L'exercice suivant démontre que l'ensemble des matrices dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est ouvert en le réalisant comme l'ensemble des points où la différentielle d'une fonction est de rang maximal. Le lecteur trouvera une autre preuve de ce résultat dans l'exercice 4.4 du tome algèbre 2, utilisant le fait que les matrices A *telles que* $\mu_A = \chi_A$ *sont les matrices cycliques.*

1.4. L'ouvert des matrices cycliques

Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $f(\mathrm{M}) = (\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}, \mathrm{Tr}\,\mathrm{M}^2, \ldots, \mathrm{Tr}\,\mathrm{M}^n)$.

1. Montrer que f est différentiable et préciser $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}(\mathrm{H})$ pour M et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que le rang de $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}$ est égal au degré du polynôme minimal de M.

3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Chaque composante $\mathrm{M} \longmapsto \operatorname{Tr} \mathrm{M}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ est une fonction polynomiale des coefficients de M et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, f est différentiable. D'après les règles de différentiation d'une application k-linéaire, la différentielle de $\varphi : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^k$ en $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}} : \mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{M}^i \mathrm{H} \mathrm{M}^{k-1-i}.$$

La différentielle de la composée $\operatorname{Tr} \circ \varphi$ est $\mathrm{d} \operatorname{Tr}_{\mathrm{M}^k} \circ \mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}} = \operatorname{Tr} \circ \mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}}$. Comme $\operatorname{Tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{BA})$ pour toutes matrices carrées A et B de même taille, on a $\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^i \mathrm{H} \mathrm{M}^{k-1-i}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H})$ pour tout i et

$$\mathrm{d}(\operatorname{Tr} \circ \varphi)_{\mathrm{M}} : \mathrm{H} \longmapsto \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H}) = k \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H}).$$

On obtient la différentielle de f :

$$\mathrm{d}f_{\mathrm{M}} : \mathrm{H} \longmapsto \left(\operatorname{Tr} \mathrm{H}, 2 \operatorname{Tr}(\mathrm{MH}), 3 \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^2\mathrm{H}), \ldots, n \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^{n-1}\mathrm{H})\right).$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longmapsto \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{AB})$. Dire que $\mathrm{H} \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_{\mathrm{M}}$, c'est dire que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\langle {}^t\mathrm{M}^k, \mathrm{H} \rangle = 0$. Autrement dit, le noyau de $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}$ est l'orthogonal de $\operatorname{Vect}({}^t\mathrm{M}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$. Le sous-espace engendré par les matrices ${}^t\mathrm{M}^k$ a pour dimension le degré r du polynôme minimal μ de ${}^t\mathrm{M}$. Rappelons la preuve de ce fait : le morphisme d'algèbre u : $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longmapsto \mathrm{P}({}^t\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet comme image le sous-espace en question et comme noyau l'idéal $\mu\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. La restriction de u à $\mathbb{R}_{r-1}[\mathrm{X}]$ est donc injective. De plus si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, en notant Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par μ, on a $\mathrm{P}({}^t\mathrm{M}) = \mathrm{Q}({}^t\mathrm{M})\mu({}^t\mathrm{M}) + \mathrm{R}({}^t\mathrm{M}) = \mathrm{R}({}^t\mathrm{M})$ et $\deg \mathrm{R} < r$. Ainsi, $\operatorname{Im} u = u(\mathbb{R}_{r-1}[\mathrm{X}])$ est de dimension r et comme $r \leqslant n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$u(\mathbb{R}_{r-1}[\mathrm{X}]) = u(\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]) = \operatorname{Vect}({}^t\mathrm{M}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}.$$

L'orthogonal de $\mathrm{Vect}({}^t\mathrm{M}^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est donc de dimension n^2-r. D'après le théorème du rang, on a

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f_{\mathrm{M}} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f_{\mathrm{M}} = n^2 - (n^2 - r) = r.$$

Comme le polynôme minimal de M est égal à celui de sa transposée (puisque si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0$ équivaut à $\mathrm{P}({}^t\mathrm{M}) = 0$), $\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f_{\mathrm{M}} = r$ est le degré du polynôme minimal de M.

3. Soit M_0 une matrice telle que $\chi_{\mathrm{M}_0} = \mu_{\mathrm{M}_0}$. La matrice de $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}_0}$ dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ est de rang n. On peut donc en extraire un mineur de taille n non nul. Par continuité de $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{d}f_{\mathrm{M}}$ et du déterminant, ce mineur reste non nul sur un voisinage de M_0. Donc, pour M voisine de M_0, le rang de $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}$ est supérieur ou égal à n et comme $\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f_{\mathrm{M}} \leqslant \dim \mathbb{R}^n = n$, on en déduit que $\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f_{\mathrm{M}} = n$ et finalement $\deg \mu_{\mathrm{M}} = n$. Comme μ_{M} divise χ_{M} en vertu du théorème de Cayley-Hamilton, $\mu_{\mathrm{M}} = \chi_{\mathrm{M}}$ pour M au voisinage de M_0 : on en déduit que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal est ouvert. ◁

On peut montrer que cet ouvert est connexe et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'énoncé suivant s'intéresse aussi au rang de la différentielle.

1.5. Rang localement constant

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que le rang de $\mathrm{d}f_x$ soit localement constant sur U.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

On peut penser à regarder l'ensemble des points où le rang de la différentielle est maximal : c'est bien un ouvert car si la jacobienne de f en x admet un mineur de taille r non nul, ce mineur reste non nul au voisinage de x donc le rang de $\mathrm{d}f_y$ est supérieur ou égal à r au voisinage de x. Mais cet ouvert n'est pas forcément dense. Par exemple si on prend $n = p = 1$ et $f(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$, $f(x) = 0$ pour $x < 0$, la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et vaut $f'(x) = 2x$ pour $x \geqslant 0$. Il en résulte que $\mathrm{d}f$ est de rang 1 sur l'ouvert $]0, +\infty[$ et de rang 0 sur $]-\infty, 0]$.

Pour résoudre l'exercice il suffit d'adapter l'idée précédente et de prendre pour U l'ensemble des points x en lesquels $\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f$ admet un maximum local (ce qui donne $\mathbb{R}^*$ dans l'exemple précédent). Montrons que U est bien ouvert. Soit $x_0 \in \mathrm{U}$ et r le rang de $\mathrm{d}f_{x_0}$. Il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f_x \leqslant r$ pour $x \in \mathrm{V}$. Par ailleurs, la matrice

jacobienne de $\mathrm{d}f_{x_0}$ a un mineur de taille r non nul et, par continuité du déterminant et de $x \longmapsto \mathrm{d}f_x$, il existe un voisinage ouvert V' de x_0 sur lequel ce mineur reste non nul. On a alors $\operatorname{rg} \mathrm{d}f_x \geqslant r$ pour $x \in \mathrm{V}'$. Par double inégalité on a $\operatorname{rg} \mathrm{d}f_x = r$ sur $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}'$. Ainsi l'ouvert $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}'$ est inclus dans U et le rang de $\mathrm{d}f$ est localement constant sur U.

Il reste à montrer que U est dense dans $\mathbb{R}^n$. Soit U' un ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$. Les rangs possibles des différentielles $\mathrm{d}f_x$ pour $x \in \mathrm{U}'$ sont en nombre fini : parmi les éléments x de U' on peut donc en choisir un tel que $\operatorname{rg} \mathrm{d}f_x$ soit maximal. Cet élément est nécessairement dans U car U' est un voisinage de x. Il en résulte que U est un ouvert dense. ◁

1.6. Étude d'une suite récurrente

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}^2, \mathrm{I})$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathrm{I}^2$, $f(x, x) = x$ et $f(x, y) = f(y, x)$.

1. Calculer $\mathrm{d}f(x, x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.

2. Soit S un segment de I et $k > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathrm{S}^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant k$. Quelle condition imposer sur k pour que l'on ait $f(\mathrm{S}^2) \subset \mathrm{S}$?

3. On suppose dorénavant cette condition satisfaite et on se donne $g \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}^2, \mathrm{I})$ vérifiant les mêmes propriétés que f (avec le même segment S). Montrer que la suite définie par $(x_0, y_0) \in \mathrm{S}^2$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n, y_n))$ converge dans $\mathbb{R}^2$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La fonction $x \longmapsto f(x, x) = x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et en dérivant on a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. En dérivant par rapport à la variable x la relation de symétrie vérifiée par f on a de même

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

et en évaluant cela en un couple (x, x) de I^2 il vient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, x) = \dfrac{1}{2}$. La différentielle de f en (x, x) est donc la forme linéaire $\mathrm{d}f_{(x,x)} : (h, k) \longmapsto \dfrac{1}{2}(h + k)$, que l'on note $\dfrac{1}{2}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

2. Posons $\mathrm{S} = [a, b]$ et montrons que la condition $k \leqslant 1$ convient. Soient $x, y \in \mathrm{S}$ avec $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$. Considérons $\varphi : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [x, y],\ \varphi(t) = f(t, x + y - t).$$

Cette fonction représente en quelque sorte la restriction de f au segment orthogonal à la diagonale reliant (x, y) à (y, x). On a pour t dans $[x, y]$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x + y - t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, x + y - t)$$

et, par hypothèse $|\varphi'(t)| \leqslant 1$, pour tout $t \in [x, y]$. On en déduit par l'inégalité des accroissements finis que

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{y-x}{2}\right|.$$

Comme $\varphi(x) = f(x, y)$ et $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2}$, on obtient

$$-\frac{y-x}{2} \leqslant f(x, y) - \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{y-x}{2},$$

donc $f(x, y) \in [x, y]$ et *a fortiori* $f(x, y) \in [a, b]$. Comme f est symétrique, c'est vrai aussi pour $x \geqslant y$ et $f(\mathrm{S}^2) \subset \mathrm{S}$. Plus précisément, on a pour tout $(x, y) \in \mathrm{S}^2$, $\min(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant \max(x, y)$.

On peut démontrer que la condition $k \leqslant 1$ est la meilleure possible. En effet, considérons la fonction définie par $f(x, y) = \frac{1}{2}(x+y) + |x-y|^{1+\alpha}$, où α est un réel strictement positif. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie les conditions voulues. On a pour $x > y$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = 2(1+\alpha)(x-y)^{\alpha}$$

et on obtient $k = 2(1+\alpha)(b-a)^{\alpha}$. On veut $f(a, b) \leqslant b$ donc $2(b-a)^{\alpha+1} \leqslant b-a$, ce qui donne $k \leqslant 1+\alpha$. Si on veut cela soit réalisé pour tout $\alpha > 0$, il faut $k \leqslant 1$.

3. Comme $f(\mathrm{S}^2) \subset \mathrm{S}$ et $g(\mathrm{S}^2) \subset \mathrm{S}$, la suite est bien définie et à valeurs dans S^2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \min(x_n, y_n)$ et $v_n = \max(x_n, y_n)$. Il ressort de la question 2, que $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$ et $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$ appartiennent à $[u_n, v_n]$. On a donc

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 ; elle converge vers ℓ. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 ; elle converge vers ℓ'.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(u_n, v_n)$ et $y_{n+1} = g(u_n, v_n)$, les suites (x_n) et (y_n) convergent, vers $f(\ell, \ell')$ et $g(\ell, \ell')$ respectivement et (x_n, y_n) converge dans $\mathbb{R}^2$. ◁

On aborde une série d'exercices portant sur des fonctions de classe C^k avec $k > 1$. La première question de l'exercice suivant est un classique des oraux de concours : il s'agit du contre-exemple de Peano d'une fonction qui admet au point $(0,0)$ deux dérivées partielles croisées différentes et qui montre l'importance de la régularité C^2 pour appliquer le théorème de Schwarz.

1.7. Contre-exemple de Peano

1. Étudier la classe de la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\rho \geqslant 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 \mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur P pour que g soit de classe C^2.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La fonction rationnelle f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, ouvert sur lequel elle est bien définie. Si on écrit $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f(x,y) = \rho^2 \cos\theta \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \dfrac{\rho^2 \sin 4\theta}{4}$. Donc $f(x,y) = O(\rho^2) = o(\rho)$ lorsque $\rho = \|(x,y)\|$ tend vers 0 et ce développement limité garantit que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle en ce point est nulle. Le calcul de la dérivée partielle par rapport à x donne, sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \rho(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta) = O(\rho).$$

En particulier, cette dérivée partielle tend vers 0 en $(0,0)$ et elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(x,y) = -f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ et la dérivée partielle par rapport à y est également continue sur $\mathbb{R}^2$: on peut donc affirmer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Supposons par l'absurde que f est de classe C^2 : si l'on dérive la relation $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y,x),$$

et en particulier en $(0,0)$ les dérivées secondes croisées sont opposées. Le théorème de Schwarz assure alors qu'elles sont nulles. Ce n'est pas le cas puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

Conclusion. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ mais pas $\mathcal{C}^2$.

On a donc ici un exemple de fonction qui admet en $(0,0)$ deux dérivées partielles croisées différentes.

2. Supposons g de classe $\mathcal{C}^2$. Comme $g(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$ en $(0,0)$, la différentielle de g en $(0,0)$ est nulle. Adoptons les notations de Monge : la fonction h définie par $h(x,y) = g(x,y) - \dfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, de hessienne nulle en $(0,0)$, et elle vérifie

$$h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 \mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta)$$

avec $\mathrm{Q}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) - \dfrac{1}{2}(r\mathrm{X}^2 + s\mathrm{XY} + t\mathrm{Y}^2)$. Or, le développement limité en $(0,0)$ à l'ordre 2 de h donne $h(x,y) = o(\|(x,y)\|^2) = o(\rho^2)$. Ainsi, l'expression $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta)$ tend vers 0 lorsque ρ tend vers 0 : comme ρ ne figure pas dans cette expression, on en déduit que pour tout θ réel, on a $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta) = 0$. Autrement dit, le polynôme trigonométrique défini par $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta)$ est nul.

Réciproquement, si P s'écrit $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}(r\mathrm{X}^2 + s\mathrm{XY} + t\mathrm{Y}^2) + \mathrm{Q}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ avec $r, s, t \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta)$ identiquement nul sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g est $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$, polynôme de deux variables de degré 2 : elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. ◁

En fait, on peut être plus précis sur le polynôme Q. *La condition* $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta) = 0$ *pour tout* θ *signifie que* Q *s'annule sur le cercle d'équation* $x^2 + y^2 - 1$. *Montrons que cela équivaut algébriquement à ce que* $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1$ *divise* Q. *L'une des implications est évidente. Supposons que* $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta) = 0$ *pour tout* θ. *Comme* $\mathbb{R}(\mathrm{Y})$ *est un corps, on peut effectuer la division euclidienne de* $\mathrm{Q}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *par* $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1 = \mathrm{X}^2 + (\mathrm{Y}^2 - 1)$ *dans l'anneau des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}(\mathrm{Y})$ *en l'indéterminée* X. *Il existe donc* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathrm{Y})$ *et* $\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathbb{R}(\mathrm{Y})[\mathrm{X}]$ *tels que*

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1) + \alpha(\mathrm{Y})\mathrm{X} + \beta(\mathrm{Y}).$$

Quitte à multiplier l'égalité par le produit des dénominateurs des fractions (ce sont des polynômes en Y*), on peut trouver deux polynômes* $\mathrm{A}(\mathrm{Y})$ *et* $\mathrm{B}(\mathrm{Y})$ *tels que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{A}(\sin\theta)\cos\theta + \mathrm{B}(\sin\theta) = 0$$

En appliquant la relation en $\pi - \theta$ *et en sommant on a* $\mathrm{B}(\sin\theta) = 0$ *pour tout* θ *donc* B *admet une infinité de racines et il est formellement nul.*

Par le même argument A *est nul. Ainsi les fractions* $\alpha(Y)$ *et* $\beta(Y)$ *sont nulles. Comme* X^2+Y^2-1 *est unitaire (en* X*) il est facile de voir que les coefficients de* $R(X,Y)$*, vu comme un polynôme de* $\mathbb{R}(Y)[X]$*, sont des polynômes en* Y *et ainsi* X^2+Y^2-1 *divise* Q *dans l'anneau* $\mathbb{R}[X,Y]$*.*

On peut donc exprimer ainsi la condition nécessaire et suffisante sur P *pour que* g *soit* C^2 *:* P *est la somme d'un polynôme homogène de degré* 2 *et d'un polynôme multiple de* X^2+Y^2-1*.*

L'exercice suivant donne l'occasion d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2*. Pour l'obtenir il suffit de se ramener à une fonction d'une seule variable. Soit* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Plaçons nous en* 0 *pour fixer les idées et soit* $x\in\mathbb{R}^n$*. On pose* $g: t\in[0,1]\longmapsto f(tx)$*. Il s'agit d'une fonction de classe* C^2 *pour laquelle on peut écrire*

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\int_0^1(1-s)g''(s)\,ds.$$

On a $g(1)=f(x)$*,* $g(0)=f(0)$*,* $g'(0)=df_0(x)$ *et*

$$g''(s)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(sx)={}^t x\mathrm{H}_{sx}x$$

où H_{sx} *est la matrice hessienne de* f *au point* sx*. On notera* d^2f *la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique hessienne (différentielle seconde de* f*).*

1.8. Fonctions s'écrivant $x\longmapsto\langle h(x)x,x\rangle$ avec $h:\mathbb{R}^n\longrightarrow S_n(\mathbb{R})$

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $f(0)=0$ et $\mathrm{d}f(0)=0$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille n. Montrer qu'il existe $h:\mathbb{R}^n\to S_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que pour tout x on ait $f(x)=\langle h(x)x,x\rangle$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre $x_0=0$ et $x\in\mathbb{R}^n$:

$$f(x)=f(0)+\mathrm{d}f_0(x)+\int_0^1\mathrm{d}^2f_{sx}(x,x)(1-s)\mathrm{d}s=\int_0^1\mathrm{d}^2f_{sx}(x,x)(1-s)\mathrm{d}s.$$

Notons H_x la matrice hessienne de f en x. On a donc

$$f(x) = \int_0^1 {}^t x \mathrm{H}_{sx} x(1-s)\mathrm{d}s = {}^t x \left(\int_0^1 (1-s)\mathrm{H}_{sx}\mathrm{d}s \right) x = {}^t x h(x) x.$$

en ayant posé $h(x) = \int_0^1 (1-s)\mathrm{H}_{sx}\mathrm{d}s$. Évidemment, $h(x)$ est dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ puisque pour tout $s \in [0,1]$, $(1-s)\mathrm{H}_{sx}$ est symétrique. Enfin, h est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, par composition $(s,x) \longmapsto (1-s)\mathrm{H}_{sx}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Les composantes des dérivées partielles par rapport aux variables du vecteur x étant continues sur le compact $[0,1] \times \overline{\mathrm{B}}(x,1)$, elles sont donc bornées par un certain réel M. Comme $s \longmapsto \mathrm{M}$ est intégrable sur $[0,1]$, on en déduit que les dérivées partielles de $x \longmapsto \int_0^1 (1-s)\mathrm{H}_{sx}\mathrm{d}s$ existent et sont continues sur $\mathrm{B}(x,1)$ et finalement sur tout $\mathbb{R}^n$ puisqu'il s'agit là d'une propriété locale. La fonction $x \longmapsto h(x)$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = x\,{}^t h(x) x = \langle h(x)x, x\rangle. \lhd$$

L'exercice suivant permet de manipuler le théorème de dérivation des intégrales à paramètre dans le contexte des fonctions de plusieurs variables.

1.9. Espace des dérivations en 0

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Montrer que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t$.

2. On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on note D l'ensemble des formes linéaires φ telles que

$$\varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)$$

pour toutes fonctions f et g de E. Montrer que D est de dimension finie et que $\dim \mathrm{D} = n$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Soit $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto f(tx) = f(tx_1, \ldots, tx_n)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée :

$$\varphi' : t \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

Ainsi, on a

$$f(x) - f(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t,$$

ce qui est la relation demandée.

2. Les opérateurs $\varphi_i : f \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ sont clairement dans D par la règle de dérivation d'un produit. Ils forment une famille libre car si les λ_i sont des réels tels que $\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$, en appliquant la relation à la fonction $f_i : x \longmapsto x_i$, il vient $\lambda_i = 0$.

Montrons qu'ils engendrent D. Soit $\varphi \in \mathrm{D}$. Admettons pour l'instant que $x \longmapsto \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout i et posons $\lambda_i = \varphi(f_i)$ où f_i désigne toujours l'application $x \longmapsto x_i$. La formule de la première question permet d'écrire

$$\varphi(f) = \varphi(f(0)) + \sum_{i=1}^n \varphi\left(x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t\right)$$

et comme $\varphi \in \mathrm{D}$, il vient

$$\varphi(f) = f(0)\varphi(1) + \sum_{i=1}^n \left[0 + \varphi(f_i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\mathrm{d}t\right] = f(0)\varphi(1) + \sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi_i(f).$$

Or, 1 désignant la fonction constante égale à 1, on a $\varphi(1) = \varphi(1.1) = 1.\varphi(1) + 1.\varphi(1) = 2.\varphi(1)$ et donc $\varphi(1) = 0$ donc il reste $\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi_i$. Les φ_i engendrent donc D et en forment une base : D est de dimension finie et $\dim \mathrm{D} = n$.

Il reste à vérifier que les $x \longmapsto \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t$ sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. De manière générale, montrons par récurrence sur p que pour toute fonction $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $\mathrm{G} : x \longmapsto \int_0^1 g(t,x)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^p$. Commençons par $p = 1$. À x fixé, $t \longmapsto g(t,x)$ est bien intégrable sur $[0,1]$. À t et $(x_2,\ldots,x_n)$ fixés, $x_1 \longmapsto g(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(t,x)$ est une fonction continue par rapport à t. De plus, si on se donne $\mathrm{M} > 0$, comme la fonction $(t,x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]\times[-\mathrm{M},\mathrm{M}]^n \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(tx)$ est continue sur un compact, elle est bornée par un réel K. Or la constante K est intégrable sur $[0,1]$ et le théorème de dérivation sous le signe intégrale assure que $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}$ existe sur $]-\mathrm{M},\mathrm{M}[^n$ et vaut

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(t,x)\mathrm{d}t.$$

Comme M est arbitraire, cela est valable sur $\mathbb{R}^n$. Cette dérivée partielle est continue par rapport à x_1, mais il convient de démontrer qu'elle est

continue par rapport à x. On se restreint encore au compact $[0,1] \times [-M,M]^n$ sur lequel la fonction $(t,x) \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(t,x)$ est continue donc bornée par une constante L, intégrable sur $[0,1]$. Comme à t fixé, $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(t,x)$ est continue, on obtient que $x \longmapsto \dfrac{\partial G}{\partial x_1}(x)$ est continue sur $]-M,M[^n$ et finalement sur $\mathbb{R}^n$. La dérivée partielle par rapport à x_1 de G existe et est continue sur $\mathbb{R}^n$ et il en va de même par rapport aux autres variables : G est bien de classe C^1. Supposons le résultat vrai au rang $p-1$ avec $p \geqslant 2$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t,x)\mathrm{d}t$. Comme la fonction $(t,x) \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(t,x)$ est de classe C^∞, par hypothèse de récurrence, $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ est de classe C^{p-1} et G de classe C^p. La récurrence est achevée et G est bien C^∞. Comme $(t,x) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ est C^∞, les fonctions en questions $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t$ sont bien dans E. ◁

Les éléments de D *sont appelées dérivations en* 0. *Toute dérivation en* 0 *sur* E *s'écrit donc* $\varphi(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ *: c'est la dérivée de* f *en* 0 *dans la direction du vecteur* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

1.10. Isométries infinitésimales

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on suppose que $\mathrm{d}f_x$ est une isométrie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$ on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k} = 0$.
2. Montrer que f est une isométrie affine.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si on note $\mathrm{M} = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice jacobienne de f en x, on a $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et si on fixe i et j, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}\frac{\partial f_p}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, ce qui donne en dérivant par rapport à k

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_k \partial x_i}\frac{\partial f_p}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_k \partial x_j} = 0.$$

Autrement dit, en notant $\mathrm{S}(i,j,k)$ la quantité $\sum_{p=1}^{n} \dfrac{\partial f_p}{\partial x_i}\dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}$ et en utilisant le théorème de Schwarz on a les relations

$$\mathrm{S}(i,k,j) = \mathrm{S}(i,j,k) = -\mathrm{S}(j,k,i) = -\mathrm{S}(j,i,k).$$

Autrement dit, l'échange des deux premiers indices apporte un changement de signe mais l'échange des deux derniers indices ne modifie pas la somme. On en déduit que

$$\mathrm{S}(i,j,k) = -\mathrm{S}(j,k,i) = \mathrm{S}(k,j,i) = \mathrm{S}(k,i,j) = -\mathrm{S}(i,k,j) = -\mathrm{S}(i,j,k)$$

(le 3-cycle $i \to j \to k \to i$ change le signe donc en le faisant trois fois on retombe sur la somme de départ avec un signe moins). On a donc $\mathrm{S}(i,j,k) = 0$ ce qui est le résultat demandé.

2. Soit $1 \leqslant j,k \leqslant n$. Alors si on note X le vecteur $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_j \partial x_k} \end{pmatrix}$, les relations précédentes se traduisent par $\mathrm{MX} = 0$ où M est la jacobienne de f en x. Comme M est orthogonale, son noyau est réduit à 0 et X est donc nul. La dérivée seconde de f est nulle si bien que $\mathrm{d}f$ est constante sur $\mathbb{R}^n$, égale à $u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. L'application $f - u$ est alors de différentielle nulle sur $\mathbb{R}^n$, elle est donc constante : pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f(x) = f(0) + u(x)$. L'application f est bien une isométrie affine de $\mathbb{R}^n$. ◁

Le résultat reste vrai si f est seulement supposée de classe C^1 : les solutions sont délicates à mettre au point. On peut partir du fait qu'en tout point de $\mathbb{R}^n$, f induit un difféomorphisme d'un ouvert U *contenant ce point sur un ouvert* V *en vertu du théorème de l'inversion locale. Les différentielles de f et f^{-1} sont alors des isométries et le théorème des accroissements finis assure que les fonctions f et f^{-1} sont 1-lipschitziennes : l'application $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}$ est donc une isométrie. Il resterait à justifier la globalisation à $\mathbb{R}^n$.*

1.11. Jacobienne antisymétrique

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \mathrm{A}x + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On note $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions composantes de f. Par hypothèse on a $\partial_i f_i = 0$ et $\partial_j f_i = -\partial_i f_j$ pour $i \neq j$. Si f est de la forme voulue alors la jacobienne de f est constante égale à la matrice A. On va donc commencer par montrer que la différentielle de f est bien constante. Posons $a_{kji} = \partial_k(\partial_j f_i)$ pour i, j, k dans $[\![1, n]\!]$. Il suffit de prouver que tous ces termes sont nuls. On a déjà $a_{kij} = -a_{kji}$ en dérivant les formules précédentes (en particulier $a_{kii} = 0$ lorsque $i \neq j$). Par le théorème de Schwarz on a aussi $a_{kji} = a_{jki}$. On a ainsi une transposition qui change le signe et une autre qui le conserve. La composée des deux est un 3-cycle qui change le signe : $a_{kji} = -a_{ikj}$. En effectuant ce cycle trois fois on a $a_{kji} = (-1)^3 a_{kji}$ et donc les a_{kji} sont tous nuls. La jacobienne de f est donc constante égale à une matrice antisymétrique A. La fonction $x \longmapsto f(x) - Ax$ est alors constante car sa différentielle est nulle en tout point. C'est le résultat demandé. ◁

On peut aussi se demander qu'elles sont les applications f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que la jacobienne de f est symétrique en tout point : ce sont les fonctions telle qu'il existe $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f = \nabla g$: c'est simplement une reformulation du théorème de Poincaré qui caractérise les formes différentielles exactes sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^n$. Cette question a aussi été posée à l'oral de l'École polytechnique.

Les exercices suivants sont consacrés à la notion de difféomorphisme. Si f est un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ il est facile de voir que la différentielle de f en tout point x de U est un isomorphisme. La réciproque est vraie lorsque $n = 1$ (une fonction f de classe C^1 sur un intervalle ouvert I dont la dérivée ne s'annule pas établit un C^1-difféomorphisme entre I et l'intervalle $f(\mathrm{I})$) mais pas pour $n \geqslant 2$ car la fonction n'est pas forcément injective (un contre-exemple classique est donné par $(x, y) \longmapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$, traduction sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $z \longmapsto e^z$ de $\mathbb{C}$).

Le programme des classes préparatoires contient le théorème d'inversion globale suivant : si f est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, injective sur U, et si la différentielle de f est inversible en tout point de U alors $f(\mathrm{U})$ est un ouvert et f établit un C^1-difféomorphisme entre U et $f(\mathrm{U})$.

Voici un premier exemple portant sur la transformation de Joukowski.

1.12. Exemple de difféomorphisme (1)

Soit $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 > 1\}$ et

$$F : (x, y) \in W \longmapsto \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

1. Déterminer F(W).
2. Montrer que F est un C^1-difféomorphisme.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Une bonne idée est d'identifier $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe. Dans ces conditions, on a alors simplement $F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ pour tout z non nul. Soit u un nombre complexe quelconque. L'équation $F(z) = u$ équivaut à l'équation du second degré $z^2 - 2uz + 1 = 0$. Si $u \in \{\pm 1\}$ il y a une racine double (égale à u) et sinon l'équation admet deux solutions distinctes inverses l'une de l'autre. En particulier F est surjective. Pour $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ on a $F(z) = \cos\theta$. On en déduit que l'image par F du cercle unité est le segment $[-1, 1]$ du plan complexe (les deux antécédents de $\cos\theta$ par F étant $e^{i\theta}$ et son inverse $e^{-i\theta}$). Tout point $u \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ admet donc un unique antécédent de module > 1 (le second antécédent ayant un module < 1). Ainsi F établit une bijection entre W et $\mathbb{C}\setminus[-1, 1]$.

2. Il est clair que F est de classe C^1 sur l'ouvert W. Pour conclure l'exercice à l'aide du théorème d'inversion globale il suffit donc de vérifier que la différentielle de F en tout point de W est inversible. Un petit calcul montre que la jacobienne de F en (x, y) est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la matrice d'une similitude directe[1] et son déterminant ne vaut 0 que si les coefficients sont tous nuls donc si $xy = 0$ et $1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$. Le cas $x = 0$ ne donne pas de solution et si $y = 0$ on obtient $x = \pm 1$. Comme les points $(\pm 1, 0)$ ne sont pas dans W la jacobienne de F est bien inversible en tout point de W et le théorème d'inversion globale s'applique. ◁

1. Cela s'explique par le fait que F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

1.13. Exemple de difféomorphisme (2)

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que $f'(x) \neq g'(y)$ pour tout x et tout y réels. On considère $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$h(x, y) = (x + y, f(x) + g(y)).$$

1. Montrer que h est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

2. On suppose g bornée et qu'il existe $k > 0$ tel que $f' \geqslant k$.

Montrer que h est surjective.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Il est clair que h est de classe C^1. Sa matrice jacobienne est $\begin{pmatrix} 1 & f'(x) \\ 1 & g'(y) \end{pmatrix}$ donc le déterminant jacobien vaut $g'(y) - f'(x)$ et il est non nul par hypothèse. Montrons enfin que h est injective : supposons $x + y = x' + y'$ avec $f(x) + g(y) = f(x') + g(y')$. On a $f(x') - f(x) = g(y) - g(y')$ donc par le théorème de Rolle il existe c et d tels que $(x' - x)f'(c) = (y - y')g'(d)$. Si $x' - x = y - y'$ n'est pas nul on peut simplifier et on a une contradiction avec l'hypothèse. Donc h est injective et par le théorème d'inversion globale elle établit un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

2. La surjectivité se ramène à prouver que pour tout réel a la fonction $x \longmapsto f(x) + g(a - x)$ est surjective. C'est évident car elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ (g est bornée et pour $y \geqslant x$, $f(y) - f(x) \geqslant k(y - x)$). ◁

1.14. Perturbation de l'identité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $|f'(x)| \leqslant k < 1$ pour tout x. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(École normale supérieure, École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il est clair que g est de classe C^1. Sa jacobienne en (x, y) est $\begin{pmatrix} 1 & f'(x) \\ f'(y) & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant $1 - f'(x)f'(y)$. Comme $|f'| \leqslant k < 1$ ce déterminant est non nul en tout point. Montrons maintenant que g est injective. Supposons $g(x, y) = g(x', y')$. On a alors

$$\begin{cases} x - x' = f(y') - f(y) \\ y - y' = f(x') - f(x) \end{cases}$$

Or la fonction f est k-lipschitzienne. On en déduit que $|x-x'| \leqslant k|y'-y|$ et $|y-y'| \leqslant k|x'-x|$. Comme $k<1$ cela impose $x=x'$ et $y=y'$.

Le théorème d'inversion globale permet de dire que g établit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image. Il reste donc à prouver que g est surjective. Voici plusieurs façons de le faire.

• On peut utiliser le théorème du point fixe. En effet, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$g(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} x + f(y) = a \\ y + f(x) = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - f(y) \\ y = b - f(x). \end{cases}$$

Ainsi, trouver un antécédent à (a,b) revient à chercher un point fixe à la fonction $\mathrm{F} : (x,y) \longmapsto (a-f(y), b-f(x))$. Or celle-ci est k-contractante pour la norme $\|\ \|_\infty$. Comme $\mathbb{R}^2$ est complet, le théorème du point fixe permet de conclure. Cela dit, ce théorème fondamental est actuellement hors programme en classe préparatoire et il faudrait le redémontrer à l'oral (voir le tome analyse 3, page 159).

• Autre solution. Comme $|f(x)| \leqslant |f(0)| + k|x|$ pour tout x on a $|x+f(y)| \geqslant |x| - k|y| - |f(0)|$ et $|y+f(x)| \geqslant |y| - k|x| - |f(0)|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En sommant les deux inégalités on en déduit que

$$\|g(x,y)\|_1 = |x+f(y)| + |y+f(x)| \geqslant (1-k)\|(x,y)\|_1 - 2|f(0)|.$$

Ainsi, la norme de $g(x,y)$ tend vers $+\infty$ lorsque la norme de (x,y) tend vers $+\infty$, et cela quelle que soit la norme utilisée (toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes). On peut alors montrer que l'image de g est fermée. Comme on sait déjà que $g(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert (non vide) par le théorème d'inversion globale on pourra conclure que $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ par connexité (par arcs) de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $g(x_n,y_n)$ une suite de l'image de g qui converge vers un point (α,β). La suite (x_n,y_n) est forcément bornée sinon on pourrait en extraire une sous-suite telle que $\|(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})\| \to +\infty$. Cela est absurde car la suite $\|g(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})\|$ tendrait aussi vers l'infini. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut alors extraire de la suite (x_n,y_n) une sous-suite qui converge vers un point (u,v). Par continuité de g on a alors $g(u,v) = (\alpha,\beta)$ et (α,β) est dans l'image de g qui est donc fermée.

• On peut éviter l'argument de connexité de la manière suivante : si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ il est facile de montrer que la fonction $(x,y) \longmapsto \|g(x,y) - (a,b)\|^2$ admet un minimum en se ramenant à un compact (la norme est ici la norme euclidienne). En écrivant la nullité du gradient en ce minimum on voit que nécessairement le minimum est nul donc que (a,b) est dans l'image de g.

• Voici enfin une dernière solution encore plus élémentaire. On reprend le système $g(x, y) = (a, b)$ de la première solution. En substituant la première équation dans la seconde on est ramené à prouver l'existence de y tel que $y = b - f(a - f(y))$. Et il est facile de voir que la fonction $y \longmapsto y + f(a - f(y))$ est surjective car elle est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Conclusion. La fonction g réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. ◁

Des idées analogues permettent de résoudre l'exercice suivant.

1.15. Dilatations de classe C^1

Soit $\| \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1, telle que $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$ pour tout (x, y) dans $(\mathbb{R}^n)^2$. Démontrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

• Il est clair que f est injective puisque l'égalité $f(x) = f(y)$ implique $\|x-y\| \leqslant 0$ donc $x = y$. Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la différentielle $\mathrm{d}f_x$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Par hypothèse on a $\|f(x+h) - f(x)\| \geqslant \|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, x étant fixé. En remplaçant h par th on obtient $\|f(x + th) - f(x)\| \geqslant \|th\|$, d'où

$$\left\| \frac{1}{t}\big(f(x + th) - f(x)\big) \right\| \geqslant \|h\|$$

pour $t \neq 0$. Or le premier membre a pour limite $\|\mathrm{d}f_x(h)\|$ quand t tend vers zéro. On a donc $\|\mathrm{d}f_x(h)\| \geqslant \|h\|$ pour tout h, ce qui montre que l'application linéaire $\mathrm{d}f_x$ est injective et finalement bijective. Le théorème d'inversion globale permet de dire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$.

• Il nous reste à montrer que f est surjective. Comme dans l'exercice précédent, plusieurs pistes s'offrent à nous. Développons d'abord celle qui consiste à considérer la distance d'un élément z à l'image de f. Soit donc z dans $\mathbb{R}^n$ dont on cherche un antécédent par f. Posons $\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x) - z\|$. Montrons, pour commencer, que cette borne inférieure est atteinte. Soit a un élément quelconque, fixé de $\mathbb{R}^n$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(x) - z\| \geqslant \|f(x) - f(a)\| - \|f(a) - z\| \geqslant \|x - a\| - (\|f(a)\| + \|z\|),$$

et donc $\|f(x) - z\| \geqslant \|x\| - (\|a\| + \|f(a)\| + \|z\|)$. D'après cette inégalité, si $\|x\| \geqslant \alpha + \|a\| + \|f(a)| + \|z\|$, alors $\|f(x) - z\| > \alpha$. Si on pose

$R = a + \|a\| + \|f(a)\| + \|z\|$, on en déduit que α est la borne inférieure de la fonction $x \longmapsto \|f(x) - z\|$ sur la boule fermée $\overline{B}(0, R)$. Celle-ci étant compacte, on en déduit que la borne inférieure est atteinte en un point x_0.

Montrons maintenant que $\alpha = 0$. Posons pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\psi(x) = \|f(x) - z\|^2$. La fonction ψ est la composée de $g : x \longmapsto f(x) - z$ et de $\varphi : u \longmapsto \|u\|^2$ qui sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $dg_x = df_x$ et pour tout (u, h) de $(\mathbb{R}^n)^2$, $d\varphi_u(h) = 2\langle u, h\rangle$. Donc par composition ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $d\psi_x = d\varphi_{g(x)} \circ df_x$. Comme ψ possède un minimum en x_0 on a $d\psi_{x_0} = 0$. Or df_{x_0} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ donc $d\varphi_{g(x_0)} = 0$, c'est-à-dire, pour tout h de $\mathbb{R}^n$, $2\langle g(x_0), h\rangle = 0$ et donc $g(x_0) = 0$. On a donc $f(x_0) = z$ et x_0 est un antécédent de z par f.

• Toujours pour prouver la surjectivité, on peut invoquer la connexité (par arcs) de $\mathbb{R}^2$: le théorème de l'inversion globale assure que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et pour montrer qu'il est égal à $\mathbb{R}^2$, il suffit de vérifier qu'il est fermé. Prenons donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $f(\mathbb{R}^2)$ convergente vers y dans $\mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \in \mathbb{R}^2$. Comme pour n et m entiers, $\|x_n - x_m\| \leqslant \|f(x_n) - f(x_m)\|$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy puisque la suite convergente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le vérifie également : l'espace $\mathbb{R}^2$ étant complet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément x de $\mathbb{R}^2$ et $y = f(x)$ par continuité. Ainsi y est dans $f(\mathbb{R}^2)$ qui est donc fermé : donc $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ et f est bien surjective.

Conclusion. L'application f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. ◁

La fonction $x \longmapsto x^2$ est clairement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même. L'énoncé suivant montre que cela se généralise aux matrices symétriques définies positives. Le lecteur est renvoyé au tome algèbre 3 pour de nombreuses utilisations de la notion de racine carrée d'une matrice symétrique positive.

1.16. Racine carrée sur l'ensemble des matrices définies positives

Soient E un espace euclidien, $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et Ω le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ définis positifs.

1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{S}$.
2. Montrer que $u \in \Omega \longmapsto u^2 \in \Omega$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Comme nous sommes en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et nous choisissons la triple norme induite par la norme euclidienne de E et définie par $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ pour tout $f \in \mathcal{S}$.

Soit $f \in \Omega$. Nous savons que f est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, de valeurs propres correspondantes $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Ces valeurs propres sont strictement positives. Quitte à renuméroter, on peut supposer que λ_1 est la plus petite. Soit $x \in \mathrm{E}$, non nul que l'on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i; \text{ et } \langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Prenons $g \in \mathcal{S}$. On a alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}((f+g)(x)|x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \langle g(x), x\rangle \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \|g(x)\|\|x\| \\ &\geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - |||g|||\|x\|^2 \geqslant (\lambda_1 - |||g|||)\|x\|^2.\end{aligned}$$

Il en découle que si $|||g||| < \lambda_1$, $f+g \in \Omega$: autrement dit, la boule ouverte de centre f et de rayon λ_1 est contenue dans Ω. On conclut que Ω est un ouvert de $\mathcal{S}$.

On pouvait également démontrer que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *(il y a un isomorphisme et donc comme la dimension est finie, un homéomorphisme entre* $\mathcal{S}$ *et* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *l'image de* Ω *étant* $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*); en effet* $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble défini dans* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *par les inéquations* $\mathrm{D}_1 > 0, \ldots, \mathrm{D}_n > 0$, *où* $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n$ *sont les mineurs principaux de* M *(voir les exercices 2.18 et 3.15 du tome algèbre 3).*

2. Notons $\Phi : f \in \Omega \longmapsto f^2 \in \Omega$.

• Montrons que Φ est bien définie : si $f \in \Omega$, les valeurs propres de f sont strictement positives ; celles de f^2 égales aux carrés de celles de f, sont encore strictement positives. Comme f^2 est symétrique, on a $f^2 \in \Omega$.

• Montrons que Φ est surjective : soit $u \in \Omega$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de u. On note $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice de u dans cette base ; chaque λ_i est strictement positif. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ telle que la matrice de f dans $(e_1, \ldots, e_n)$ soit $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée avec un spectre contenu dans $\mathbb{R}_+^*$: donc f est dans Ω et $f^2 = u$ puisque $\Delta^2 = \mathrm{D}$. L'application Φ est donc surjective.

• Montrons que Φ est injective : soit $u \in \Omega$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés. Si $f \in \Omega$ vérifie $f^2 = u$ alors f commute avec $u = f^2$ et donc chaque E_i est stable par f. On note f_i l'endomorphisme de E_i induit par f pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Alors f_i est diagonalisable, symétrique défini positif et $f_i^2 = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$. Si μ est une valeur propre de f_i, on a $\mu > 0$ et $\mu^2 = \lambda_i$. Donc, l'endomorphisme f_i diagonalisable ne possède qu'une seule valeur propre $\sqrt{\lambda_i}$: nécessairement, $f_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathrm{Id}_{E_i}$. Comme E est somme directe des E_i, on en déduit que f est unique. Ainsi, Φ est bijective.

• L'application $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \longmapsto f \circ g$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie : elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ et $\Phi : f \in \Omega \longmapsto f \circ f = f^2$ l'est aussi. Calculons sa différentielle en $f \in \Omega$. Pour tout $h \in \mathcal{S}$, h assez petit pour que $f + h \in \Omega$,

$$\Phi(f+h) = (f+h)^2 = f^2 + fh + hf + h^2 = \Phi(f) + \ell(h) + h^2,$$

avec $\ell(h) = fh + hf$. Or $\|h^2\| \leqslant \|h\|^2 = o(\|h\|)$ et l'application linéaire $\ell : h \in \mathcal{S} \longmapsto fh + hf \in \mathcal{S}$ est bien définie (car $(fh + hf)^* = h^* f^* + f^* h^* = hf + fh$) ; c'est donc la différentielle de Φ en f :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}\Phi_f : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & h & \longmapsto & fh + hf. \end{array}$$

• Soit $f \in \Omega$. Montrons que $\mathrm{d}\Phi_f$ est inversible. Comme $\mathcal{S}$ est de dimension finie, il suffit de démontrer que $\mathrm{d}\Phi_f$ est injective. Soit h dans $\operatorname{Ker} \mathrm{d}\Phi_f$. Considérons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. On écrit $f(e_i) = \lambda_i e_i$. On a $fh + hf = 0$ et donc

$$f(h(e_i)) = -h(f(e_i)) = -h(\lambda_i e_i) = -\lambda_i h(e_i).$$

Comme les valeurs propres de f sont strictement positives, $-\lambda_i$ n'en est pas une et $h(e_i) = 0$. Par conséquent, $h = 0$ et $\mathrm{d}\Phi_f$ est injective.

Conclusion. Ainsi, Φ est bijective de Ω sur Ω, de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $f \in \Omega$, $\mathrm{d}\Phi_f$ est inversible. D'après le théorème d'inversion globale, on en déduit que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. ◁

En réalité le théorème d'inversion globale (admis dans les programmes des classes préparatoires) repose sur le théorème d'inversion locale : si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si df_a est inversible en un certain point a de U, alors il existe un voisinage U_a de a inclus dans U et un voisinage V_b de $b = f(a)$ tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_a sur V_b. L'exercice suivant fait démontrer une partie de ce résultat, à savoir l'injectivité locale de f.

1.17. Injectivité locale d'une fonction de classe C^1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $a \in U$ tel que la différentielle en a soit un isomorphisme. Démontrer qu'il existe un voisinage V de a tel que f soit injective sur V.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas injective sur aucun voisinage de a. Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \neq y_n$ proches de a à moins de $\frac{1}{n}$ tel que $f(x_n) = f(y_n)$. La fonction

$$\Phi_n : t \in [0,1] \longmapsto f(x_n + t(y_n - x_n))$$

est de classe C^1 et de dérivée $\Phi_n'(t) = \mathrm{d}f_{x_n+t(y_n-x_n)}(y_n - x_n)$ si bien que

$$0 = f(y_n) - f(x_n) = \int_0^1 \mathrm{d}f_{x_n+t(y_n-x_n)}(y_n - x_n)\mathrm{d}t.$$

Posons $h_n = \dfrac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|}$ pour tout n. Comme cette suite est sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on peut en extraire une sous-suite convergente $(h_{\varphi(n)})$ avec φ strictement croissante. Notons h la limite de cette sous-suite et posons $g_n : t \in [0,1] \longmapsto \mathrm{d}f_{x_{\varphi(n)}+t(y_{\varphi(n)}-x_{\varphi(n)})}(h_{\varphi(n)})$. La précédente relation donne $\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout n. Or on a pour tout t dans $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(t) = \mathrm{d}f_a(h)$ car les suite (x_n) et (y_n) convergent vers a et la fonction $\Psi : (x,k) \longmapsto \mathrm{d}f_x(k)$ est continue sur $U \times \mathbb{R}^n$. De plus, cette fonction continue Ψ est bornée sur le compact $\overline{B}(a,1) \times \overline{B}(0,1)$ par une constante K. En particulier, pour tout $t \in [0,1]$ et tout n, on a $|g_n(t)| \leqslant K$. Comme la constante K est intégrable sur $[0,1]$, le théorème de convergence dominée assure que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f_a(h)\mathrm{d}t = \mathrm{d}f_a(h).$$

Cela est contradictoire puisque $\mathrm{d}f_a$ est supposé être un isomorphisme et $h \neq 0$. ◁

Le théorème des fonctions implicites ou en dimensions 2 et 3 se généralise à la dimension n : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p avec $p \geqslant 1$. On suppose que $X_0 \in \Sigma = f^{-1}(0)$ et qu'en ce point $\operatorname{grad} f(X_0)$ *est non nul. Pour fixer les idées, supposons que* $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \neq 0$. *Alors il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n-1}$, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, une fonction $\psi : \Omega \longrightarrow I$ de classe C^p tels que $\Omega \times I \subset U$ et*

pour tout $X = (x_1, \ldots x_{n-1}, x_n) \in \Omega \times I$,

$$X \in \Sigma \iff x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Autrement dit, localement en X_0, Σ *apparaît comme le graphe de la fonction* ψ. *En particulier,* Σ *possède en tout point de ce voisinage un hyperplan tangent dont la direction est engendrée par les* $n-1$ *vecteurs*

$$V_i = \left(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right),$$

avec 1 *placé à la* i*-ième place. Or, pour* $X = (x_1, \ldots x_{n-1}, x_n)$ *proche de* X_0, *on a*

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0,$$

ce qui donne en dérivant par rapport à x_i *pour* $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0.$$

Ces relations traduisent que les $n-1$ *vecteurs* V_i *sont orthogonaux à* $\operatorname{grad} f(X)$ *ce qui signifie que l'hyperplan tangent en* X *n'est autre que l'hyperplan passant par* X *et orthogonal à* $\operatorname{grad} f(X)$.

Dans l'exercice suivant, on s'intéresse à l'application de Gauss $\varphi : x \longmapsto \vec{n}(x) = \dfrac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|}$ *où* $\vec{n}(x)$ *est le vecteur normal unitaire extérieur.*

1.18. Normales à une hypersurface compacte

Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note S la sphère unité (euclidienne) de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $\Sigma = f^{-1}(0)$ est non vide et borné et que $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Sigma$. Montrer que la fonction $\varphi : x \in \Sigma \longmapsto \dfrac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \in \mathrm{S}$ est surjective.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Puisque le gradient de f ne s'annule jamais, on sait qu'en chacun de ses points M_0 l'hypersurface Σ admet un hyperplan tangent défini par l'équation

$$\langle \operatorname{grad} f_{M_0}, \overrightarrow{M_0M} \rangle = 0.$$

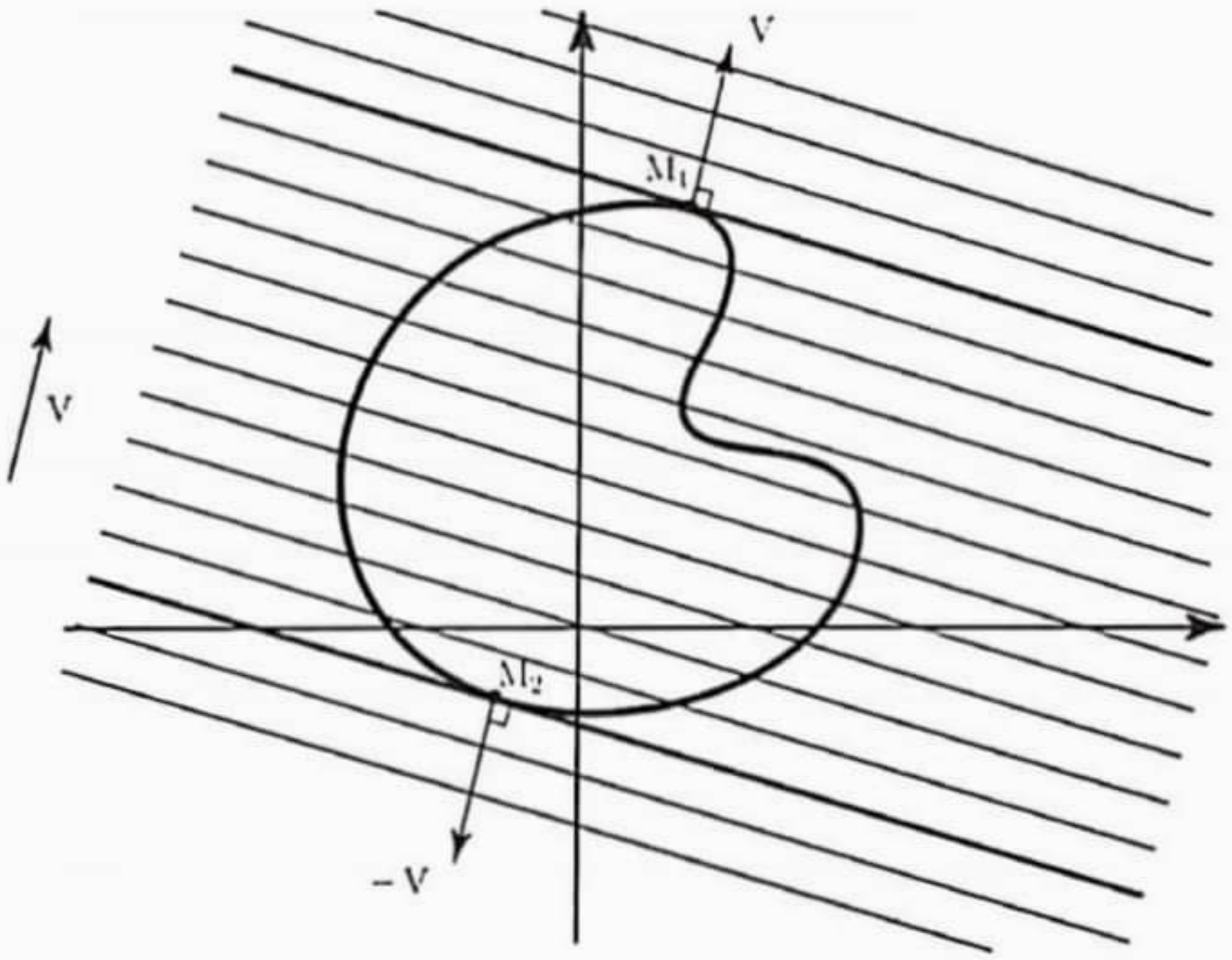
(C'est bien connu pour $n = 3$ et cela se généralise sans changement

en dimension quelconque.) Les deux vecteurs unitaires normaux à cet hyperplan tangent sont $\varphi(M_0) = \dfrac{\operatorname{grad} f(M_0)}{\|\operatorname{grad} f(M_0)\|}$ et $-\varphi(M_0)$.

Dans un premier temps, pour tout vecteur unitaire V, nous allons montrer qu'il existe un point M_0 de Σ où l'hyperplan tangent admet V comme vecteur normal. Dans ces conditions, on aura déjà $\varphi(M_0) = \pm V$.

Considérons la famille des hyperplans admettant V comme vecteur normal et montrons que deux de ces hyperplans, au moins, sont tangents à Σ. En effet, ces hyperplans sont les hypersurfaces de niveau de la fonction

$$g(M) = \langle V . \overrightarrow{OM} \rangle .$$



Puisque Σ est compacte, la restriction de g à Σ admet son maximum λ_1 en un point M_1 et son minimum λ_2 en un point M_2. Montrons que l'hyperplan de niveau $g(M) = \lambda_1$ est l'hyperplan tangent à Σ en M_1. Soit H un vecteur tangent à Σ en M_1, c'est-à-dire un vecteur orthogonal à grad f_{M_1}. Il existe une courbe $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ tracée sur Σ et telle que $c(0) = M_1$, $c'(0) = H$. Puisque M_1 est le point de Σ (ou un des points de Σ) où g prend sa valeur maximale, la fonction $g(c(t)) = \langle V, Oc(t) \rangle$ admet un maximum pour $t = 0$. On a donc

$$\frac{d}{dt} g(c(t))\Big|_{t=0} = \langle V, H \rangle = 0.$$

On a ainsi montré que tout vecteur orthogonal à grad f_{M_1} est orthogonal à V. Il en résulte que l'hyperplan tangent à Σ, d'équation $\langle \operatorname{grad} f_{M_1}, \overrightarrow{M_1 M} \rangle = 0$ est contenu dans l'hyperplan de niveau de g pas-

sant par M_1, d'équation $\langle V, \overrightarrow{M_1M}\rangle = 0$, et ces deux hyperplans sont donc confondus.

Ainsi, grad f_{M_1} et V sont colinéaires, et $\varphi(M_1) = \pm V$. De même, $\varphi(M_2) = \pm V$. Il nous reste à montrer que $\varphi(M_1)$ et $\varphi(M_2)$, ou, ce qui revient au même, que grad f_{M_1} et grad f_{M_2} sont de sens opposés. On aura alors montré que les deux valeurs V et $-V$ sont atteintes, donc que V est dans l'image de φ ce qui est notre objectif.

Pour cela, il suffit d'observer que f a le même signe dans le demi-espace $g(M) > \lambda_1$ et dans le demi-espace $g(M) < \lambda_2$. En effet, puisque $\Sigma = f^{-1}(0)$ est contenue dans la bande $\lambda_2 \leqslant g(M) \leqslant \lambda_1$ le segment qui joint deux points du premier demi-espace ne rencontre pas $f^{-1}(0)$, ce qui montre déjà, par continuité, que f a un signe constant sur ce demi-espace, et de même pour l'autre. Enfin, le signe est le même dans les deux cas parce qu'on peut trouver deux points dans chacun des demi-espaces tels que le segment qui les joint ne rencontre pas $f^{-1}(0)$, ceci parce que $f^{-1}(0)$ est borné et que la dimension est $\geqslant 2$.

Supposons que ce signe soit positif (on raisonnerait de façon analogue s'il était négatif). Alors en M_1 où f prend la valeur 0, le gradient de f pointe vers la direction des f croissants, c'est-à-dire vers le demi-espace $g(M) > \lambda_1$, c'est-à-dire dans la même direction que V, et en M_2, il pointe vers le demi-espace $g(M) < \lambda_2$, c'est-à-dire dans la direction opposée, ce qui permet de conclure ◁

Les exercices qui suivent concernent des fonctions numériques de plusieurs variables et notamment les problèmes d'extremum. Rappelons que si une fonction numérique différentiable f admet un extremum local en un point x_0 alors la différentielle de f en x_0 est nulle, autrement dit x_0 est un point critique de f. La réciproque est fausse en général et chaque point critique doit faire l'objet d'un examen local. Pour justifier l'existence a priori *d'extrema on pensera naturellement à utiliser la compacité. L'exemple suivant illustre bien tout cela.*

1.19. Calcul d'un minimum

Soit D l'ensemble des n-uplets de réels deux à deux distincts. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans D, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln|x_i - x_j|.$$

1. Montrer que f admet un minimum.

2. Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point où f atteint son minimum. On pose $\mathrm{H} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_k)$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\mathrm{H}''(a_k) - 4a_k\mathrm{H}'(a_k) = 0$.

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par H. Expliciter H.

4. Calculer $\min f$ pour $n = 2, 3$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La situation est classique : la fonction continue f tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini. À l'aide de cette hypothèse, on va se ramener à un compact pour prouver que la borne inférieure est atteinte. On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de la norme définie par $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément de D. Nous savons que pour tout $t > 0$, on a $\ln t \leqslant t - 1$. On a donc pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$\ln |x_i - x_j| \leqslant |x_i - x_j| - 1 \leqslant 2\|x\| - 1.$$

On en déduit que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln |x_i - x_j| \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}(2\|x\| - 1)$, puis que

$$f(x) \geqslant \|x\|^2 - n(n-1)\|x\| + \frac{n(n-1)}{2}.$$

La fonction trinôme $t \longmapsto t^2 - n(n-1)t + \dfrac{n(n-1)}{2}$ est minorée sur $\mathbb{R}_+$, donc f est minorée sur D. Elle admet donc une borne inférieure M. De plus, on a $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit qu'il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que si $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$, $f(x) \geqslant \mathrm{M} + 1$. On aimerait dire que f atteint son minimum sur le compact défini par $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$ mais le fait que D soit ouvert empêche de conclure immédiatement.

Soit $\alpha > 0$ et $x \in \mathrm{D}$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$. S'il existe un couple (k, ℓ) $(1 \leqslant k < \ell \leqslant n)$ tel que $|x_k - x_\ell| < \alpha$, alors on montre comme plus haut que

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln |x_i - x_j| \leqslant \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)(2\|\mathrm{X}\| - 1) + \ln \alpha$$

puis que

$$f(x) \geqslant \|x\|^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)(2\|x\| - 1) - \ln \alpha.$$

La fonction trinôme $t \longmapsto t^2 - \left(\dfrac{n(n-1)}{2} - 1\right)(2t - 1)$ est minorée sur $[0, \mathrm{R}]$ disons par a. On obtient $f(x) \geqslant a - \ln \alpha$ et $f(x) \geqslant \mathrm{M} + 1$ dès

que $\ln a \leqslant a - M - 1$, c'est-à-dire $a \leqslant e^{a-M-1}$. Fixons $a = e^{a-M-1}$ et soit K l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\| \leqslant R$ et $|x_i - x_j| \geqslant a$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. La partie K est fermée et bornée donc c'est un compact, inclus dans D par construction. Nous avons démontré que si $\|x\| \geqslant R$ ou si $\|x\| \leqslant R$ et s'il existe $k < \ell$ tel que $|x_k - x_\ell| < a$ alors $f(x) \geqslant M + 1$. Nous avons donc $M = \inf_K f$. Comme K est un compact, et comme f est clairement continue cette borne inférieure est atteinte : il existe $a \in K$ tel que $M = f(a)$. En a, f admet un minimum global.

2. La fonction f admet un minimum en $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et f étant différentiable sur l'ouvert D, sa différentielle en a est nulle. On a donc pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. Sachant que pour tout x de D et tout k de $[\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 2x_k - \sum_{i \neq k} \dfrac{1}{x_k - x_i}$, on obtient

$$2a_k = \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_k - a_i}.$$

Soit H le polynôme $\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$. Cherchons une expression de $\sum_{i \neq k} \dfrac{1}{a_k - a_i}$ en fonction de H. On sait que $\dfrac{H'}{H} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X - a_i}$ donc

$$\sum_{i \neq k} \frac{1}{X - a_i} = \frac{H'}{H} - \frac{1}{X - a_k} = \frac{(X - a_k)H' - H}{(X - a_k)H}.$$

On souhaite calculer la valeur en a_k de cette fraction rationnelle. Pour lever l'indétermination, on utilise la formule de Taylor-Young. Si on considère le polynôme $P = (X - a_k)H' - H$, on obtient $P(a_k) = P'(a_k) = 0$ et $P''(a_k) = H''(a_k)$. On en déduit $P(x) = \dfrac{1}{2} H''(a_k)(x - a_k)^2 + o(x - a_k)^2$. On trouve pour le dénominateur $H(x)(x - a_k) \underset{x \to a_k}{\sim} H'(a_k)(x - a_k)^2$ ($H'(a_k) \neq 0$ car les a_i sont distincts puisque a appartient à D). On obtient finalement $\sum_{i \neq k} \dfrac{1}{a_k - a_i} = \dfrac{H''(a_k)}{2H'(a_k)}$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$2a_k = \dfrac{H''(a_k)}{2H'(a_k)}$, soit $H''(a_k) = 4a_k H'(a_k)$.

3. Considérons le polynôme $H'' - 4XH'$. Il est de degré n et, d'après la question précédente, ses racines sont les a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Il est donc colinéaire à H. En considérant le terme de plus haut degré, on trouve $H'' - 4XH' = -4nH$ et H vérifie l'équation différentielle :

$$H'' - 4XH' + 4nH = 0.$$

Posons $H = \sum_{k=0}^{n} b_k X^{n-k}$. On a alors $XH' = \sum_{k=0}^{n} b_k (n - k) X^{n-k}$ et

$$\mathrm{H}'' = \sum_{k=0}^{n-2} b_k(n-k)(n-k-1)\mathrm{X}^{n-k-2} = \sum_{k=2}^{n} b_{k-2}(n-k+2)(n-k+1)\mathrm{X}^{n-k}$$

Ainsi

$$\mathrm{H}'' - 4\mathrm{X}\mathrm{H}' + 4n\mathrm{H} = \sum_{k=2}^{n} b_{k-2}(n-k+2)(n-k+1)\mathrm{X}^{n-k} + 4\sum_{k=1}^{n} kb_k\mathrm{X}^{n-k}.$$

On en déduit que $b_1 = 0$ et pour $2 \leqslant k \leqslant n$.

$$b_{k-2}(n-k+2)(n-k+1) = -4kb_k.$$

Par conséquent, b_k est nul si k est impair et

$$b_{2p} = \frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{-8p} b_{2p-2}$$

si $0 \leqslant p \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$. Puisque $b_0 = 1$ on trouve finalement

$$b_{2p} = \left(-\frac{1}{8}\right)^p \frac{n(n-1)\cdots(n-2p+2)(n-2p+1)}{p!} = \left(-\frac{1}{8}\right)^p \frac{n!}{p(n-2p)!}.$$

Conclusion. On a $\boxed{\mathrm{H} = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \left(-\frac{1}{8}\right)^p \frac{n!}{p!(n-2p)!}\mathrm{X}^{n-2p}}$.

4. On trouve pour $n = 2$, $\mathrm{H} = \mathrm{X}^2 - \frac{1}{4}$, $\{a_1, a_2\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ et donc

$$\mathrm{M} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ln 1 = \frac{1}{2}.$$

Pour $n = 3$, $\mathrm{H} = \mathrm{X}^3 - \frac{3}{4}\mathrm{X}$, $\{a_1, a_2, a_3\} = \left\{0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ et donc

$$\mathrm{M} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\sqrt{3} = \frac{3}{2} - \ln\frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \triangleleft$$

Si f est une fonction numérique de classe C^2 on peut étudier la nature d'un point critique x_0 de f à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2. Rappelons ainsi que si la matrice hessienne de f en x_0 est définie positive (resp. négative) alors f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0. L'énoncé suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction ait un maximum unique dans une boule ouverte.

1.20. Existence d'un maximum

Soit B une boule ouverte de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et majorée sur B. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}([a, +\infty[)$ soit un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $c < 0$ tel que pour tout $x \in B$ toutes les valeurs propres de la matrice hessienne de f en x sont inférieures ou égales à c. Montrer que f atteint un maximum sur B en un unique point.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $K = f^{-1}([a, +\infty[)$. Comme K est contenu dans B, K est borné et par hypothèse, c'est un fermé de $\mathbb{R}^n$. On en déduit que K est un compact non vide. Par associativité du sup, on a $\sup_{x\in B} f(x) = \sup_{x\in K} f(x)$. Par continuité de f, il existe un point $\alpha \in K$ tel que $f(\alpha) = \sup_{x\in K} f(x) = \sup_{x\in B} f(x)$: l'application f atteint donc un maximum en α. C'est le seul point où f atteint son maximum. En effet, supposons en raisonnant par l'absurde qu'il existe β dans B distinct de α tel que $f(\alpha) = f(\beta)$. On paramètre le segment $[\alpha, \beta]$ par $t \in [0, 1] \longmapsto (1-t)\alpha + t\beta$ et on pose $\varphi : t \in [0, 1] \longmapsto f((1-t)\alpha + t\beta)$ qui est une fonction de classe C^2 atteignant son maximum en 0 et 1. Cette fonction est strictement concave. Prouvons-le en calculant sa dérivée seconde en $t_0 \in [0, 1]$. Si on note $\beta - \alpha = {}^t(h_1, \ldots, h_n)$ et $x_0 = (1-t_0)\alpha + t_0\beta$, on a

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}((1-t)\alpha + t\beta)h_i \quad \text{et}$$

$$\varphi''(t_0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)h_i h_j = {}^t(\beta - \alpha)\mathrm{H}_{x_0}(\beta - \alpha),$$

où H_x désigne la hessienne de f en x. On a

$$\varphi'(t_0) = 0 \ \text{ et } \ \varphi''(t_0) = {}^t(\beta - \alpha)\mathrm{H}_{x_0}(\beta - \alpha).$$

Or en diagonalisant la matrice hessienne dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$: pour $h = \beta - \alpha = h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n$, si λ_i est la valeur propre de la matrice hessienne en x_0 associée à e_i, on a

$$\varphi''(t_0) = \lambda_1 h_1^2 + \cdots + \lambda_n h_n^2 \leqslant c(h_1^2 + \cdots + h_n^2) = c\|h\|^2 < 0.$$

Comme φ est strictement concave, son graphe est strictement au dessus de la sécante entre 0 et 1 : autrement dit, si $x \in]\alpha, \beta[$, $f(x) > f(\alpha) = f(\beta$ ce qui est absurde. Le maximum ne peut donc être atteint qu'en α. ◁

La dérivée seconde $\varphi''(t_0) = {}^t(\beta-\alpha)\mathrm{H}_{x_0}(\beta-\alpha)$ s'exprime à l'aide de la différentielle seconde : c'est $\mathrm{d}^2 f_{x_0}(\beta-\alpha, \beta-\alpha)$.

L'exercice suivant expose un algorithme performant pour construire une suite qui converge vers le minimum d'une fonction, modulo certaines hypothèses de coercitivité.

1.21. Descente de gradient

Soit $\mathrm{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\alpha > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\mathrm{G}(y) - \mathrm{G}(x) \geqslant \langle \operatorname{grad}\mathrm{G}(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2.$$

1. Montrer que G atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{R}^n$ en un unique point.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\operatorname{grad}\mathrm{G}(x) \neq 0$. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{G}(x + t\operatorname{grad}\mathrm{G}(x))$ atteint son minimum en un unique point. Que se passe-t-il si $\operatorname{grad}\mathrm{G}(x) = 0$?

3. La suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ est définie par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout k, x_{k+1} est le point de $x_k + \mathbb{R}\operatorname{grad}\mathrm{G}(x_k)$ en lequel la restriction de G est minimale. Que dire de $\operatorname{grad}\mathrm{G}(x_k)$ et $\operatorname{grad}\mathrm{G}(x_{k+1})$ pour $k \in \mathbb{N}$?

4. Étudier la convergence de la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Classiquement, si une fonction continue f sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles est telle que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, elle admet un minimum : en effet, il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que si $\|x\| > \mathrm{A}$, $f(x) > f(0)$. Or comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, la boule de centre 0 et de rayon A est un compact sur lequel f est continue. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes, en particulier son minimum en un point a. Pour tout $\|x\| > \mathrm{A}$, on a $f(x) > f(0) \geqslant f(a)$ ce qui signifie que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ en a.

En prenant $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$ dans l'hypothèse, il vient pour $\|y\|$ tendant vers l'infini

$$\mathrm{G}(y) \geqslant \mathrm{G}(0) + \langle \operatorname{grad}\mathrm{G}(0), y\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y\|^2 = \frac{\alpha}{2}\|y\|^2 + O(\|y\|) \xrightarrow[\|y\|\to\infty]{} +\infty.$$

Par comparaison, on a $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} \mathrm{G}(y) = +\infty$ et G possède un minimum en un point a de $\mathbb{R}^n$. Ce point est forcément un point critique donc

$\operatorname{grad} G(a) = 0$. Si $y \neq a$, on a

$$G(y) \geqslant G(a) + \frac{\alpha}{2}\|y - a\|^2 > G(a),$$

ce qui nous assure que G atteint son minimum uniquement en a.

2. La fonction $\varphi_x : t \longmapsto G(x + t \operatorname{grad} G(x))$ est de classe C^1 et par composition des limites, elle tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Il s'ensuit que φ_x possède un minimum en un point τ. En ce point la dérivée de φ_x est nulle. Calculons-la.

$$\varphi'_x(\tau) = dG_{x+\tau \operatorname{grad} G(x)}(\operatorname{grad} G(x)) = \langle \operatorname{grad}(x+\tau \operatorname{grad} G(x)), \operatorname{grad} G(x)\rangle.$$

Ainsi, par nullité de cette dérivée, les gradients de G en x et en $x' = x + \tau \operatorname{grad} G(x)$ sont orthogonaux et l'hypothèse donne alors si $t \neq \tau$,

$$\varphi_x(t) \geqslant \varphi_x(\tau) + \langle \operatorname{grad} G(x'), (t-\tau) \operatorname{grad} G(x)\rangle + \frac{\alpha}{2}|t-\tau|^2 \| \operatorname{grad} G(x)\|^2$$
$$> \varphi_x(\tau),$$

car le produit scalaire est nul. Ainsi, la fonction φ_x atteint son minimum en un unique point. Si $\operatorname{grad} G(x) = 0$, on a

$$G(a) - G(x) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|a - x\|^2 \text{ ou encore } G(x) \leqslant G(a) - \frac{\alpha}{2}\|a - x\|^2.$$

Comme le minimum de G est atteint en un unique point a, on a nécessairement $\|a - x\| = 0$ et $x = a$. Autrement dit, le point où G atteint son minimum global est le seul point critique.

3. D'après la question précédente, les gradients sont orthogonaux (dans tous les cas).

4. Remarquons que si l'un des x_k est égal à a, alors la suite est stationnaire à la valeur a. Nous supposerons que tel n'est pas le cas. La suite $(G(x_k))_{k\geqslant 0}$ est par construction décroissante. Comme G est minorée, la suite l'est aussi et par conséquent, elle converge vers un réel ℓ. Comme le gradient en x_k (colinéaire à $x_{k+1} - x_k$) et celui en x_{k+1} sont orthogonaux, $\operatorname{grad} G(x_{k+1})$ est orthogonal à $x_{k+1} - x_k$. Par hypothèse, nous avons donc

$$G(x_k) - G(x_{k+1}) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

et $\|x_{k+1} - x_k\|$ converge vers 0. Par ailleurs, il existe $A > 0$ tel que si $\|x\| > A$, on a $G(x) > G(x_0)$. Nécessairement, x_k se retrouve dans la boule fermée de centre 0 et de rayon A. Comme nous sommes en dimension finie, $(x_k)_{k\geqslant 0}$ possède une valeur d'adhérence x qui est la limite d'une sous-suite $x_{\psi(k)}$ avec $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Par continuité du gradient, $\operatorname{grad} G(x_{\psi(k)})$ converge vers $\operatorname{grad} G(x)$. Or la

suite $(x_{\psi(k)+1})$ converge aussi vers x puisque la distance avec $x_{\psi(k)}$ tend vers 0. Dans ces conditions, on a

$$0 = \langle \operatorname{grad} G(x_{\psi(k)}), \operatorname{grad} G(x_{\psi(k)+1}) \rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} \| \operatorname{grad} G(x) \|^2.$$

On en déduit que le gradient en x est nul et donc $x = a$ d'après la question 2. Comme la suite bornée $(x_k)_{k\geqslant 0}$ en dimension finie possède une unique valeur d'adhérence, à savoir a, on en déduit que la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers a (le lecteur se reportera à l'exercice 2.6 du tome analyse 3 pour ce fait classique). ◁

Remarquons que si G est supposé de classe C^2, on peut vérifier que les valeurs propres de la hessienne de G, d^2G sont toutes supérieures ou égales à $\alpha > 0$. L'application G est donc strictement convexe.

Une hypothèse de convexité peut permettre de montrer l'existence d'un extremum : le lecteur pourra par exemple montrer que si une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un point critique a, alors f présente forcément un minimum en a. Dans l'exercice suivant on manipule des fonctions strictement convexes : il s'agit simplement d'une fonction f telle que $f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$ pour $x \neq y$ et $t \in]0,1[$. Si une telle fonction présente un minimum, il s'agit forcément d'un minimum strict.

1.22. Gradient bijectif

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement convexe. On suppose que $\dfrac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$. Montrer que $a \longmapsto \operatorname{grad} f(a)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On va commencer par regarder le cas $n = 1$. Comme f est strictement convexe sa dérivée f' est strictement croissante (on sait que f' est croissante puisque f est convexe et si on avait $f'(a) = f'(b)$ avec $a < b$ alors f' serait constante entre a et b et f serait affine sur $[a,b]$ ce qui est impossible). Donc f' est injective et il ne reste plus qu'à prouver que $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Le théorème des limites monotones nous dit que f' possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$. Il est alors facile de voir que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend aussi vers ℓ en $+\infty$. Grâce à l'hypothèse on a donc $\ell = +\infty$. On montre de même que f' tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et donc qu'elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Revenons au cas général. L'injectivité de la fonction grad f découle directement de ce qui précède. En effet supposons que $\operatorname{grad} f(a) = \operatorname{grad} f(b)$ et posons pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f((1-t)a + tb)$. La fonction g est de classe C^1 et strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Comme $g'(t) = \langle \operatorname{grad} f((1-t)a+tb), b-a\rangle$ pour tout t, on a $g'(0) = g'(1)$ ce qui contredit le résultat déjà établi dans le cas $n = 1$.

Il reste donc à établir la surjectivité de $a \longmapsto \operatorname{grad} f(a)$. Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ il est aisé de montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. En ce point le gradient de f est nul. Soit alors $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. La fonction $x \longmapsto f(x) - \langle u, x\rangle$ vérifie les mêmes hypothèses que f. Elle admet aussi un minimum global, donc un point critique, et cela donne un antécédent du vecteur u par la fonction grad f. ◁

Nous abordons maintenant une série d'exercices sur les équations aux dérivées partielles en commençant par la notion de fonction harmonique. Une fonction f de classe C^2 sur un ouvert U est dite harmonique si son laplacien Δf est nul sur U. *Le premier exercice montre qu'une telle fonction possède la propriété de la moyenne et le suivant étudiera la réciproque.*

1.23. Fonctions harmoniques (1)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} = 0$. Montrer que la fonction $\mathrm{F} : r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est constante.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $\mathrm{R} > 0$. La fonction $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ est continue sur le compact $[0, \mathrm{R}] \times [0, 2\pi]$ donc bornée disons par M. La fonction constante égale à M est intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$. Donc $\mathrm{F}_{|[0,\mathrm{R}]}$ est continue sur $[0, \mathrm{R}]$ d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Cela vaut pour tout $\mathrm{R} > 0$ donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus g est de classe C^1 (en tant que fonction de deux variables) et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ est donc continue. On peut aussi la dominer par une fonction constante sur $[0, \mathrm{R}] \times [0, 2\pi]$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres permet donc de dire que F est de classe C^1 et que, pour tout $r \geqslant 0$,

$$\mathrm{F}'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) \mathrm{d}\theta.$$

Considérons la forme différentielle $\omega = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y$ et soit Γ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r paramétré classiquement par $\theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par définition, l'intégrale curviligne de ω selon Γ vaut

$$\int_\Gamma w = \int_0^{2\pi} \left(r\ \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) \mathrm{d}\theta$$

ce qui vaut $rF'(r)$. La forme différentielle ω est fermée, car f est harmonique. En effet, on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Comme on travaille sur $\mathbb{R}^2$ tout entier qui est étoilé, le théorème de Poincaré permet de dire que ω est exacte. Son intégrale sur un arc fermé est donc nulle. Ainsi $rF'(r) = 0$ pour tout $r > 0$ et F' est nulle sur $]0, +\infty[$. Donc, par continuité, F est constante sur $\mathbb{R}_+$ et vaut $F(0) = 2\pi f(0,0)$. ◁

L'exercice montre donc que la valeur moyenne de f sur tous les cercles centrés en l'origine est égale à $f(0,0)$. Par simple translation, la propriété est évidemment valable en tout autre point : la valeur moyenne de f sur un cercle est égale à la valeur de f au centre. L'exercice suivant démontre la réciproque.

1.24. Fonctions harmoniques (2)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in]0, r_0[,\ f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in]0, r_0[,\ f(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathrm{B}((x_0,y_0),r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. Étudier la réciproque de la question 1.
3. Montrer que la fonction f est harmonique sur U.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$. On va montrer que le réel r_0 donné par l'hypothèse vérifie aussi la propriété de la question 1. Soit $0 < r < r_0$. On va calculer l'intégrale double en passant en coordonnées polaires. On pose donc $x = x_0 + s\cos t$, $y = y_0 + s\sin t$ avec $s \in [0, r]$ et $t \in [0, 2\pi]$. Il est bien connu que le déterminant jacobien de ce changement de variable est égal à s et on a donc

$$\iint_{\mathrm{B}((x_0,y_0),r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,r]\times[0,2\pi]} sf(x_0 + s\cos t, y_0 + s\sin t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

On applique alors le théorème de Fubini en intégrant d'abord par rapport à la variable t. D'après l'hypothèse on obtient donc

$$\iint_{\mathrm{B}((x_0,y_0),r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^r 2\pi s f(x_0,y_0)\mathrm{d}s = \pi r^2 f(x_0,y_0).$$

Le résultat demandé en découle.

Le résultat est intuitif : si la moyenne de f sur tous les cercles centrés en (x_0, y_0) de rayon assez petit est constante égale à $f(x_0, y_0)$, il en est de même de la moyenne de f sur les disques centrés en (x_0, y_0) de rayon assez petit.

2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ fixé. Pour tout réel $r \geqslant 0$ assez petit on pose $m(r) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\mathrm{d}t$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que m est continue et comme on vient de le voir on a, pour r assez petit,

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathrm{B}((x_0,y_0),r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r sm(s)\mathrm{d}s.$$

Supposons que le terme de gauche ci-dessus soit constant sur $]0, r_0[$ égal à $f(x_0, y_0)$. En dérivant l'égalité $\pi r^2 f(x_0, y_0) = \int_0^r sm(s)\mathrm{d}s$ par rapport à r il vient $2\pi r f(x_0, y_0) = rm(r)$ pour tout $r \in]0, r_0[$. Ainsi m est constante sur $]0, r_0[$ donc aussi sur $[0, r_0[$ par continuité et sa valeur est $2\pi f(x_0, y_0)$. La réciproque de la question 1 est donc vraie.

3. Fixons encore une fois $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ et considérons à nouveau la fonction m introduite dans la question précédente. Par hypothèse elle est constante égale à $2\pi f(x_0, y_0)$. Or f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on peut donc dériver m comme une intégrale à paramètre (il est facile de dominer par une fonction constante la dérivée partielle sur le compact $[0, r_1] \times [0, 2\pi]$ avec $0 < r_1 < r_0$). On a donc pour tout $r \in [0, r_1]$, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\left(\cos t\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) + \sin t\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\right)\mathrm{d}t$$

est nulle. Dérivons une fois de plus par rapport à r pour faire apparaître les dérivées d'ordre 2. Il vient, en utilisant le théorème de Schwarz pour regrouper les dérivées croisées,

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin t \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dt$$

où toutes les dérivées partielles sont prises en $(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$. Cette égalité est en particulier valable en prenant $r = 0$. Comme on a $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}$ et $\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt = 0$ on obtient $\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0$. Cela vaut pour tout point de U et f est donc harmonique. ◁

Les exercices suivants concernent le principe du maximum pour des opérateurs différentiels. Le premier concerne le laplacien. Il en découlera facilement l'unicité d'une solution au problème de Dirichlet sur une boule à savoir la recherche d'une fonction continue, de classe C^2 et harmonique sur la boule ouverte dont les valeurs sur la sphère sont imposées.

1.25. Principe du maximum (1)

Soit B la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R ($R > 0$). Soit U une fonction continue sur $\overline{B}$, nulle sur la sphère $S(0, R)$, de classe C^2 sur B et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si U présente un maximum local en $x \in B$, alors $\Delta U(x) \leqslant 0$.

2. Montrer que s'il existe $a \in B$ tel que $U(a) = 0$, alors il existe $b \in B$ tel que $\Delta U(b) = 0$.

3. Montrer que $\Delta U < 0$ sur B implique $U > 0$ sur B.

4. Montrer que $\Delta U \leqslant 0$ sur B implique $U \geqslant 0$ sur B (on pourra utiliser la fonction $U_0 : x \longmapsto R^2 - \|x\|^2$).

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Si U présente un maximum local en $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$, l'application partielle $t \longmapsto U(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ admet un maximum local pour $t = x_i$ et sa dérivée seconde en ce point est négative ou nulle. Autrement dit, on a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$$

pour tout i. D'où il résulte que $\Delta U(x) \leqslant 0$.

On peut également constater que la matrice hessienne en x, $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j}$, est symétrique négative. En particulier, sa trace $\Delta U(x)$ est négative ou nulle.

2. Soit $a \in B$ tel que $U(a) = 0$. La fonction U qui est continue sur le compact $\overline{B}$ y est majorée et atteint son maximum M en un point c. Si c appartient à B, alors $\Delta U(c) \leqslant 0$ d'après la question 1. Sinon, le maximum est atteint sur $S(0, R)$ et donc $M = 0$. Mais alors U présente un maximum local en a et $\Delta U(a) \leqslant 0$. Dans tous les cas, on trouve $c \in B$ tel que $\Delta U(c) \leqslant 0$. En considérant $-U$ qui vérifie les mêmes hypothèses, on trouve $d \in B$ tel que $\Delta U(d) \geqslant 0$. Comme U est de classe C^2, la fonction ΔU est continue sur B ; elle prend des valeurs positives et négatives. La boule B étant connexe par arcs, ΔU s'annule sur B : il existe $b \in B$ tel que $\Delta U(b) = 0$.

3. D'après la question 2, si $\Delta U < 0$ sur B, alors U ne s'annule pas sur B. Comme U est continue et B connexe, U garde un signe constant sur B. Si $U < 0$ sur B, alors $-U > 0$ sur B. Alors $\max_{\overline{B}}(-U)$ est atteint sur B, en b. En un tel point b, on a, d'après 1, $-\Delta U(b) \leqslant 0$ et donc $\Delta U(b) \geqslant 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $\Delta U > 0$ sur B.

4. La fonction U_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, nulle sur $S(0, R)$ et ΔU_0 est la fonction $x \longmapsto -2n$ qui est strictement négative. Soit $\varepsilon > 0$ et $V = U + \varepsilon U_0$. On a $\Delta V < 0$ sur B et V est nulle sur la sphère. On déduit de la question 3 que $V > 0$ sur B. En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $U \geqslant 0$ sur B. ◁

Il découle directement de cela que si U *est harmonique sur* B *(c'est-à-dire de laplacien nul) et toujours nulle sur la sphère* $S(0, R)$ *alors* U *est identiquement nulle sur* $\overline{B}$. *En particulier le problème de Dirichlet, qui consiste à chercher une fonction* U *harmonique sur* B *continue sur* $\overline{B}$ *avec des valeurs fixées sur la sphère* $S(0, R)$, *admet au plus une solution.*

Voici une généralisation à un ouvert borné quelconque.

1.26. Principe du maximum (2)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^2 sur Ω. On suppose U harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul sur Ω). Montrer que $\sup_{x \in \overline{\Omega}} U(x) = \sup_{x \in \mathrm{Fr}(\Omega)} U(x)$ où $\mathrm{Fr}(\Omega)$ est la frontière de Ω.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Comme Ω est ouvert, on a $\mathrm{Fr}(\Omega) = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Puisque Ω est borné, il en est de même de $\overline{\Omega}$, qui étant de plus fermé est compact. Et $\mathrm{Fr}(\Omega)$ est compact pour les mêmes raisons. La fonction U est continue sur $\overline{\Omega}$, donc elle possède un maximum sur $\overline{\Omega}$ atteint en b et un maximum sur $\mathrm{Fr}(\Omega)$ qui vaut M.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $b \in \Omega$ et $\mathrm{U}(b) > \mathrm{M}$. Pour se ramener à une fonction à laplacien strictement positif comme dans l'exercice précédent, considérons la fonction $\mathrm{U}_\varepsilon : x \longmapsto \mathrm{U}(x) + \varepsilon\|x\|^2$, avec $\varepsilon > 0$. On obtient, pour $x \in \Omega$, $\Delta \mathrm{U}_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$.

Comme Ω est borné, il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$ pour tout $x \in \Omega$. On a $\sup_{x \in \mathrm{Fr}(\Omega)} \mathrm{U}_\varepsilon(x) \leqslant \mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{R}^2$. D'autre part, $\mathrm{U}_\varepsilon(b) \geqslant \mathrm{U}(b)$. Comme $\mathrm{M} < \mathrm{U}(b)$, on a pour ε assez petit, $\sup_{x \in \mathrm{Fr}(\Omega)} \mathrm{U}_\varepsilon(x) < \mathrm{U}_\varepsilon(b)$, donc le maximum de U_ε sur $\overline{\Omega}$ est atteint en un point c de Ω. En $c = (c_1, \ldots, c_n)$, la fonction U_ε possède un maximum local. Les applications partielles $t \longmapsto \mathrm{U}_\varepsilon(c_1, \ldots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ admettent un maximum local pour $t = c_i$ et leur dérivée seconde en ce point est négative ou nulle. Autrement dit, on a

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}_\varepsilon}{\partial x_i^2}(c_1, \ldots, c_n) \leqslant 0$$

pour tout i. D'où il résulte que $\Delta \mathrm{U}_\varepsilon(c) \leqslant 0$. D'où la contradiction voulue. ◁

Voici d'autres variantes du principe du maximum sur un ouvert borné quelconque.

1.27. Principe du maximum (3)

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, b à valeurs strictement positives.

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{(A)}.$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad \text{(B)}.$$

2. On remplace $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$ par $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)$ dans (A), où les fonctions α_{ij} sont dans $C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Montrer que si la matrice symétrique $(\alpha_{ij}(x)+\alpha_{ji}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, alors la conclusion (B) reste vraie.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. L'adhérence $\overline{\Omega}$ est fermée et bornée, puisque Ω est borné, donc c'est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. L'application u est donc bornée sur $\overline{\Omega}$ et y atteint ses bornes. Il existe $x_0\in\overline{\Omega}$ tel que $\sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = u(x_0)$. Supposons que l'on n'ait pas $\sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$. Alors x_0 appartient à Ω ; u possède un maximum en x_0. Comme Ω est ouvert et que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, on en déduit que $\mathrm{d}f_{x_0}=0$ et que la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $\mathrm{H} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est négative. Sachant que pour $1\leqslant j\leqslant n$, $\frac{\partial u}{\partial x_j}(u_0)=0$, (A) devient en x_0, $b(x_0)u(x_0)\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$. Or, on a $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{H}\leqslant 0$; on en déduit $b(x_0)u(x_0)\leqslant 0$, puis $u(x_0)\leqslant 0$, sachant que b est à valeurs strictement positives. Comme $u(x_0)$ est le sup de u, on en déduit que $u\leqslant 0$, puis que $u=0$, puisque u est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On a donc $\sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) = 0$, contrairement à ce que nous avions supposé. La propriété (B) est donc vérifiée.

2. Les notations étant les mêmes que dans la première question, supposons de nouveau que nous n'ayons pas la propriété (B). De la même façon, u possédera un maximum en $x_0\in\Omega$. En x_0 la propriété (A) telle qu'elle est définie dans la question 2 devient

$$b(x_0)u(x_0)\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial x_i}(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)+\alpha_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)$$

$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x_0) = \mathrm{S}.$$

Considérons la matrice A de terme général $a_{ij}=\alpha_{ij}(x_0)+\alpha_{ji}(x_0)$ pour $1\leqslant i,j\leqslant n$. On peut écrire, à l'aide du théorème de Schwarz,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_{ij}(x_0)+\alpha_{ji}(x_0))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AH).$$

On a donc l'inégalité $b(x_0)u(x_0) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AH)$. Montrons qu $\operatorname{Tr}(AH) \leqslant 0$. La matrice A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale : il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = {}^tPDP$. On obtient alors $\operatorname{Tr}(AH) = \operatorname{Tr}({}^tPDPH) = \operatorname{Tr}(DPH{}^tP) = \sum_{i=1}^{n} d_i m_i$, où $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont les termes de la diagonale de D et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ceux de la diagonale de $PH{}^tP$. Par hypothèse, A est positive donc $d_i \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. La matrice $PH{}^tP$ représente la même forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ que H, dans une autre base. Elle est donc négative. On a donc $m_i \leqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (si le i-ième vecteur de base est e_i et q la forme quadratique, $m_i = q(e_i)$). On en déduit [2] que $\operatorname{Tr}(AH) \leqslant 0$ et donc $b(x_0)u(x_0) \leqslant 0$ et on conclut comme dans la première question. ◁

Pour l'étude des équations aux dérivées partielles qui suivent on pourra être amené à utiliser les résultats du cours sur les séries de Fourier. Le premier exemple concerne l'équation de la chaleur dont la résolution a justement mené Fourier à introduire les séries qui portent son nom.

1.28. Équation de la chaleur sur un anneau

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ u(0,x) = u_0(x),$$

où u est 2π-périodique par rapport à x pour tout $t \geqslant 0$, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Montrer l'unicité de la solution.

2. On suppose u_0 non constante. Montrer qu'il n'y a pas de solution bornée sur $\mathbb{R}^2$.

(École normale supérieure)

---

2. On pouvait justifier cette inégalité en utilisant la racine carrée de A : si S est symétrique positive avec $A = S^2$, on a $\operatorname{Tr}(AH) = \operatorname{Tr}(S^2H) = \operatorname{Tr}(SHS) \leqslant 0$ car SHS est symétrique négative puisque si $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX(SHS)X = {}^t(SX)H(SX) \leqslant 0$.

▷ **Solution.**

1. • *Analyse.* Soit u une solution du problème posé. Comme à $t > 0$ fixé, $u_t : x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ elle est somme de sa série de Fourier si bien que l'on peut écrire

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)e^{inx} \quad \text{avec } c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

De la même manière la fonction $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est somme de sa série de Fourier et celle-ci est obtenue en dérivant formellement la série de u_t deux fois par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t)e^{inx}.$$

Montrons que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ s'obtient par dérivation formelle par rapport à t de l'expression $u(t,x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)e^{inx}$. Comme pour u, on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(t)e^{inx} \quad \text{avec } \tilde{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

La fonction u étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale sur le segment $[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable t et d'après la formule de Leibniz, $\tilde{c}_n(t) = c_n'(t)$ si bien que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(t)e^{inx}.$$

Ainsi, l'équation vérifiée par u donne $0 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t))e^{inx}$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Or, à t fixé, cette série est normalement convergente en x sur $\mathbb{R}$ (car la série de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ converge normalement). Cela justifie l'interversion suivante

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t))e^{inx} \right) e^{-in_0 x}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)x}\mathrm{d}x = 2\pi(c_{n_0}'(t) + n^2 c_{n_0}(t)), \end{aligned}$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t > 0$, $c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0$ si bien qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que $c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$.

Il reste à déterminer α_n. Considérons pour cela la série de Fourier de u_0 notée $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}_n e^{inx}$. Si on applique le théorème de Parseval à $u_0 - u_t$, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathrm{C}_n - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

À n fixé, on a donc $|\mathrm{C}_n - c_n(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 \mathrm{d}x$. Or cette intégrale tend vers 0 quand t tend vers 0 par application du théorème de convergence dominée. En effet, $(t,x) \in [0,1] \times [0,2\pi] \longmapsto |u_0(x) - u_t(x)|^2 = |u(0,t) - u(x,t)|^2$ est bornée sur le compact $[0,1] \times [0,2\pi]$ par continuité de u, les fonctions constantes sont intégrables sur $[0,2\pi]$ et pour tout $x \in [0,2\pi]$, $|u_0(x) - u_t(x)|$ converge vers 0 quand t tend vers 0. On en déduit par passage à la limite que $|\mathrm{C}_n - \alpha_n|^2 = 0$ et finalement $\alpha_n = \mathrm{C}_n$.

Ainsi, si u est solution de l'équation, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}}$$

où les C_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

• *Synthèse.* Montrons que $u : (t,x) \longmapsto u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ convient. Tout d'abord, cette série est normalement convergente car

$$\forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leqslant |\mathrm{C}_n|.$$

et la série des $|\mathrm{C}_n|$ converge puisque u_0 est redevable du théorème de convergence normale. On en déduit que u est bien définie et continue puisque chaque fonction $(t,x) \longmapsto \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ est continue.

Pour tout $t \geqslant 0$, $x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodique.

La dérivation formelle de la série définissant u donne pour $k, l \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k i^l n^{2k+l} \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Or comme les C_n sont bornés par $\mathrm{K} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0|$, cette série est normalement convergente sur $]t_0, +\infty[\times \mathbb{R}$ puisque

$$\left|(-1)^k i^l n^{2k+l} \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}\right| \leqslant \mathrm{K} n^{2k+l} e^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nous savons alors que u admet des dérivées partielles par rapport à x et t à tout ordre si bien que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tout entier.

Enfin, comme les dérivées partielles s'obtiennent par dérivation formelle, u vérifie bien l'équation puisque

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La fonction u répond bien au problème posé et c'est la seule solution.

2. Procédons par contraposée. Si u est une solution bornée sur $\mathbb{R}$ alors le travail de la première question, montre que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

où les $\mathrm{C}_n e^{-n^2 t}$ sont les coefficients de Fourier de $x \longmapsto u(x,t)$. Or, à t et t fixés, on a

$$|\mathrm{C}_n e^{-n^2 t}| = |\mathrm{C}_n| e^{-n^2 t} = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x \right| \leqslant \|u\|.$$

Nécessairement, si $n \neq 0$, en faisant tendre t vers $-\infty$, il vient $\mathrm{C}_n = 0$. On en déduit que u_0 est constante et égale à C_0. ◁

La démarche pour résoudre l'exercice suivant est tout à fait analogue

1.29. Fonctions harmoniques sur un demi-plan

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique.

Montrer qu'il existe une unique fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

(*i*) u est bornée et continue ;

(*ii*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = f(x)$;

(iii) $\forall y > 0$, $x \longmapsto u(x,y)$ est 2π-périodique ;

(iv) la restriction de u à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

• *Analyse.* Soit u répondant au problème. Pour $y > 0$, on peut écrire

$$u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y)e^{inx} \text{ avec } c_n(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)e^{inx}\mathrm{d}x \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Comme $x \longmapsto u(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $y > 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est aussi somme de sa série de Fourier et celle-ci est obtenue en dérivant formellement la série de u_t deux fois par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(y)e^{inx}.$$

D'autre part, comme pour u, on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(y)e^{inx} \text{ avec } \tilde{c}_n(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)e^{inx}\mathrm{d}x \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

La fonction u étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que l'intégrale sur le segment $[0,2\pi]$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x,y)e^{-inx}\mathrm{d}x$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable y et d'après la formule de Leibniz, $\tilde{c}_n(y) = c_n''(y)$ si bien que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n''(y)e^{inx}.$$

Ainsi, l'équation vérifiée par u donne $0 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n''(y) - n^2 c_n(y))e^{inx}$.
Comme la convergence est normale en x pour tout $y > 0$, on a nécessairement $c_n''(y) - n^2 c_n(y) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit l'existence de $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ suites de $\mathbb{C}$ telles que $c_0(y) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{B}_0 y$ et $c_n(y) = \mathrm{A}_n e^{-ny} + \mathrm{B}_n e^{ny}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $y > 0$.

Nous allons constater que le caractère borné de u entraîne $\mathrm{B}_n = 0$ pour tout n. Les coefficients de Fourier sont bornés par $\|u\|_\infty$: pour $n \in \mathbb{Z}$ et $y > 0$, on a

$$|c_n(y)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)e^{-inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(x,y)|\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_\infty.$$

Or, pour $y > 0$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $|c_0(y)| \geqslant |\mathrm{B}_0|y - |\mathrm{A}_0|$ et $|c_n(y)| \geqslant |\mathrm{B}_n|e^{ny} - |\mathrm{A}_n|e^{ny}$ ce qui impose $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_n = 0$. Il reste donc

$$u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_n e^{-ny}e^{inx}.$$

expression valable pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$.

Nous allons déterminer les A_n en les reliant aux coefficients de Fourier de f. Considérons $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$ la série de Fourier de f. Si on applique le théorème de Parseval à $x \longmapsto f(x) - u(x,y)$, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n - c_n(y)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - u(x,y)|^2 \mathrm{d}x.$$

À n fixé, on a donc $|C_n - c_n(y)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - u(x,y)|^2 \mathrm{d}x$. Or cette intégrale tend vers 0 quand t tend vers 0 par application du théorème de convergence dominée. En effet, $x \longmapsto |u(x,0) - u(x,y)|^2$ est bornée par $4\|u\|_\infty^2$ pour tout y, et pour chaque $x \in [0, 2\pi]$, $|u(x,0) - u(x,y)|$ converge vers 0 quand y tend vers 0. On en déduit par passage à la limite, $|C_n - A_n|^2 = 0$ et finalement $A_n = C_n$.

On obtient la forme de u définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-ny} e^{inx}}.$$

• *Synthèse.* Montrons que $u : (x,y) \longmapsto u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-ny} e^{inx}$ convient. Tout d'abord, cette série est normalement convergente puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n|$ converge en vertu du théorème de convergence normale appliquée à f et l'inégalité $|C_n e^{-ny} e^{inx}| \leqslant |C_n|$ $(x \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0)$. On en déduit que u est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (puisque les $(x,y) \longmapsto C_n e^{-ny} e^{inx}$ le sont) et elle est bornée car

$$|u(x,y)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|.$$

Pour tout $y \geqslant 0$, $x \longmapsto u(x,y)$ est 2π-périodique.

La dérivation formelle de cette série donne pour $k, l \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^l \partial y^k}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k i^l n^{k+l} C_n e^{-ny} e^{inx}.$$

Or comme les C_n sont bornés par $K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|$, cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R} \times]y_0, +\infty[$ puisque

$$\left|(-1)^k i^l n^{k+l} C_n e^{-ny} e^{inx}\right| \leqslant K n^{k+l} e^{-ny_0} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nous savons alors que u admet des dérivées partielles par rapport à x et y à tout ordre si bien que u est de classe C^∞ sur $]y_0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tout entier.

Comme les dérivées partielles s'obtiennent par dérivation formelle, u vérifie bien l'équation puisque

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^2 n^2 \mathrm{C}_n e^{-ny} e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n)^2 \mathrm{C}_n e^{-ny} e^{inx} = 0.$$

L'application u répond bien au problème posé. ◁

Voici l'étude de l'équation de Schrödinger avec potentiel nul.

1.30. Une équation aux dérivées partielles (1)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels telle que $(n^6 a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable. On pose

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}.$$

1. Étudier le caractère C^0, C^1, C^2 de u_0.

2. Déterminer une application $u : (x,t) \longmapsto u(x,t)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique par rapport à x telle que u soit continue, que les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ existent et soient continues et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \ u(x,0) = u_0(x).$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{|n|\leqslant \mathrm{N}\\ n\neq 0}} n^2|a_n| \leqslant \sum_{\substack{|n|\leqslant \mathrm{N}\\ n\neq 0}} |n^3 a_n|\frac{1}{|n|} \leqslant \left(\sum_{\substack{|n|\leqslant \mathrm{N}\\ n\neq 0}} n^6|a_n|^2 \sum_{\substack{|n|\leqslant \mathrm{N}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6|a_n|^2 \times 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}.$$

Ainsi, la famille $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et il en est de même *a fortiori* des familles $(na^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On en déduit que les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$,

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ina_n e^{inx}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 a_n e^{inx}$ sont normalement et donc uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$. En appliquant deux fois le théorème de dérivation des séries de fonctions, on obtient le caractère $\mathcal{C}^2$ de u_0.

2. • *Analyse.* Supposons que le problème possède une solution u. La fonction $x \longmapsto u(x,t)$ est pour tout $t \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. Elle est donc égale à sa série de Fourier. On note $c_n(t)$ ses coefficients de Fourier. On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$. La fonction $(x,t) \longmapsto u(x,t)e^{-inx}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle possède une dérivée partielle par rapport à t qui est $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-inx}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on en déduit que la fonction c_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-inx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-inx},$$

par hypothèse. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c_n'(t)$ est égal au n-ième coefficient de Fourier de la fonction $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ multiplié par i. On en déduit que $c_n'(t) = i(in)^2 c_n(t) = -in^2 c_n(t)$, d'après la relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction et ceux de ses dérivées. La fonction c_n est solution de l'équation différentielle $c_n' = -in^2 c_n$ et on a $c_n(t) = c_n(0)e^{-in^2 t}$. Comme la série qui définit u_0 est normalement convergente, les coefficients de Fourier de u_0 sont les a_n et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,0)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = a_n$$

et donc $c_n(t) = a_n e^{-in^2 t}$. On a donc, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in^2 t} e^{inx},$$

ce qui montre que la solution u si elle existe est unique.

• *Synthèse.* Montrons que cette fonction u convient.

On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $u_n(x,t) = a_n e^{-int^2} e^{inx}$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|u_n(x,t)| = |a_n|$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ sont donc uniformément convergentes. On en déduit que u est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = inu_n, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - = n^2 u_n \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = -in^2 u_n.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right| = n|a_n|, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)\right| = n^2|a_n| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right| = n^2|a_n|.$$

Puisque les familles $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables, on en déduit en appliquant le théorème de dérivation des séries de fonctions à $x \longmapsto u(x,t)$, $x \longmapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $t \longmapsto y(x,t)$ que les fonctions $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ existent, sont continues et vérifient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in^2t}(in)^2 e^{inx}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(-in^2)e^{-in^2t}(in)^2 e^{inx}.$$

On a bien $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$. Enfin $u(x,0) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} = u_0(x)$ et u a toutes les propriétés voulues. ◁

1.31. Une équation aux dérivées partielles (2)

Soit u_0 une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour qu'il existe une application u de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u^3\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

On pourra étudier les courbes $t \longmapsto x(t)$ telles que $t \longmapsto u(t,x(t))$ soit constante.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

• Supposons qu'il existe une fonction u répondant au problème posé et cherchons des fonctions x définies et dérivables sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\Phi : t \longmapsto u(t,x(t))$ soit constante. On a pour tout $t \in$ I,

$$\Phi'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t)) + x'(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t))(x'(t) - u^3(t,x(t)).$$

Φ' sera nulle en particulier si x est solution de l'équation différentielle :

$$x' = u^3(t,x) \quad (*).$$

• Intéressons-nous aux solutions de cette équation différentielle. La fonction u étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, nous sommes dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale x_α, définie sur un intervalle I_α de la forme $[0, h[$ ($h \in [0, +\infty]$) telle que $x_\alpha(0) = \alpha$. D'après ce qui précède, la fonction $t \longmapsto u(t, x_\alpha(t))$ est constante sur I_α. Cette constante est égale à $u(0, x_\alpha(0)) = u(0, \alpha) = u_0(\alpha)$. La fonction x_α vérifiant l'équation différentielle $(*)$, on a alors, pour tout $t \in \mathrm{I}_\alpha$, $x'_\alpha(t) = u^3(t, x_\alpha(t)) = u_0^3(\alpha)$: la dérivée de x_α est donc constante, ce qui donne, pour tout $t \in \mathrm{I}_\alpha$, $x_\alpha(t) = u_0^3(\alpha)t + x_\alpha(0) = u_0^3(\alpha)t + \alpha$.

Montrons qu'une telle solution maximale x_α est définie $\mathbb{R}_+$ tout entier. Raisonnons par l'absurde et supposons que x_α est définie sur $[0, h[$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction affine x_α peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, h]$. L'application u étant continue sur $\mathbb{R}$, cette fonction prolongée est solution de l'équation différentielle $(*)$ sur $[0, h]$, ce qui est contradictoire avec le fait qu'une solution maximale de $(*)$ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x_\alpha : t \longmapsto u_0^3(\alpha)t + \alpha$ est solution de l'équation différentielle $(*)$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $t \longmapsto u(t, x_\alpha(t))$ est constante sur $\mathbb{R}_+$. Cela montre que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t, u_0^3(\alpha)t + \alpha) = u_0(\alpha)$.

• Considérons la fonction $\mathrm{F} : (t, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longmapsto (t, u_0^3(\alpha)t + \alpha) \in \mathbb{R}^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque u_0 l'est. On a

$$\mathrm{Jac}(\mathrm{F})(t, \alpha) = \begin{vmatrix} 1 & u_0^3(\alpha) \\ 0 & 3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha)t + 1 \end{vmatrix} = 3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha)t + 1.$$

Montrons que si u_0' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$, alors F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. En effet, on a alors pour tout $(t, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathrm{Jac}(\mathrm{F})(t, \alpha) \geqslant 1$ et donc $\mathrm{Jac}(\mathrm{F})(t, \alpha) \neq 0$. Pour conclure en appliquant le théorème d'inversion globale, il suffit de démontrer que F est une bijection de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Soit $(\mathrm{T}, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On cherche $(t, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} \mathrm{T} = t \\ \beta = u_0^3(\alpha)t + \alpha. \end{cases}$$

Il faut donc $t = \mathrm{T}$ et $\beta = 3u_0^3(\alpha)\mathrm{T} + \alpha$. Il suffit de démontrer que pour tout $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+$, l'application $h_\mathrm{T} : \alpha \longmapsto 3u_0^3(\alpha)\mathrm{T} + \alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme h_T est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $h'_\mathrm{T}(\alpha) = 3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha)\mathrm{T} + 1 \geqslant 1 > 0$, h_T est strictement croissante. De plus, comme $h'_\mathrm{T} \geqslant 1$, pour $\alpha \geqslant 0$, on a $h_\mathrm{T}(\alpha) - h_\mathrm{T}(0) \geqslant \alpha$ et donc $\lim\limits_{+\infty} h_\mathrm{T} = +\infty$. On démontre de même que $\lim\limits_{-\infty} h_\mathrm{T} = -\infty$. Pour tout $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+$, h_T est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc F est une bijection de

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et finalement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

La fonction u doit vérifier, pour $(t, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $u(\mathrm{F}(t, \alpha)) = u_0(\alpha)$ et donc : pour tout $(t, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $u(t, \beta) = u_0(p_2 \circ \mathrm{F}^{-1}(t, \beta))$, où p_2 est la projection $(x, y) \longmapsto y$. Cette dernière égalité définit une application unique de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle a les propriétés voulues.

Les applications $u_0, \mathrm{F}^{-1}, p_2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc u est de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = p_2 \circ \mathrm{F}^{-1}$. u est définie par $u = u_0 \circ g$. Soit $(t, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $(t, \alpha) = \mathrm{F}^{-1}(t, \beta)$. On a

$$\mathrm{Jac}(\mathrm{F}^{-1})(t, \beta) = \mathrm{Jac}(\mathrm{F})(t, \alpha) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-u_0^3(\alpha)}{3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha) + 1} \\ 0 & \dfrac{1}{3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha) + 1} \end{vmatrix}.$$

Cela nous donne $\dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{-u_0^3(\alpha)}{3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha) + 1}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \beta} = \dfrac{1}{3u_0^2(\alpha)u_0'(\alpha) + 1}$ et donc $\dfrac{\partial g}{\partial t} + u_0^3(\alpha)\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$. De la définition de u, on tire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0' \times \frac{\partial g}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' \times \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Finalement, pour tout $(t, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \beta) + u^3(t, \beta)\frac{\partial u}{\partial x} = u_0'(t, \alpha)\left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, \beta) + u_0^3(\alpha)\frac{\partial g}{\partial \beta}(t, \beta\right) = 0.$$

Ainsi, u vérifie le système donné : nous avons démontré que si u_0' est positive sur $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction u ayant les propriétés voulues.

• Supposons maintenant que la condition $u_0' \geqslant 0$ n'est pas remplie : u_0' prend des valeurs strictement négatives. Cette fonction étant continue, il existe un intervalle ouvert I sur lequel u_0' est strictement négative. Montrons, en raisonnant par l'absurde qu'il n'y a pas de fonction u répondant au problème posé.

Soit α_1 et α_2 dans I. Supposons $\alpha_1 < \alpha_2$. Par stricte décroissance de u_0 sur I, on a $u_0(\alpha_1) > u_0(\alpha_2)$ et donc $u_0^3(\alpha_1) > u_0^3(\alpha_2)$. Considérons les fonctions

$$x_{\alpha_1} : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto u_0^3(\alpha_1)t + \alpha_1 \quad \text{et} \quad x_{\alpha_2} : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto u_0^3(\alpha_2)t + \alpha_2.$$

Il existe T tel que $x_{\alpha_1}(\mathrm{T}) = x_{\alpha_2}(\mathrm{T})$, à savoir $\mathrm{T} = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{u_0^3(\alpha_2) - u_0^3(\alpha_1)} > 0$.
D'après ce qui précède, on devrait avoir, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u(t, x_{\alpha_1}(t)) = u_0(\alpha_1) \quad \text{et} \quad u(t, x_{\alpha_2}(t)) = u_0(\alpha_2)$$

En prenant $t = \mathrm{T}$, on obtient $u_0(\alpha_1) = u_0(\alpha_2)$ et donc une contradiction. On ne peut pas obtenir de fonction u ayant la propriété voulue.

Conclusion. Le problème posé a une solution si et seulement si u'_0 est positive. Quand elle existe, la solution est unique. ◁

Les courbes intégrales maximales de l'équation $x' = u^3(t, x)$, lorsque u existe, sont des droites. Lorsque $u'_0 \geqslant 0$, elles se coupent deux à deux dans $\mathbb{R}^*_-$.

Les deux énoncés qui suivent concernent les formes différentielles.

1.32. Théorème de relèvement

Soit $\mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathrm{S}^1$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $u(x) = e^{it(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Le cas $n = 1$ est un théorème du cours. Rappelons sa preuve. Si $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution, alors on a $u'(x) = it'(x)u(x)$ pour tout x. On pose alors $t(x) = \alpha + \dfrac{1}{i}\displaystyle\int_0^x \frac{u'}{u}$ où α est un argument de $u(0)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Le fait que u est à valeurs dans S^1 permet de montrer que t est à valeurs réelles. La fonction $x \longmapsto u(x)e^{-itx}$ a alors une dérivée nulle : elle est constante sur $\mathbb{R}$ et comme elle vaut 1 en $x = 0$, on a $u(x) = e^{it(x)}$ pour tout x.

Essayons d'adapter cette solution au cas n quelconque. Si t est une solution et si on note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ on a, pour tout k, et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = i\frac{\partial t}{\partial x_k}(x)\, u(x).$$

On cherche donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont les dérivées partielles sont données égales aux fonctions $g_k : x \longmapsto \dfrac{1}{iu(x)}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(x)$. Autrement dit, on cherche à savoir si le champ de vecteurs $x \longmapsto (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ sur $\mathbb{R}^n$ est un champ de gradient, ou encore si la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ $\omega = g_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + g_n \mathrm{d}x_n$ est exacte. Comme on travaille sur $\mathbb{R}^n$ qui est un ouvert étoilé le théorème de Poincaré s'applique et ω est exacte si et seulement si elle est fermée. Or on a

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \frac{1}{iu}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{iu^2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

et le théorème de Schwarz permet de voir que cette expression est symétrique en k et j donc que $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}$. Ainsi il existe $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\mathrm{d}t = \omega$. Cette fonction t est unique à un scalaire additif près : on le choisit de sorte que $t(0)$ soit un argument de $u(0)$. La fonction $x \longmapsto u(x)e^{-it(x)}$ a alors une différentielle nulle en tout point de $\mathbb{R}^n$: elle est constante, égale à 1 et cela termine la preuve. ◁

La preuve montre qu'on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par un ouvert étoilé quelconque de $\mathbb{R}^n$. Notons aussi que la solution donnée dans le cas $n = 1$ fonctionne aussi lorsque $k = 1$.

On pourra utiliser un relèvement pour résoudre le difficile exercice qui suit.

1.33. Existence d'un point critique

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et D le disque unité fermé. On suppose que $f(x, y) = y^2 - x^2$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$. Montrer que f admet au moins un point critique dans $\mathbb{R}^2$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et raisonnons par l'absurde : supposons que le gradient ne s'annule pas sur D. Il ne s'annule pas sur tout $\mathbb{R}^2$ puisque si $(x, y) \notin \mathrm{D}$, $\nabla f(x, y) = (-2x, 2y) \neq 0$. Considérons l'application de classe $\mathcal{C}^1$

$$\mathrm{F} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{C}^*.$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour arriver à une contradiction, on va utiliser un relèvement : admettons pour l'instant que l'on puisse écrire $\mathrm{F}(x, y) = \exp \mathrm{G}(x, y)$ où G est une fonction continue et regardons ce qui se passe sur le cercle unité. On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \mathrm{G}(\cos t, \sin t)$. Par continuité du gradient en un point du cercle unité, on a

$$\mathrm{F}(\cos t, \sin t) = e^{\varphi(t)} = -2\cos t + 2i \sin t = -2e^{-it}$$

pour tout t. En particulier, $e^{\varphi(t)+it} = -2$ pour tout t. Comme l'image réciproque de -2 par l'exponentielle est un ensemble discret, l'application continue $t \longmapsto \varphi(t)+it$ est constante. Mais alors, $\varphi(0) = \varphi(2\pi)+2i\pi$ ce qui est contradictoire avec la 2π-périodicité de φ.

Il suffit maintenant de prouver que $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ s'écrit $\exp \mathrm{G}$ avec G continue. Si G existe, en dérivant par rapport à x, on constate que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F(x,y)}.$$

Cela nous invite à poser pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$G(x,y) = \int_0^x \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t,y)}{F(t,y)} dt + G_0(y),$$

où G_0 est une application de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie pour tout $y \in \mathbb{R}$ $F(0,y) = \exp G_0(y)$ (c'est le théorème de relèvement classique des arc paramétrés qui assure l'existence de G_0). Visiblement, G est dérivabl par rapport à x et la dérivation de $(x,y) \longmapsto F(x,y)\exp(-G(x,y))$ pa rapport à x donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}\exp(-G(x,y)) + F(x,y)\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{F(x,y)}\exp(-G(x,y)) = 0.$$

Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$F(x,y)\exp(-G(x,y)) = F(0,y)\exp(-G_0(y)) = 1,$$

autrement dit $F(x,y) = \exp G(x,y)$.

Il reste à vérifier que G est bien continue. Soit $A > 0$. Plaçon nous sur $[-A,A]^2$ et posons $\alpha(t,y) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t,y)}{F(t,y)}$ pour $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. Cett fonction étant continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est bornée sur le compact $[-A,A]$ par un réel M. Soit $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[-A,A]^2$ qui converge ve (x,y). Le terme $|G(x_n,y_n) - G(x,y)|$ est majoré par

$$|G_0(y) - G_0(y_n)| + \left|\int_{x_n}^x \alpha(t,y_n)dt\right| + \left|\int_0^{x_n} (\alpha(t,y_n) - \alpha(t,y))dt\right|,$$

et on a donc

$$|G(x_n,y_n)-G(x,y)| \leqslant |G_0(y_n)-G_0(y)| + M|x-x_n| + \int_0^A |\alpha(t,y)-\alpha(t,y_n)|d$$

Les deux premiers termes convergent vers 0 et le troisième aussi d'après l théorème de convergence dominée puisque pour tout n et tout $t \in [0,A$ on a $|\alpha(t,y) - \alpha(t,y_n)| \leqslant 2M$ et $t \longmapsto 2M$ est intégrable sur $[0,A$ Par comparaison, $G(x_n,y_n)$ converge vers $G(x,y)$ si bien que $G_{|[-A,A}$ est continue et finalement, G est continue puisque la continuité est un propriété locale. ◁

Nous regroupons pour finir ce chapitre des exercices concernant d intégrales doubles ou multiples. La première porte sur un disque.

1.34. Intégrale double (1)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et D le disque fermé de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $r > 0$. Calculer

$$\iint_{\mathrm{D}} |\mathrm{P}(x+iy)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Posons $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n \mathrm{X}^n$ et notons I l'intégrale à calculer. Le fait qu'il s'agisse d'une intégrale sur un disque nous invite à passer en coordonnées polaires. Classiquement, on obtient par changement de variables et théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant \mathrm{R}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} |\mathrm{P}(re^{i\theta})|^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\mathrm{R}} r\left(\int_0^{2\pi} |\mathrm{P}(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\mathrm{R}} r\left(2\pi \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} r^{2n}|a_n|^2\right)\mathrm{d}r = 2\pi \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |a_n|^2 \int_0^{\mathrm{R}} r^{2n+1}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{|a_n|^2 \mathrm{R}^{2n+2}}{2n+2}.
\end{aligned}$$

(on a utilisé le théorème de Parseval entre la première et la seconde ligne). ◁

1.35. Intégrale double (2)

Soit E l'ellipse pleine de demi-axes a et b et de foyers F, F'. Calculer $\iint_{\mathrm{E}} (\mathrm{MF} + \mathrm{MF}')\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

L'ellipse de foyer F et F′ et de demi-grand axe a est l'ensemble des points M vérifiant $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$. L'ellipse pleine E est alors la réunion des ellipses homofocales E_α qui ont une équation de la forme $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2\alpha$ où α décrit le segment $[c, a]$. On rappelle que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ donne l'abscisse des deux foyers : $\mathrm{F} = (-c, 0)$ et $\mathrm{F}' = (c, 0)$. Bien entendu dans le cas $\alpha = c$ l'ellipse E_c dégénère en le segment [FF′]. On va calculer l'intégrale en faisant un changement de variables. On prend comme nouvelles variables $\alpha \in [c, a]$ pour choisir l'ellipse et un paramètre $\theta \in [0, 2\pi]$ pour définir le point de l'ellipse E_α à l'aide du

paramétrage classique d'une ellipse. On pose donc

$$x = \alpha\cos\theta \quad y = \sqrt{\alpha^2 - c^2}\sin\theta$$

car le demi-petit axe de l'ellipse E_α a pour longueur $\beta = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$. L'application $\psi : (\alpha, \theta) \in]a, c[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 et établit une bijection entre l'ouvert $]a, c[\times]0, 2\pi[$ et l'ensemble E privé de son bord (à savoir l'ellipse E_a) du segment [FF′] (l'ellipse dégénérée E_c) ainsi que des points de l'axe des abscisses positifs. Le fait d'ôter ces morceaux qui sont d'aire nulle à E ne modifie pas l'intégrale à calculer. Le déterminant jacobien de ψ vaut :

$$\mathrm{Jac}\,\psi(\alpha,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\alpha\sin\theta \\ \dfrac{\alpha\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} & \sqrt{\alpha^2 - c^2}\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2 - c^2\cos^2\theta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}.$$

Il est toujours strictement positif donc, par le théorème d'inversion globale, ψ établit un C^1-difféomorphisme de $]a, c[\times]0, 2\pi[$ sur son image. On a donc, par le théorème de changement de variable

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{E}} (\mathrm{MF} + \mathrm{MF}')\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[c,a]\times[0,2\pi]} 2\alpha|\,\mathrm{Jac}\,\psi(\alpha,\theta)|\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta$$

Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\mathrm{I} = \int_c^a \left(\int_0^{2\pi} 2\alpha\frac{\alpha^2 - c^2\cos^2\theta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\alpha = \int_c^a \frac{2\pi\alpha(2\alpha^2 - c^2)}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\mathrm{d}\alpha.$$

On termine le calcul avec le changement de variable $u = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$ (donc $u\mathrm{d}u = \alpha\mathrm{d}\alpha$) pour obtenir

$$\mathrm{I} = 2\pi\int_0^b \frac{2u^2 + c^2}{u}u\mathrm{d}u = 2\pi\left(\frac{2b^3}{3} + bc^2\right) = \frac{2\pi}{3}(3a^2 - b^2)b. \quad \triangleleft$$

Dans les énoncés suivants les intégrales sont sur des domaines non bornés.

1.36. Intégrale double (3)

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, f étant supposée intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1 + (x + g(t))^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer son intégrale.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Posons pour x, t réels, $\varphi(x,t) = \dfrac{f(t)}{1+(x+g(t))^2}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme f est intégrable, pour tous x et t réels, la domination $\dfrac{|f(t)|}{1+(x+g(t))^2} \leqslant |f(t)|$ garantit que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. À t fixé, la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(t)}{1+(x+g(t))^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'un $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ et $-\infty$. On a, à l'aide d'un changement de variable affine,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+(x+g(t))^2}\mathrm{d}x &= |f(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+g(t))^2} = |f(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \pi|f(t)|.\end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \pi|f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Fubini nous indique alors que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et que l'interversion des intégrales est licite :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+(x+g(t))^2}\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+(x+g(t))^2}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+g(t))^2} \right) \mathrm{d}t = \pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t. \triangleleft\end{aligned}$$

1.37. Intégrale double (4)

1. On considère des fonctions f et g définies et continues sur $[0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nulles hors d'un certain segment inclus dans $]0,+\infty[$. Montrer que :

$$\iint_{[0,+\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \pi \sqrt{\int_0^{+\infty} f(x)^2\mathrm{d}x} \sqrt{\int_0^{+\infty} g(y)^2\mathrm{d}y}.$$

2. Soit P un polynôme réel de degré N,

$$\mathrm{P} = a_{\mathrm{N}}\mathrm{X}^{\mathrm{N}} + a_{\mathrm{N}-1}\mathrm{X}^{\mathrm{N}-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0.$$

On lui associe $\mathrm{Q} = \dfrac{a_{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\mathrm{X}^{\mathrm{N}} + \dfrac{a_{\mathrm{N}-1}}{(\mathrm{N}-1)!} + \cdots + \dfrac{a_1}{1!}\mathrm{X} + a_0$. Montrer que

$$\int_0^1 \mathrm{P}^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \pi \int_0^{+\infty} \mathrm{Q}^2(x)e^{-2x}\mathrm{d}x.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Posons $\mathrm{I} = \iint_{]0,+\infty[^2} \dfrac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Cette intégrale est définie car la fonction à intégrer est nulle en dehors d'un pavé compact. La fonction $\varphi : (x,t) \in]0,+\infty[^2 \longmapsto (x,xt) \in]0,+\infty[^2$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ dans $]0,+\infty[^2$. Son jacobien est égal à $\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & x \end{vmatrix} = x$. La formule de changement de variable donne donc

$$\mathrm{I} = \iint_{]0,+\infty[^2} \frac{f(x)g(xt)}{x+tx} x\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{]0,+\infty[^2} \frac{f(x)g(xt)}{1+t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x)g(xt)\mathrm{d}x \right) \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout $t > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(xt)\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(xt)\mathrm{d}x}.$$

Comme

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(xt)\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{g^2(u)}{t}\mathrm{d}u} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(u)\mathrm{d}u},$$

on obtient

$$\mathrm{I} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = \pi \text{ et donc,}$$

$$\mathrm{I} \leqslant \pi\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Supposons que les fonctions f et g sont continues et intégrables sur $[0,+\infty[$. On obtient alors, d'après ce qui précède, pour $0 < a < b$,

$$\iint_{[a,b]^2} \frac{|f(x)||g(y)|}{x+y}\,dx\,dy \leqslant \pi\sqrt{\int_{[a,b]} f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_{[a,b]} g^2(x)\,dx}$$
$$\leqslant \pi\sqrt{\int_{[0,+\infty[} f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_{[0,+\infty[} g^2(x)\,dx.}$$

On en déduit que la fonction $(x,y) \longmapsto \dfrac{f(x)g(y)}{x+y}$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[^2$. *Pour* $0<a<b$, *on a*

$$\iint_{[a,b]^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\,dx\,dy \leqslant \pi\sqrt{\int_{[0,+\infty[} f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_{[0,+\infty[} g^2(x)\,dx} \text{ et donc}$$

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\,dx\,dy \leqslant \pi\sqrt{\int_{[0,+\infty[} f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_{[0,+\infty[} g^2(x)\,dx}.$$

2. La forme du second membre de l'inégalité incite à appliquer les résultats de la question 1 avec $f=g$ où f est la fonction $x\mapsto \mathrm{Q}(x)e^{-x}$.

La fonction f est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ car au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)\sim \dfrac{a_\mathrm{N}}{\mathrm{N}!}x^\mathrm{N}e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. De la remarque précédente on déduit que

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{Q}(y)}{x+y}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \pi\int_{[0,+\infty[} \mathrm{Q}(x)^2e^{-2x}\mathrm{d}x.$$

Pour calculer l'intégrale double on somme à $x+y$ constant, c'est-à-dire qu'on fait le changement de variables linéaire $u=x$, $v=x+y$. Le déterminant jacobien vaut 1 et on obtient

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{Q}(y)}{x+y}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,+\infty[}\left(\int_0^t \mathrm{Q}(u)\mathrm{Q}(t-u)\mathrm{d}u\right)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t>0$, on a

$$\int_0^t \mathrm{Q}(u)\mathrm{Q}(t-u)\mathrm{d}u = \sum_{0\leqslant n,p\leqslant \mathrm{N}} \frac{a_n a_p}{n!p!}\int_0^t u^n(t-u)^p\mathrm{d}u.$$

Calculons, pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, l'intégrale $\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^t u^n(t-u)^p\mathrm{d}u$. En intégrant par parties, on obtient pour $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_{n,p} = \frac{p}{n+1}\mathrm{I}_{n+1,p-1}.$$

Un récurrence facile donne alors, pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathrm{I}_{n,p} = \frac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\mathrm{I}_{p+n,0}.$$

Sachant que $\mathrm{I}_{n+p,0} = \dfrac{t^{n+p+1}}{n+p+1}$, on a donc $\mathrm{I}_{n,p} = \dfrac{n!p!}{(n+p+1)!}t^{n+p+1}$.

Finalement, on obtient

$$\int_0^t \mathrm{Q}(u)\mathrm{Q}(t-u)\mathrm{d}u = \sum_{0\leqslant n,p\leqslant \mathrm{N}} \frac{a_n a_p}{(n+p+1)!}t^{n+p+1} \text{ puis}$$

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{Q(x)Q(y)}{x+y} e^{-(x+y)} dxdy = \sum_{0\leqslant n,p\leqslant N} \frac{a_n a_p}{(n+p+1)!} \int_{]0,+\infty[} t^{n+p} e^{-t} dt$$

Classiquement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{]0,+\infty[} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$
On en déduit que

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{Q(x)Q(y)}{x+y} e^{-(x+y)} dxdy = \sum_{0\leqslant n,p\leqslant N} \frac{a_n a_p}{n+p+1}.$$

Cette dernière somme peut encore s'écrire

$$\sum_{0\leqslant n,p\leqslant N} a_n a_p \int_0^1 t^{n+p} dt = \int_0^1 \sum_{0\leqslant n,p\leqslant N} a_n a_p t^{n+p} dt = \int_0^1 P^2(t) dt.$$

L'inégalité devient donc

$$\boxed{\int_0^1 P^2(t) dt \leqslant \pi \int_0^{+\infty} Q^2(x) e^{-2x} dx}. \quad \triangleleft$$

1.38. Intégrale double (5)

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et intégrable. On pose, pour x réel,

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(xy) e^{-2xy} f(y) dy.$$

1. Étudier le domaine de définition et la continuité de h.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{x} dx$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Notons pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x(y) = \mathrm{sh}(xy) e^{-2xy} f(y)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Montrons que g_x est intégrable sur $]0,1]$. Au voisinage de 0 on a $|g_x(y)| \sim |x| y f(y) = o(f(y))$. D'après le théorème de comparaison des fonctions positives intégrables, g_x est intégrable sur $]0,1]$ puisque f l'est.

• Regardons l'impropreté en $+\infty$. Montrons tout d'abord que h est définie sur $\mathbb{R}_+$. C'est trivial pour $x = 0$. Soit $x > 0$. On a alors pour y tendant vers $+\infty$

$$g_x(y) \sim \frac{e^{xy}}{2} e^{-2xy} f(y) = \frac{e^{-xy}}{2} f(y) = o(f(y)).$$

Le théorème de comparaison des fonctions positives intégrables permet alors de conclure à l'intégrabilité de g_x sur $[1,+\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons en fait que h est définie sur un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$. Si on note D le domaine de définition de h, il suffit de prouver que si $r \in \mathrm{D}$ et $r < s$ alors $s \in \mathrm{D}$. Soit donc $r \in \mathrm{D}$ et $r < s$. C'est vu si $s \geqslant 0$. Supposons donc $s < 0$. On a pour y tendant vers $+\infty$

$$|g_r(y)| \sim \frac{e^{-3ry}}{2} f(y) \text{ et } |g_s(y)| \sim \frac{e^{-3sy}}{2} f(y) = o\left(\frac{e^{-3ry}}{2} f(y)\right) = o(g_r(y))$$

Comme r est dans D, g_r est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et il en va donc de même pour g_s.

Ainsi h est définie sur un intervalle contenant $\mathbb{R}_+$, *i.e.* un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$. De plus l'équivalent précédent montre que

$$\alpha = \inf\{r \in \mathbb{R}, y \longmapsto e^{-3ry} f(y) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*\}$$

$$\text{et } \mathrm{D} = \{r \in \mathbb{R}, y \longmapsto e^{-3ry} f(y) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*\}.$$

• Passons maintenant à l'étude de la continuité. Pour $x \in \mathrm{D}$, les fonctions $y \longmapsto e^{-3xy} f(y)$ et $y \longmapsto e^{-xy} f(y)$ sont intégrables (si $x \in \mathrm{D}$, $x/3 \in \mathrm{D}$). On a donc

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} f(y)\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} e^{-3xy} f(y)\mathrm{d}y\right).$$

Soit $\beta > \alpha$. Alors pour tout $x \geqslant \beta$ et pour tout $y > 0$, on a les dominations suivantes :

$$0 \leqslant e^{-xy} f(y) \leqslant e^{-\beta y} f(y) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant e^{-3xy} f(y) \leqslant e^{-3\beta y} f(y) \qquad (*)$$

avec $y \longmapsto e^{-\beta y} f(y)$ et $y \longmapsto e^{-3\beta y} f(y)$ intégrables. Comme $x \longmapsto e^{-xy} f(y)$ et $x \longmapsto e^{-3xy} f(y)$ sont continues sur $[\beta, +\infty[$, il en va donc de même pour

$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xy} f(y)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-3xy} f(y)\mathrm{d}y$$

et par conséquent h est continue sur $[\beta, +\infty[$ et finalement sur $]\alpha, +\infty[$ puisque la continuité est une propriété locale.

Si $\alpha \in \mathrm{D}$, on remplace dans les dominations $(*)$ le réel β par α et on trouve directement que h est continue sur $[\alpha, +\infty[$.

2. Il s'agit de calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(xy) e^{-2xy} f(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Il ne s'agit là que de fonctions positives. D'après le théorème de Fubini, on peut donc faire une interversion des intégrations. Si on trouve à la fin du calcul l'intégrale d'une fonction intégrable, c'est que l'interversion était bien licite :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(xy)e^{-2xy}f(y)}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}-e^{-3xy}}{2x}\mathrm{d}x\right) f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-0}}{2}\ln\left(\frac{3y}{y}\right) f(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\ln 3}{2}\int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y < +\infty.\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité est un exercice classique que le lecteur trouvera (dans un contexte plus général) dans l'exercice 4.13 du tome analyse 3. L'interversion était bien licite et permet de conclure que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\ln 3}{2}\int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y}. \quad \triangleleft$$

1.39. Un opérateur intégral

Pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on note

$$\mathrm{I}(f) : x \in [0,1] \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\mathrm{I}(f)$ est continue.
2. Établir que pour tout $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\mathrm{I}(\mathrm{I}(f))(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(École normale supérieure, École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Pour $x \neq 0$ dans $[0,1]$, le changement de variables $u = \dfrac{t}{x}$ donne formellement

$$\mathrm{I}(f)(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u.$$

Cette dernière intégrale est bien définie car l'intégrande est continue sur $[0,1[$ et intégrable en vertu du théorème de comparaison des fonctions

positives intégrables puisque lorsque u tend vers 1,

$$\frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\right).$$

Comme le changement de variables $u = \dfrac{t}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ est intégrable sur $[0,1[$ et $\mathrm{I}(f)(x)$ est bien définie.

Pour $x = 0$, on a $\mathrm{I}(f)(0) = 0$ et finalement pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire

$$\mathrm{I}(f)(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} \mathrm{d}u,$$

si bien que pour établir la continuité de $\mathrm{I}(f)$, il suffit d'établir celle de

$$x \longmapsto \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} \mathrm{d}u.$$

La fonction : $\mathrm{F}(x,u) \in [0,1] \times [0,1[\longmapsto \dfrac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$ est continue et pour tout $(x,u) \in [0,1] \times [0,1[$, on a

$$|\mathrm{F}(x,u)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-u}},$$

puisque la fonction f est continue, donc bornée sur le compact $[0,1]$. Cette domination par une fonction intégrable nous assure de la continuité de $x \longmapsto \int_0^1 \mathrm{F}(x,u)\mathrm{d}u$ et donc de $\mathrm{I}(f)$.

2. Comme $\mathrm{I}(f)$ est continue, $\mathrm{I}(\mathrm{I}(f))$ a un sens. Soit $x \in]0,1]$. Réalisons un calcul formel que nous justifierons ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\mathrm{I}(f))(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\mathrm{I}(f)(t)}{\sqrt{x-t}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \iint_{\substack{(t,u)\in\mathbb{R}^2 \\ 0\leqslant u<t<x}} \frac{f(u)}{\sqrt{(t-u)(x-t)}} \mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x f(u) \left(\int_u^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-u)(x-t)}} \right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Calculons $\lambda = \displaystyle\int_u^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-u)(x-t)}}$. Vue la symétrie du radicande on se ramène à une intégrale sur $]-1,1[$ en posant $y = \dfrac{2}{x-u}\left(t - \dfrac{u+x}{2}\right)$ qui

est un changement de variables de classe C^1 et strictement monotone :

$$\lambda = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(\frac{x-u}{2}(y+1)\frac{x-u}{2}(1-y)}} \frac{x-u}{2} \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

La fonction positive $y \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ est bien intégrable puisque une primitive en est arcsin qui possède des limites en 1 et -1. Ainsi, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t-u)(x-t)}}$ est intégrable sur $]u,x[$ et $\lambda = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$. Le calcul formel donne donc au final ce que l'on visait : $\mathrm{I}(\mathrm{I}(f))(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. Reste à le justifier. Pour cela, il suffit que la fonction $\mathrm{G} : (t,u) \in \Delta \longmapsto \dfrac{f(u)}{\sqrt{(t-u)(x-t)}}$ soit intégrable sur le domaine $\Delta = \{(t,u) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant u < t < x\}$. Ce domaine est un triangle, la fonction y est continue. Pour vérifier qu'elle est intégrable, en vertu du théorème de comparaison des fonctions positives intégrables, il suffit de montrer que la fonction $\mathrm{H} : (t,u) \in \Delta \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t-u)(x-t)}}$ est intégrable puisque $|\mathrm{G}| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{H}$. La fonction H est continue positive. À u fixé, $t \longmapsto \mathrm{H}(t,u)$ est intégrable sur $]u,x[$ d'après ce qui précède et comme $t \longmapsto \int_u^x \mathrm{H}(t,u)\mathrm{d}t$ correspond à la fonction constante π qui est intégrable sur $[0,x[$, le théorème de Fubini (pour les fonctions positives) nous assure de l'intégrabilité de H. Ainsi , G est intégrable. C'est encore le théorème de Fubini (mais pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes cette fois-ci) qui rend légitime le calcul formel. On conclut que

$$\boxed{\mathrm{I}(\mathrm{I}(f))(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t}. \quad \triangleleft$$

1.40. Comparaison à une intégrale double

Soit $\mathrm{S}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{n/2 \leqslant m \leqslant 2n} x^n y^m$.

1. Montrer que S existe pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$.
2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ 0<x,y<1}} \mathrm{S}(x,y)(1-x^2y)(1-xy^2)$.

(École polytechnique)

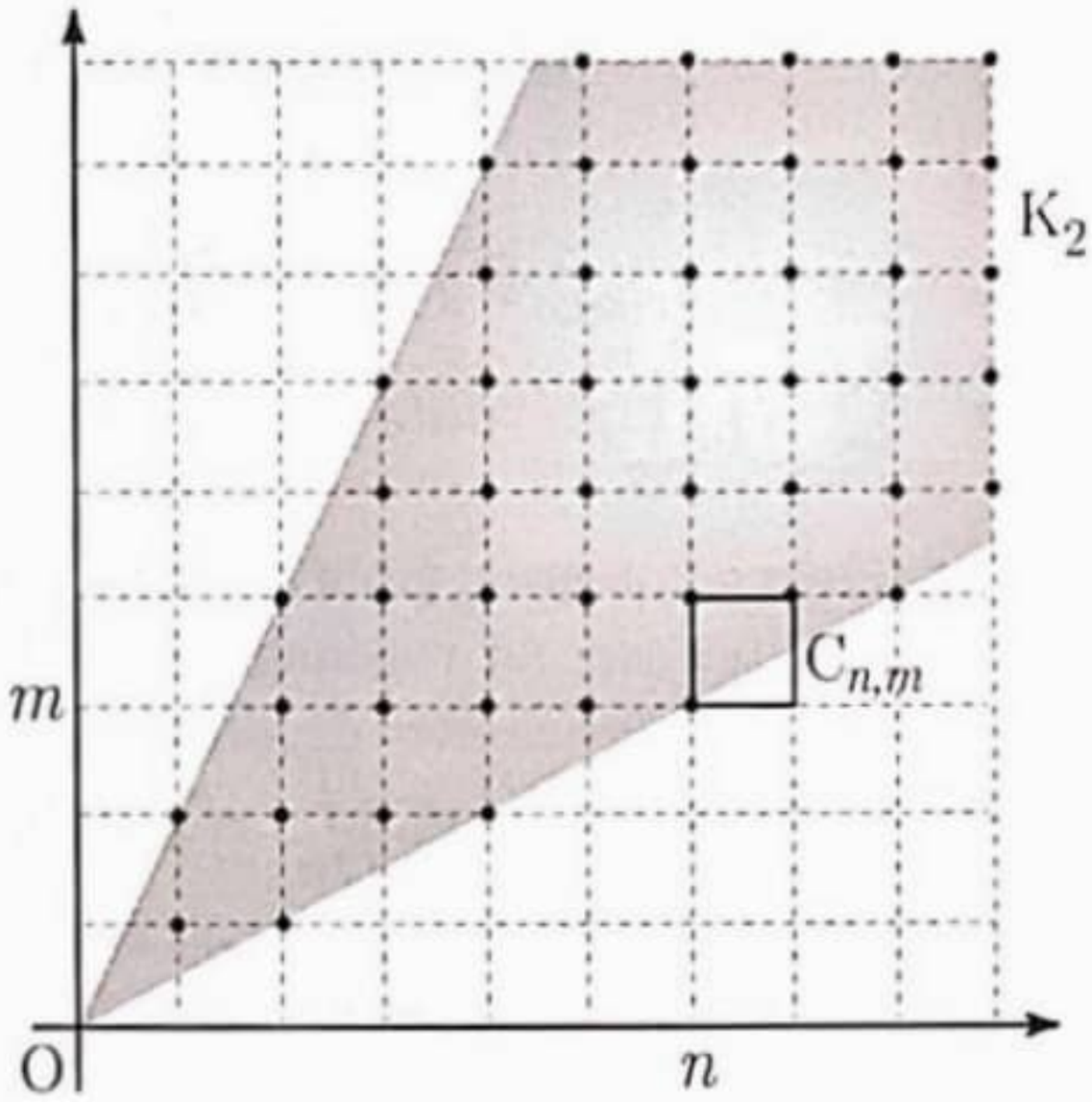
▷ **Solution.**

1. Soit $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On va montrer que la série définissant $\mathrm{S}(x,y)$ converge absolument. Pour cela il suffit de noter que

$$\left|\sum_{n/2\leqslant m\leqslant 2n} x^n y^m\right| \leqslant \sum_{n/2\leqslant m\leqslant 2n} |x|^n |y|^m \leqslant \frac{|x|^n}{1-|y|}$$

et d'invoquer le théorème de comparaison avec la série géométrique convergente $\sum |x|^n$.

2. On va mettre en place une comparaison série-intégrale. Donnons-nous pour commencer quelques notations : soit $\mathrm{I} = \left\{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \frac{n}{2} \leqslant m \leqslant 2n\right\}$, $\mathrm{C}_{n,m}$ le carré $[n, n+1] \times [m, m+1]$ et pour $\alpha > 1$, $\mathrm{K}_\alpha = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \frac{x}{\alpha} \leqslant y \leqslant \alpha x\right\}$.



La zone grisée sur la figure représente K_2 et les points entiers de ce secteur angulaire sont les éléments de I.

Soit $(x,y) \in]0,1[^2$ et $(m,n) \in \mathrm{I}$. Pour $(t,u) \in \mathrm{C}_{n,m}$, on a $x^n y^m \geqslant x^t y^u$. En intégrant sur le carré de $\mathrm{C}_{n,m}$ d'aire 1, on obtient $x^n y^m \geqslant \iint_{\mathrm{C}_{n,m}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$. De même, pour $(t,u) \in \mathrm{C}_{n-1,m-1}$, on a $x^n y^m \leqslant x^t y^u$ et finalement,

$$\iint_{\mathrm{C}_{n,m}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u \leqslant x^n y^m \leqslant \iint_{\mathrm{C}_{n-1,m-1}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$

La fonction $f : (t,u) \longmapsto x^t y^u$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$ puisque à t fixé, $u \longmapsto x^t y^u$ est intégrable et $t \longmapsto \int_0^{+\infty} x^t y^u \mathrm{d}u = \frac{x^t}{-\ln y}$ est intégrable. Notons que $\iint_{\mathbb{R}_+^2} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u = \frac{1}{\ln x \ln y}$. Il s'ensuit que $\sum_{(n,m)\in \mathrm{I}} \iint_{\mathrm{C}_{n,m}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$ est sommable (chaque sous-somme finie est majorée par l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^2$). On en déduit l'encadrement

$$\sum_{(n,m)\in I}\iint_{C_{m,n}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u \leqslant S(x,y) \leqslant \sum_{(n,m)\in I}\iint_{C_{m-1,n-1}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$

Ces deux sommes d'intégrales sont à rapprocher de $\iint_{K_2} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$. Malheureusement, il n'y pas d'inclusion entre la réunion des carrés et le secteur K_2. On va donc prendre un secteur strictement plus grand que K_2 et un autre strictement plus petit. Prenons $1 < \alpha < 2 < \beta$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$K_\alpha \cap \{(x,y), x \geqslant n_0\} \subset \bigcup_{\substack{(n,m)\in I\\ n\geqslant n_0}} C_{n,m}$$

et

$$\bigcup_{\substack{(n,m)\in I\\ n\geqslant n_0}} C_{n-1,m-1} \subset K_\beta \cap \{(x,y), x \geqslant n_0\}.$$

Les quantités positives $\iint_{\substack{(x,y)\in K_\alpha\\ x<n_0}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$, $\iint_{\substack{(x,y)\in K_\beta\\ x<n_0}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$ sont majorées par βn_0^2 et $\sum_{\substack{(n,m)\in I\\ n<n_0}}\iint_{C_{m,n}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$ et $\sum_{\substack{(n,m)\in I\\ n<n_0}}\iint_{C_{m-1,n-1}} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$ sont majorées par $2n_0^2$ (chaque intégrale étant majorée par 1). En notant $O(1)$ les fonctions en (x,y) bornées au voisinage de $(1,1)$, on a

$$\iint_{K_\alpha} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u + O(1) \leqslant S(x,y) \leqslant \iint_{K_\beta} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u + O(1).$$

Comme $x^\alpha \geqslant x^2 \geqslant x^\beta$ et $y^\alpha \geqslant y^2 \geqslant y^\beta$, on a

$$(1-x^\alpha y)(1-xy^\alpha) \leqslant (1-x^2y)(1-xy^2) \leqslant (1-x^\beta y)(1-xy^\beta)$$

et comme ces fonctions en (x,y) tendent vers 0 en $(1,1)$, il vient

$$(1-x^\alpha y)(1-xy^\alpha)\iint_{K_\alpha} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u + o(1) \leqslant (1-x^2y)(1-xy^2)S(x,y) \text{ et}$$

$$(1-x^2y)(1-xy^2)S(x,y) \leqslant (1-x^\beta y)(1-xy^\beta)\iint_{K_\beta} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u + o(1).$$

Calculons $\iint_{K_\alpha} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\iint_{K_\alpha} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{t/\alpha}^{\alpha t} x^t y^u \mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x^t\left(\int_{t/\alpha}^{\alpha t} y^u \mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} x^t \frac{y^{\alpha t} - y^{t/\alpha}}{\ln y}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\ln y}\int_0^{+\infty}\left((xy^\alpha)^t - (x^\alpha y)^{t/\alpha}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\ln y \ln(xy^\alpha)} + \frac{\alpha}{\ln y \ln(x^\alpha y)} = \frac{\ln y^{\alpha^2-1}}{\ln y \ln xy^\alpha \ln x^\alpha y}$$
$$= \frac{\alpha^2 - 1}{\ln xy^\alpha \ln x^\alpha y}.$$

Comme $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{1-u}{\ln u} = -1$, on en déduit

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\0<x,y<1}} (1-x^\alpha y)(1-xy^\alpha) \iint_{K_\alpha} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u = \alpha^2 - 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité en 2 de $u \longmapsto u^2 - 1$, on peut choisir α et β suffisant proche de 2 pour que $3 - \varepsilon < \alpha^2 - 1$ et $\beta^2 - 1 < 3 + \varepsilon$ (avec toujours $1 < \alpha < 2 < \beta$). D'après ce qui précède, pour (x, y) suffisamment proche de $(1, 1)$, on a

$$3 - \varepsilon \leqslant (1-x^\alpha y)(1-xy^\alpha) \iint_{K_\alpha} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u + o(1) \text{ et}$$

$$(1-x^\beta y)(1-xy^\beta) \iint_{K_\beta} x^t y^u \mathrm{d}t\mathrm{d}u + o(1) \leqslant 3 + \varepsilon.$$

On en déduit que pour (x, y) suffisamment proche de $(1, 1)$,

$$3 - \varepsilon \leqslant (1-x^2y)(1-xy^2)\mathrm{S}(x,y) \leqslant 3 + \varepsilon.$$

On conclut $\boxed{\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\0<x,y<1}} \mathrm{S}(x,y)(1-x^2y)(1-xy^2) = 3}$. ◁

Le dernier exercice, pas très difficile, concerne une intégrale multiple sur $\mathbb{R}^n$.

1.41. Une intégrale multiple

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-{}^t\mathrm{XAX}} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$.

2. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x_1u_1+\cdots+x_nu_n\|^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La fonction intégrée est positive et continue. Si par un procédé de calcul (théorème de Fubini, changement de variables) il apparaît que l'intégrale a une valeur finie, la fonction est intégrable et le calcul est validé.

Si A est diagonale, $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, les λ_i sont strictement positifs et le théorème de Fubini donne

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i x_i^2} \mathrm{d}x_i.$$

En effectuant le changement de variables $y_i = \sqrt{\lambda_i} x_i$ qui est bien C^1 et strictement monotone, on obtient

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} \mathrm{d}y_i = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \mathrm{A}}},$$

compte tenu de la valeur classique de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ (voir exercice 4.29 du tome analyse 3 pour un calcul de cette intégrale dont la valeur a été donnée au candidat lors de l'oral). Ce calcul justifie que la fonction $\mathrm{X} \longmapsto e^{-{}^t\mathrm{XAX}}$ est bien intégrable.

Dans le cas général, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{PAP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ où $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les λ_i strictement positifs. L'application $\mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X} = \mathrm{PY}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, de jacobien $\det \mathrm{P} = \pm 1$. En effectuant ce changement de variables dans l'intégrale, il vient

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-{}^t(\mathrm{PY})\mathrm{APY}} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-{}^t\mathrm{YDY}} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n,$$

avec $\mathrm{Y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$. D'après le cas d'une matrice diagonale, les fonctions sont bien intégrables et comme $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{D}$, on obtient

$$\mathrm{I} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \mathrm{A}}}.$$

2. Pour $\mathrm{X} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \langle u_i, u_j \rangle = {}^t\mathrm{XAX}$$

avec $\mathrm{A} = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui est la matrice de Gram de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$. Si P désigne la matrice de colonnes $u_1, \ldots, u_n$, il apparait que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PP}$ et donc $\det \mathrm{A} = \det(u_1, \ldots u_n)^2$. On en déduit avec la première question que l'intégrale vaut $\dfrac{\pi^{n/2}}{|\det(u_1, \ldots, u_n)|}$. ◁

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires

Nous commençons cette longue série d'exercices sur les équations différentielles linéaires par quelques résolutions explicites d'équations scalaires du premier ordre. Les quatre premiers exercices concernent tous des équations singulières c'est-à-dire de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où la fonction a s'annule (les zéros de a étant appelés points singuliers). La théorie générale ne s'applique pas sur tout l'intervalle d'étude et diverses situations sont possibles comme on pourra le constater sur ces exemples.

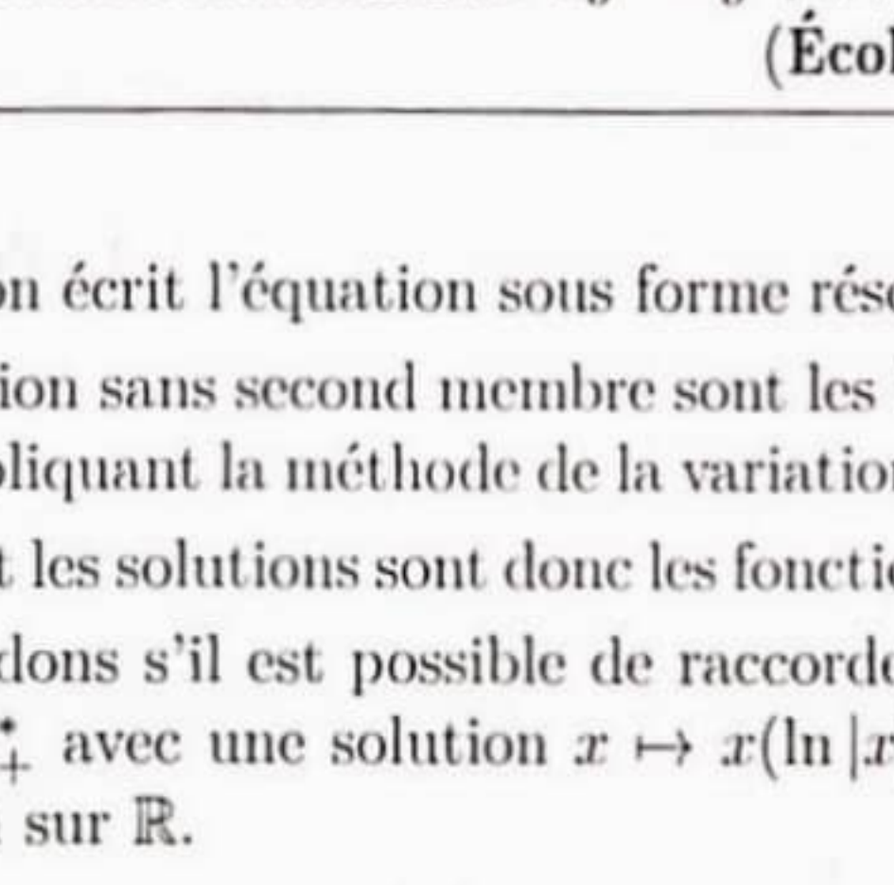
2.1. Étude d'une équation linéaire singulière (1)

Résoudre l'équation différentielle $xy' = y + x$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ on écrit l'équation sous forme résolue $y' = \dfrac{y}{x} + 1$. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $y(x) = \mathrm{C}x$ pour $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. En appliquant la méthode de la variation de la constante, on trouve $\mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{x}$ et les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto x(\ln|x| + \mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Regardons s'il est possible de raccorder une solution $x \mapsto x(\ln|x| + \mathrm{A})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une solution $x \mapsto x(\ln|x| + \mathrm{B})$ sur $\mathbb{R}_-^*$ pour former une solution sur $\mathbb{R}$.



Les deux fonctions se prolongent bien par continuité en 0 avec la valeur 0

mais le prolongement obtenu n'est pas dérivable en 0. L'équation n'a donc pas de solution définie sur $\mathbb{R}$. ◁

Si on prend l'équation $xy' = 2y$ on obtient pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ les fonctions $x \mapsto Ax^2$ avec $A \in \mathbb{R}$. Dans ce cas toute solution $x \mapsto Ax^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$ se raccorde de manière dérivable en 0 avec toute solution $x \mapsto Bx^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on obtient un espace vectoriel de solutions sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. Ces deux exemples montre bien que le théorème de Cauchy linéaire ne se généralise pas en présence d'un point singulier.

Dans les trois cas suivants on utilisera les séries entières pour obtenir des solutions particulières.

2.2. Étude d'une équation linéaire singulière (2)

Soit (E) l'équation différentielle $(2x - x^2)y' + (x-1)y - 1 = 0$.

1. Trouver une solution de (E) développable en série entière.

2. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$. et étudier les limites de ces solutions aux bornes de leur intervalle de définition.

3. Quelles sont les solutions de (E) sur $]-\infty, 2[$? sur $]0, +\infty[$? sur $\mathbb{R}$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Supposons qu'il existe une solution $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de (E) développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 0$. L'équation (E) donne alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1 = 0$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \big(2na_n - (n-2)a_{n-1} - a_n\big)x^n + (2a_1 + a_0 - a_1)x - a_0 - 1 = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, $a_0 = -1$, $a_1 = -a_0 = 1$ et pour $n \geqslant 2$, $(2n-1)a_n = (n-2)a_{n-1}$. D'où $a_2 = 0$ et par une récurrence immédiate, $a_n = 0$ pour $n \geqslant 2$. Réciproquement, la fonction polynôme $x \longmapsto x - 1$ est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

2. Soit I l'un des trois intervalles $]-\infty,0[$, $]0,2[$ ou $]2,+\infty[$. Résolvons (E) sur I. L'équation homogène associée à (E) s'écrit $y' = \dfrac{x-1}{x^2-2x}y$, et admet pour solutions les fonctions

$$x \longmapsto C\exp\int \frac{x-1}{x^2-2x}\mathrm{d}x = C\exp\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|\right) = C\sqrt{|x(x-2)|}$$

où C est une constante arbitraire. Les solutions de (E) sur I sont les fonctions du type $x \longmapsto C\sqrt{|x(x-2)|}+x-1$ où C est arbitraire dans $\mathbb{R}$.

Étudions les limites aux bornes de I d'une telle solution.

- Si $I =]-\infty,0[$, pour x tendant vers $-\infty$, on a

$$\begin{aligned} y(x) &= C|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1 = -Cx\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+x-1 \\ &= (1-C)x+C-1+o(1). \end{aligned}$$

Il y a une limite finie en $-\infty$ seulement lorsque $C = 1$, et dans ce cas la limite est nulle. D'autre part, on a clairement, $\lim\limits_{0^-} y = -1$.

- Si $I =]0,2[$, $\lim\limits_{0^+} y = -1$ et $\lim\limits_{2^-} y = 1$.
- Si $I =]2,+\infty[$, $\lim\limits_{2^+} y = 1$ et pour x tendant vers $+\infty$,

$$y(x) = Cx\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1 = (C+1)x-(C+1)+o(1).$$

Il y a une limite finie si et seulement si $C = -1$.

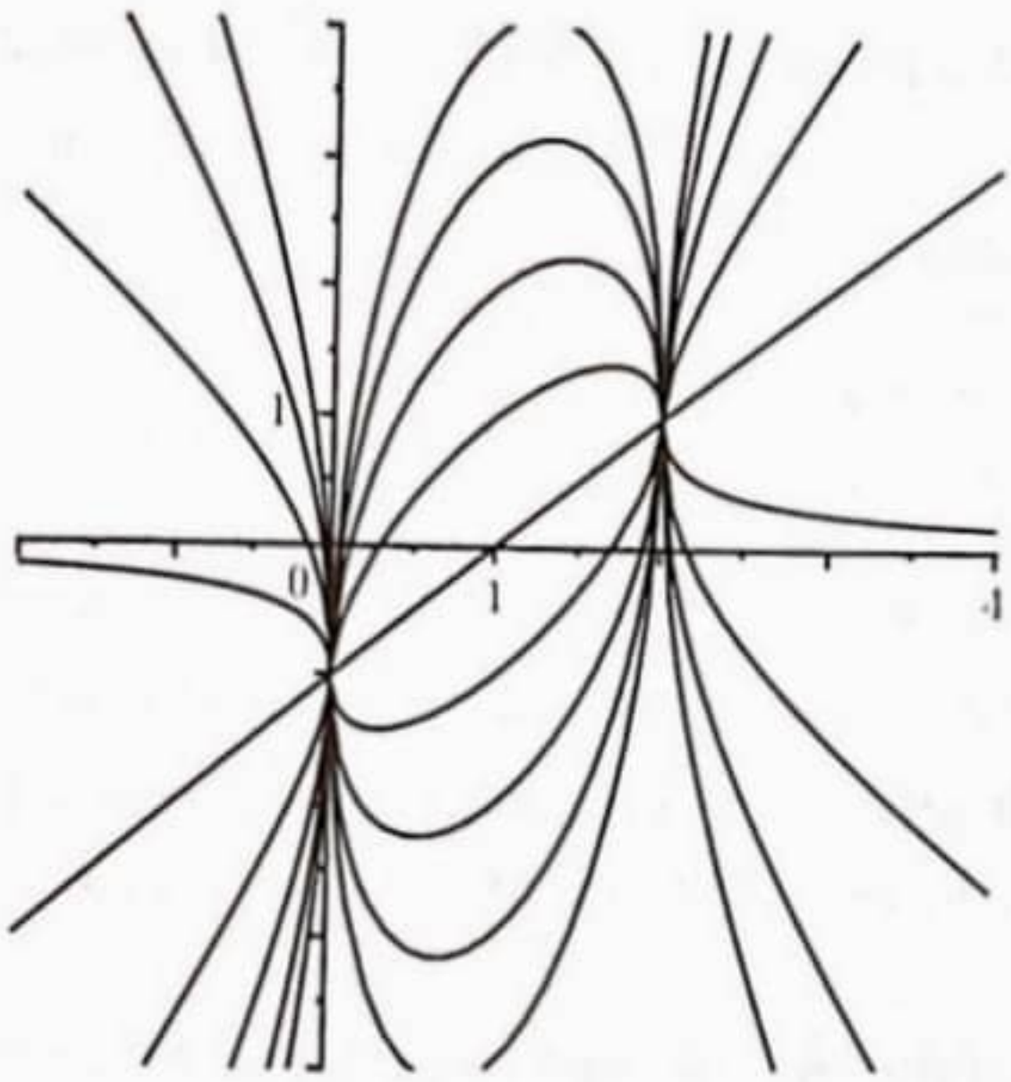
3. Prenons une solution y sur $]-\infty,2[$. Il existe alors d'après la question précédente C et D dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$y(x) = \begin{cases} C\sqrt{x(x-2)}+x-1 \text{ si } x<0 \\ D\sqrt{x(2-x)}+x-1 \text{ si } 0<x<2. \end{cases}$$

Comme y est continue on a $y(0) = -1$. Pour $x < 0$,

$$\left|\frac{y(x)+1}{x}\right| = \left|C\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{-x}}+1\right| \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty \quad \text{si } C \neq 0$$

Comme y est dérivable en 0 on a nécessairement $C = 0$. De même, en étudiant la fonction y en 0^+ on montre que $D = 0$. La fonction $x \longmapsto x-1$ est la seule solution de (E) sur $]-\infty,2[$. Le lecteur montrera de même que c'est la seule solution sur $]0,+\infty[$ et donc aussi la seule solution sur $\mathbb{R}$. La figure suivante des courbes intégrales synthétise tous ces résultats. ◁



2.3. Étude d'une équation linéaire singulière (3)

Soit $\lambda > 0$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$.

2. Existe-t-il des solutions de (E) dont la limite en 0 est finie ?

3. Trouver les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation homogène associée à (E) s'écrit $y' = -\dfrac{\lambda}{x} y$ et a pour solution $y(x) = Ce^{-\lambda \ln x} = Cx^{-\lambda}$ où $C \in \mathbb{R}$. On pose, pour résoudre l'équation avec second membre, $y(x) = C(x)x^{-\lambda}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient $xC'(x)x^{-\lambda} = \dfrac{1}{1+x}$ et donc $C'(x) = \dfrac{x^{\lambda-1}}{1+x}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\lambda-1}}{1+x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et équivalente à $\dfrac{1}{x^{1-\lambda}}$ en 0. Comme $1-\lambda < 1$, elle est intégrable au voisinage de 0 et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $C(x) = A + \displaystyle\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt$. On a alors, pour tout $x > 0$,

$$y(x) = x^{-\lambda}\left(A + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt\right).$$

2. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^{-\lambda} = +\infty$, il faut nécessairement, pour que y ait une limite finie en 0, que le terme entre parenthèse ait une limite nulle,

ce qui nécessite $A = 0$. Plaçons-nous dans ce cas et faisons le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$ dans l'intégrale. On obtient, pour tout $x > 0$,

$$y(x) = x^{-\lambda} \int_0^1 \frac{(xu)^{\lambda-1}}{1+xu}\, x\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu}\, \mathrm{d}u.$$

La fonction $(x,u) \longmapsto \dfrac{u^{\lambda-1}}{1+xu}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times]0,1]$, intégrable sur $]0,1]$ par rapport à u, pour tout $x \geqslant 0$. De plus, on a une relation de domination : pour $(x,u) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1[$, on a $\dfrac{u^{\lambda-1}}{1+xu} \leqslant u^{\lambda-1}$ et la fonction $u \longmapsto u^{\lambda-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. On en déduit que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu}\, \mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. On obtient

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \int_0^1 u^{\lambda-1}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\cdot$$

L'équation (E) possède une unique solution ayant une limite finie en 0.

3. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On a, pour $|x| < R$,

$$xf'(x) + \lambda f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\lambda) a_n x^n.$$

Comme $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ si $|x| < 1$, f est solution de l'équation différentielle si et seulement si $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\lambda+n}\cdot$ On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de la série est 1. Ainsi l'équation différentielle possède une unique solution développable en série entière au voisinage de 0, définie par,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda+n} x^n.$$

4. La solution développable en série entière est continue en 0. Elle coïncide donc sur $]0,1[$, avec la solution trouvée dans la question 2. On a donc, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda+n} x^n = \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu}\, \mathrm{d}u.$$

On prend $\lambda = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{8}$. On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{1}{3}+n}\frac{1}{8^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)} = \int_0^1 \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{1+\frac{u}{8}}\,\mathrm{d}u = 8\int_0^1 \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{8+u}\,\mathrm{d}u.$$

La somme cherchée vaut donc $\mathrm{S} = \frac{8}{3}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{8+u}\,\mathrm{d}u$. En faisant dans l'intégrale le changement de variable $v = u^{\frac{1}{3}}$, on obtient

$$\mathrm{S} = \frac{8}{3}\int_0^1 \frac{v^{-2}}{8+v^3}\cdot 3v^2\mathrm{d}v = 8\int_0^1 \frac{1}{8+v^3}\mathrm{d}v.$$

En décomposant en éléments simples, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{8+v^3} &= \frac{1}{(2+v)(4-2v+v^2)} = \frac{1}{12(2+v)} + \frac{-v+4}{12(4-2v+v^2)}\\ &= \frac{1}{12(2+v)} + \frac{-2v+2}{24(4-2v+v^2)} + \frac{1}{4((v-1)^2+3)}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= 8\left[\frac{1}{12}\ln(2+v) - \frac{1}{24}\ln(4-2v+v^2) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{v-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\ln\frac{3}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

et finalement $\boxed{\mathrm{S} = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$. ◁

On notera que l'identité obtenue au début de la question 4 peut aussi s'obtenir directement sans passer par les équations différentielles en écrivant $\frac{1}{1+xu} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(xu)^n$ *puis en utilisant le théorème d'intégration terme à terme.*

2.4. Étude d'une équation linéaire singulière (4)

Soit (E) l'équation différentielle $(4-t^2)y' - (4+t)y = 2+t$.

1. Résoudre (E) sur $]-2,2[$.

2. Quelles sont les solutions qui en 2 admettent une limite finie?

3. Chercher les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Sur $]-2,2[$, l'équation homogène associée à (E) s'écrit

$$y' = \frac{4+t}{4-t^2}y = \left(\frac{1}{2(2+t)} + \frac{3}{2(2-t)}\right)y$$

et sa solution générale est

$$y(t) = \mathrm{C}\exp\left(\frac{1}{2}\ln(2+t) - \frac{3}{2}\ln(2-t)\right) = \mathrm{C}\sqrt{\frac{2+t}{(2-t)^3}}$$

avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation avec second membre, on applique la méthode de la variation de la constante. On trouve

$$\mathrm{C}'(t)(4-t^2)\sqrt{\frac{2+t}{(2-t)^3}} = 2+t \text{ et donc } \mathrm{C}'(t) = \sqrt{\frac{2-t}{2+t}}.$$

On obtient $\mathrm{C}(t) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{2-t}{2+t}}\,\mathrm{d}t$. Pour calculer cette primitive on fait le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{2-t}{2+t}}$. On a $t = \dfrac{2(1-u^2)}{u^2+1}$ ce qui donne $\mathrm{d}t = \dfrac{-8u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$ et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(t) &= \int \frac{-8u^2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{4u}{u^2+1} - \int \frac{4}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{4u}{u^2+1} - 4\arctan u + c = \sqrt{4-t^2} - 4\arctan\sqrt{\frac{2-t}{2+t}} + c,\end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions sont définies pour $t \in]-2,2[$ par

$$y(t) = \mathrm{C}(t)\sqrt{\frac{2+t}{(2-t)^3}} = \frac{2+t}{2-t} + \sqrt{\frac{2+t}{(2-t)^3}}\left(-4\arctan\sqrt{\frac{2-t}{2+t}} + c\right).$$

2. On a $(2-t)y(t) = 2+t+\sqrt{\dfrac{2+t}{2-t}}\left(-4\arctan\sqrt{\dfrac{2-t}{2+t}} + c\right)$ et pour que $y(t)$ puisse avoir une limite finie en 2, il faut que la parenthèse tende vers 0, ce qui impose $c = 0$. On a alors

$$y(t) = \frac{2+t}{2-t} - 4\sqrt{\frac{2+t}{(2-t)^3}}\arctan\sqrt{\frac{2-t}{2+t}}.$$

En posant $u = \sqrt{\dfrac{2-t}{2+t}}$, on obtient

$$\sqrt[4]{\frac{2+t}{(2-t)^3}}\arctan\sqrt{\frac{2-t}{2+t}} = \frac{4}{u(2-t)}\arctan u = \frac{4}{(2-t)}\left(1-\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)$$
$$= \frac{4}{2-t} - \frac{4}{3(2+t)} + o(1)$$

et donc

$$y(t) = \frac{4}{2-t} - 1 - \frac{4}{2-t} + \frac{4}{3(2+t)} + o(1) = -1 + \frac{4}{3(2+t)} + o(1).$$

On en déduit que $\lim_{t\to 2} y(t) = -\frac{2}{3}$. L'équation possède exactement une solution sur $]-2,2[$ ayant une limite finie en 2.

3. Posons $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et supposons que cette série entière a un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On a alors

$$(4-t^2)y'(t) - (4+t)y(t)$$
$$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$$
$$= 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)t^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} n t^n$$

et y est solution de l'équation (E) si et seulement si $4a_1 - 4a_0 = 2$, $8a_2 - 4a_1 - a_0 = 1$ et $4(n+1)a_{n+1} - 4a_n - na_{n-1} = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. On peut choisir a_0 arbitrairement et il faut ensuite avoir

$$a_1 = a_0 + \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{5}{8}a_0 + \frac{3}{8} \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = \frac{na_{n-1} + 4a_n}{4(n+1)}.$$

Pour a_0 donné, cela définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ unique. Montrons que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif. Pour cela, on pose $\mathrm{K} = \max(|a_0|, |a_1|, |a_2|)$ et on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leqslant \mathrm{K}$. En effet, c'est vrai pour $n \leqslant 2$ et si c'est vrai jusqu'au rang $n \geqslant 2$, on a $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{n|a_{n-1}| + 4|a_n|}{4(n+1)} \leqslant \dfrac{(n+4)\mathrm{K}}{4(n+1)} \leqslant \mathrm{K}$.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est $\geqslant \dfrac{1}{\mathrm{K}}$. La somme de la série entière est solution de l'équation différentielle par construction. On a donc une droite affine de solutions développables en série entière au voisinage de 0, autrement dit, toutes les solutions de (E) sur $]-2,2[$ sont développables en série entière au voisinage de 0. ◁

Les exemples suivants concernent des équations linéaires scalaires d'ordre 2. Le premier est facile et permet de réviser l'importante méthode de variation des constantes.

2.5. Équations du second ordre avec second membre

1. Résoudre sur $]0,\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 2\tan x$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On utilise la méthode de la variation des constantes en cherchant y sous la forme $y = \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$, où A et B sont des fonctions dérivables sur $]0,\pi[$ vérifiant $\mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0$. On trouve alors $y'' + y = -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}$, puis $\mathrm{A}'(x) = -1$ et $\mathrm{B}'(x) = \operatorname{cotan} x$. On en déduit qu'il existe des constantes a et b telles que, pour tout $x \in]0,\pi[$, $\mathrm{A}(x) = -x + a$, $\mathrm{B}(x) = \ln(\sin x) + b$ et donc

$$y(x) = -x\cos x + \sin x \ln(\sin x) + a\cos x + b\sin x.$$

2. On se place sur un intervalle I, où le cosinus ne s'annule pas. On utilise encore la méthode de la variation des constantes. On pose $y = \mathrm{A}\cos + \mathrm{B}\sin$, où A et B sont des fonctions dérivables sur I vérifiant $\mathrm{A}'\cos + \mathrm{B}'\sin = 0$. On trouve alors $y'' + y = -\mathrm{A}'\sin + \mathrm{B}'\cos = 2\tan$. puis

$$\mathrm{A}' = -\frac{2\sin^2}{\cos} = -\frac{2}{\cos} + 2\cos \quad \text{et} \quad \mathrm{B}' = 2\sin.$$

On en déduit qu'il existe des constantes a et b telles que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{A}(x) = -2\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + 2\sin x + a$, $\mathrm{B}(x) = -2\cos x + b$ soit

$$y(x) = -2\cos x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + a\cos x + b\sin x. \quad \triangleleft$$

L'exercice suivant est très classique. Plutôt que de chercher une solution particulière en travaillant sur les intervalles $[k\pi,(k+1)\pi]$ et en recollant les morceaux, il est plus agréable d'utiliser le développement en série de Fourier du second membre pour trouver une solution particulière périodique.

2.6. Utilisation d'un développement en série de Fourier

Résoudre $y'' + y = |\sin x|$ en utilisant le développement en série de Fourier de $x \mapsto |\sin x|$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est π-périodique, paire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier et celle-ci converge normalement. On calcule les coefficients de Fourier trigonométriques. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\cos(2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

On a en particulier $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$. On obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

On va chercher une solution particulière f de l'équation différentielle 2π-périodique. Nous savons que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique alors $a_n(f'') = -n^2 a_n(f)$ et $b_n(f'') = -n^2 b_n(f)$ pour tout n. On doit donc avoir $(1-n^2)b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-n^2)a_n(f) = 0$ pour n impair et $(1-4n^2)a_{2n}(f) = -\dfrac{4}{\pi(4n^2-1)}$ pour n pair. Les coefficients $a_1(f)$ et $b_1(f)$ peuvent être choisis quelconques, ce qui est normal puisque sin et cos forment une base de l'espace des solutions de l'équation homogène associée. Prenons-les nuls et posons

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}.$$

La série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De même la série dérivée $\sum \dfrac{-8n\sin(2nx)}{\pi(4n^2-1)^2}$ et la série dérivée seconde $\sum \dfrac{-16n^2\cos(2nx)}{\pi(4n^2-1)^2}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) + f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = |\sin x|.$$

La fonction f est bien solution de l'équation différentielle et une fonction y est solution de l'équation différentielle s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = a\cos x + b\sin x + f(x)$. ◁

Les séries de Fourier interviennent aussi dans l'exercice suivant.

2.7. Une équation aux dérivées partielles

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Quelles sont les fonctions f définies sur $]0,\pi[$ de classe $\mathcal{C}^2$, telles que

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\ \sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta))\right) = n^2 f(\theta)\ ?$$

2. Soit $g : \mathbb{R}\times]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, bornée et telle que pour $\theta \in]0,\pi[$ et $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(g(\varphi,\theta)) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(g(\varphi,\theta))\right) = 0.$$

Montrer que si pour tout θ la fonction $g(.,\theta)$ est de période 2π, alors g est constante.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. L'équation vérifiée par f s'écrit aussi

$$\sin\theta\Big(\cos\theta f'(\theta) + \sin\theta f''(\theta)\Big) = n^2 f(\theta)$$

et sur $]0,\pi[$, elle se met sous la forme résolue

$$f'' + \cot\theta f' - \frac{n^2}{\sin^2\theta} f = 0.$$

L'ensemble des solutions sur $]0,\pi[$ de cette équation différentielle est donc un espace vectoriel de dimension deux.

Pour la recherche des solutions on utilise la forme initiale que l'on multiplie par $f'(\theta)$. On obtient, pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$f'(\theta)\sin\theta\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(f'(\theta)\sin\theta\Big) = n^2 f(\theta) f'(\theta).$$

La fonction $g : \theta \longmapsto f'(\theta)\sin\theta$ vérifie donc $gg' = n^2 f f'$. Il existe une constante $\mathrm{K} > 0$ telle que $g^2 = n^2 f^2 + \mathrm{K}$. On obtient donc, pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\sin^2\theta f'^2(\theta) = n^2 f(\theta)^2 + \mathrm{K}.$$

Plaçons-nous sur un intervalle I inclus dans $]0,\pi[$ où f' garde un signe constant. Il existe alors $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$\frac{f'(\theta)}{\sqrt{n^2 f(\theta)^2 + \mathrm{K}}} = \frac{\varepsilon}{\sin\theta}.$$

Une primitive de $\theta \longmapsto \dfrac{1}{\sin\theta}$ sur $]0,\pi[$ est $\theta \longmapsto \ln\tan\dfrac{\theta}{2}$.

• Si $n = 0$, il existe une constante C telle que, pour tout $\theta \in \mathrm{I}$,

$$f(\theta) = \varepsilon\sqrt{\mathrm{K}}\ln\tan\frac{\theta}{2} + \mathrm{C}.$$

Réciproquement, on vérifie que pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$\theta \longmapsto \mathrm{A}\ln\tan\frac{\theta}{2} + \mathrm{B}$$

est définie, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\pi[$, et est solution de l'équation différentielle. Les solutions de l'équation différentielle formant un espace vectoriel de dimension 2, on obtient ainsi toutes les solutions.

• Traitons maintenant le cas $n \neq 0$. Une primitive de la fonction $y \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n^2y^2+\mathrm{K}}}$ sur $\mathbb{R}$ est $y \longmapsto \dfrac{1}{n}\ln\left(ny+\sqrt{n^2y^2+\mathrm{K}}\right)$. On en déduit qu'il existe un réel C tel que, pour tout $\theta \in \mathrm{I}$,

$$\frac{1}{n}\ln\left(nf(\theta)+\sqrt{n^2f(\theta)^2+\mathrm{K}}\right) = \varepsilon\ln\tan\frac{\theta}{2} + \mathrm{C}.$$

Ceci peut encore s'écrire, pour tout $\theta \in \mathrm{I}$,

$$nf(\theta)+\sqrt{n^2f(\theta)^2+\mathrm{K}} = e^{\mathrm{C}n}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\varepsilon n}.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} n^2f(\theta)^2+\mathrm{K} &= \left(e^{\mathrm{C}n}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\varepsilon n} - nf(\theta)\right)^2 \\ &= e^{2\mathrm{C}n}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{2\varepsilon n} - 2ne^{\mathrm{C}n}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\varepsilon n} f(\theta) + n^2f(\theta)^2, \end{aligned}$$

puis

$$f(\theta) = \frac{-\mathrm{K}}{2ne^{\mathrm{C}n}}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{-\varepsilon n} + \frac{e^{\mathrm{C}n}}{2n}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\varepsilon n}.$$

Il existe donc des constantes A et B telles que, pour tout $\theta \in \mathrm{I}$,

$$f(\theta) = \mathrm{A}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{n} + \mathrm{B}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{-n}.$$

Réciproquement on vérifie que toute fonction de ce type est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\pi[$ et est solution de l'équation différentielle. Les solutions de celle-ci formant un espace vectoriel de dimension 2, on obtient ainsi toutes les solutions.

Les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de notre équation différentielle forment un sous-espace de dimension deux de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Elles s'obtiennent en prenant $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ dans les résultats obtenus précédemment.

2. Pour tout $\theta \in]0, \pi[$, appelons $c_n(\theta)$ les coefficients de Fourier de la fonction $\varphi \longmapsto g(\varphi, \theta)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi, \theta) e^{-in\varphi} \mathrm{d}\varphi.$$

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[\times \mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions c_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[$ et que leurs dérivées sont obtenues en dérivant sous le signe somme. On en déduit que pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]0, \pi[$, on a

$$\begin{aligned}\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(c_n(\theta))\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(g(\varphi,\theta))\right) e^{-in\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(g(\varphi,\theta)) e^{-in\varphi}\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

par hypothèse.

Nous savons que si une fonction f 2π-périodique est de classe $\mathcal{C}^k$, les coefficients de Fourier de $f^{(k)}$ vérifient : $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$. Ici, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, la fonction $\varphi \longmapsto g(\varphi, \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On obtient donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(g(\varphi,\theta)) e^{-in\varphi}\mathrm{d}\varphi = (in)^2 c_n(\theta) = -n^2 c_n(\theta)$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]0, \pi[$, on a

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(c_n(\theta))\right) = n^2 c_n(\theta).$$

La fonction c_n est solution de l'équation différentielle étudiée dans la question 1. Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe $(A_n, B_n) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$c_n(\theta) = A_n \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^n + B_n \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{-n}.$$

La fonction g est bornée sur $\mathbb{R}\times]0, \pi[$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$|c_n(\theta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|g\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty.$$

Mais nous avons $\lim\limits_{\theta\to 0} \tan\frac{\theta}{2} = 0$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi} \tan\frac{\theta}{2} = +\infty$. Comme c_n est bornée on a forcément $A_n = B_n = 0$ (si par exemple A_n est non nul

on a $c_n(\theta) \underset{\theta \to \pi}{\sim} A_n \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^n$ ce qui est absurde). On obtient le même résultat pour $n < 0$. Quant à c_0, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$c_0(\theta) = A \ln \tan \frac{\theta}{2} + B.$$

Puisque c_0 est bornée, on a $A = 0$: la fonction c_0 est constante. Pour tout $\theta \in]0, \pi[$, la fonction $\varphi \longmapsto g(\varphi, \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On en déduit qu'elle est égale à la somme de sa série de Fourier. On a donc, pour $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R} \times]0, \pi[$,

$$g(\varphi, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\theta) e^{-in\varphi} = c_0(\theta).$$

La fonction c_0 étant constante, la fonction g est donc constante. ◁

L'exercice suivant illustre la technique du changement de variable dans une équation différentielle.

2.8. Un problème de Cauchy

1. Donner les solutions de $y'' + 9y = 0$.
2. Résoudre le problème de Cauchy

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto A \cos 3x + B \sin 3x$, où A et B sont des réels quelconques.

2. Cherchons les solutions définies sur $]-1, 1[$. La fonction sin étant un C^1-difféomorphisme de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1, 1[$, on fait le changement de variable $x = \sin t$ en posant $y(x) = y(\sin t) = z(t)$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On obtient, pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $z'(t) = (\cos t)\, y'(\sin t)$ et

$$z''(t) = (\cos^2 t) y''(\sin t) - (\sin t) y'(\sin t) = (1 - \sin^2 t) y''(\sin t) - (\sin t)\, y'(\sin t)$$

L'équation différentielle devient donc $z'' + 9z = 0$, dont les solutions sont $z(t) = A \cos 3t + B \sin 3t$. On revient à la variable x. On a

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos t(1 - 4\sin^2 t) = \sqrt{1 - x^2}(1 - 4x^2) \quad \text{et}$$

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t = 3x - 4x^3.$$

On obtient, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$y(x) = \mathrm{A}\sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + \mathrm{B}(3x - 4x^3).$$

On a $y(0) = \mathrm{A}$ et $y'(0) = 3\mathrm{B}$. Il faut donc prendre $\mathrm{A} = a$ et $\mathrm{B} = \dfrac{b}{3}$.

Si $a \neq 0$, la solution obtenue n'est pas prolongeable en ± 1, car la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable en ± 1. La solution du problème de Cauchy est définie sur $]-1, 1[$ par

$$y(x) = a\sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + b\left(x - \frac{4}{3}x^3\right).$$

Si $a = 0$, la solution du problème de Cauchy est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = b\left(x - \frac{4}{3}x^3\right). \quad \triangleleft$$

L'équation suivante n'est pas linéaire mais elle se ramène à des équations linéaires d'ordre 2. Tout le problème réside dans le raccordement des solutions.

2.9. Équation $y'' + |y| = 0$

Trouver les fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$y'' + |y| = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = -1.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Montrons que, pour tout réel a, il existe une unique solution de l'équation différentielle telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = a$.

Supposons qu'une telle fonction existe. Sur un intervalle où $y \leqslant 0$, on a $y'' - y = 0$ et il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = a\,\mathrm{ch}\,t + b\,\mathrm{sh}\,t$. Sur un intervalle où $y \geqslant 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = a\cos t + b\sin t$.

On a $y(0) = -1$, donc y est négative au voisinage de 0. Soit I le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $y < 0$. Comme $y(0) = -1$ et $y'(0) = a$, on a, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $y(t) = -\mathrm{ch}\,t + a\,\mathrm{sh}\,t$. Si $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$, on doit avoir $y(t) = 0$ lorsque t est une borne de I. On distingue plusieurs cas :

- Si $|a| \leqslant 1$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-\mathrm{ch}(t) + a\,\mathrm{sh}(t) \leqslant -\mathrm{ch}(t) + |\mathrm{sh}(t)| < 0.$$

Ainsi $I = \mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\operatorname{ch}(t) + \alpha \operatorname{sh}(t)$. Il e clair, réciproquement, que cette fonction est négative et vérifie l'équatio différentielle.

• Si $|\alpha| > 1$, $-\operatorname{ch}(t) + \alpha \operatorname{sh}(t)$ s'annule en $t_\alpha = \operatorname{Argth}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

∗ Si $\alpha > 1$, on a $t_\alpha > 0$ et $I =]-\infty, t_\alpha[$. À droite de t_α, y est positi et donc, sachant que $y(t_\alpha) = 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = a \sin(t - t_\alpha$ On a $a = y'(t_\alpha) = -\operatorname{sh}(t_\alpha) + \alpha \operatorname{ch}(t_\alpha) = \operatorname{ch}(t_\alpha)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$. De

$$\operatorname{ch}(t_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(t_\alpha)}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

on tire $a = \sqrt{\alpha^2 - 1}$. À droite de t_α on a $y(t) = \sqrt{\alpha^2 - 1}\sin(t - t_\alpha)$ cette expression reste valable tant que y est positive, donc sur $[t_\alpha, t_\alpha + \pi$ En $t_\alpha + \pi$, cette expression s'annule et change de signe, donc il exis $b \in \mathbb{R}$ tel que à droite de $t_\alpha + \pi$, $y(t) = b \operatorname{sh}(t - t_\alpha - \pi)$. De plus a $b = y'(t_\alpha + \pi) = \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos(\pi) = -\sqrt{\alpha^2 - 1}$. La fonction $t \mapsto$ $b \operatorname{sh}(t - t_\alpha - \pi)$ ne s'annule pas sur $[t_\alpha + \pi, +\infty[$, donc la formule e valable sur $[t_\alpha + \pi, +\infty[$. Finalement on obtient une unique fonction définie par

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} -\operatorname{ch}(t) + \alpha \operatorname{sh}(t) & \text{si } t \leqslant t_\alpha \\ \sqrt{\alpha^2 - 1}\sin\left(t - \operatorname{Argth}\frac{1}{\alpha}\right) & \text{si } t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\alpha + \pi \\ \sqrt{\alpha^2 - 1}\operatorname{sh}\left(t - \operatorname{Argth}\frac{1}{\alpha} - \pi\right) & \text{si } t \geqslant t_\alpha + \pi. \end{cases}$$

On vérifie, réciproquement, que cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^2$ (faut simplement étudier l'existence des dérivées en t_α et $t_\alpha + \pi$). P construction, elle est solution de l'équation différentielle et vérifie l conditions initiales imposées. On obtient une solution unique.

∗ Pour traiter le cas $\alpha < -1$, on remarque que si y est soluti de l'équation différentielle, il en est de même de $z : t \longmapsto y(-t)$. D plus $z(0) = y(0)$ et $z'(0) = -y'(0)$. On en déduit qu'il existe enco une solution unique y_α définie par $y_\alpha(t) = y_{-\alpha}(-t)$ et donc, puisq $t_{-\alpha} = -t_\alpha$,

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 1}\operatorname{sh}\left(-t + \operatorname{Argth}\frac{1}{\alpha} - \pi\right) & \text{si } t \leqslant t_\alpha - \pi \\ \sqrt{\alpha^2 - 1}\sin\left(-t + \operatorname{Argth}\frac{1}{\alpha}\right) & \text{si } t_\alpha - \pi \leqslant t \leqslant t_\alpha \\ -\operatorname{ch}(t) + \alpha \operatorname{sh}(t) & \text{si } t \geqslant t_\alpha. \quad \triangleleft \end{cases}$$

On ne peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans sa ve sion au programme des classes préparatoires pour affirmer l'existence

l'unicité de la solution car la fonction $(x, y) \longmapsto |y|$ *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$. *Néanmoins, elle est continue et lipschitzienne par rapport à la variable* y *et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique dans ce cas.*

Dans le cas particulier de cette équation, l'unicité se démontre simplement. Soient y *et* z *deux fonctions définies sur un intervalle* I, *solutions de l'équation différentielle et* $t_0 \in \mathrm{I}$ *tel que* $y(t_0) = z(t_0)$ *et* $y'(t_0) = z'(t_0)$. *Posons* $w = y - z$. *On a*

$$|w''| = |y'' - z''| = |-|y| + |z|| \leqslant |y - z| \leqslant |w|.$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient pour tout $x \in \mathrm{I}$, $w(x) = \displaystyle\int_{t_0}^{x} (x-u)w''(u)\,du$. *En notant* $\mathrm{M}(t)$ *le maximum de* $|w|$ *entre* t_0 *et* t, *on obtient, pour* x *entre* t_0 *et* t,

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{x} |x-t_0|\,|w''(u)|\,du\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{x} |x-t_0|\,|w(u)|\,du\right| \\ &\leqslant (x-t_0)^2\mathrm{M}(x) \leqslant (t-t_0)^2\mathrm{M}(t) \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{M}(t) \leqslant (t-t_0)^2\mathrm{M}(t)$. *On en déduit que* $\mathrm{M}(t) = 0$ *et donc* $w(t) = 0$ *si* $|t - t_0| < 1$. *Supposons que* w *ne soit pas la fonction nulle. S'il existe* $t > t_0$ *tel que* $w(t) \neq 0$, *on note* $t_1 = \inf\{t > t_0,\ w(t) > 0\}$. *Par continuité de* w *et* w', *on a* $w(t_1) = w'(t_1) = 0$ *et en reprenant le raisonnement précédent avec* t_1 *au lieu de* t_0, *on obtient qu'il existe* $h > 0$ *tel que* $w(t) = 0$ *si* $t \in [t_1, t_1 + h]$. *Cela contredit la définition de* t_1. *On montre de même qu'il n'existe pas* $t < t_0$ *tel que* $w(t) \neq 0$. *Donc* w *est la fonction nulle.*

Voici encore un exemple d'équation non linéaire qui se ramène à des équations linéaires à coefficients constants.

2.10. Déterminant circulant

Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0.$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice circu-

lante. On a $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix} = (a+bj+cj^2)\begin{pmatrix}1\\j\\j$

et $M\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix} = (a+bj^2+cj)\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\j\\j$ forment une base de vecteurs propres de M. Ainsi M est diagonalisa

et on a
$$\det M = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj).$$

Notre équation différentielle équivaut donc à

$$(y'+y''+y)(y'+jy''+j^2y)(y'+j^2y''+jy)=0$$

ou encore à

$$(y''+y'+y)(y''+jy'+j^2y)(y''+j^2y'+jy)=0.$$

Notons que si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a+j^2b+jc=0$ équivaut, en prenant partie réelle et la partie imaginaire, à $a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c=0$ et $b-c=0$, s $a=b=c$. On trouve le même résultat pour $a+jb+j^2c=0$. Ainsi solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont les fonct telles que, pour tout réel x, on ait

$$y''(x)+y'(x)+y(x)=0 \quad \text{ou} \quad y(x)=y'(x)=y''(x).$$

Soit y une solution de l'équation différentielle. Posons

$$\mathrm{A}=\{x\in\mathbb{R},\ y''(x)+y'(x)+y(x)=0\}$$
$$\mathrm{B}=\{x\in\mathbb{R},\ y(x)=y'(x)=y''(x)\}.$$

On a donc $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathbb{R}$. Si $\mathrm{A}=\mathbb{R}$, alors y est solution de $y''+y'+y=$ donc de la forme $x\longmapsto e^{-x/2}\left(\mathrm{A}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathrm{B}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$, où $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in$ De même si $\mathrm{B}=\mathbb{R}$, y est de la forme $x\longmapsto \mathrm{A}e^x$, où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.

Montrons que l'on est nécessairement dans un des cas précédents, raisonnant par l'absurde. Supposons donc que A et B sont distincts de Comme $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathbb{R}$, on peut trouver $x_0\in\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}$ et $x_1\in\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}$. Suppos par exemple $x_0<x_1$ et considérons $\mathrm{C}=\{x\in\mathrm{B},\ x>x_0\}$. L'ensem C n'est pas vide car il contient x_1 ; il est minoré par x_0 donc il possè une borne inférieure α. Par continuité de y, y' et y'', on a $\alpha\in\mathrm{B}$ et d $\alpha>x_0$. Comme $[x_0,\alpha[\subset\mathrm{A}$ on a, toujours par continuité, $\alpha\in\mathrm{A}$. Ai $\alpha\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, c'est-à-dire $y(\alpha)=y'(\alpha)=y''(\alpha)=0$. Comme $[x_0,\alpha]\subset\mathrm{A}$, restriction de y à $[x_0,\alpha]$ vérifie l'équation différentielle $y''+y'+y=$ Sachant que $y(\alpha)=y'(\alpha)=y''(\alpha)=0$, c'est la fonction nulle. Ai

$x_0 \in \mathrm{B}$, ce qui contredit l'hypothèse. Le cas $x_1 < x_0$ se traite de la même manière et on conclut que nécessairement $\mathrm{A} = \mathbb{R}$ ou $\mathrm{B} = \mathbb{R}$. ◁

Voici encore deux exercices originaux qui se ramènent aussi à des équations linéaires à coefficients constants.

2.11. Équation intégrale (1)

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Cela fait fortement penser à la formule de Taylor avec reste intégral et la fonction f de classe $\mathcal{C}^4$ vérifiant $f^{(4)} = f$ et $f(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ est solution. On va prouver que c'est la seule. On montre pour commencer que, pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n : x \longmapsto \int_0^x (x-t)^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a, par la formule du binôme de Newton,

$$g_n(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-t)^{n-k} f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \int_0^x (-t)^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui montre que g_n est classe $\mathcal{C}^1$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-x)^{n-k} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_0^x (-t)^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (x-x)^n f(x) + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \int_0^x (-t)^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t = n g_{n-1}(x). \end{aligned}$$

De plus, $g_0' = f$. L'équation proposée s'écrit $f(x) = x + \frac{1}{6} g_3(x)$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = 1 + \frac{1}{2} g_2$. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f'' = g_1$ puis de classe $\mathcal{C}^3$ avec $f''' = g_0$ et enfin de classe $\mathcal{C}^4$ avec $f^{(4)} = f$. Comme les fonctions g_n sont nulles en 0 on a bien $f(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Il ne reste plus qu'à trouver l'unique solution à ce problème de Cauchy. Les racines quatrièmes de 1 étant i, $-i$, 1 et -1, il existe $(A, B, C, D) \in \mathbb{C}^4$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix} + Ce^{x} + De^{-x}.$$

Les valeurs en 0 des dérivées donnent $A+B+C+D = 0$, $(A-B)i+C-D = 1$, $-A-B+C+D = 0$ et $-Ai+Bi+C+D = 0$, ce qui conduit à $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{i}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ et $D = -\frac{1}{4}$. On obtient pour tout réel x,

$$f(x) = -\frac{i}{4}e^{ix} + \frac{i}{4}e^{-ix} + \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(x). \quad \triangleleft$$

2.12. Équation intégrale (2)

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$f'(x) + 5\int_0^x \cos(2(x-t))f(t)\mathrm{d}t = 10.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• *Analyse.* En écrivant l'équation sous la forme

$$f'(x) + 5\cos 2x \int_0^x \cos 2t\, f(t)\,\mathrm{d}t + 5\sin 2x \int_0^x \sin 2t\, f(t)\,\mathrm{d}t = 10,$$

on voit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

$$f''(x)+5f(x)-10\sin 2x \int_0^x \cos 2t\, f(t)\,\mathrm{d}t+10\cos 2x \int_0^x \sin 2t\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Cela montre que f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

$$f'''(x)+5f'(x)-20\cos 2x \int_0^x \cos 2t\, f(t)\,\mathrm{d}t-20\sin 2x \int_0^x \sin 2t\, f(t)\,\mathrm{d}t =$$

soit, en utilisant l'équation initiale, $f'''(x) + 9f'(x) - 40 = 0$.

La fonction f' est solution de $y''+9y = 40$ et $f'(0) = 10$. Une solution de l'équation sans second membre est $y = \frac{40}{9}$. On en déduit qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{40}{9} + \frac{50}{9}\cos 3x + A\sin 3x.$$

On observe que $f(0) = -\dfrac{f''(0)}{5}$. On en déduit que $f(0) = -\dfrac{3\mathrm{A}}{5}$. On obtient, pour tout réel x,

$$f(x) = -\frac{4\mathrm{A}}{15} + \frac{40x}{9} + \frac{50}{27}\sin 3x - \frac{\mathrm{A}}{3}\cos 3x.$$

• *Synthèse.* Un calcul pénible, pour lequel un logiciel de calcul formel est le bienvenu, donne alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) + 5\int_0^x \cos(2(x-t))f(t)\mathrm{d}t \\ = 10 + \mathrm{A}\sin(3x) + \mathrm{A}\cos(3x) - \frac{2}{3}\mathrm{A}\sin(2x) - \mathrm{A}\cos(2x). \end{aligned}$$

Il faut donc avoir $\mathrm{A} = 0$. L'équation possède une seule solution définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{40x}{9} + \frac{50}{27}\sin 3x. \quad \triangleleft$$

L'énoncé suivant propose la résolution d'une équation d'ordre 4 à coefficients constants.

2.13. Équation différentielle linéaire d'ordre 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y^{(4)} + \alpha y = 0$.
(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Cherchons pour commencer les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ et forment un espace vectoriel complexe de dimension 4. Si $\alpha = 0$, on trouve l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Nous supposons désormais que $\alpha \neq 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $y_\lambda : x \longmapsto e^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si $\lambda^4 = -\alpha$. Comme $-\alpha \neq 0$, il possède quatre racines quatrièmes. Si μ est l'une d'entre elles, les autres sont $-\mu$, μi et $-\mu i$. On obtient donc quatre solutions de l'équation différentielles y_μ, $y_{-\mu}$, $y_{\mu i}$, $y_{-\mu i}$. Leur wronskien en 0 est égal au déterminant de Vandermonde $\mathrm{V}(\mu, -\mu, \mu i, -\mu i)$. Il n'est pas nul donc les quatre solutions de l'équation différentielle forment une base de l'espace des solutions. Une fonction f est solution de l'équation différentielle s'il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathbb{C}^4$ tel que, pour tout réel x,

$$f(x) = \mathrm{A}e^{\mu x} + \mathrm{B}e^{-\mu x} + \mathrm{C}e^{\mu i x} + \mathrm{D}e^{-\mu i x}.$$

Cherchons les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha < 0$, on peut prendre $\mu = (-\alpha)^{\frac{1}{4}} \in \mathbb{R}$. On obtient

$$f(x) = \mathrm{A}e^{\mu x} + \mathrm{B}e^{-\mu x} + (\mathrm{C}+\mathrm{D})\cos(\mu x) + (\mathrm{C}-\mathrm{D})\sin(\mu x)$$

et il en découle que y_μ, $y_{-\mu}$, $x \mapsto \cos(\mu x)$ et $x \mapsto \sin(\mu x)$ forment une base de l'espace des solutions réelles.

• Si $\alpha > 0$, on prend $\mu = \alpha^{1/4}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$, car $-1 = i^2 = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$. On note $\mu = \rho(1+i)$, avec $\rho = \dfrac{\alpha^{1/4}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{A}e^{\rho(1+i)x} + \mathrm{B}e^{-\rho(1+i)x} + \mathrm{C}e^{\rho(-1+i)x} + \mathrm{D}e^{\rho(1-i)x} \\ &= e^{\rho x}\left((\mathrm{A}+\mathrm{D})\cos(\rho x) + (\mathrm{A}-\mathrm{D})\sin(\rho x)\right) \\ &\quad + e^{-\rho x}\left((\mathrm{C}+\mathrm{B})\cos(\rho x) + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\sin(\rho x)\right) \end{aligned}$$

donc les fonctions $x \mapsto e^{\pm\rho x}\cos\rho x$ et $x \mapsto e^{\pm\rho x}\sin\rho x$ forment une base de l'espace des solutions réelles. ◁

Dans l'exercice suivant on a une équation d'Euler d'ordre 2, c'est-à-dire une équation de la forme $ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = g(x)$. Pour la résoudre sur $]0,+\infty[$ (resp. $]-\infty,0[$) on peut effectuer le changement de variable $t = \ln x$ (resp. $t = \ln(-x)$) qui transforme l'équation en une équation à coefficients constants. On peut aussi directement chercher des solutions de l'équation homogène associée sous la forme de fonctions puissances $x \mapsto x^\lambda$ (resp. $\mapsto (-x)^\lambda$) puisque $e^{\lambda t} = x^\lambda$. C'est ce que nous faisons dans la solution ci-après.

2.14. Équation linéaire d'Euler

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation (E) : $t^2x'' + tx' - x = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

2. À quelle condition sur g l'équation différentielle (E) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Sur l'intervalle $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, l'équation différentielle prend la forme résolue

$$x'' = -\frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}x + \frac{g}{t^2}$$

et les solutions forment un espace affine de dimension 2. Cherchons des solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto |x|^\lambda$. Que l'on soit sur

$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto |x|^\lambda$ est solution si et seulement si $\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0$ ce qui donne $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. On applique alors la méthode de variations des constantes pour résoudre l'équation en cherchant x sous la forme $x(t) = \mathrm{A}(t)t + \dfrac{\mathrm{B}(t)}{t}$ avec $\mathrm{A}'(t)t + \dfrac{\mathrm{B}'(t)}{t} = 0$. On obtient la seconde équation différentielle $t^2\mathrm{A}'(t)-\mathrm{B}'(t) = g(t)$, ce qui conduit à $\mathrm{A}'(t) = \dfrac{g(t)}{2t^2}$ et $\mathrm{B}'(t) = -\dfrac{1}{2}g(t)$. En choisissant un point t_0 quelconque dans I, les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$x(t) = -\frac{1}{2t}\int_{t_0}^{t} g(u)\mathrm{d}u + t\int_{t_0}^{t}\frac{g(u)}{2u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{C}}{t} + \mathrm{D}t.$$

2. Étudions l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$. Si l'équation différentielle (E) possède une solution x de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : t \longmapsto t^2x''(t) + tx'(t) - x(t)$ possède en 0 un développement limité d'ordre 2. Nous supposerons que cette condition est réalisée et qu'en particulier g est dérivable en 0. Notons G la primitive de g nulle en 0. Quitte à modifier la constante C on peut remplacer $-\dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} g(u)\mathrm{d}u$ par $-\dfrac{1}{2t}\mathrm{G}(t)$ dans la solution ci-dessus. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, au voisinage de 0,

$$g(t) = g(0)+g'(0)t+\lambda t^2+o(t^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(t) = g(0)t+\frac{g'(0)}{2}t^2+\frac{\lambda}{3}t^3+o(t^3)$$

(théorème d'intégration d'un développement limité). On en déduit que

$$x(t) = \frac{\mathrm{C}}{t}-\frac{g(0)}{2}-\frac{g'(0)}{4}t+o(t)+t\int_{t_0}^{t}\left(\frac{g(0)}{2u^2}+\frac{g'(0)}{2u}+\frac{\lambda}{2}+o(1)\right)\mathrm{d}u+\mathrm{D}t$$

et donc qu'il existe une constante K telle que

$$x(t) = \frac{\mathrm{C}}{t} - g(0) + \frac{g'(0)}{2}t\ln|t| + \mathrm{K}t + o(t)$$

On en déduit que x a une limite finie en 0 si et seulement si $\mathrm{C} = 0$. On prolonge alors x par continuité en 0 en posant $x(0) = -g(0)$. On a alors, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\frac{x(t)-x(0)}{t} = \mathrm{K} + g'(0)\ln|t|$$

et x est dérivable en 0 si et seulement si $g'(0) = 0$. On suppose désormais que cette condition est réalisée. On écrit, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$x(t) = -\frac{\mathrm{G}(t)}{2t} + t\int_{t_0}^{t}\frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{g(0)}{2} + \frac{g(0)}{2t_0}t + \mathrm{D}t.$$

On a au voisinage de 0, $\dfrac{g(u)-g(0)}{2u^2} = \dfrac{\lambda}{2} + o(1)$, car $g'(0) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u$ converge. Ainsi, il existe une constante E telle que pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$x(t) = -\frac{\mathrm{G}(t)}{2t} - \frac{g(0)}{2} + t\int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u + \mathrm{E}t.$$

On en déduit, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\mathrm{G}(t)}{2t^2} - \frac{g(t)}{2t} + \frac{g(t)-g(0)}{2t} + \int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u + \mathrm{E} \\ &= \frac{\mathrm{G}(t)}{2t^2} - \frac{g(0)}{2t} + \int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u + \mathrm{E}, \end{aligned}$$

puis

$$x'(t) = \frac{g(0)}{2t} + \frac{\lambda t}{6} - \frac{g(0)}{2t} + \int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2} + \mathrm{E} + o(t) = \mathrm{E} + o(1),$$

car $\lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u = 0$. Ainsi $\lim\limits_{t\to 0} x'(t) = \mathrm{E}$ donc, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, x est dérivable en 0 et $x'(0) = \mathrm{E}$. On a ensuite, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{g(t)}{2t^2} - \frac{\mathrm{G}(t)}{t^3} + \frac{g(0)}{2t^2} + \frac{g(t)-g(0)}{2t^2} = \frac{g(t)}{t^2} - \frac{\mathrm{G}(t)}{t^3} \\ &= \frac{1}{t^2}\left(g(0) + \lambda t^2 + o(t^2)\right) - \frac{1}{t^3}\left(g(0)t + \frac{\lambda}{3}t^3 + o(t^3)\right) \\ &= \frac{2\lambda}{3} + o(1). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0} x''(t) = \dfrac{2\lambda}{3}$. Ainsi x est deux fois dérivable en 0 et $x''(0) = \dfrac{2\lambda}{3}$. On a montré que si g possède un développement limité d'ordre 2 et si $g'(0) = 0$, il existe une infinité de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ prolongeables en 0 qui, par continuité, sont encore solutions sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.

Le calcul des dérivées de x en 0 montre qu'alors les solutions sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ peuvent se raccorder en 0. Il existe donc une droite affine de solutions sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{G}(t)}{2t} - \dfrac{g(0)}{2} + t\displaystyle\int_0^t \frac{g(u)-g(0)}{2u^2}\,\mathrm{d}u + \mathrm{E}t & \text{si } t \neq 0 \\ -g(0) & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

où E est un réel quelconque. ◁

L'énoncé suivant concerne une des équations différentielles de Bessel. Celles-ci interviennent très souvent en Sciences Physiques, par exemple dans l'étude des vibrations d'une membrane circulaire, de la diffraction...

2.15. Équation de Bessel

On considère l'équation différentielle (E) $xy'' + y' + xy = 0$.

1. Vérifier que $x \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est solution de (E).

2. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière autour de 0.

3. Soit f_0 la solution développable en série entière autour de 0 telle que $f(0) = 1$ et f une solution de l'équation différentielle sur un intervalle $]0, a[$. Montrer que (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La fonction $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\cos(x\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, les dérivées étant obtenues en dérivant sous le signe somme. On a donc, pour tout réel x,

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$g''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

On obtient alors après simplification

$$xg''(x)+g'(x)+xg(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(x\cos(x\sin\theta)\cos^2\theta - \sin(x\sin\theta)\sin\theta\Big)\mathrm{d}\theta.$$

On reconnaît dans la fonction $\theta \longmapsto x\cos(x\sin\theta)\cos^2\theta - \sin(x\sin\theta)\sin\theta$ la dérivée de $\theta \longmapsto \sin(x\sin\theta)\cos\theta$. On obtient donc, pour tout réel x,

$$xg''(x) + g'(x) + xg(x) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(x\cos\theta)\cos\theta\right]_0^{\pi} = 0.$$

Nous avons vérifié que g est solution de l'équation différentielle.

2. Soit f une solution développable en série entière au voisinage de 0. Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathrm{R} > 0$ tels que, pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors, pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$,

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n,$$

et donc

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0.$$

D'après l'unicité du développement en série entière, il faut

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}. \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2(2n-2)^2 \dots (2)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}.$$

On a donc, pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$.

Réciproquement, on note que cette série entière a un rayon de conver-
gence infini et définit une fonction f développable en série entière dont
les coefficients vérifient les conditions précédentes ; f est donc solution
de l'équation différentielle.

Comme $f(0) = a_0$ il existe une unique solution f_0 développable en
série entière et vérifiant $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}.$$

L'équation différentielle est appelée équation de Bessel d'ordre 0 et
la fonction f_0 (souvent notée J_0) est la fonction de Bessel d'ordre 0.
Plus généralement l'équation de Bessel d'ordre $n \in \mathbb{N}$ s'écrit $x^2y'' + xy' + (x^2 - n)y = 0$. Les fonctions de Bessel de première espèce sont
les fonctions J_n, solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$, définies par $\mathrm{J}_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(n+k)!} x^{2k}$.

3. La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0.
On en déduit que si la famille (f, f_0) est liée, alors f est bornée au
voisinage de 0.

Supposons maintenant que la famille (f, f_0) soit libre. Sur $]0, a[$,
l'ensemble des solutions de l'équation différentielle, qui peut être écrit

$y'' + \dfrac{1}{x}y' + y = 0$, est un espace vectoriel de dimension 2 dont (f, f_0) est une base. Considérons le wronskien $\mathrm{W} = ff_0' - f_0 f'$ de la famille (f, f_0). Pour tout $x \in]0, a[$, on a

$$\mathrm{W}'(x) = f(x)f_0''(x) - f_0(x)f''(x) = -\frac{1}{x}\mathrm{W}(x)$$

en remplaçant $f''(x)$ par $\dfrac{-1}{x}f'(x) - f(x)$ et de même pour f_0. Il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]0, a[$, $\mathrm{W}(x) = \mathrm{C}e^{-\ln x} = \dfrac{\mathrm{C}}{x}$ et C n'est pas nul puisque la famille (f, f_0) est libre.

On a donc, pour tout $x \in]0, a[$, $f(x)f_0'(x) - f_0(x)f'(x) = \dfrac{\mathrm{C}}{x}\cdot$ Supposons que f soit bornée au voisinage de 0. Compte tenu de $\lim\limits_0 f_0 = 1$ et $\lim\limits_0 f_0' = 0$, on a alors $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\mathrm{C}}{x}$.

Soit $b \in]0, a[$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{-\mathrm{C}}{x}$ garde un signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable sur $]0, b]$. On en déduit que

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\mathrm{C}\int_b^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\mathrm{C}(\ln x - \ln b).$$

On a donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\mathrm{C}\ln x$, puis $\lim\limits_0 f = +\infty$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse f bornée. On conclut que si la famille (f, f_0) est libre, alors f n'est pas bornée au voisinage de 0. L'équivalence est établie. ◁

La fonction g étudiée dans la première question est définie et clairement bornée sur $\mathbb{R}$. On en déduit que (f_0, g) est liée sur $]0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+$, par continuité. Remarquant que, de plus $f_0(0) = g(0) = 1$, on conclut que les restrictions de g et f_0 à $\mathbb{R}_+$ sont égales. Enfin, f_0 et g étant paires, nous concluons que : $f_0 = g$. Nous avons donc, pour tout réel x,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}.$$

En développant le cosinus en série entière et en intégrant terme à terme on peut en déduire facilement la valeur des intégrales de Wallis d'indice pair $\int_0^\pi \sin^{2n}\theta\,d\theta$.

L'exercice suivant étudie une autre équation singulière d'ordre 2 assez proche et propose diverses questions asymptotiques sur une solution développable en série entière qui est en fait très simplement reliée à la fonction de Bessel J_0.

2.16. Solution développable en série entière de $xy'' + y' + y = 0$

1. Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy'' + y' + y = 0$. On note f celle qui vaut 1 en 0.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 2]$ tel que $f(x_0) = 0$ et $f(x) > 0$ si $0 \leqslant x < x_0$.

3. Montrer que $xf'^2(x) + f^2(x)$ possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

5. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{f(x)f'(x)}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{f^2(x)}{x}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$. Déterminer ℓ.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On a, pour $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$,

$$xg''(x) + g'(x) + g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et g est solution de l'équation différentielle si l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(n+1)^2}$. On en déduit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0$. Réciproquement la série entière définie par cette suite a un rayon de convergence infini et sa somme est, par construction, solution de l'équation différentielle. Pour $a_0 = 1$, on obtient la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(n!)^2}.$$

L'ensemble des solutions développables en série entière est la droite vectorielle engendrée par f.

Cette fonction est reliée simplement à la fonction J_0 *de Bessel puisque* $\mathrm{J}_0(x) = f(x^2/4)$ *pour tout* x.

2. On a $f(0) = 1$ et $f(2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{(n!)^2}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{(n!)^2}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial de convergence des séries alternés. En

$u_n = \dfrac{(-2)^n}{(n!)^2}$, on obtient $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{2}{(n+1)^2} < 1$ si $n \geqslant 1$.

$\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{(n!)^2}\right| \leqslant |u_2| \leqslant 1$, puis que $f(2) \leqslant 1 - 2 + 1 \leqslant 0$.

$= \inf\{x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant 0\}$. Le réel x_0 est bien défini puisque $f(x_0) = 0$. En effet, comme $f(0) > 0$ la continuité de f ...ence de $\eta > 0$ tel que $f(x) > 0$ si $x \in [0, \eta]$, ce qui implique $x_0 \geqslant \eta > 0$. Par définition, on a $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, x_0[$, d'où $f(x_0) = 0$ en utilisant la continuité à gauche et à droite en x_0.

3. Soit $g : x \longmapsto x f'^2(x) + f^2(x)$. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'^2(x) + 2x f'(x) f''(x) + 2f(x) f'(x) \\ &= f'(x)(2x f''(x) + f'(x) + 2f(x)) = -f'^2(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme elle est minorée par 0, elle possède une limite finie $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$.

4. La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc, pour tout $x \geqslant 0$,

$$x f'^2(x) + f^2(x) = g(x) \leqslant g(0) = f(0)^2.$$

On en déduit que $|f(x)| \leqslant |f(0)|$ pour tout $x \geqslant 0$, ce qui montre que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{|f(0)|}{\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$, ce qui implique $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$.

5. On a, pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{|f(x)f'(x)|}{x} \leqslant \dfrac{g(0)}{x^{3/2}}$, ce qui montre que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)f'(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

De l'équation différentielle, on tire, pour tout $x \geqslant 1$,

$$x f''(x) f(x) + f'(x) f(x) + f^2(x) = 0$$

et donc

$$\frac{f^2(x)}{x} = -\frac{f'(x)f(x)}{x} - f''(x)f(x).$$

On sait déjà que $x \longmapsto \dfrac{f(x)f'(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, pour $X > 1$, on a, en intégrant par parties,

$$\int_1^X f''(x)f(x)\,dx = \Big[f'(x)f(x)\Big]_1^X - \int_1^X f'^2(x)\,dx = \Big[f'(x)f(x) + g(x)\Big]_1^X,$$

car $g' = -f'^2$. La fonction $f'f + g$ a pour limite ℓ en $+\infty$, car f est bornée, f' tend vers 0 et g vers ℓ. On en déduit que l'intégrale de $f''f$ sur $[1, +\infty[$ converge. Il en est donc de même de l'intégrale de $\dfrac{f^2(x)}{x}$ et comme cette fonction est positive elle est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Notons que de même la fonction positive f'^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$ (la primitive $-g$ a une limite finie en $+\infty$). Si ℓ est strictement positif, on a au voisinage de $+\infty$,

$$g(x) = xf'^2(x) + f^2(x) \sim \ell \text{ et donc } f'^2(x) + \frac{f^2(x)}{x} \sim \frac{\ell}{x}.$$

C'est impossible car la fonction $x \longmapsto f'^2(x) + \dfrac{f^2(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, comme somme de fonctions intégrables. On a donc $\ell = 0$. ◁

Dans l'énoncé suivant on résout une équation singulière d'ordre 2 en sachant qu'il y a deux solutions inverses l'une de l'autre.

2.17. Équation singulière avec deux solutions de produit 1

Résoudre (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que cette équation admet deux solutions dont le produit fait 1. On cherchera en particulier d'éventuelles solutions définies sur $\mathbb{R}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire que l'on peut mettre sous forme résolue en divisant par x sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. D'après l'indication, il existe une solution (I, y), avec I inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ telle que y ne s'annule pas sur I et que $z = \dfrac{1}{y}$ soit encore solution de (E). On a $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$ et $z'' = \dfrac{2y'^2 - yy''}{y^3}$. Dire que z est solution de (E) équivaut, après multiplication par y^3, à

$$4x(2y'^2 - yy'') - 2yy' + y^2 = 0.$$

Comme y est solution de (E) on peut remplacer $-4xyy'' - 2yy'$ par y^2. La fonction y est donc solution de (E') : $4xy'^2 + y^2 = 0$. Pour des fonctions réelles, cela impose en particulier que I est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$.

Cherchons des solutions de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme y ne s'annule pas sur I on peut écrire $y' = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{-x}} y$ où $\varepsilon = \pm 1$, ce qui conduit à $y(x) = Ce^{-\varepsilon\sqrt{-x}}$. La synthèse qui suit va rendre toute sa rigueur à ce travail : les applications $u_1 : x \longmapsto e^{-\sqrt{-x}}$ et $u_2 : x \longmapsto e^{\sqrt{-x}}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_-^*$, de classe C^∞ et un calcul facile permet de vérifier qu'elles sont bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$. Conclusion : (u_1, u_2) est une base de l'espace des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

Il reste à trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$. Certes (E′) n'a pas de solutions réelles, mais elle admet des solutions complexes ! On a $y' = \dfrac{\varepsilon i}{2\sqrt{x}}\, y$ ce qui conduit à $y(x) = Ce^{i\varepsilon\sqrt{x}}$. Il est alors à nouveau facile de vérifier que $v_1 : x \longmapsto \cos\sqrt{x}$ et $v_2 : x \longmapsto \sin\sqrt{x}$ forment une base de l'espace des solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour terminer l'exercice, il reste à regarder s'il est possible de raccorder deux solutions en 0. Plutôt que d'utiliser u_1 et u_2 prenons les fonctions $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ et $\operatorname{sh}\sqrt{-x}$ qui forment aussi une base de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$. L'application $\operatorname{sh}\sqrt{-x}$ n'est pas dérivable à gauche en 0. En revanche $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ et même analytique puisque

$$\forall x \leqslant 0, \quad \operatorname{ch}\sqrt{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}.$$

D'autre part, on a également $\cos\sqrt{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$ pour tout x alors que $\sin\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Il en résulte que les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les multiples de la fonction développable en série entière $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$. ◁

On aurait bien entendu trouvé cette solution définie sur $\mathbb{R}$ *tout entier en cherchant les solutions développables en série entière de* (E).

L'énoncé suivant caractérise les équations d'ordre 2 *admettant deux solutions inverses l'une de l'autre.*

2.18. Condition d'existence de deux solutions de produit 1

On considère l'équation différentielle (E) à coefficients continus sur $\mathbb{R}$: $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment 1.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• *Analyse.* Si x et $y = \dfrac{1}{x}$ sont solutions, alors de $y' = -\dfrac{x'}{x^2}$ et $y'' = -\dfrac{x''}{x^2} + \dfrac{2x'^2}{x^3}$, on déduit

$$x^2(y'' + py' + qy) = -x'' + \frac{2x'^2}{x} - px' + qx = 0$$

et donc, en utilisant l'équation vérifiée par x, $\dfrac{2x'^2}{x} + 2qx = 0$, c'est-à-dire $q = -\dfrac{x'^2}{x^2}$. Une condition nécessaire est donc que q soit dérivable et négative sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$q' = -\frac{2x'x''}{x^2} + \frac{2x'^3}{x^3} = \frac{2px'^2}{x^2} + \frac{2qx'}{x} + \frac{2x'^3}{x^3} = -2pq,$$

compte tenu de la relation précédente.

• *Synthèse.* Supposons q dérivable, négative et vérifiant $q' = -2pq$. Si q s'annule en un point, c'est la fonction nulle. Alors toute fonction constante est solution de l'équation différentielle et pour une telle fonction x, non nulle, $\dfrac{1}{x}$ est aussi solution de l'équation différentielle. Nous écartons dorénavant ce cas et supposons q strictement négative sur $\mathbb{R}$. Soit x une solution non nulle de l'équation $x' = \sqrt{-q}\,x$. Une telle fonction ne s'annule jamais. Comme $-q$ ne s'annule pas, $x' = x\sqrt{-q}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$x'' = x'\sqrt{-q} - x\frac{q'}{2\sqrt{-q}} = -qx + x'\frac{q'}{2q} = -qx - px'.$$

La fonction x est solution de l'équation différentielle. Posons $y = \dfrac{1}{x}$. On a, comme on l'a montré plus haut,

$$x^2(y'' + py' + qy) = -x'' + \frac{2x'^2}{x} - px' + qx = \frac{2x'^2}{x} + 2qx = 0,$$

car $x'^2 = -qx^2$, donc y est solution de l'équation différentielle.

Conclusion. L'équation différentielle (E) admet deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment 1 si, et seulement si, q est dérivable négative et vérifie $q' = -2pq$.

Voici un exercice voisin du précédent avec une relation algébrique différente.

2.19. Condition d'existence de deux solutions telles que $y_2 = xy_1$

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A (resp. B) une application C^1 (resp. C^0) de I dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle $y'' + \mathrm{A}(x)y' + \mathrm{B}(x)y = 0$ admette deux solutions y_1 et y_2 non nulles telles que $y_2 = xy_1$.

2. Résoudre $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Si y_1 et y_2 ont les propriétés voulues, on a $y_2' = xy_1' + y_1$ et $y_2'' = xy_1'' + 2y_1'$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, d'où l'on déduit

$$y_2'' + \mathrm{A}(x)y_2' + \mathrm{B}(x)y_2 = x(y_1'' + \mathrm{A}(x)y_1' + \mathrm{B}(x)y_1 + 2y_1' + \mathrm{A}(x)y_1$$
$$= 2y_1' + \mathrm{A}(x)y_1 = 0.$$

En dérivant cette relation, on en déduit

$$2y_1'' + \mathrm{A}(x)y_1' + \mathrm{A}'(x)y_1 = 0$$

et, compte tenu de l'équation initiale,

$$\mathrm{A}(x)y_1' + (2\mathrm{B}(x) - \mathrm{A}'(x))y_1 = 0.$$

Comme $2y_1' + \mathrm{A}(x)y_1 = 0$, on obtient $((\mathrm{A}(x))^2 + 2\mathrm{A}'(x) - 4\mathrm{B}(x))y_1 = 0$. S'il existe $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $y_1(x_0) = 0$, on a alors $y_1'(x_0) = 0$ et y_1 est la fonction nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi y_1 ne s'annule pas et on obtient la condition nécessaire

$$\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A}' - 4\mathrm{B} = 0.$$

Supposons réciproquement que cette relation est vérifiée et considérons une solution sur I, non nulle, de l'équation différentielle $2y_1' + \mathrm{A}y_1 = 0$. Alors y_1' est dérivable et $2y_1'' + \mathrm{A}y_1' + \mathrm{A}'y_1 = 0$ et

$$2y_1'' + 2\mathrm{A}y_1' + 2\mathrm{B}y_1 = \mathrm{A}y_1' - \mathrm{A}'y_1 + \mathrm{B}y_1 = \left(-\frac{\mathrm{A}^2}{2} - \mathrm{A}' + 2\mathrm{B}\right)y_1 = 0,$$

donc y_1 est solution de l'équation différentielle sur I. D'autre part en posant $y_2 = xy_1$, on a, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$y_2'' + \mathrm{A}(x)y_2' + \mathrm{B}(x)y_2 = x(y_1'' + \mathrm{A}(x)y_1' + y_1) + 2y_1' + \mathrm{A}(x)y_1 = 0.$$

La fonction y_2 est aussi solution de l'équation différentielle.

Conclusion. $\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A}' - 4\mathrm{B} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

2. Les fonctions $\mathrm{A} : x \longmapsto 2x$ et $\mathrm{B} : x \longmapsto 1 + x^2$ vérifient sur $\mathbb{R}$ la condition trouvée dans la première question. On considère une solution y_1 de $2y' + \mathrm{A}y = 0$, *i.e.* $y' + xy = 0$. On prend $y_1 : x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Elle est aussi solution de l'équation homogène $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$. On résout l'équation avec second membre en posant $y = ze^{-\frac{x^2}{2}}$. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(z'(x) - xz(x))$,

$$y''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(z''(x) - 2xz'(x) + (x^2 - 1)z(x))$$

et donc

$$y''(x) + 2xy'(x) + (1+x^2)y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} z''(x).$$

Ainsi y est solution de l'équation différentielle si $z''(x) = x$ pour tout réel x. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel x, $z(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + ax + b$ et donc

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{6}x^3 + ax + b \right). \quad \triangleleft$$

Les deux énoncés suivant concernent des problèmes aux limites ; contrairement à un problème de Cauchy, on cherche à imposer des conditions sur la solution en deux points distincts.

2.20. Un problème aux limites (1)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\omega > 0$ et $a > 0$. Existe t-il une solution de $y'' + \omega^2 y = f$ satisfaisant aux conditions $y(0) = y(a)$ et $y'(0) = y'(a)$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $x \longmapsto \mathrm{C}\cos\omega x + \mathrm{D}\sin\omega x$, où C et D sont de constantes réelles. On applique la méthode de la variation des constantes pour déterminer une solution y de l'équation complète. On cherche des fonctions C et D dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x,

$$y(x) = \mathrm{C}(x)\cos\omega x + \mathrm{D}(x)\sin\omega x, \text{ et } \mathrm{C}'(x)\cos\omega x + \mathrm{D}'(x)\sin\omega x = 0.$$

On obtient alors, pour tout réel x,

$$y'(x) = -\mathrm{C}(x)\omega\sin\omega x + \mathrm{D}(x)\omega\cos\omega x,$$
$$y''(x) = -\omega^2 y(x) - \mathrm{C}'(x)\omega\sin\omega x + \omega\mathrm{D}'(x)\cos\omega x.$$

On doit donc avoir

$$\mathrm{C}'(x)\cos\omega x + \mathrm{D}'(x)\sin\omega x = 0 \text{ et } -\mathrm{C}'(x)\omega\sin\omega x + \omega\mathrm{D}'(x)\cos\omega x = f(x).$$

On obtient $\mathrm{C}'(x) = -\dfrac{1}{\omega}f(x)\sin\omega x$ et $\mathrm{D}'(x) = \dfrac{1}{\omega}f(x)\cos\omega x$. Il existe des réels c et d tels que, pour tout réel x,

$$\mathrm{C}(x) = c - \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(x) = d + \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

, pour tout réel x.

$$\cdots) + d\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t)\sin(\omega(x-t))\,\mathrm{d}t$$

et

$$y'(x) = -c\omega\sin(\omega x) + d\omega\cos(\omega x) + \int_0^x f(t)\cos(\omega(x-t))\,\mathrm{d}t.$$

Les égalités $y(0) = y(a)$ et $y'(0) = y'(a)$ conduisent à un système d'inconnue (c, d) dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1-\cos(\omega a) & -\sin(\omega a) \\ \omega\sin(\omega a) & \omega(1-\cos(\omega a)) \end{vmatrix} = \omega\left((1-\cos(\omega a))^2 + \sin^2(\omega a)\right).$$

Il est nul si ωa est un multiple de 2π.

• Si ωa n'est pas un multiple de 2π, le système possède une solution unique donc l'équation différentielle possède une unique solution vérifiant $y(0) = y(a)$ et $y'(0) = y'(a)$.

• Si ωa est un multiple de 2π, on a $y(0) = c$, $y'(0) = d\omega$ et par ailleurs $y(a) = c - \frac{1}{\omega}\int_0^a f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ et $y'(a) = d + \frac{1}{\omega}\int_0^a f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$.

Si $\int_0^a f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t = 0$, toute solution de l'équation différentielle vérifie $y(0) = y(a)$ et $y'(0) = y'(a)$. Si ces conditions ne sont pas remplies, il n'y en a aucune. ◁

2.21. Un problème aux limites (2)

Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f \leqslant 0$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + fy = g$ possède une solution unique sur $[a, b]$ telle que $y(a) = y(b) = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Notons (E) l'équation différentielle proposée et $(\mathrm{E_H})$: $y'' + fy = 0$ l'équation homogène associée. Les solutions de (E) s'écrivent $y_0 + z$ où y_0 est une solution particulière et z une solution quelconque de $(\mathrm{E_H})$. Il nous suffit donc de prouver que l'application linéaire $z \mapsto (z(a), z(b))$ est un isomorphisme entre le plan des solutions de $(\mathrm{E_H})$ et $\mathbb{R}^2$. Il suffit pour cela de prouver qu'elle est injective. Or si z est solution de $(\mathrm{E_H})$, la fonction z^2 est convexe car $(z^2)'' = 2(zz'' + z'^2) = 2(z'^2 - fz^2) \geqslant 0$. Donc si $z(a) = z(b) = 0$ la fonction z^2 est identiquement nulle sur $[a, b]$ (puisque positive et sous sa corde donc négative). Le résultat en découle. ◁

Pour résoudre l'exercice suivant on adaptera la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. On y démontre en effet l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant un problème de Cauchy en $+\infty$.

2.22. Problème de Cauchy asymptotique

Soit $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t|p(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Montrer que l'équation différentielle $y''+py = 0$ possède une solution unique telle que $\lim\limits_{+\infty} y = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} y' = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Supposons que y est une solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions proposées. La fonction y est alors bornée sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue et a une limite finie en $+\infty$. On va mettre l'équation sous forme intégrale. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y(x) = 1 - \displaystyle\int_x^{+\infty} y'(t)\mathrm{d}t$ car $\lim\limits_{+\infty} y = 1$. En intégrant par parties, on obtient

$$y(x) = 1 - [(t-x)y'(t)]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} (t-x)y''(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 1 - \lim_{t\to+\infty}(t-x)y'(t) - \int_x^{+\infty} (t-x)p(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto (t-x)p(t)y(t)$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ car on a la majoration $|(t-x)p(t)y(t)| \leqslant \mathrm{K}t|p(t)|$, où K est un majorant de $|y|$. Cela justifie que $(t-x)y'(t)$ a une limite finie ℓ quand t tend vers $+\infty$. En fait cette limite est nulle, sinon on aurait $y'(t) \sim \dfrac{\ell}{t}$ en $+\infty$, avec $\ell \neq 0$ et y' ne serait pas intégrable sur $[x,+\infty[$. On a donc finalement

$$y(x) = 1 - \int_x^{+\infty} (t-x)p(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

De cela résulte l'idée de considérer l'ensemble E des fonctions continues et bornées sur $[a,+\infty[$, où $a \geqslant 0$ est fixé (à choisir), muni de la norme de la convergence uniforme et l'application T qui à $f \in \mathrm{E}$ associe $g = \mathrm{T}(f)$ définie pour $x \geqslant a$ par

$$g(x) = 1 - \int_x^{+\infty} (t-x)p(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

(la nécessité de se limiter à $[a,+\infty[$ apparaîtra plus loin).

L'espace vectoriel normé E est complet. En effet, considérons (f_n) une suite de Cauchy de E. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ si $m, n \geqslant n_0$. On a, pour tout $x \geqslant a$, et pour $m, n \geqslant n_0$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

donc $(f_m(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Elle converge ; on note $f(x)$ sa limite. On a, pour $m, n \geqslant n_0$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|f_m(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $m \geqslant n_0$. Ceci est vrai pour tout $x \geqslant a$. Ainsi $f_m - f \in \mathrm{E}$ et $\|f_m - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour $m \geqslant n_0$. On en déduit que $f = f_m - (f_m - f) \in \mathrm{E}$ et (f_m) converge vers f. On va montrer que T possède un unique point fixe à l'aide du théorème du point fixe (pour une preuve le lecteur se reportera à la page 159 du tome analyse 3). Montrons pour commencer que si $f \in \mathrm{E}$ alors $g = \mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$. Elle est clairement continue et, pour tout $x \geqslant a$,

$$|g(x)| \leqslant 1 + \int_x^{+\infty} (t - x)|p(t)|\|f\|_\infty \,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \|f\|_\infty \int_a^{+\infty} t|p(t)|\,\mathrm{d}t,$$

donc $g \in \mathrm{E}$. Si f_1 et f_2 sont des éléments de E d'images g_1 et g_2, on montre comme précédemment que, pour tout $x \geqslant a$,

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant \|f_1 - f_2\|_\infty \int_a^{+\infty} t|p(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On obtient $\|g_1 - g_2\|_\infty \leqslant \|f_1 - f_2\|_\infty \int_a^{+\infty} t|p(t)|\,\mathrm{d}t$. On choisit a de manière que $\int_a^{+\infty} t|p(t)|\,\mathrm{d}t < 1$. Alors l'application T est contractante. On remarque que si on prend $a = 0$, rien ne garantit que T est contractante, d'où la nécessité d'introduire a. Puisque T est une application contractante de E dans E et que E est complet, T possède un unique point fixe f.

Montrons que f est solution de l'équation différentielle sur $[a, +\infty[$. La fonction f vérifie $f(x) = 1 - \int_x^{+\infty} tp(t)f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^{+\infty} p(t)f(t)\,\mathrm{d}t$, donc elle est dérivable sur $[a, +\infty[$ et

$$f'(x) = xp(x)f(x) - xp(x)f(x) + \int_x^{+\infty} p(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} p(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$. De nouveau, f' est dérivable et $f'' = -pf$, donc f est solution de l'équation différentielle sur $[a, +\infty[$. Enfin, on a, pour $x \geqslant a$, $|f(x) - 1| \leqslant \|f\|_\infty \int_x^{+\infty} t|p(t)|\,\mathrm{d}t$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = 1$. Donc f est une solution sur $[a, +\infty[$ ayant le propriétés voulues. D'après le début de la démonstration, c'est la seule. Nous savons que les solutions maximales de cette équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'unique

solution maximale qui prolonge f. Elle a les propriétés voulues et c'est la seule. ◁

Commence ici une longue série d'exercices concernant l'étude qualitative des solutions des équations différentielles linéaires : existence de solutions bornées, périodiques, de limite nulle en l'infini, étude des zéros. Les deux premiers énoncés concernent des équations du premier ordre.

2.23. Solutions de $y' + ay = b$ de limite nulle en $\pm\infty$

Soit a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a(x) \geqslant \lambda$ pour tout réel x et que $\lim_{\pm\infty} b = 0$.

1. Montrer que toute solution de $y' + ay = b$ possède une limite nulle en $+\infty$.

2. Montrer qu'il existe une unique solution ayant une limite nulle en $-\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Commençons par résoudre l'équation différentielle. Soit A la primitive de a qui s'annule en 0. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions Ce^{-A}, où $C \in \mathbb{R}$. La méthode de la variation de la constante conduit à $C' = be^{A}$ et y est solution s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_0^x b(t) e^{A(t)} \, dt + k \right).$$

On a, pour $x \geqslant 0$, $A(x) \geqslant \lambda x$. On en déduit $\lim_{x \to +\infty} ke^{-A(x)} = 0$. Montrons que

$$\varphi(x) = e^{-A(x)} \int_0^x b(t) e^{A(t)} \, dt = \int_0^x b(t) e^{A(t) - A(x)} \, dt$$

a aussi pour limite 0 en $+\infty$. Pour $0 \leqslant t \leqslant x$, on a

$$A(t) - A(x) = -\int_t^x a(u) \, du \leqslant -\lambda(x - t).$$

Fixons $x_0 > 0$. Pour $x \geqslant x_0$, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leqslant \int_0^x |b(t)| e^{-\lambda(x-t)} \, dt \\ &\leqslant e^{-\lambda(x-x_0)} \int_0^{x_0} |b(t)| \, dt + \sup_{t \geqslant x_0} |b(t)| \int_{x_0}^x e^{-\lambda(x-t)} \, dt \end{aligned}$$

$$\leqslant e^{-\lambda(x-x_0)} \int_0^{x_0} |b(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda} \sup_{t \geqslant x_0} |b(t)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir x_0 pour que le second terme soit $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puisque b a pour limite 0 en $+\infty$. Le premier terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et est $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour x assez grand. On a donc $|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ pour x assez grand. On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$. Toutes les solutions de l'équation différentielle ont une limite nulle en $+\infty$.

2. Pour $x \leqslant 0$, on a $-\mathrm{A}(x) \geqslant -\lambda x$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\mathrm{A}(x)} = +\infty$. Pour que y ait pour limite 0 en $-\infty$, il faut que $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_0^x b(t)e^{\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t + k = 0$, *i.e.* $k = \int_{-\infty}^0 b(t)e^{\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t$. Cette intégrale converge car b est bornée sur $\mathbb{R}$ (elle est continue et a des limites finies en $\pm\infty$) et $e^{\mathrm{A}(t)} \leqslant e^{\lambda t}$ pour $t \leqslant 0$. La seule solution qui puisse tendre vers 0 en $-\infty$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = e^{-\mathrm{A}(x)} \int_{-\infty}^x b(t)e^{\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x b(t)e^{\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(x)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t \leqslant x \leqslant 0$, on a $\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(x) = -\int_t^x a(u)\,\mathrm{d}u \leqslant -\lambda(x-t)$. On en déduit que, pour $x \leqslant 0$, on a

$$|y(x)| \leqslant \int_{-\infty}^x |b(t)|e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t \leqslant x} |b(t)| \int_{-\infty}^x e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{t \leqslant x} |b(t)|.$$

Comme b tend vers 0 en $-\infty$, $\sup\limits_{t \leqslant x} |b(t)|$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ et on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$. L'équation différentielle possède une unique solution ayant pour limite 0 en $-\infty$. ◁

L'exercice suivant s'intéresse à l'existence de solutions périodiques à une équation dont les fonctions coefficients sont toutes périodiques.

2.24. Solutions périodiques de $y' + ay = b$

Soit a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Discuter l'existence de solutions T-périodiques de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On trouve, comme dans l'exercice précédent, que les solutions de

l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = e^{-\mathrm{A}(x)} \left(\int_0^x b(t) e^{\mathrm{A}(t)} \, \mathrm{d}t + k \right),$$

où A est la primitive de a qui s'annule en 0 et k un réel quelconque.

Montrons que y est T-périodique si et seulement si $y(\mathrm{T}) = y(0)$. En effet, considérons la fonction z définie par $z(x) = y(x + \mathrm{T})$. On a, pour tout réel x,

$$z'(x) = y'(x + \mathrm{T}) = -a(x + \mathrm{T}) y(x + \mathrm{T}) + b(x + \mathrm{T}) = -a(x) z(x) + b(x),$$

car a et b sont T périodiques. Ainsi z est solution de l'équation différentielle. Si $y(\mathrm{T}) = y(0)$, alors $z(0) = y(0)$ et par unicité du problème de Cauchy, on a $z = y$, c'est-à-dire $y(x + \mathrm{T}) = y(x)$ pour tout réel x : la fonction y est T-périodique. La réciproque est évidente.

On cherche donc k tel que $y(\mathrm{T}) = y(0)$, c'est-à-dire

$$e^{-\mathrm{A}(\mathrm{T})} \left(\int_0^{\mathrm{T}} b(t) e^{\mathrm{A}(t)} \, \mathrm{d}t + k \right) = k.$$

• Si $e^{-\mathrm{A}(\mathrm{T})} \neq 1$, *i.e.* si $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} a(t) \, \mathrm{d}t \neq 0$, on trouve une solution unique à savoir $k = \dfrac{\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} b(t) e^{\mathrm{A}(t)} \, \mathrm{d}t}{e^{\mathrm{A}(\mathrm{T})} - 1}$. L'équation différentielle possède une seule solution T-périodique.

• Si $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} a(t) \, \mathrm{d}t = 0$, alors soit $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} b(t) e^{\mathrm{A}(t)} \, \mathrm{d}t = 0$ et toutes les solutions sont périodiques, soit $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} b(t) e^{\mathrm{A}(t)} \, \mathrm{d}t \neq 0$ et l'équation ne possède pas de solution périodique. ◁

2.25. Solutions bornées de $y'' - a^2 y = f$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'équation différentielle $y'' - a^2 y = f$ possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $x \longmapsto \mathrm{C}e^{ax} + \mathrm{D}e^{-ax}$, où C et D sont des constantes réelles. On applique la méthode de la variation des constantes pour déterminer une solution y de l'équation complète. On cherche des fonctions C et D dérivables sur

$\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x,

$$y(x) = \mathrm{C}(x)e^{ax} + \mathrm{D}(x)e^{-ax} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}'(x)e^{ax} + \mathrm{D}'(x)e^{-ax} = 0.$$

On obtient alors, pour tout réel x, $y'(x) = a\mathrm{C}(x)e^{ax} - a\mathrm{D}(x)e^{-ax}$ et

$$y''(x) = a^2 y(x) + a\mathrm{C}'(x)e^{ax} - a\mathrm{D}'(x)e^{-ax}.$$

On doit avoir

$$\mathrm{C}'(x)e^{ax} + \mathrm{D}'(x)e^{-ax} = 0 \quad \text{et} \quad a\mathrm{C}'(x)e^{ax} - a\mathrm{D}'(x)e^{-ax} = f(x).$$

On obtient $\mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{2a} f(x)e^{-ax}$ et $\mathrm{D}'(x) = -\dfrac{1}{2a} f(x)e^{ax}$. Il existe des réels c et d tels que, pour tout réel x,

$$\mathrm{C}(x) = c + \frac{1}{2a}\int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(x) = d - \frac{1}{2a}\int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t.$$

On obtient finalement, pour tout réel x,

$$y(x) = \underbrace{e^{ax}\left(c + \frac{1}{2a}\int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\right)}_{y_1(x)} + \underbrace{e^{-ax}\left(d - \frac{1}{2a}\int_0^x f(t)e^{at}\,\mathrm{d}t\right)}_{y_2(x)}.$$

Soit K un majorant de $|f|$. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$|y_2(x)| \leqslant e^{-ax}(|d| + \frac{\mathrm{K}}{2a}\int_0^x e^{at}\,\mathrm{d}t) \leqslant e^{-ax}(|d| + \mathrm{K}\frac{e^{ax}-1}{2a^2}) \leqslant |d| + \frac{\mathrm{K}}{2a^2}.$$

La fonction y_2 est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ax} = +\infty$, il faut pour que y_1 soit également bornée sur $\mathbb{R}_+$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} c + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t = 0$, c'est-à-dire $c = -\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$. On a alors

$$y_1(x) = -\frac{1}{2a}\int_x^{+\infty} f(t)e^{a(x-t)}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient, pour tout $x \geqslant 0$,

$$|y_1(x)| \leqslant e^{ax}\mathrm{K}\int_x^{+\infty} \frac{1}{2a}e^{-at}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{K}}{2a^2}.$$

La fonction y_2 et donc y sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

On montre de la même façon que y_1 est bornée que sur $\mathbb{R}_-$ et que pour que y_2 le soit, il faut nécessairement $d = -\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)e^{at}\,\mathrm{d}t$. Alors y_2 est définie par $y_2(x) = -\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)e^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t$ et est bornée sur $\mathbb{R}_-$. Il en est de même de y.

Conclusion. L'équation différentielle possède une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$, définie par

$$y(x) = -\frac{1}{2a}\int_x^{+\infty} f(t)e^{a(x-t)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^x f(t)e^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t. \triangleleft$$

2.26. Limite en $+\infty$ d'une solution de $x'' = qx$

1. Soit $x \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ convexe, minorée et décroissante. Étudier la limite de $tx'(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

2. Soient $q \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $x \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ décroissante telles que $x'' = qx$. Montrer que :

$$\lim_{+\infty} x = 0 \iff \int_0^{+\infty} tq(t)\mathrm{d}t = +\infty.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. La fonction x est minorée et décroissante, donc elle possède une limite finie ℓ en $+\infty$. D'après la formule des accroissements finis, pour tout $t > 0$, il existe $c \in [t, 2t]$ tel que $x(2t) - x(t) = tx'(c)$. La fonction x' étant croissante, puisque x est convexe, on en déduit

$$tx'(t) \leqslant x(2t) - x(t) \leqslant tx'(2t)$$

puis, pour tout $t > 0$, $2\left(x(t) - x\left(\frac{t}{2}\right)\right) \leqslant tx'(t) \leqslant x(2t) - x(t)$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) - x\left(\frac{t}{2}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} x(2t) - x(t) = \ell - \ell = 0$, on obtient, par encadrement

$$\lim_{t\to+\infty} tx'(t) = 0.$$

2. De l'hypothèse, on déduit $x'' \geqslant 0$ et donc x est convexe. La fonction x vérifie les hypothèses de la question 1 donc $\lim\limits_{t\to+\infty} tx'(t) = 0$. La fonction x est décroissante et minorée donc elle a une limite finie $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$.

• Supposons que $\ell = 0$. Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, on a

$$\int_a^b tq(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b t\frac{x''(t)}{x(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{x(a)}\int_a^b tx''(t)\,\mathrm{d}t,$$

car $\frac{1}{x}$ croît. Comme $\int_a^b tx''(t)\,\mathrm{d}t = [tx'(t)]_a^b - \int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t = [tx'(t) - x(t)]_a^b$, on obtient

$$\int_a^b tq(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{bx'(b) - x(b) - ax'(a) + x(a)}{x(a)}.$$

Supposons que $\int_0^{+\infty} tq(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En faisant tendre b vers $+\infty$ et compte tenu des limites nulles de $bx'(b)$ et $x(b)$ quand b tend vers $+\infty$.

$$\int_a^{+\infty} tq(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{-ax'(a)+x(a)}{x(a)} \geqslant 1,$$

car $x'(a) \leqslant 0$. C'est absurde car on devrait avoir $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} tq(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} tq(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

• Supposons que $\lim\limits_{+\infty} x = \ell > 0$. On a $tq(t) = t\dfrac{x''(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}tx''(t)$.
On a comme précédemment, pour $a > 0$,

$$\int_0^a tx''(t)\,\mathrm{d}t = [tx'(t) - x(t)]_0^a.$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} tx'(t)-x(t) = 0-\ell = -\ell$, l'intégrale $\int_0^a tx''(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et par le théorème de comparaison des intégrales des fonctions positives, $\int_0^{+\infty} tq(t)\,\mathrm{d}t$ converge. ◁

2.27. Équation dépendant d'un paramètre

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors du segment $[a, b]$, λ un réel non nul. On considère l'équation différentielle $y'' - \lambda^2 y = g$.

1. Résoudre cette équation et montrer en particulier qu'il existe une solution unique tendant vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On note y_λ cette solution. Déterminer un équivalent de $y_\lambda(t)$ quand λ tend vers 0.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On peut supposer $\lambda > 0$. La fonction g est bornée sur $[a, b]$ donc sur $\mathbb{R}$. On montre, comme dans l'exercice 2.25, que la seule solution bornée de l'équation différentielle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y_\lambda(x) = -\frac{1}{2\lambda}\int_x^{+\infty} g(t)e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x} g(t)e^{\lambda(t-x)}\,\mathrm{d}t.$$

Compte tenu de l'hypothèse sur g, on obtient

$$y_\lambda(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\lambda x}}{2\lambda}\displaystyle\int_a^b g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \leqslant a \\ -\dfrac{e^{\lambda x}}{2\lambda}\displaystyle\int_x^b g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \dfrac{e^{-\lambda x}}{2\lambda}\displaystyle\int_a^x g(t)e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ -\dfrac{e^{-\lambda x}}{2\lambda}\displaystyle\int_a^b g(t)e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant b. \end{cases}$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} y_\lambda(x) = 0$.

2. La fonction $(\lambda, t) \longmapsto g(t)e^{-\lambda t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [a, b]$ donc la fonction $\lambda \longmapsto \int_a^b g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème de continuité des intégrales à paramètres (il est aisé de dominer par une constante lorsque le paramètre λ décrit un segment quelconque de $\mathbb{R}$). On a donc

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_a^b g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Supposons $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. On a alors, quand λ tend vers 0,

$$y_\lambda(x) \sim -\frac{1}{2\lambda}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

si $x \leqslant a$ ou $x \geqslant b$. Si $a \leqslant x \leqslant b$, on écrit

$$y_\lambda(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{2\lambda}\int_a^b g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + \frac{(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{2\lambda}\int_a^x g(t)e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\frac{(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{2\lambda}\int_a^x g(t)e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}(1)$, on obtient encore

$$y_\lambda(x) \sim -\frac{1}{2\lambda}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Supposons maintenant que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Pour trouver le terme suivant on va utiliser le développement à l'ordre 1 de l'exponentielle : $e^u = 1 + u + u\varepsilon(u)$ où ε est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle en 0.

Prenons pour commencer $x \leqslant a$ ou $x \geqslant b$. On a alors

$$\int_a^b g(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = -\lambda\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t - \lambda\int_a^b tg(t)\varepsilon(\lambda t)\mathrm{d}t = -\lambda\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t + o(\lambda)$$

car on voit comme précédemment que la seconde intégrale tend vers 0. Il en découle que $y_\lambda(x)$ tend vers $\frac{1}{2}\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t$ lorsque λ tend vers 0. On obtient la même limite lorsque $x \in [a, b]$. ◁

En poussant le développement limité de l'exponentielle on peut préciser autant qu'on veut le développement en λ de $y_\lambda(x)$.

Les exercices qui suivent concernent le lemme de Gronwall (établi par celui-ci en 1919). Il intervient notamment dans la preuve d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. Rappelons la forme la plus simple de ce résultat (il n'est pas au programme des classes préparatoires mais nous conseillons vivement aux candidats de le connaître) qui suffit pour

résoudre les deux premiers énoncés : soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $f(x) \leqslant \Lambda + \int_0^x f(t)g(t)dt$ pour tout $x \geqslant 0$, g étant positive. Alors on a $f(x) \leqslant \Lambda \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$ pour tout $x \geqslant 0$.

2.28. Application du lemme de Gronwall (1)

Soit y une solution non nulle de $y'' + (1 + p(x))y = 0$, où p est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que p' intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{+\infty} p = 0$.

1. Montrer qu'il existe un réel a tel que, pour tout $x \geqslant 0$, on ait

$$y^2(x) \leqslant a + 2\int_0^x y^2(t)|p'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que y est bornée.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On a $y'y'' = -(1+p)yy'$ et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$y'^2(x) - y'^2(0) = \int_0^x 2y'(t)y''(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x 2(1+p(t))y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= [-(1+p(t))y^2(t)]_0^x + \int_0^x p'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -(1+p(x))y^2(x) + (1+p(0))y^2(0) + \int_0^x p'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$(1+p(x))y^2(x) = y'^2(0) - y'^2(x) + (1+p(0))y^2(0) + \int_0^x p'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant y'^2(0) + (1+p(0))y^2(0) + \int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\lim_{+\infty} p = 0$, il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $1 + p(x) \geqslant \frac{1}{2}$ si $x \geqslant x_0$. Pour $x \geqslant x_0$, on a

$$y^2(x) \leqslant 2((1+p(x))y^2(x) \leqslant a_1 + 2\int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $a_1 = 2(y'^2(0) + (1+p(0))y^2(0))$.

Sur $[0, x_0]$, la fonction continue $x \mapsto y^2(x) - 2\int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée par a_2 et si $a = \max(a_1, a_2)$, on a, pour tout $x \geqslant 0$,

$$y^2(x) \leqslant a + 2\int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient, pour tout $x \geqslant 0$,

$$y^2 \leqslant a\exp\left(2\int_0^x |p'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \leqslant a\exp\left(2\int_0^{+\infty} |p'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

Donc y est bornée. ◁

2.29. Application du lemme de Gronwall (2)

Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que les fonctions $t \longmapsto ta(t)$ et b sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation (E) : $x'' + a(t)x = b(t)$. Soit x une solution de (E). Montrer que x' a une limite finie en $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On va montrer que x' possède une limite finie en $+\infty$ en prouvant que la fonction x'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour cela il suffit de prouver, compte tenu des hypothèses, que la fonction $t \mapsto \dfrac{x(t)}{t}$ est bornée au voisinage de $+\infty$. En effet, on a, pour $t > 0$, $x''(t) = b(t) - \dfrac{x(t)}{t}ta(t)$, avec b et $t \longmapsto ta(t)$ intégrables. On commence par mettre x sous forme intégrale. On a, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(1) + \int_1^t x'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x(1) + [(u-t)x'(u)]_1^t - \int_1^t (u-t)x''(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x(1) + (t-1)x'(1) + \int_1^t (u-t)a(u)x(u) - \int_1^t (u-t)b(u). \end{aligned}$$

On en déduit

$$|x(t)| \leqslant |x(1)| + t|x'(1)| + t\int_1^t |a(u)||x(u)|\,\mathrm{d}u + t\int_1^{+\infty} |b(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Pour $t \geqslant 1$, on pose $\dfrac{|x(t)|}{t} = y(t)$. On a, toujours pour $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leqslant |x(1)| + |x'(1)| + \int_1^t |a(u)||x(u)|\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} |b(u)|\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \mathrm{K} + \int_1^t u|a(u)||y(u)|\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

$\ldots)| + \int_1^{+\infty} |b(u)|\,\mathrm{d}u$. Du lemme de Gronwall, on tire,

$$|y(t)| \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^t u|a(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^{+\infty} u|a(u)|\,\mathrm{d}u\right)$$

$\ldots$ $[1, +\infty[$. Le résultat en découle. ◁

Le fait que x' ait une limite finie ℓ en $+\infty$ implique que $\dfrac{x(t)}{t}$ tend en $+\infty$: la solution x admet une direction asymptotique de pente ℓ.

2.30. Une variante du lemme de Gronwall

Soit $f, g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose $g \geqslant 0$ et

$$\forall t \in [a, b],\ \ 0 \leqslant f(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(u)f(u)\mathrm{d}u.$$

Montrer que : $\forall t \in [a, b],\ \ 0 \leqslant f(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(u)h(u)e^{\int_u^t g}\mathrm{d}u.$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il s'agit de prouver une généralisation du lemme de Gronwall que l'on retrouve lorsque h est une fonction constante. On va donc adapter la démonstration. On pose, pour $t \in [a, b]$, $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_a^t gf$. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ car fg est continue. Par hypothèse on a l'inéquation différentielle $\mathrm{F}' = gf \leqslant gh + g\mathrm{F}$. On peut écrire cela

$$\mathrm{F}' - g\mathrm{F} = gh + \varphi,$$

où $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et négative. On va résoudre cette équation. La fonction $\mathrm{F}_0 : t \longmapsto \exp\displaystyle\int_a^t g$ est solution de l'équation homogène associée. On peut donc écrire $\mathrm{F} = \mathrm{C}\mathrm{F}_0$ où C est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et il vient

$$\mathrm{C}' = \frac{gh + \varphi}{\mathrm{F}_0}.$$

Puisque $\mathrm{C}(a) = \mathrm{F}(a) = 0$, on obtient, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\mathrm{C}(t) = \underbrace{\mathrm{C}(a)}_{=0} + \int_a^t g(u)h(u)\exp\left(-\int_a^u f\right)\mathrm{d}u + \underbrace{\int_a^t \varphi(u)\exp\left(-\int_a^u f\right)\mathrm{d}u}_{\leqslant 0}$$

$$\leqslant \int_a^t g(u)h(u)\exp\left(-\int_a^u f\right)\mathrm{d}u$$

et enfin

$$\mathrm{F}(t) \leqslant \mathrm{F}_0(t)\int_a^t g(u)h(u)\exp\left(\int_a^u f\right)\mathrm{d}u = \int_a^t g(u)f(u)e^{-\int_a^u g + \int_a^t g}\mathrm{d}u.$$

Comme $f \leqslant h + \mathrm{F}$, on conclut que pour tout $t \in [a, b]$

$$\boxed{0 \leqslant f(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(u)h(u)e^{\int_u^t g}\mathrm{d}u}. \quad \triangleleft$$

La résolution de la première question de l'exercice suivant utilise la technique de démonstration du lemme de Gronwall.

2.31. Les solutions de $y'' + ty = 0$ sont bornées

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant 0$, $xf(x) \leqslant c + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est bornée.

2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2, une solution de $y'' + ty = 0$. Montrer que g est bornée.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\mathrm{F}(x) = c + \int_0^x f(t)$. Par hypothèse, on a, pour tout $x \geqslant 0$, $x\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x) \leqslant 0$. Soit φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$. On obtient, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{x\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x)}{x^2} \leqslant 0.$$

La fonction φ décroît. On a par exemple, pour $x \geqslant 1$, $\varphi(x) \leqslant \varphi(1)$ et donc $\mathrm{F}(x) \leqslant x\varphi(1)$. On en déduit, en utilisant de nouveau l'hypothèse, que l'on a $xf(x) \leqslant x\varphi(1)$ et donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(1)$. La fonction f est donc bornée sur $[1, +\infty[$. Étant continue, elle est également bornée sur le compact $[0, 1]$, et finalement elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2. On va appliquer la première question à g^2. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $2g'(t)g''(t) + 2tg(t)g'(t) = 0$. Il en découle que la fonction

$$t \longmapsto g'(t)^2 + \int_0^t 2ug(u)g'(u)\,\mathrm{d}u$$

est constante égale à $g'(0)^2$. En intégrant par parties on a

$$\int_0^t 2ug(u)g'(u)\,\mathrm{d}u = tg(t)^2 - \int_0^t g(u)^2\mathrm{d}u.$$

On en déduit que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$tg(t)^2 = -g'(t)^2 + g'(0)^2 + \int_0^t g(u)^2\,\mathrm{d}u \leqslant g'(0)^2 + \int_0^t g(u)^2\mathrm{d}u.$$

La fonction $g^2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les hypothèses de la première question donc elle est bornée. On en déduit que g est bornée. ◁

2.32. Autour du lemme de Gronwall

Soit $w, b : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues.

1. On suppose que pour $t \geqslant 0$, $w(t) \leqslant \int_0^t w(s)b(s)\mathrm{d}s$. Que dire de w ?

2. Soit a et m dans $[0, 1]$, avec $a < 1$. On suppose que pour $t \geqslant 0$,

$$w(t) \leqslant aw(mt) + \int_0^t w(s)b(s)\mathrm{d}s.$$

Montrer que $w = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Montrons que $w = 0$. Il s'agit d'un cas particulier du lemme de Gronwall. Soit F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\mathrm{F}(t) = \int_0^t w(s)b(s)\mathrm{d}s$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie par hypothèse $\mathrm{F}' \leqslant b\mathrm{F}$. Il en découle que la fonction $t \mapsto \mathrm{F}(t)e^{-\int_0^t b(s)\,ds}$ a une dérivée négative donc est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or F est positive et nulle en 0. Elle est donc identiquement nulle et par conséquent w aussi.

2. Commençons par quelques remarques. On a $w(0) \leqslant aw(0)$ donc $w(0) \leqslant 0$ et par conséquent $w(0) = 0$. Si $a = 0$ ou $m = 0$, on est ramené à la première question et le résultat est acquis. De même si $m = 1$, on obtient, pour tout $t \geqslant 0$,

$$w(t) \leqslant \frac{1}{1-a}\int_0^t w(s)b(s)\mathrm{d}s,$$

ce qui ramène encore à la première question en remplaçant b par $\dfrac{b}{1-a}$.

On suppose donc dorénavant $0 < a < 1$ et $0 < m < 1$.

En réinjectant l'inégalité, on obtient pour $t \geqslant 0$

$$w(t) \leqslant a^2 w(m^2 t) + a\int_0^{mt} wt + \int_0^t wb \leqslant a^2 w(m^2 t) + (a+1)\int_0^t wb,$$

car $mt \leqslant t$ et $wb \geqslant 0$. On montre alors par récurrence sur n que

$$w(t) \leqslant a^n w(m^n t) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)\int_0^1 wb.$$

En effet, on a $w(m^{n-1}t) \leqslant aw(m^n t) + a\int_0^{m^{n-1}t} wb \leqslant aw(m^n t) + a\int_0^t wb$ ce qui donne le résultat compte-tenu de l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$.

Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini pour obtenir

$$w(t) \leqslant 0 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right)\int_0^t wb = \frac{1}{1-a}\int_0^t wb.$$

On conclut grâce à la première question que $w = 0$. ◁

Dans l'énoncé suivant on étudie une perturbation de l'équation différentielle $x'' + x = 0$ et on montre que chaque solution de l'équation perturbée se rapproche asymptotiquement d'une solution de l'équation originale.

2.33. Théorème de Bôcher

Soit q une application continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une solution à valeurs complexes de l'équation différentielle $x'' + (1+q)x = 0$ telle que $x(t) - e^{it}$ tende vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On regarde l'équation (E) $x'' + (1+q)x = 0$ comme une perturbation de l'équation à coefficients constants (E_0) $x'' + x = 0$ dont les solutions complexes sont les fonctions du plan engendré par $t \longmapsto e^{it}$ et $t \longmapsto e^{-it}$.

On écrit l'équation perturbée sous la forme $x'' + x = -qx$ et on applique la méthode de variation des constantes pour écrire une solution x sous une forme intégrale. Posons $x(t) = \mathrm{A}(t)e^{it} + \mathrm{B}e^{-it}$ où A et B sont des fonctions dérivables telles que $\mathrm{A}'(t)e^{it} + \mathrm{B}'(t)e^{-it} = 0$. On obtient alors $x'(t) = i\mathrm{A}(t)e^{it} - i\mathrm{B}(t)e^{-it}$ et $x''(t) = -x(t) + i\mathrm{A}'(t)e^{it} - i\mathrm{B}'(t)e^{-it}$. La fonction x vérifie $x'' + x = -qx$ si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{A}'(t)e^{it} + \mathrm{B}'e^{-it} = 0 \\ i\mathrm{A}'(t)e^{it} - i\mathrm{B}'e^{-it} = -q(t)x(t), \end{cases}$$

ce qui donne $\mathrm{A}'(t) = \frac{1}{2}iq(t)x(t)e^{-it}$ et $\mathrm{B}'(t) = -\frac{1}{2}iq(t)x(t)e^{it}$. En notant $\mathrm{A}(0) = a$ et $\mathrm{B}(0) = b$, on obtient, pour $t \geqslant 0$,

$$x(t) = \left(a + \int_0^t \frac{1}{2}iq(u)x(u)e^{-iu}\mathrm{d}u\right)e^{it} + \left(b - \int_0^t \frac{1}{2}iq(u)x(u)e^{iu}\mathrm{d}u\right)e^{-it}.$$

On va montrer que les deux intégrales ont une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$. Comme q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ il suffit pour cela de montrer que x est bornée. Or cela découle directement du lemme de Gronwall puisque pour tout t on a

$$|x(t)| \leqslant |a| + |b| + \int_0^t |q(u)|\ |x(u)|\ \mathrm{d}u$$

et donc $|x(t)| \leqslant (|a| + |b|)\exp\int_0^t |q(u)|\mathrm{d}u \leqslant (|a| + |b|)\exp\int_0^{+\infty} |q(u)|\mathrm{d}u$. Il existe donc deux constantes complexes α et β telles que, en $+\infty$,

$$x(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it} + o(1).$$

Il est clair que α et β sont uniquement déterminées par la solution x (car la seule fonction du plan $\mathrm{Vect}(e^{it}, e^{-it})$ qui tend vers 0 en $+\infty$ est la fonction nulle). Par ailleurs l'application ψ qui à la solution x de l'équation perturbée (E) associe l'unique solution $y(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$ de (E_0) telle $x(t) - y(t) \to 0$ est clairement linéaire. Pour conclure l'exercice il suffit de prouver que ψ est un isomorphisme entre les deux plans de solutions. Pour cela il suffit d'inverser les rôles des deux équations et de voir (E) comme une perturbation de (E_0). On montre de même qu'à toute solution y de (E_0) on peut associer une solution $x = \varphi(y)$ de (E) telle que $y(t) - x(t) \to 0$ en $+\infty$. Il est alors clair que ψ et φ sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre. ◁

Les deux exercices suivants concernent l'équation différentielle de Mathieu $x'' + (\lambda - 2\varepsilon\cos t)x = 0$ considérée par celui-ci vers 1865 dans l'étude des vibrations d'une membrane elliptique. Le premier est sans difficulté particulière et le second s'intéresse aux solutions périodiques à l'aide des séries de Fourier.

2.34. Équation de Mathieu (1)

Soit (E) l'équation différentielle $u'' + (\lambda - 2\varepsilon\cos x)u = 0$.

1. Établir l'existence et donner le domaine de définition des solutions maximales $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}$ et $\mathrm{S}_{\lambda,\varepsilon}$ telles que

$$\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(0) = 1,\ \mathrm{C}'_{\lambda,\varepsilon}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{\lambda,\varepsilon}(0) = 0,\ \mathrm{S}'_{\lambda,\varepsilon}(0) = 1.$$

2. Montrer que $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}$ est paire et que $\mathrm{S}_{\lambda,\varepsilon}$ est impaire.

3. Montrer que pour tout x,

$$\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(x) = \mathrm{C}_{\lambda,0}(x) + 2\varepsilon \int_0^x \mathrm{S}_{\lambda,0}(x-t)\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(t)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. C'est une simple question de cours : l'équation est linéaire résolue donc les solutions maximales $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}$ et $\mathrm{S}_{\lambda,\varepsilon}$ des problèmes de Cauchy considérés sont définies sur $\mathbb{R}$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

2. Considérons la fonction $u : x \longmapsto \mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(-x)$. On a, pour tout réel x,

$$u''(x) = \mathrm{C}''_{\lambda,\varepsilon}(-x) = -(\lambda - 2\varepsilon\cos x)\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(-x) = -(\lambda - 2\varepsilon\cos x)u(x).$$

Ainsi u est solution de l'équation différentielle (E). On a de plus $u(0) = \mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(0) = 1$ et $u'(0) = -\mathrm{C}'_{\lambda,\varepsilon}(0) = 0$. Par unicité de la solution, on en déduit que $u = \mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}$ et donc que $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}$ est paire.

En considérant la fonction $v : x \longmapsto -\mathrm{S}_{\lambda,\varepsilon}(-x)$, on montre de même que $\mathrm{S}_{\lambda,\varepsilon}$ est impaire.

3. On écrit l'équation sous la forme $u'' + \lambda u = 2\varepsilon\cos x\, u(x)$. Les fonctions $\mathrm{C}_{\lambda,0}$ et $\mathrm{S}_{\lambda,0}$ constituent une base de l'équation sans second membre, car leur wronskien (dont on sait qu'il est constant) vaut $\begin{vmatrix} \mathrm{C}_{\lambda,0}(0) & \mathrm{S}_{\lambda,0}(0) \\ \mathrm{C}'_{\lambda,0}(0) & \mathrm{S}'_{\lambda,0}(0) \end{vmatrix} = 1$. On considère la fonction $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}$ comme solution de l'équation avec second membre, celui-ci étant $2\varepsilon\cos x\,\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(x)$.

On applique la méthode de la variation des constantes. On pose $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon} = \mathrm{A}\mathrm{C}_{\lambda,0} + \mathrm{B}\mathrm{S}_{\lambda,0}$, où A et B sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\mathrm{A}'\mathrm{C}_{\lambda,0} + \mathrm{B}'\mathrm{S}_{\lambda,0} = 0$. On trouve $\mathrm{C}'_{\lambda,\varepsilon} = \mathrm{A}\mathrm{C}'_{\lambda,0} + \mathrm{B}\mathrm{S}'_{\lambda,0}$, puis

$$\mathrm{C}''_{\lambda,\varepsilon} + \lambda\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon} = \mathrm{A}'\mathrm{C}'_{\lambda,0} + \mathrm{B}'\mathrm{S}'_{\lambda,0}.$$

On en déduit que $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(0) = \mathrm{A}(0) = 1$ et $\mathrm{C}_{\lambda,\varepsilon}(0) = \mathrm{B}(0) = 0$ et que A' et B' vérifient le système

$$\begin{cases} A'C_{\lambda,0} + B'S_{\lambda,0} = 0 \\ A'C'_{\lambda,0} + B'S'_{\lambda,0} = 2\varepsilon \cos C_{\lambda,\varepsilon} \end{cases}$$

Comme le déterminant du système vaut 1, on obtient

$$A' = -2\varepsilon \cos x C_{\lambda,\varepsilon}(x) S_{\lambda,0}(x) \quad \text{et} \quad B' = 2\varepsilon \cos x C_{\lambda,\varepsilon}(x) C_{\lambda,0}(x).$$

Compte tenu des conditions initiales, on en déduit que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} C_{\lambda,\varepsilon}(x) &= A(x)C_{\lambda,0}(x) + B(x)S_{\lambda,0}(x) \\ &= \left(1 - 2\varepsilon \int_0^x \cos(t) C_{\lambda,\varepsilon}(t) S_{\lambda,0}(t) \mathrm{d}t\right) C_{\lambda,0}(x) \\ &\qquad + 2\varepsilon \left(\int_0^x \cos(t) C_{\lambda,\varepsilon}(t) S_{\lambda,0}(t) \mathrm{d}t\right) S_{\lambda,0}(x) \\ &= C_{\lambda,0}(x) + 2\varepsilon \int_0^x \Big(C_{\lambda,0}(t)S_{\lambda,0}(x) - S_{\lambda,0}(t)C_{\lambda,0}(x)\Big) \cos t \, C_{\lambda,\varepsilon}(t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$C_{\lambda,0}(t)S_{\lambda,0}(x) - S_{\lambda,0}(t)C_{\lambda,0}(x) = S_{\lambda,0}(x-t).$$

Pour t fixé, la fonction $\varphi : x \longmapsto C_{\lambda,0}(t)S_{\lambda,0}(x) - S_{\lambda,0}(t)C_{\lambda,0}(x)$ est une solution de l'équation $u'' + \lambda u = 0$. On vérifie aisément qu'il en est de même de $\psi : x \longmapsto S_{\lambda,0}(x-t)$. On a $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ et $\varphi'(t) = \psi'(t) = 1$ donc par unicité de la solution, on en déduit que $\varphi = \psi$, ce qui termine la démonstration. Cette approche a le mérite d'éviter d'expliciter les fonctions $C_{\lambda,0}$ et $S_{\lambda,0}$ ce qui nécessiterait de discuter selon le signe de λ. ◁

2.35. Équation de Mathieu (2)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et u une application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation différentielle

$$u'' + (\lambda - 2\cos x)u = 0 \qquad (1)$$

1. Trouver une relation de récurrence entre les coefficients de Fourier de u.

2. On note E l'ensemble des suites complexes bornées indexées par $\mathbb{Z}$ vérifiant la relation de récurrence déterminée dans la question 1. Montrer que $\dim E \leqslant 1$ et que les suites de E sont soit paires, soit impaires.

3. On suppose $\dim E = 1$. Montrer que (1) possède une solution périodique non triviale.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(u'') = (in)^2 c_n(u)$ et, en notant e_k la fonction $t \longmapsto e^{ikt}$, $c_n(2(\cos x)u) = c_n(e_1 u + e_{-1}u) = c_{n-1}(u) + c_{n+1}(u)$. Si u vérifie l'équation différentielle, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$0 = c_n(u'') + \lambda c_n(u) - c_n(2\cos u) = -n^2 c_n(u) + \lambda c_n(u) - c_{n-1}(u) - c_{n+1}(u),$$

c'est-à-dire

$$(n^2 - \lambda)c_n(u) + c_{n-1}(u) + c_{n+1}(u) = 0.$$

2. On cherche donc l'ensemble des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, bornées et vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 - \lambda)c_n + c_{n-1} + c_{n+1}$. L'ensemble E est clairement un espace vectoriel. Montrons qu'il est de dimension inférieure ou égale à 1.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites de E. Montrons qu'elles sont colinéaires. Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} c_n & d_n \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{vmatrix}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & d_{n-1} \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda - n^2)c_n - c_{n+1} & (\lambda - n^2)d_n - d_{n+1} \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -c_{n+1} & -d_{n+1} \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

donc la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est constante. Par ailleurs, on a, pour n assez grand

$$c_n = -\frac{c_{n-1} + c_{n+1}}{n^2 - \lambda}.$$

Comme $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. On a le même résultat pour $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$. La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant constante, c'est la suite nulle, et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n d_{n+1} = c_{n+1} d_n$.

Supposons que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas nulle ; considérons $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $c_{n_0} \neq 0$ et $\lambda = \dfrac{d_{n_0}}{c_{n_0}}$. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que $d_k = \lambda c_k$ pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$. Si $c_n \neq 0$, on a $d_{n+1} = \dfrac{c_{n+1}d_n}{c_n} = \lambda c_{n+1}$. Si $c_n = 0$, alors $d_n = 0$ et d'après la relation de récurrence $c_{n+1} = -c_{n-1}$ et $d_{n+1} = -d_{n-1} = -\lambda c_{n-1} = \lambda c_{n+1}$. On a donc $d_n = \lambda c_n$ pour tout $n \geqslant n_0$; on montre qu'il en est de même pour $n \leqslant n_0$. Finalement $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \lambda(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\dim \mathrm{E} \leqslant 1$.

Montrons que toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de E est paire ou impaire. On peut supposer que $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas la suite nulle. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par $d_n = c_{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a pour tout n,

$$(n^2 - \lambda)d_n + d_{n+1} + d_{n-1} = (n^2 - \lambda)c_{-n} + c_{-n-1} + c_{-n+1}$$
$$= (m^2 - \lambda)c_m + c_{m+1} + c_{m-1} = 0,$$

où l'on a posé $m = -n$. Ainsi $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{E}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \lambda(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On a en particulier $d_0 = c_0 = \lambda c_0$.

• Si $c_0 \neq 0$, alors $\lambda = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_{-n} = d_n = c_n$: la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est paire.

• Si $c_0 = 0$, on a alors $c_1 + c_{-1} = 0$, *i.e.* $d_1 = -c_1$. Comme $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas la suite nulle, on a $c_1 \neq 0$. En effet $c_k = c_{k+1} = 0$ implique $c_{k-1} = c_{k+2} = 0$, donc si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a deux termes consécutifs nuls, c'est la suite nulle. On a donc $\lambda = -1$: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_{-n} = d_n = -c_n$: la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est impaire.

3. On suppose que $\dim \mathrm{E} = 1$. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite non nulle de E. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|c_n| \leqslant \mathrm{K}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit n_0 tel que $n_0^2 > |\lambda|$. Pour $|n| \geqslant n_0$, on a

$$|c_n| = \left|\frac{c_{n-1} + c_{n+1}}{n^2 - \lambda}\right| \leqslant \frac{2\mathrm{K}}{n^2 - |\lambda|}.$$

On en déduit, pour $|n| \geqslant n_0 + 1$,

$$|c_n| = \left|\frac{c_{n-1} + c_{n+1}}{n^2 - \lambda}\right| \leqslant \frac{\dfrac{2\mathrm{K}}{(n-1)^2 - |\lambda|} + \dfrac{2\mathrm{K}}{(n+1)^2 - |\lambda|}}{n^2 - |\lambda|}$$

et donc $|c_n| = O\left(\dfrac{1}{n^5\varepsilon}\right)$ lorsque $n \to \pm\infty$.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$. La série définissant u est normalement convergente ; il en est de même de la série dérivée et de la série dérivée seconde ; on en déduit que u est définie sur $\mathbb{R}$ et, en appliquant deux fois le théorème de dérivation des séries de fonctions, de classe $\mathcal{C}^2$. Comme la série définissant u est normalement convergente, les c_n sont les coefficients de Fourier de u. Par construction, les coefficients de Fourier de la fonction continue $u'' + (\lambda - 2\cos x)u$ sont tous nuls donc $u'' + (\lambda - 2\cos x)u = 0$ et u est solution de (1), 2π-périodique et non nulle puisque $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas la suite nulle. Par ailleurs, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant paire ou impaire, on a selon les cas,

$$u(x) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(nx) \quad \text{ou} \quad u(x) = 2i\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(nx). \quad \triangleleft$$

Le résultat suivant a parfois été proposé avec un énoncé plus détaillé imposant la méthode. Il y a en effet plusieurs solutions possibles mais la méthode de variation des constantes que nous utilisons se révèle très efficace.

2.36. Inégalité de Liapounov

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + fy = 0$ vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On sait que les zéros de u sont isolés, donc en nombre fini dans le segment $[a, b]$ (voir l'exercice 2.38). Quitte à remplacer a et b par deux zéros consécutifs de u (ce qui donne un minorant plus grand) on peut supposer que u ne s'annule pas sur $]a, b[$ et, quitte à la remplacer par $-u$, qu'elle est strictement positive. On va obtenir une écriture intégrale de u en appliquant la méthode de variation des constantes à l'équation $y'' = -fy$. Pour exploiter les conditions au bord, on utilise une base de solutions de l'équation $y'' = 0$ formée d'une solution nulle en a et d'une solution nulle en b. On écrit u sous la forme

$$u(x) = (x-a)\mathrm{A}(x) + (b-x)\mathrm{B}(x)$$

avec $(x-a)\mathrm{A}'(x) + (b-x)\mathrm{B}'(x) = 0$. On obtient $u'(x) = \mathrm{A}(x) - \mathrm{B}(x)$ puis $u''(x) = \mathrm{A}'(x) - \mathrm{B}'(x) = -f(x)u(x)$ ce qui donne

$$(b-a)\mathrm{A}'(x) = -(b-x)f(x)u(x) \text{ et } (b-a)\mathrm{B}'(x) = (x-a)f(x)u(x).$$

Comme $u(a) = 0$ on a $\mathrm{B}(a) = 0$ et comme $u(b) = 0$ on a $\mathrm{A}(b) = 0$. D'où finalement

$$(b-a)u(x) = (x-a)\int_x^b (b-t)f(t)u(t)\mathrm{d}t + (b-x)\int_a^x (t-a)f(t)u(t)\mathrm{d}t.$$

Plaçons nous alors en un point x de $[a, b]$ en lequel la fonction positive u atteint son maximum $\mathrm{M} > 0$. On a

$$\begin{aligned}
(b-a)\mathrm{M} &= \left|(b-x)\int_a^x (t-a)f(t)u(t)\mathrm{d}t + (x-a)\int_x^b (b-t)f(t)u(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant (b-x)\int_a^x (t-a)|f(t)|\,u(t)\mathrm{d}t + (x-a)\int_x^b (b-t)|f(t)|u(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{M}(b-x)\int_a^x (t-a)|f(t)|\,\mathrm{d}t + \mathrm{M}(x-a)\int_x^b (b-t)|f(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{M}(b-x)(x-a)\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t + \mathrm{M}(x-a)(b-x)\int_x^b |f(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{M}(b-x)(x-a)\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

..... des nombres $(b-x)$ et $(x-a)$ dont la somme est $b-a$ est maximal quand ils sont égaux, *i.e.* pour $x = \dfrac{a+b}{2}$. On obtient la majoration $(b-x)(x-a) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ et donc, puisque $\mathrm{M} > 0$, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}$. ◁

Cette inégalité permet de démontrer un critère de stabilité pour les équations de la forme $y'' + qy = 0$ avec q continue et périodique (l'équation de Mathieu vue plus haut en est un exemple). C'est ce que propose l'exercice suivant.

2.37. Théorème de stabilité de Liapounov

Soient $\mathrm{T} > 0$ et $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Soient S l'espace des solutions réelles de (E) $y'' + qy = 0$, y_1 (resp. y_2) l'élément de S défini par $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ (resp. $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$).

1. Montrer que si $f \in \mathrm{S}$ il en est de même de $f_\mathrm{T} : x \mapsto f(x+\mathrm{T})$. On note Φ l'endomorphisme de S qui à f associe f_T et A sa matrice dans la base (y_1, y_2).

2. Calculer le déterminant de A.

3. On suppose que $|\operatorname{Tr} \mathrm{A}| < 2$. Montrer que tout élément de S est borné sur $\mathbb{R}$.

4. On suppose $q \geqslant 0$ et non identiquement nulle. Montrer que tout élément de S s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.

5. On suppose q positive non nulle et telle que $\mathrm{T}\displaystyle\int_0^\mathrm{T} q < 4$. En admettant le résultat de l'exercice précédent, montrer que les solutions de (E) sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Soit $f \in \mathrm{S}$. Pour tout réel x on a $f_\mathrm{T}''(x) = f''(x+\mathrm{T})$ donc, par T-périodicité de q, $f_\mathrm{T}''(x) + q(x) f_\mathrm{T}(x) = f''(x+\mathrm{T}) + q(x+\mathrm{T}) f(x+\mathrm{T}) = 0$. Ainsi $f_\mathrm{T} \in \mathrm{S}$.

2. Si $f \in \mathrm{S}$, les coordonnées de f dans la base (y_1, y_2) sont $(f(0), f'(0))$. On a $\Phi(y_1)(0) = y_1(\mathrm{T})$ et $\Phi(y_1)'(0) = y_1'(\mathrm{T})$ et de même avec y_2. Ainsi $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} y_1(\mathrm{T}) & y_2(\mathrm{T}) \\ y_1'(\mathrm{T}) & y_2'(\mathrm{T}) \end{pmatrix}$ et le déterminant de A n'est autre que $\mathrm{W}(\mathrm{T})$, le wronskien en T du système fondamental de solutions (y_1, y_2). Or $\mathrm{W}' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = -q y_1 y_2 + q y_1 y_2 = 0$ si bien que W est constant. On a donc $\mathrm{W}(\mathrm{T}) = \mathrm{W}(0) = 1$.

3. Le polynôme caractéristique de A est $\mathrm{X}^2 - (\operatorname{Tr} \mathrm{A})\mathrm{X} + 1$ et son discriminant vaut $(\operatorname{Tr} \mathrm{A})^2 - 4$. Si $|\operatorname{Tr} \mathrm{A}| < 2$ la matrice A admet deux

valeurs propres complexes conjuguées λ et $\bar{\lambda}$. Les deux valeurs propres de A sont de module 1 car $\det \mathrm{A} = \lambda\bar{\lambda} = 1$. L'endomorphisme Φ de S se prolonge naturellement à l'espace S′ des solutions complexes de (E). Soient u_1 et u_2 dans S′, fonctions propres de Φ associées respectivement à λ et λ'. On a pour $i = 1, 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u_i(x + \mathrm{T}) = \lambda u_i(x)$ donc la fonction $|u_i|$ est T-périodique et par conséquent bornée. Comme (u_1, u_2) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel S′ toutes les solutions complexes de (E) sont bornées. En particulier toutes les solutions réelles sont bornées sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $y \in \mathrm{S}$. Supposons que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Elle y garde donc un signe constant et l'on peut supposer $y > 0$ quitte à prendre $-y$. On a alors $y'' = -qy \leqslant 0$ et y est concave sur $\mathbb{R}$. Or il est facile de voir qu'une fonction concave et minorée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement constante. On a donc $qy = -y'' = 0$ et comme q n'est pas identiquement nulle il vient $y = 0$. C'est absurde.

Supposons maintenant que y s'annule en un unique point x_0. On a alors $y'(x_0) \neq 0$ et y change de signe en x_0. On peut supposer $y < 0$ sur $]-\infty, x_0[$ et $y > 0$ sur $]x_0, +\infty[$ quitte à prendre $-y$. La fonction y est alors concave sur $[x_0, +\infty[$. Comme y' est décroissante sur cet intervalle elle possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$. Si $\ell < 0$ alors $y(x) \to -\infty$ en $+\infty$ ce qui est impossible. Donc $\ell \geqslant 0$ et y' est positive sur $[x_0, +\infty[$. Ainsi y est croissante sur cet intervalle et possède une limite $\ell' > 0$ en $+\infty$. Pour x assez grand on a alors $y''(x) \leqslant -\frac{1}{2}\ell' q(x)$. Comme q est périodique non nulle, elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ donc y'' ne l'est pas non plus et $\lim\limits_{+\infty} y' = -\infty$ ce qui est absurde.

On montre en fait avec cet argument que l'ensemble des zéros de y n'est ni majoré ni minoré.

5. On va bien entendu essayer de montrer que $|\operatorname{Tr} \mathrm{A}| < 2$ avec les hypothèses faites sur q. Raisonnons pas l'absurde et supposons $|\operatorname{Tr} \mathrm{A}| \geqslant 2$. La matrice A a alors une valeur propre réelle λ (éventuellement double). Soit $u \in \mathrm{S}$ une fonction propre de Φ pour cette valeur propre λ : on a $u(x + \mathrm{T}) = \lambda u(x)$ pour tout x. D'après la question précédente, u admet au moins deux zéros. Soit $a < b$ deux tels zéros. Comme $y(a + \mathrm{T}) = \lambda y(a) = 0$ on peut supposer $b \leqslant a + \mathrm{T}$. D'après l'inégalité de Liapounov montrée dans l'exercice précédent on a $(b - a)\int_a^b q \geqslant 4$. Or, $(b - a)\int_a^b q \leqslant \mathrm{T}\int_a^{a+\mathrm{T}} q = \mathrm{T}\int_0^{\mathrm{T}} q$ et cela contredit l'hypothèse. D'où le résultat. ◁

La série d'exercices suivante est consacrée à l'étude des zéros des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre. Le premier fait observer que les zéros d'une solution non nulle sont toujours isolés puis fait démontrer le principe d'entrelacement de Sturm.

2.38. Théorème d'entrelacement de Sturm

Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont des fonctions réelles continues sur un intervalle I. Montrer que les zéros de y_1 sont isolés et qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 il y a un unique zéro de y_2.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Raisonnons par l'absurde et supposons que α est un zéro non isolé de y_1. Il existe une suite (x_n) non stationnaire de zéros de y_1 qui converge vers α. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{y_1(x_n) - y_1(\alpha)}{x_n - \alpha} = 0$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $y_1'(\alpha) = 0$. La fonction y_1 vérifie donc $y_1(\alpha) = y_1'(\alpha) = 0$ et par unicité de la solution de l'équation différentielle de conditions initiales données, y_1 est la fonction nulle. C'est impossible car y_1 et y_2 sont indépendantes.

Traitons la deuxième question encore par l'absurde. Supposons que $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de y_1 et que y_2 ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$. Considérons le wronskien $\mathrm{W} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$. Comme les deux solutions sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas. Il garde donc un signe constant. Cela montre que y_2 ne peut s'annuler ni en α, ni en β. Soit alors $f = \dfrac{y_1}{y_2}$ sur le segment $[\alpha, \beta]$. On a $f' = -\dfrac{\mathrm{W}}{y_2^2}$ qui est de signe constant, donc f est strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$ ce qui est absurde puisqu'elle est nulle au bord.

Supposons que y_2 s'annule deux fois sur cet intervalle. Les fonctions y_1 et y_2 jouant le même rôle, on en déduirait que y_1 s'annule entre ces deux zéros de y_2. Cela est impossible car α et β sont deux zéros consécutifs de y_1. La fonction y_2 s'annule donc une seule fois sur $]\alpha, \beta[$. ◁

Les exercices suivants concernent les zéros des solutions de l'équation $y'' + qy = 0$. *Le signe de* q *joue un rôle très important comme on le constate déjà avec* q *constante : si la constante est strictement positive on a des solutions en sinus et cosinus qui s'annulent une infinité de fois (on parle de solutions oscillantes) et si elle est strictement négative on a des solutions en cosinus et sinus hyperbolique qui s'annulent au plus une fois. Cela est assez intuitif. Si* $q > 0$, *en un point* x *tel que* $y(x) > 0$ *la dérivée seconde est strictement négative et* y *est concave au voisinage de* x *donc elle aura tendance à retourner vers* 0. *Si en revanche* $q < 0$ *la*

dérivée seconde en x a le même signe que $y(x)$ et la fonction s'éloigne encore plus de 0. Les exercices vont préciser tout cela.

2.39. Équation $y'' + qy = 0$ avec q strictement négative

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement négative et y solution de (E) : $y'' + qy = 0$.

1. Montrer que y^2 est convexe. La fonction y peut-elle être bornée ?

2. On suppose que y n'est pas nulle. Montrer que y et y' s'annulent au plus une fois.

3. Montrer que $\dfrac{y^2(x)}{x}$ a une limite en $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La fonction y^2 est de classe C^1. On a $(y^2)' = 2yy'$ et

$$(y^2)'' = 2y'^2 + 2yy'' = 2y'^2 - 2qy^2 \geqslant 0,$$

car q est négative. On en déduit que y^2 est convexe.

Montrons que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée est constante. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après le théorème des pentes croissantes, la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$. Sa limite en $\pm\infty$ est 0 car f est bornée. On a donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$, *i.e.* $f(x) \leqslant f(a)$ si $x > a$ donc f est décroissante, et $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$, *i.e.* $f(x) \leqslant f(a)$ si $x < a$ donc f est croissante. Elle est donc constante.

Si y est bornée, y^2 l'est aussi, donc y^2 est constante, puisqu'elle est convexe. La fonction y étant continue, elle est également constante. On en déduit que $y'' = -qy = 0$. Comme $q < 0$, la constante est nulle. La seule solution bornée de l'équation différentielle est la fonction nulle.

2. Plusieurs rédactions sont possibles.

• Supposons que y s'annule en deux points $a < b$. Il en est de même de y^2. Comme celle-ci est convexe elle est négative sur $[a, b]$ et donc nulle sur cet intervalle. Par conséquent y est nulle sur $[a, b]$ donc $y(a) = y'(a) = 0$ et y est identiquement nulle.

• Voici une autre rédaction avec des intégrales. Supposons toujours que y s'annule en deux points $a < b$. En multipliant l'équation par y et en intégrant par parties sur $[a, b]$ il vient

$$\int_a^b qy^2 = -\int_a^b y''y = -[y'y]_a^b + \int_a^b y'^2 = \int_a^b y'^2.$$

L'intégrale de gauche est négative et celle de droite positive. Elle sont donc nulles toutes les deux et on en déduit encore que y est nulle sur $[a, b]$.

Passons maintenant à la dérivée et supposons que $y'(a) = y'(b) = 0$ avec $a < b$. On a encore l'égalité $\int_a^b qy^2 = \int_a^b y'^2$ ce qui permet de conclure comme précédemment.

3. Comme y^2 est convexe, la fonction $x \longmapsto \dfrac{y^2(x) - y^2(0)}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$, d'après le théorème des pentes croissantes. On en déduit qu'elle possède en $+\infty$ une limite finie ou égale à $+\infty$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{y^2(x)}{x}$ possède la même limite en $+\infty$. ◁

Voici une variante avec une fonction coefficient à valeurs complexes.

2.40. Solutions non nulles s'annulant au plus une fois

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $p \in C^0(\mathrm{I}, \mathbb{C})$ et u une solution de l'équation différentielle $y'' + py = 0$.

1. On suppose que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{Re}(p(t)) \leqslant 0$. Montrer que si u s'annule deux fois, alors $u = 0$.

2. On suppose que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{Im}(p(t)) \neq 0$. Montrer que si u s'annule deux fois, alors $u = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Toute solution de l'équation différentielle est définie sur I. Supposons que u s'annule en a et b. On multiplie l'équation par $\overline{u}$, ce qui donne $p|u|^2 = -u''\overline{u}$. On obtient, en intégrant par parties,

$$\int_a^b p|u|^2 = -\int_a^b u''\overline{u} = -[u'\overline{u}]_a^b + \int_a^b |u'|^2 = \int_a^b |u'|^2.$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient

$$\int_a^b \mathrm{Re}(p)|u|^2 = \int_a^b |u'|^2 \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathrm{Im}(p)|u|^2 = 0.$$

1. Si $\mathrm{Re}(p) \leqslant 0$, on a $\int_a^b \mathrm{Re}(p)|u|^2 \leqslant 0$ et donc $\int_a^b |u'|^2 \leqslant 0$. Mais, comme l'intégrande est positive, cette intégrale est aussi positive, donc nulle. On en déduit que, pour tout $t \in [a, b]$, $|u'(t)|^2 = 0$, donc $u'(t) = 0$. La fonction u est constante sur $[a, b]$, et donc nulle sur $[a, b]$, puisque $u(a) = 0$. On a alors $u(a) = u'(a) = 0$ donc u est la solution identiquement nulle sur I.

2. Si $\mathrm{Im}(p)$ ne s'annule pas, elle garde un signe constant puisqu'elle est continue. La fonction continue $\mathrm{Im}(p)|u|^2$ a aussi un signe constant et comme son intégrale sur $[a,b]$ est nulle, sa restriction à $[a,b]$ est nulle. Comme $\mathrm{Im}(p)$ ne s'annule pas, la restriction de u à $[a,b]$ est nulle. On conclut comme dans la première question que u est la fonction nulle. ◁

L'énoncé suivant est plus difficile, notamment la seconde question, car la régularité sur q est faible. Le lecteur pourra commencer par traiter le cas où q est de classe C^1. Un exemple de cette situation sera détaillé dans un exercice un peu plus loin.

2.41. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (1)

Soient $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et croissante telles que $y'' + qy = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y n'est pas majoré.

2. Montrer que y est bornée.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que y ne s'annule pas sur $[a,+\infty[$. Quitte à changer y en $-y$, on peut supposer que y est strictement positive sur $[a,+\infty[$.

On a $y'' = -qy < 0$ donc y' décroissante sur $[a,+\infty[$. La fonction y' a une limite ℓ finie ou égale à $-\infty$ en $+\infty$. Si $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$, y a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit le fait qu'elle est positive. On a donc $\ell \geqslant 0$ et comme y' décroît, elle est positive sur $[a,+\infty[$. La fonction y croît. Les fonctions q et y sont positives et croissantes donc yq croît et $y'' = -qy$ décroît. Comme elle est strictement négative, elle tend vers une limite strictement négative et y' tend vers $-\infty$, ce qui contredit ce qui précède.

On peut conclure que l'ensemble des zéros de y n'est pas majoré.

Le résultat s'obtient aussi facilement avec le théorème de Sturm (voir l'exercice 2.43).

2. On a $2y'y'' = -2qyy'$ et donc, pour $x \geqslant 0$,

$$y'^2(x) - y'^2(0) = \int_0^x 2y'(t)y''(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x 2q(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Supposons pour commencer que q est de classe C^1. On obtient alors, en intégrant par parties,

$$y'^2(x) - y'^2(0) = -\left[q(t)y^2(t)\right]_0^x + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que, pour $x \geqslant 0$,

$$q(x)y^2(x) = q(0)y^2(0) + y'^2(0) - y'^2(x) + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant q(0)y^2(0) + y'^2(0) + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on note $\mathrm{M}(x) = \sup_{[0,x]} y^2$. Soit $\mathrm{X} \geqslant 0$. Comme q' est positive, puisque q est croissante, on a pour tout $x \in [0, \mathrm{X}]$,

$$q(x)y^2(x) \leqslant q(0)y^2(0) + y'^2(0) + \int_0^x q'(t)\mathrm{M}(\mathrm{X})\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \mathrm{K} + \mathrm{M}(\mathrm{X})(q(x) - q(0)),$$

où $\mathrm{K} = q(0)y^2(0) + y'^2(0)$. Soit $x_0 \in [0, \mathrm{X}]$ tel que $y^2(x_0) = \mathrm{M}(\mathrm{X})$. On obtient

$$q(x_0)\mathrm{M}(\mathrm{X}) = q(x_0)y^2(x_0) \leqslant \mathrm{K} + \mathrm{M}(\mathrm{X})(q(x_0) - q(0))$$

et donc $\mathrm{M}(\mathrm{X})q(0) \leqslant \mathrm{K}$ soit $\mathrm{M}(\mathrm{X}) \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{q(0)}$. On a donc, pour tout $\mathrm{X} \geqslant 0$,

$y^2(\mathrm{X}) \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{q(0)}$ et donc $|y(\mathrm{X})| \leqslant \dfrac{\sqrt{\mathrm{K}}}{\sqrt{q(0)}}$. La fonction y est bornée.

• Si q est seulement continue, on utilise la deuxième formule de la moyenne dont nous rappelons l'énoncé (et dont le lecteur trouvera une preuve dans l'exercice 1.26 du tome analyse 2). Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, avec f positive et décroissante. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \geqslant 0$, on écrit

$$y'^2(x) - y'^2(0) = -\int_0^x 2q(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^x 2q(x)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x 2(q(x) - q(t))y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto q(x) - q(t)$ est positive et décroissante sur $[0, x]$ car q est croissante, donc il existe $c \in [0, x]$ tel que

$$\int_0^x 2(q(x) - q(t))y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = (q(x) - q(0))\int_0^c 2y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= (q(x) - q(0))(y^2(c) - y^2(0)).$$

D'autre part $\int_0^x 2q(x)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = q(x)(y^2(x) - y^2(0))$. On obtient

$$\begin{aligned} y'^2(x) - y'^2(0) &= -q(x)(y^2(x) - y^2(0)) + (q(x) - q(0))(y^2(c) - y^2(0)) \\ &= -y^2(x)q(x) + q(0)y^2(0) + y^2(c)(q(x) - q(0)). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $\mathrm{X} \geqslant 0$ et $x \in [0, \mathrm{X}]$

$$\begin{aligned} y^2(x)q(x) &= \mathrm{K} - y'^2(x) + y^2(c)(q(x) - q(0)) \\ &\leqslant \mathrm{K} + y^2(c)(q(x) - q(0)) \leqslant \mathrm{K} + \mathrm{M}(\mathrm{X})(q(x) - q(0)), \end{aligned}$$

et on termine la démonstration comme dans le premier cas. ◁

Dans le cas où q est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donner une preuve plus rapide en introduisant la fonction $\mathrm{E} = y^2 + \dfrac{y'^2}{q}$. *En effet, on a alors* $\mathrm{E}' = 2yy' + \dfrac{2y'y''}{q} - \dfrac{y'^2q'}{q^2} = -\dfrac{y'^2q'}{q^2} \leqslant 0$, *donc* E *est décroissante et comme elle est positive, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Il en découle que y^2, et donc y, est bornée.*

L'exercice suivant reprend une partie du précédent (avec ici une fonction de classe $\mathcal{C}^1$), puis fait montrer un cas particulier du théorème de Sturm qui sera vu de manière générale dans l'exercice d'après.

2.42. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (2)

Soit q une application strictement positive et strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que toute solution y de $y'' + qy = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Dans la suite, on considère une solution y non nulle.

2. On pose $q(0) = \omega_0^2$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ il existe toujours un zéro de y. En déduire une majoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.

3. On suppose à présent que $\lim_{+\infty} q = \omega_1^2$. Déterminer une minoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Voir la solution dans l'exercice précédent.

2. Posons $z : t \longmapsto \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et considérons $\mathrm{W} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$. On a

$$\mathrm{W}' = \begin{vmatrix} y & z \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ -qy & -\omega_0^2 z \end{vmatrix} = yz(q - \omega_0^2).$$

Soit $a < b$ deux zéros consécutifs de z. On a $q - \omega_0^2 > 0$ sur $]a, b[$ car q croît. Quitte à changer z en son opposé, on peut supposer $z > 0$ sur $]a, b[$. Si y ne s'annule pas sur $]a, b[$, on peut la supposer elle aussi strictement positive. On a alors $W' > 0$: la fonction W croît strictement sur $[a, b]$. On a par hypothèse $W(a) = y(a)z'(a)$ et $y(a) \geqslant 0$. Comme z est positive sur $]a, b[$ et nulle en a, on a $z'(a) \geqslant 0$. On en déduit $W(a) \geqslant 0$. De même, on obtient $W(b) = y(b)z'(b)$, $y(b) \geqslant 0$ et $z'(b) \leqslant 0$, donc $W'(b) \leqslant 0$. La fonction W croît strictement d'une valeur positive à une valeur négative ce qui est absurde. Donc y s'annule sur $]a, b[$.

On en déduit en particulier que y possède une infinité de zéros dans $\mathbb{R}_+$. On sait par ailleurs que ces zéros sont isolés et il est donc possible de les ranger en une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geqslant 0}$ qui diverge vers $+\infty$. Considérons la fonction $z : t \longmapsto \sin(\omega_0(t - t_n))$, qui vérifie $z(t_n) = z\left(t_n + \dfrac{\pi}{\omega_0}\right) = 0$. D'après ce qui précède, y s'annule sur $\left]t_n, t_n + \dfrac{\pi}{\omega_0}\right[$. On a donc $0 < t_{n+1} - t_n < \dfrac{\pi}{\omega_0}$: la distance entre deux zéros consécutifs de y est inférieure à $\dfrac{\pi}{\omega_0}$.

3. On procède de même en échangeant le rôle des deux équations. Soit $a < b$ deux zéros consécutifs de y. Montrons que la fonction $z : t \longmapsto \sin(\omega_1(t - a))$ s'annule sur $]a, b[$. Si z ne s'annule pas sur $]a, b[$, on peut supposer que $z > 0$ sur $]a, b[$ et de même, comme a et b sont deux zéros consécutifs de y, y ne s'annule pas et on peut supposer qu'elle est strictement positive. De nouveau, on considère $W = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$. On obtient

$$W' = \begin{vmatrix} y & z \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ -qy & -\omega_0^2 z \end{vmatrix} = yz(q - \omega_1^2) < 0,$$

car q est strictement croissante. On a $W(a) = 0$ et $W(b) = -y'(b)z(b)$. Par hypothèse $z(b) > 0$ et $y'(b) < 0$, car $y(b) = 0$ et $y > 0$ sur $]a, b[$ (on ne peut pas avoir $y'(b) = 0$ car sinon y est la fonction nulle) donc $W(b) > 0$. C'est contradictoire avec la décroissance de W. Donc z s'annule sur $]a, b[$. Comme le premier zéro de z après a est $a + \dfrac{\pi}{\omega_1}$, on a $b - a > \dfrac{\pi}{\omega_1}$. La distance entre deux zéros consécutifs de y est supérieure à $\dfrac{\pi}{\omega_1}$. ◁

Dans l'exercice suivant, on démontre l'important théorème de Sturm dans le cas général (c'est une question très classique), et on donne pour application l'étude asymptotique de la suite des zéros d'une solution non nulle de $y'' + e^t y = 0$.

2.43. Théorème de Sturm (1836)

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q_1, q_2 : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $q_1 \geqslant q_2$. Soit $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle de $y'' + q_2 y = 0$. Montrer que toute solution de $y'' + q_1 y = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

2. On considère l'équation différentielle $y'' + e^t y = 0$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$. Montrer qu'une solution non nulle admet une infinité de zéros qu'on peut ordonner en une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geqslant 1}$. Montrer que la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ et que $e^{t_n} \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{4}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle y_2 de $y'' + q_2 y = 0$ et y_1 une solution de $y'' + q_1 y = 0$. Supposons que y_1 ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. Elle garde un signe constant sur cet intervalle. Quitte à considérer la fonction $-y_1$, on peut supposer $y_1 > 0$ sur $[\alpha, \beta]$. Les zéros de y_2 sont isolés. Quitte à remplacer β par le premier zéro de y_2 strictement supérieur à α, on peut supposer que y_2 ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$ et même que $y_2 > 0$ en remplaçant éventuellement y_2 par $-y_2$. Considérons $\mathrm{W} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$. On a

$$\mathrm{W}' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -q_1 y_1 & -q_2 y_2 \end{vmatrix} = y_1 y_2 (q_1 - q_2) \geqslant 0$$

sur $[\alpha, \beta]$. La fonction W croît sur $[\alpha, \beta]$. Par hypothèse, on a

$$\mathrm{W}(\alpha) = y_1(\alpha) y_2'(\alpha) \quad \text{et} \quad \mathrm{W}(\beta) = y_1(\beta) y_2'(\beta).$$

Comme $y_2(\alpha) = 0$ et y_2 est positive sur $]\alpha, \beta[$, on a $y_2'(\alpha) > 0$ (ce nombre dérivé ne peut pas être nul, sinon y_2 est la fonction nulle). On montre de même que $y_2'(\beta) < 0$. On en déduit $\mathrm{W}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{W}(\beta) < 0$, ce qui contredit la croissance de W. On conclut que y_1 s'annule au moins une fois sur $[\alpha, \beta]$.

On peut montrer plus précisément que y_1 s'annule sur $]\alpha, \beta]$ et sur $[\alpha, \beta[$. Autrement dit, y_1 s'annule sur $]\alpha, \beta[$ ou s'annule en α et β. En effet, si par exemple y_1 ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta]$, on a avec les notations précédentes $\mathrm{W}(\alpha) \geqslant 0$ et $\mathrm{W}(\beta) < 0$, ce qui contredit la croissance de W.

2. Soient y une solution non nulle de l'équation et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Sur $[\alpha, +\infty[$ on a $e^t \geqslant e^\alpha$ et $z : t \longmapsto \sin(e^{\frac{\alpha}{2}}(t - \alpha))$ est une solution de $y'' + e^\alpha y = 0$ qui s'annule en α et en $\alpha + \pi e^{-\alpha/2}$. On en déduit que y s'annule dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + \pi e^{-\alpha/2}]$. En particulier l'ensemble des

zéros de y est infini. On sait que cet ensemble est discret dans $\mathbb{R}_+$ donc il n'y a qu'un nombre fini de zéros dans chaque segment $[0, A]$. Cela permet de ranger les zéros de y en une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geqslant 1}$. Cette suite n'étant pas majorée elle diverge vers $+\infty$.

Ce qui précède appliqué avec $\alpha = t_n$ montre que $t_{n+1} \leqslant t_n + \dfrac{\pi}{e^{\frac{t_n}{2}}}$. Pour obtenir une minoration de t_{n+1}, on applique encore le théorème de Sturm. Soit $\mathrm{J} = [t_n, t_{n+1}]$ et u la fonction définie sur l'intervalle J par $u(t) = \sin(e^{\frac{t_{n+1}}{2}}(t - t_n))$. Elle est solution de $y'' + e^{t_{n+1}}y = 0$. Comme $e^t \leqslant e^{t_{n+1}}$ pour tout $t \in \mathrm{J}$, on peut appliquer les résultats de la première question. La fonction u s'annule sur $]t_n, t_{n+1}]$. On a donc $t_n + \dfrac{\pi}{e^{\frac{t_{n+1}}{2}}} \leqslant t_{n+1}$. On obtient, pour tout entier naturel n,

$$\frac{\pi}{e^{\frac{t_{n+1}}{2}}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{e^{\frac{t_n}{2}}}.$$

Comme $t_n \to +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$, ce qui implique $e^{\frac{t_{n+1}}{2}} \sim e^{\frac{t_n}{2}}$, puis toujours grâce à l'encadrement, on obtient

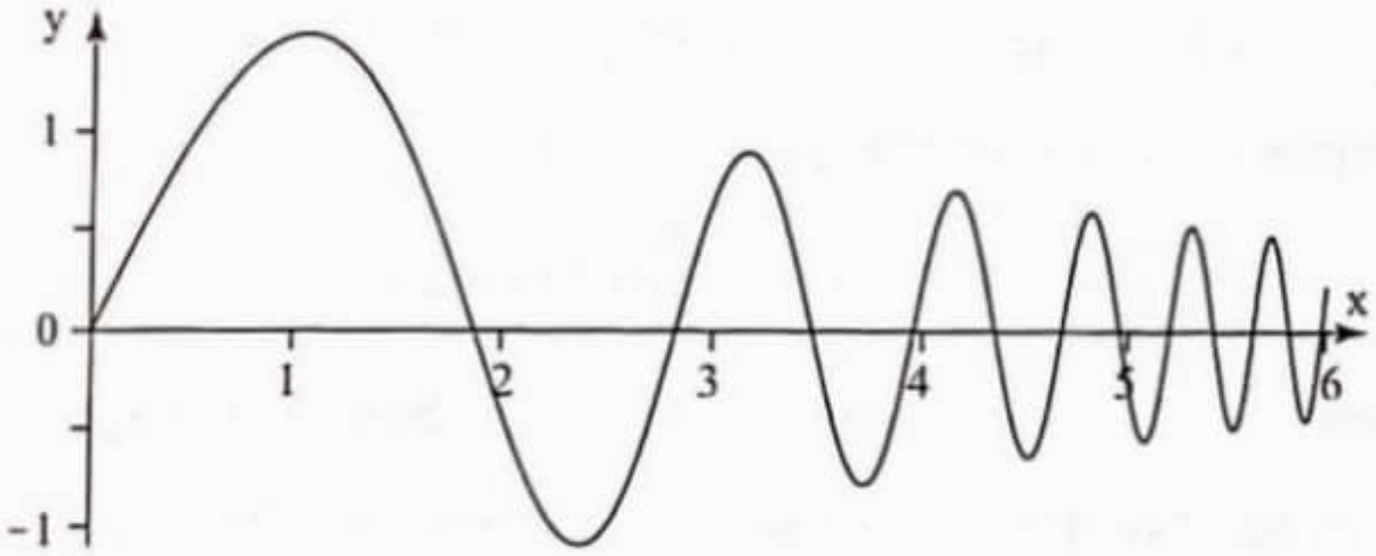
$$t_{n+1} - t_n \sim \frac{\pi}{e^{\frac{t_n}{2}}}.$$

C'est un exercice classique que d'utiliser ce genre de relation pour trouver un équivalent de t_n (le lecteur pourra se reporter au chapitre 2 du tome analyse 1). Posons $u_n = e^{\frac{t_n}{2}}$ puisque c'est à cette suite que l'énoncé s'intéresse. On a donc $2(\ln u_{n+1} - \ln u_n) \sim \dfrac{\pi}{u_n}$. On peut écrire

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1. On a donc $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{\pi}{2}$ et par le théorème de Cesàro, ou le théorème de sommation des relations de comparaison, on en déduit que $u_n \sim \dfrac{n\pi}{2}$. On a donc bien $e^{t_n} = u_n^2 \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{4}$. ◁

On en déduit aisément que $t_n = \ln e^{t_n} \sim \ln \dfrac{\pi^2 n^2}{4} \sim 2\ln n$. *Voici le graphe de la solution vérifiant les conditions initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 2$:



Pour la résolution de l'exercice suivant nous utilisons une autre technique importante pour étudier les zéros d'une solution d'une équation d'ordre 2, à savoir le passage en coordonnées polaires.

2.44. Zéros de $x'' + x = \varepsilon(t)x'$: étude asymptotique

Soit $\varepsilon : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$. On considère une solution non nulle x de l'équation différentielle $x'' + x = \varepsilon(t)x'$ définie sur $[a, +\infty[$ et soit $b \geqslant a$. Pour $t \geqslant b$, on définit

$$\mathrm{N}_b(t) = \mathrm{Card}\{u \in [b, t],\ x(u) = 0\}.$$

Montrer que, pour b assez grand, on a $\mathrm{N}_b(t) \sim \dfrac{t}{\pi}$ quand $t \to +\infty$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Considérons la fonction $z = x' + ix$. Elle ne s'annule pas, car si $z(t_0) = 0$, on a $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ et, par unicité du problème de Cauchy, x est la fonction nulle. Ainsi x appartient à $\mathcal{C}^1([a, +\infty[, \mathbb{C}^*)$. D'après le théorème de relèvement, il existe $\theta \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in [a, +\infty[$, $z(t) = |z(t)|e^{i\theta(t)}$. On pose $\rho(t) = |z(t)|$. On obtient donc :

$$x' = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad x = \rho\sin\theta. \tag{1}$$

On en déduit, en dérivant, que

$$x' = \rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta$$
$$x'' = \rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta.$$

L'équation $x(t) = 0$ équivaut à $\sin(\theta(t)) = 0$, car ρ ne s'annule pas. On va donc étudier le comportement de la fonction θ. Pour cela on élimine ρ'. On écrit

$$\rho\theta' = \cos\theta x' - \sin\theta x'' = (\cos\theta - \varepsilon\sin\theta)\,x' + (\sin\theta)x,$$

puisque $x'' = \varepsilon x' - x$. On obtient en remplaçant x' et x par les expressions (1),

$$\rho\theta' = (\cos\theta - \varepsilon\sin\theta)\,\rho\cos\theta + \rho\sin^2\theta$$

et donc, puisque ρ ne s'annule pas

$$\theta' = 1 - \varepsilon\sin\theta\cos\theta.$$

De l'hypothèse, on déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta'(t) = 1$. Soit b tel que, sur $[b, +\infty[$, θ' soit strictement positive et donc θ strictement croissante. La fonction

$t \longmapsto 1$ est positive et n'est pas intégrable sur $[b, +\infty[$ donc on en déduit,

$$\theta(t) - \theta(b) = \int_b^t \theta'(u)\,\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_b^t \mathrm{d}u = t - b,$$

c'est-à-dire $\theta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$. En particulier, on a $\lim_{+\infty} \theta = +\infty$. On en déduit, pour $t \geqslant b$, puisque θ est strictement croissante,

$$N_b(t) = \mathrm{Card}\{u \in [b,t],\ \sin\theta(u) = 0\} = \mathrm{Card}\{u \in [b,t],\ \theta(u) \in \mathbb{Z}\pi\}$$
$$= \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{Z},\ \theta(b) \leqslant k\pi \leqslant \theta(t)\} = \mathrm{E}\left(\frac{\theta(t)}{\pi}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{\theta(b)}{\pi}\right) + \alpha.$$

où $\alpha = 1$ si $\dfrac{\theta(b)}{\pi} \in \mathbb{Z}$ et 0 sinon. Comme $\lim_{+\infty} \theta = +\infty$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{\theta(t)}{\pi}\right)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ et on a

$$\mathrm{N}_b(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{E}\left(\frac{\theta(t)}{\pi}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\theta(t)}{\pi} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}\cdot \quad \triangleleft$$

Si ε est la fonction nulle, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $t \longmapsto a\sin(t - t_0)$, où $(a, t_0) \in \mathbb{R}$. Ses zéros sont, si $a \neq 0$, les réels $t_0 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\mathrm{N}_b(t) = \mathrm{Card}\left\{k \in \mathbb{Z} \cap \left[\frac{b - t_0}{\pi}, \frac{t - t_0}{\pi}\right]\right\} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}\cdot$$

L'exercice montre que si $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$, le comportement asymptotique des zéros des solutions non nulles de l'équation différentielle est le même que dans le cas $\varepsilon = 0$.

Pour résoudre l'exercice suivant on pourra utiliser le résultat qui vient d'être démontré.

2.45. Zéros de $y'' + t^{\alpha-2}y = 0$: étude asymptotique

Soit $\alpha > 0$. On considère une solution réelle f non nulle de l'équation différentielle $y'' + t^{\alpha-2}y = 0$ sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $t > 1$, la fonction f a un nombre fini de zéros, noté $n(t)$, dans l'intervalle $[1, t]$.

2. Montrer que $n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2t^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi\alpha}$ (commencer par le cas $\alpha = 2$).

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t > 1$ tel que f ait une infinité de zéros dans $[1, t]$. Il existe une suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ de zéros distincts de f dans $[1, t]$. De cette suite, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})$ qui converge vers a. Par continuité de f, on a $f(a) = 0$ et d'autre part, comme les éléments $t_{\varphi(n)}$ sont distincts, on a

$$f'(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_{\varphi(n)}) - f(a)}{t_{\varphi(n)} - a} = 0.$$ Comme $f(a) = f'(a) = 0$, f est l'application nulle, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi f a un nombre fini de zéros dans tout intervalle $[1, t]$.

2. Si $\alpha = 2$, l'équation est $y'' + y = 0$ et il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(t) = a\sin(t - t_0)$. Les zéros de f sont les réels $t_0 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Un tel zéro est dans $[1, t]$ si $k \in \left[\frac{1 - t_0}{\pi}, \frac{t - t_0}{\pi}\right]$. Quand t tend vers $+\infty$, on a donc $n(t) \sim \frac{t}{\pi}$.

Pour traiter le cas général, on va se ramener au cas $\alpha = 2$ par un changement d'inconnue. On considère la fonction g définie pour $t \in [1, +\infty[$ par $f(t) = g\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right)$, *i.e.* $g(x) = f\left(\left(\frac{x\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$. On obtient

$$f'(t) = t^{\frac{\alpha-2}{2}} g'\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{et} \quad f''(t) = t^{\alpha-2} g''\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) + \frac{\alpha - 2}{2} t^{\frac{\alpha-4}{2}} g'\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

et g vérifie pour $t \geqslant 1$,

$$t^{\alpha-2} g''\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) + \frac{\alpha - 2}{2} t^{\frac{\alpha-4}{2}} g'\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) + t^{\alpha-2} g\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0$$

soit

$$g''\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) + g\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) = -\frac{\alpha - 2}{2} t^{\frac{-\alpha}{2}} g'\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

On obtient finalement, pour tout $x \geqslant \frac{2}{\alpha}$,

$$g''(x) + g(x) = -\frac{\alpha - 2}{\alpha x} g'(x).$$

On est dans le cadre de l'exercice 2.44, avec $\varepsilon(x) = -\frac{\alpha - 2}{\alpha x}$. On a bien $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$. D'autre part, $f(t) = 0$ équivaut à $g\left(\frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0$. On a donc

$$n(t) = \text{Card}\left\{x \in \left[\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}t^{\frac{\alpha}{2}}\right], g(x) = 0\right\},$$

car la fonction $t \longmapsto t^{\frac{\alpha}{2}}$ est strictement croissante ($\alpha > 0$). D'après le résultat de l'exercice 2.44, on a $n(t) \sim \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \sim \frac{2t^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi\alpha}$.

Dans l'énoncé suivant on s'intéresse au comportement du premier zéro strictement positif d'une solution à une équation différentielle qui dépend d'un paramètre.

2.46. Équation dépendant d'un paramètre

Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\delta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, continue, telle que $\delta(x) = 1$ si $x \geqslant 2$. On considère l'équation différentielle $y'' = \gamma\delta(x)y$ et on impose les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1. Combien une solution a-t-elle de zéros ?

2. On suppose $\gamma < 0$ et on note $z(\gamma)$ le premier zéro strictement positif de la solution. Déterminer la limite de $z(\gamma)$ quand γ tend vers 0.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure l'existence et l'unicité de la solution y et celle-ci est définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geqslant 2$, on a $y''(x) = \gamma y(x)$ que l'on sait résoudre.

• Si $\gamma < 0$, il existe $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \geqslant 2$,

$$y(x) = a \sin\left(\sqrt{-\gamma}(x - \alpha)\right).$$

La fonction y possède une infinité de solutions sur $[2, +\infty[$ et *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+$.

• Si $\gamma > 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \geqslant 2$,

$$y(x) = ae^{\sqrt{\gamma}x} + be^{-\sqrt{\gamma}x}$$

et y s'annule au plus une fois sur $[2, +\infty[$. Comme y n'est pas nulle on sait que ses zéros sont isolés et par conséquent elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans le segment $[0, 2]$. Au total y a un nombre fini de zéros.

• Enfin, si $\gamma = 0$, y est la fonction $x \mapsto x$ et elle ne s'annule qu'en 0.

2. Pour avoir des idées imaginons que δ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. On a dans ce cas $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-\gamma}} \sin \sqrt{-\gamma}x$ et par conséquent $z(\gamma) = \dfrac{\pi}{\sqrt{-\gamma}}$ tend vers $+\infty$ lorsque γ tend vers 0. On va voir qu'il en est toujours ainsi.

Pour commencer on va montrer que la limite de $z(\gamma)$ existe par un argument de monotonie. Soit $(\gamma, \gamma') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma < \gamma' < 0$. Soit y_γ (resp. $y_{\gamma'}$) la solution de $y'' - \gamma\delta(x)y = 0$ (resp. $y'' - \gamma'\delta(x)y = 0$) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-\gamma\delta(x) \geqslant -\gamma'\delta(x)$.

Les réels 0 et $z(\gamma')$ sont deux zéros de $y_{\gamma'}$. D'après le théorème de Sturm (cf. la première question de l'exercice 2.43), la fonction y_γ s'annule dans $]0, z(\gamma')]$ et on a donc $z(\gamma) \leqslant z(\gamma')$. La fonction $\gamma \longmapsto z(\gamma)$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_-$. On en déduit que $\gamma \longmapsto z(\gamma)$ a une limite finie ou égale à $+\infty$ quand γ tend vers 0 par valeurs inférieures.

On montre que cette limite est $+\infty$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que $\lim_{\gamma \to 0^-} z(\gamma) = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction δ est majorée sur $[0, \ell]$, par $m > 0$. La fonction y_γ est positive sur $[0, z(\gamma)]$ et $z(\gamma) \leqslant \ell$, donc on a, pour tout $x \in [0, z(\gamma)]$, $y_\gamma''(x) = \gamma\delta(x)y_\gamma(x) \geqslant \gamma m y_\gamma(x)$. Posons $g = y_\gamma'' - \gamma m y_\gamma$. La fonction g est positive sur $[0, z(\gamma)]$ et y_γ est solution de $y'' - \gamma m y = g$. En utilisant la méthode de variation des constantes on trouve qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$y_\gamma(x) = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int_0^x g(t)\sin(\omega(x-t))\,\mathrm{d}t$$

et

$$y_\gamma'(x) = -c\omega\sin(\omega x) + d\omega\cos(\omega x) + \int_0^x g(t)\cos(\omega(x-t))\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\omega = \sqrt{-\gamma m}$ pour simplifier. Les conditions initiales donnent $c = 0$ et $d = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma m}}$. On obtient, pour tout $x \geqslant 0$,

$$y_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma m}}\sin(\sqrt{-\gamma m}x) + \frac{1}{\sqrt{-\gamma m}}\int_0^x g(t)\sin(\sqrt{-\gamma m}(x-t))\,\mathrm{d}t$$

La fonction g est positive sur $[0, z(\gamma)]$. Si $z(\gamma) < \frac{\pi}{\sqrt{-\gamma m}}$ l'intégrale est positive si $x = z(\gamma)$ et on a alors $y_\gamma(z(\gamma)) \geqslant \frac{1}{\sqrt{-\gamma m}}\sin(\sqrt{-\gamma m}z(\gamma)) > 0$, ce qui contredit la définition de $z(\gamma)$. On a donc, pour tout $\gamma < 0$, $z(\gamma) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{-\gamma m}}$ ce qui est incompatible avec le fait que z ait une limite finie en 0^-. On a donc prouvé que $\lim_{\gamma \to 0^-} z(\gamma) = +\infty$. ◁

L'exercice qui suit concerne l'équation linéaire scalaire d'ordre n.

2.47. Nombre de zéros au voisinage d'un point

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et S l'espace des solutions de l'équation différentielle $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que tout élément non nul de S s'annule au plus $n-1$ fois dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On raisonne par l'absurde. On suppose que, pour tout $\eta > 0$, il existe $f \in \mathrm{S}$, non nulle, qui s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. En particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_p \in \mathrm{S}$, non nulle, qui s'annule au moins n fois dans l'intervalle $\left]x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right[$.

On munit S de la norme de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ définie par

$$\mathrm{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(n-1)}\|_\infty$$

où la norme infinie est prise sur $[x_0-1, x_0+1]$. Comme S est de dimension finie, la boule unité B de S est compacte. On pose $g_p = \dfrac{f_p}{\mathrm{N}(f_p)}$. La suite $(g_p)_{p\geqslant 1}$ de B possède une sous-suite $(g_{\varphi(p)})$ qui converge vers $g \in \mathrm{B}$. La fonction $g_{\varphi(p)}$ s'annule au moins n fois sur $\left]x_0 - \dfrac{1}{\varphi(p)}, x_0 + \dfrac{1}{\varphi(p)}\right[$. En appliquant le théorème de Rolle, on en déduit que, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $g^{(k)}_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n-k$ fois et donc au moins une fois sur le même intervalle. On note $x_{p,k}$ un tel zéro de $g^{(k)}_{\varphi(p)}$. On a

$$|g^{(k)}(x_{p,k})| = |g^{(k)}(x_{p,k}) - g^{(k)}_{\varphi(p)}(x_{p,k})| \leqslant \mathrm{N}(g - g_{\varphi(p)}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme la suite $(x_{p,k})_{p\in\mathbb{N}^*}$ tend vers x_0, on en déduit que $g^{(k)}(x_0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Par unicité du problème de Cauchy, $g = 0$. Ainsi $N(g) = 0$, ce qui contredit le fait que $g \in \mathrm{B}$. ◁

Voici maintenant, avant de passer aux systèmes différentiels, un exercice sur le thème de la résolution numérique approchée des équations différentielles. On y étudie la discrétisation d'un problème aux limites très simple.

2.48. Résolution approchée d'une équation d'ordre 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer qu'il existe une unique application $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $u'' = f$ et $u(0) = u(1) = 0$.

2. Soit F_n le vecteur colonne de composantes $f\left(\frac{1}{n}\right)$, $f\left(\frac{2}{n}\right)$, $\ldots, f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ et

$$A_n = -n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Montrer qu'il existe un unique $V_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $F_n = A_n V_n$.

3. Soit U_n le vecteur colonne de composantes $u\left(\frac{1}{n}\right)$, $u\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, u\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Montrer que $V_n - U_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Si u est une solution du problème posé, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u' = F + c$. On alors, pour tout $x \in [0,1]$, $u(x) = \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t + cx$. En intégrant par parties, on obtient

$$u(x) = [(t-x)F(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f(t)\,\mathrm{d}t + cx = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + cx.$$

Réciproquement, on montre aisément que la fonction ainsi définie est deux fois dérivable sur $[0,1]$, que $u'' = f$, donc que u est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus $u(0) = 0$, donc u répond au problème posé si, et seulement si, $c = -\int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient bien une unique solution.

2. Il s'agit de démontrer que A_n, c'est-à-dire $B_n = -\frac{1}{n^2}A_n$ est inversible. En développant suivant la dernière ligne puis la dernière colonne, on obtient pour $n \geqslant 3$

$$\det B_n = 2\det B_{n-1} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\det B_{n-1} - \det B_{n-2}.$$

La suite $(\det B_n)_{n\geqslant 2}$ est donc arithmétique. Comme $\det B_2 = 2$ et $\det B_3 = 3$, la suite est de raison 1 et, pour tout $n \geqslant 2$, $\det B_n = n \neq 0$.

est inversible. Il en est de même de A_n et $V_n = A_n^{-1}F_n$
..nière unique.

3. On munit $\mathbb{R}^{n-1}$ de la norme définie par $\|x\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} |x_k|$. Posons $Y_n = A_n U_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ et commençons par majorer $\|Y_n - F_n\|$.

On a, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{n^2} y_k = u\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2u\left(\frac{k}{n}\right) + u\left(\frac{k+1}{n}\right)$ (pour $k = 1$ et $k = n-1$, cela résulte de $u(0) = u(1) = 0$). On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2} y_k &= -\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} u'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{\frac{1}{n}} u'\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{n}} u'\left(\frac{k}{n} + x\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(u'\left(\frac{k}{n} + x\right) - u'\left(\frac{k}{n} - x\right)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, il existe $c_x \in \left[\frac{k}{n} - x, \frac{k}{n} + x\right]$ tel que

$$u'\left(\frac{k}{n} + x\right) - u'\left(\frac{k}{n} - x\right) = 2x u''(c_x) = 2x f(c_x).$$

On a donc

$$y_k - f\left(\frac{k}{n}\right) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} 2x f(c_x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{k}{n}\right) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} 2x \left(f(c_x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

On utilise ensuite l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$ et η un module d'uniforme continuité de f pour ε. Soit n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \eta$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in [0, \frac{1}{n}]$, on a $|c_x - \frac{k}{n}| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \eta$ et donc $\left|f(c_x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$. On a donc

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - y_k\right| \leqslant n^2 \varepsilon \int_0^{\frac{1}{n}} 2x\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant \frac{1}{\eta}$, on a $\|F_n - Y_n\| \leqslant \varepsilon$.

Comme $\|V_n - U_n\| = \|A_n^{-1}(F_n - Y_n)\| \leqslant \|A_n^{-1}\|\|F_n - Y_n\|$, il reste à majorer $\|A_n^{-1}\|$. Il a été démontré dans notre tome 1 d'algèbre (exercice 7.15) que B_n est une matrice monotone, c'est-à-dire que B_n^{-1} est à coefficients positifs. La matrice A_n^{-1} est donc à coefficients négatifs.

Dans les calculs précédents, prenons $f = 1$. Notons $U \in \mathbb{R}^{n-1}$ le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. On a alors, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$y_k = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} 2x f(c_x)\,dx = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} 2x\,dx = 1,$$

c'est-à-dire $Y_n = U = F_n$. Mais alors u est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x(x-1)}{2}$.

Notons $\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1} \end{pmatrix}$ le vecteur U_n correspondant. On a, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 \leqslant |\tilde{u}_k| \leqslant \dfrac{1}{8}$.

Posons $A_n^{-1} = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]}$. De $A_n^{-1}U = \tilde{U}_n$ on tire $\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} = \tilde{u}_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $X \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $X' = A_n^{-1}X$. Comme tous les c_{ij} sont de même signe, on obtient, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$$|x_i'| = \left|\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} |c_{ij}||x_j| \leqslant \|x\| \left|\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}\right| \leqslant \|x\||\tilde{u}_i| \leqslant \frac{1}{8}\|x\|.$$

Cela montre que $\|A_n^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{8}$.

On obtient donc, si $n \geqslant \dfrac{1}{\eta}$, $\|V_n - U_n\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{8}$. Le vecteur $V_n - U_n$ tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$. ◁

La fin du chapitre est consacrée aux systèmes différentiels linéaires. Le premier exercice, facile, est une résolution explicite d'un système que l'on peut regarder comme un modèle très simpliste d'évolution d'un couple proies/prédateurs.

2.49. Système différentiel du premier ordre à coefficients constants

Résoudre le système $\begin{cases} u' = 4u - 2v \\ v' = u + v \end{cases}$, $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$.

Calculer la limite en $+\infty$ de u, v et $\dfrac{u}{v}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A possède deux valeurs propres 2

et 3, avec des vecteurs propres correspondants $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (2, 1)$. Les coordonnées (x, y) de (u, v) dans la base (u_1, u_2) vérifient $x' = 2x$ et $y' = 3y$, donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(u(t), v(t)) = ae^{2t}u_1 + be^{3t}u_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u(t) = ae^{2t} + 2be^{3t} \\ v(t) = ae^{2t} + be^{3t}. \end{cases}$$

On a en particulier $\begin{cases} u_0 = a + 2b \\ v_0 = a + b \end{cases}$ et donc $b = u_0 - v_0$, $a = -u_0 + 2v_0$.

On obtient, pour tout réel t,

$$\begin{cases} u(t) = (-u_0 + 2v_0)e^{2t} + (2u_0 - 2v_0)e^{3t} \\ v(t) = (-u_0 + 2v_0)e^{2t} + (u_0 - v_0)e^{3t}. \end{cases}$$

• Si $u_0 = v_0 = 0$, u et v sont identiquement nulles.

• Si $u_0 = v_0 \neq 0$, on a pour tout réel t $u(t) = v(t) = u_0e^{2t}$. On en déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = -\infty$ si $u_0 < 0$. Enfin $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(t)}{v(t)} = 1$.

• Si $u_0 - v_0 \neq 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = +\infty$ si $u_0 > v_0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = -\infty$ si $u_0 < v_0$. Dans les deux cas $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(t)}{v(t)} = 2$. ◁

On peut voir u comme une population de proies qui ont, en l'absence de prédateurs, un taux de croissance de 4 et v comme une population de prédateurs qui ont un taux de croissance de 1 en l'absence de proies. Dans le modèle étudié ici, si $u_0 > v_0 > 0$ les deux populations se développent exponentiellement, le rapport entre les deux effectifs tendant vers 2. Le cas particulier où les populations restent égales est évidemment instable. Dans le cas où $v_0 > u_0$ il y a extinction rapide (le modèle ne tient plus quand u ou v devient négatif). Le lecteur trouvera un modèle plus élaboré de système proies/prédateurs dans l'exercice 3.32.

2.50. Résolution d'un système différentiel

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \quad\vdots \\ y_n' = y_{n-1} - 2y_n. \end{cases}$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ le système différentiel s'écrit $Y' = AY$ où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $a_{ij} = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La matrice A est symétrique donc diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ un vecteur propre associé. En posant $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = 0$, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$y_{i-1} - (2+\lambda)y_i + y_{i+1} = 0.$$

On obtient une récurrence linéaire sur deux termes dont l'équation caractéristique est $x^2 - (2+\lambda)x + 1 = 0$. En supposant qu'elle possède deux racines distinctes r_1 et r_2, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $p \in [0, n+1]$, $y_p = \alpha r_1^p + \beta r_2^p$. De $y_0 = y_{n+1} = 0$, on déduit $\beta = -\alpha$ et $0 = \alpha(r_1^{n+1} - r_2^{n+1})$.

Comme $r_2 = \dfrac{1}{r_1}$ et $(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$, on a donc $\alpha \neq 0$ et $r_1^{2(n+1)} = 1$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r_1 = e^{\frac{ik\pi}{n+1}}$. On a alors

$$2 + \lambda = r_1 + r_2 = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}.$$

On obtient, en prenant $k \in [\![1, n]\!]$, n valeurs propres distinctes

$$\lambda_k = -2 + 2\cos\frac{k\pi}{n+1} = -4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

On vérifie qu'alors $r_1 \neq \pm 1$. Comme

$$\alpha(r_1^p - r_2^p) = \alpha(e^{\frac{ikp\pi}{n+1}} - e^{-\frac{ikp\pi}{n+1}}) = 2i\alpha\sin\frac{kp\pi}{n+1},$$

on obtient pour la valeur propre λ_k le vecteur propre $(y_1, \ldots, y_n)$ défini, pour $p \in [1, n]$ par $y_p = \sin\dfrac{kp\pi}{n+1}$.

Ainsi A possède n valeurs propres distinctes. On note $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $P = (\sin\dfrac{ij\pi}{n+1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres. Le système $Y' = AY = PDP^{-1}Y$ équivaut à $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$. Ainsi il existe $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = c_i e^{\lambda_i t}$. De $Y = PZ$, on déduit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \sin\frac{ij\pi}{n+1} e^{\lambda_j t}. \quad \triangleleft$$

Une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{V}$, dans une région où règne le champ magnétique $\vec{B}$, subit la force $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$. Si la particule est de masse m, et si on néglige l'effet du poids, la relation fondamentale de la dynamique donne l'équation

$$\vec{A} = \frac{d}{dt}\vec{V} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}.$$

Son étude fait l'objet de l'exercice suivant.

2.51. Particule dans un champ magnétique

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$ où $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$.

2. On considère l'équation différentielle $X' = AX$. Expliciter les solutions.

(École polytechnique)

Solution.

1. Supposons $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il vient

$$AX = \begin{pmatrix} -ry + qz \\ rx - pz \\ -qx + py \end{pmatrix} = a \wedge X, \quad \text{où } a = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

On pose $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$ et, pour l'intérêt du problème, on suppose $\omega \neq 0$. Si $e_1 = \frac{a}{\omega}$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{q^2+r^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega'} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{pmatrix}$ avec $\omega' = \sqrt{q^2+r^2}$, alors (e_1, e_2) est un système orthonormé que l'on prolonge par $e_3 = e_1 \wedge e_2$ en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base canonique à (e_1, e_2, e_3) est

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\omega\omega'}\begin{pmatrix} p\omega' & 0 & -q^2-r^2 \\ q\omega' & r\omega & pq \\ r\omega' & -q\omega & pr \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

Comme $\mathrm{AX} = \omega e_1 \wedge \mathrm{X}$, la matrice de f dans (e_1, e_2, e_3) est

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'on vient de montrer matriciellement que les endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^3$ sont les $x \longmapsto a \wedge x$ pour $a \in \mathbb{R}^3$. Cela peut aussi se vérifier directement. En effet, l'application $f_a : x \longmapsto a \wedge x$ est antisymétrique car $\langle a \wedge x, y\rangle = [a, x, y] = -[a, y, x] = -\langle a \wedge y, x\rangle$ et l'application $a \mapsto f_a$ étant linéaire et injective elle établit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et l'espace des endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^3$ puisque les deux espaces sont de dimension 3.

2. Notons $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, expression de X dans la nouvelle base (e_1, e_2, e_3). Le système différentiel s'écrit dans cette base $\mathrm{U}' = \mathrm{A}'\mathrm{U}$. Soit U une solution sur $\mathbb{R}$ de ce système différentiel linéaire. On a $u' = 0$, $v' = -\omega w$, $w' = \omega v$, donc U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $w'' = \omega v' = -\omega^2 w$. Il existe donc des constantes réelles c, d et φ telles que, pour tout réel t,

$$u(t) = c, \quad w(t) = d\sin(\omega t - \varphi) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{\omega}w'(t) = d\cos(\omega t - \varphi).$$

Revenons à la base canonique : $\mathrm{X} = \mathrm{PU}$ et les solutions s'écrivent

$$\boxed{\mathrm{X}(t) = \frac{1}{\omega\omega'}\begin{pmatrix} cp\omega' - d(q^2+r^2)\cos(\omega t - \varphi) \\ cq\omega' + dr\omega\sin(\omega t - \varphi) + dpq\cos(\omega t - \varphi) \\ cr\omega' - dq\omega\sin(\omega t - \varphi) + dpr\cos(\omega t - \varphi) \end{pmatrix}}$$

pour tout réel t, avec c, d et φ constantes réelles arbitraires (on peut bien sûr supprimer le coefficient $\dfrac{1}{\omega\omega'}$ en l'intégrant dans les constantes c et d). ◁

On peut résoudre l'équation différentielle en raisonnant directement sur les vecteurs. L'équation différentielle s'écrit $\mathrm{X}' = a \wedge \mathrm{X}$. En dérivant, on obtient

$$\mathrm{X}'' = a \wedge \mathrm{X}' = a \wedge (a \wedge \mathrm{X}) = \langle a, \mathrm{X}\rangle a - \|a\|^2\mathrm{X},$$

d'après la formule du double produit vectoriel. On note que

$$(\langle a, \mathrm{X}\rangle)' = \langle a, \mathrm{X}'\rangle = \langle a, a \wedge \mathrm{X}\rangle = 0.$$

La fonction $\langle a, X\rangle$ *est constante. On a donc* $X'' + \|a\|^2 X = \langle a, X_0\rangle a$ *en notant* $X_0 = X(0)$. *Il existe donc des vecteurs* X_1 *et* X_2 *tel que, pour tout réel* t,

$$X(t) = \cos(\|a\|t)X_1 + \sin(\|a\|t)X_2 + \frac{\langle a, X_0\rangle}{\|a\|^2}a.$$

On trouve $X_0 = X_1 + \dfrac{\langle a, X_0\rangle}{\|a\|^2}a$ *et* $X'(0) = \|a\|X_2 = a \wedge X_0$ *et donc*

$$X_1 = X_0 - \frac{\langle a, X_0\rangle}{\|a\|^2}a \quad et \quad X_2 = \frac{1}{\|a\|}a \wedge X_0.$$

On a $\langle X_1, X_2\rangle = 0$, *car* $a \wedge X_0$ *est orthogonal à* a *et à* X_0 *et d'autre part*

$$\|X_1\|^2 = \|X_0\|^2 - \frac{\langle a, X_0\rangle^2}{\|a\|^2} = \frac{\|a \wedge X_0\|^2}{\|a\|^2} = \|X_2\|^2.$$

Ainsi $X(t)$ *décrit un cercle de rayon* $\dfrac{\|a \wedge X_0\|}{\|a\|}$, *de manière uniforme, la vitesse angulaire étant* $\|a\| = \omega$.

L'énoncé suivant concerne l'équation $X' = AX$ *avec* A *matrice antisymétrique, mais où l'inconnue* X *est une matrice carrée.*

2.52. Équation $X' = AX$, avec A antisymétrique

Soit $t \longmapsto A(t)$ une application de classe $\mathcal{C}^0$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout réel t, la matrice $A(t)$ est antisymétrique. Soit $t \longmapsto X(t)$ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout réel t, $X'(t) = A(t)X(t)$. On suppose que $X(0) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout réel t, $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Posons, pour tout réel t, $Y(t) = {}^tX(t)X(t)$. La fonction Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t,

$$Y'(t) = {}^tX'(t)X(t) + {}^tX(t)X'(t) = {}^tX(t)\,{}^tA(t)X(t) + {}^tX(t)A(t)X(t)$$
$$= {}^tX(t)({}^tA(t) + A(t))X(t) = 0,$$

car $A(t)$ est antisymétrique. La fonction Y est constante et $Y(0) = I_n$, car par hypothèse $X(0)$ est orthogonale. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$${}^tX(t)X(t) = Y(t) = Y(0) = I_n,$$

donc $X(t)$ est orthogonale pour tout réel t. ◁

2.53. Existence d'une limite en $+\infty$

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, telle que $\int_0^{+\infty} \|a(u)\| \, du$ converge, où $\|a(u)\|$ désigne la norme triple associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, alors $f(t)$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ quand t tend vers $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On a, pour $t \geqslant 0$, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\mathrm{d}u$. Pour montrer que f possède une limite en $+\infty$, il suffit donc de montrer que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Or on a pour tout $t \geqslant 0$, $\|f'(t)\| = \|a(t)f(t)\| \leqslant \|a(t)\| \, \|f(t)\|$ si bien qu'il suffit de prouver que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Or, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|f(t)\| \leqslant \|f(0)\| + \int_0^t \|f'(u)\| \, \mathrm{d}u \leqslant \|f(0)\| + \int_0^t \|a(u)\| \, \|f(u)\| \mathrm{d}u$$

si bien, que par le lemme de Gronwall (voir page 120), on a pour tout t, $\|f(t)\| \leqslant \|f(0)\| \exp\left(\int_0^t \|a(u)\| \mathrm{d}u\right)$ et f est bornée. ◁

Le lecteur pourra prouver de plus que l'application Φ qui à une solution de l'équation $y' = ay$ associe sa limite en $+\infty$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entre l'espace des solutions et $\mathbb{R}^n$.

2.54. Majoration des solutions d'un système différentiel (1)

Soit a_{11}, a_{22} et b trois applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout réel t, $a_{11}(t) \leqslant -\lambda$, $a_{22}(t) \leqslant -\mu$ et $|b(t)| \leqslant \beta$. Soit (x, y) une solution du système

$$\begin{cases} x' = a_{11}(t)x + b(t)y \\ y' = a_{22}(t)y. \end{cases}$$

Donner des majorations de $|x(t)|$ et $|y(t)|$ pour $t \geqslant 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On est en présence d'un système triangulaire qu'il est donc possible de résoudre en cascade. Commençons par majorer $|y(t)|$. En notant A_{22} la primitive de a_{22} nulle en 0 on a pour tout réel t, $y(t) = y(0)e^{\mathrm{A}_{22}(t)}$. Puisque, pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{A}_{22}(t) = \int_0^t a_{22}(u)\mathrm{d}u \leqslant -\int_0^t \mu \mathrm{d}u = -\mu t$, on a

$$\forall t \geqslant 0, \quad |y(t)| \leqslant |y(0)|e^{-\mu t} \leqslant |y(0)|.$$

On résout ensuite l'équation en x à l'aide de la méthode de variation

...te en posant $z(t) = e^{-\mathrm{A}_{11}(t)}x(t)$ où A_{11} désigne à nouveau la primitive de a_{11} nulle en 0. Il vient $z'(t) = e^{-\mathrm{A}_{11}(t)}b(t)y(t)$ et donc, comme $z(0) = x(0)$,

$$z(t) = x(0) + \int_0^t e^{-\mathrm{A}_{11}(u)}b(u)y(u)\mathrm{d}u$$

puis finalement

$$x(t) = x(0)e^{\mathrm{A}_{11}(t)} + \int_0^t e^{\mathrm{A}_{11}(t)-\mathrm{A}_{11}(u)}b(u)y(u)\mathrm{d}u.$$

On peut majorer $\mathrm{A}_{11}(t)$ par $-\lambda t$ et $\mathrm{A}_{11}(t)-\mathrm{A}_{11}(u) = \int_u^t a_{11}$ par $e^{-\lambda(t-u)}$ donc, compte tenu de la majoration de $|y|$, il vient

$$|x(t)| \leqslant e^{-\lambda t}|x(0)| + \beta|y(0)|\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}e^{-\mu u}\mathrm{d}u.$$

On a donc si $\lambda \neq \mu$,

$$|x(t)| \leqslant e^{-\lambda t}|x(0)| + e^{-\lambda t}\beta|y(0)|\left[\frac{e^{(\lambda-\mu)u}}{\lambda-\mu}\right]_0^t$$

$$\leqslant e^{-\lambda t}|x(0)| + \beta|y(0)|\frac{e^{-\mu t}-e^{-\lambda t}}{\lambda-\mu} \leqslant |x(0)| + \frac{\beta|y(0)|}{|\lambda-\mu|}$$

et si $\lambda = \mu$, $|x(t)| \leqslant e^{-\lambda t}|x(0)| + e^{-\lambda t}\beta|y(0)|t \leqslant |x(0)| + \dfrac{\beta|y(0)|e^{-1}}{\lambda}$, comme le montre l'étude de la fonction $t \longmapsto te^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}_+$. ◁

L'exercice suivant est l'analogue par blocs du précédent.

2.55. Majoration des solutions d'un système différentiel (2)

Soit $\mathrm{A} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue et $\mathrm{X} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ et $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0$.

1. Montrer qu'il existe une application $\Omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{X}(t) = \Omega(t)\mathrm{X}_0$.

2. On suppose $n = 2p$, que $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique et que $\mathrm{A}(t)$ s'écrit par blocs $\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{R}(t) & \mathrm{S}(t) \\ 0 & \mathrm{T}(t) \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{R}(t)$, $\mathrm{S}(t)$ et $\mathrm{T}(t)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et qu'il existe λ, μ et B des réels strictement positifs tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^p$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $\langle \mathrm{R}(t)u, u\rangle \leqslant -\lambda\|u\|^2$, $\langle \mathrm{T}(t)u, u\rangle \leqslant -\mu\|u\|^2$, $\|\mathrm{S}(t)\| \leqslant \mathrm{B}$. On pose $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1(t) \\ \mathrm{X}_2(t) \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\|\mathrm{X}_2(t)\| \leqslant e^{-\mu t}\|\mathrm{X}_0\|$ et donner une majoration de $\|\mathrm{X}_1(t)\|$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $X' = AX$ est un espace vectoriel de dimension n. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$, Y_k l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $Y_k(0) = e_k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\Phi_t : X \longmapsto X(t)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^n$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. On en déduit que le rang de la famille $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ ne dépend pas de t. C'est donc n, valeur obtenue pour $t = 0$. Pour tout réel t, soit $\Omega(t)$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $Y_k(t)$. D'après ce qui précède, Ω appartient à $GL_n(\mathbb{R})$. L'application Ω est continue car les applications Y_k sont continues. En fait, elle est même de casse $\mathcal{C}^1$, car les applications Y_k sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $X_0 = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $X = \sum_{k=1}^{n} x_k Y_k$. On a $\Phi_0(X) = X_0$ et donc pour tout réel t,

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k Y_k(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \Omega(t) e_k = \Omega(t) X_0.$$

2. On a $X_2'(t) = T(t)X_2(t)$. On pose $Y(t) = \|X_2(t)\|^2 e^{2\mu t}$. On obtient, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} Y'(t) &= (2\langle X_2'(t), X_2(t)\rangle + 2\mu \|X_2(t)\|^2) e^{2\mu t} \\ &= 2(\langle T(t)X_2(t), X_2(t)\rangle + \mu \|X_2(t)\|^2) e^{2\mu t} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi Y décroît. On a donc, pour tout $t \geqslant 0$, $Y(t) \leqslant Y(0) \leqslant \|X_2(0)\|^2$, puis $\|X_2(t)\|^2 \leqslant \|X_2(0)\|^2 e^{-2\mu t}$ et enfin $\|X_2(t)\| \leqslant \|X_2(0)\| e^{-\mu t}$.

On a $X_1'(t) = R(t)X_1(t) + S(t)X_2(t)$. On pose $Z(t) = \|X_1(t)\|^2 e^{2\lambda t}$. On obtient, grâce à l'hypothèse, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration précédente, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= (2\langle X_1'(t), X_1(t)\rangle + 2\lambda \|X_1(t)\|^2) e^{2\lambda t} \\ &= (2\langle R(t)X_1(t), X_1(t)\rangle + 2\langle S(t)X_2(t), X_1(t)\rangle + 2\lambda \|X_1(t)\|^2) e^{2\lambda t} \\ &\leqslant 2\langle S(t)X_2(t), X_1(t)\rangle e^{2\lambda t} \leqslant 2\|S(t)\| \|X_1(t)\| \|X_2(t)\| e^{2\lambda t} \\ &\leqslant 2B\|X_2(0)\| e^{(\lambda-\mu)t} \sqrt{Z(t)}. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\sqrt{Z(t)} - \sqrt{Z(0)} \leqslant B\|X_2(0)\| \int_0^t e^{(\lambda-\mu)u}\, du.$$

Si $\lambda \neq \mu$, on obtient $\sqrt{Z(t)} \leqslant \|X_1(0)\| + B\|X_2(0)\| \dfrac{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda - \mu}$, puis

$$\|X_1(t)\| \leqslant \|X_1(0)\| e^{-\lambda t} + B\|X_2(0)\| \frac{e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}}{\lambda - \mu}.$$

Si $\lambda = \mu$, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $\sqrt{Z(t)} \leqslant \|X_1(0)\| + B\|X_2(0)\|t$ et

$$\|X_1(t)\| \leqslant \|X_1(0)\|e^{-\lambda t} + B\|X_2(0)\|te^{-\lambda t}. \triangleleft$$

Notons φ_{X_0} la solution de l'équation différentielle prenant en 0 la valeur X_0. La première question de l'exercice montre que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_0}(t) = \Omega(t)X_0$, ce qui montre que l'application $(X_0, t) \longmapsto \varphi_{X_0}(t)$ est continue. Il y a donc continuité de la solution de l'équation par rapport à la condition initiale X_0. Plus généralement, t_0 étant un réel quelconque, si on note φ_{t_0,X_0} la solution de l'équation différentielle prenant en t_0 la valeur X_0, il existe une matrice inversible que l'on note en général $R(t,t_0)$ de telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{t_0,X_0}(t) = R(t,t_0)X_0$. On peut démontrer que l'application $(t,t_0) \longmapsto R(t,t_0)$, appelée résolvante de l'équation différentielle, est continue sur $\mathbb{R}^2$, ce qui montre que l'application $(t_0, X_0, t) \longmapsto \varphi_{t_0,X_0}(t)$ est continue.

2.56. Distance entre les solutions de deux systèmes différentiels

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, $k > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, t \geqslant t_0,\ f(t) \leqslant g(t) + k\int_{t_0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Montrer que :

$$\forall\, t \geqslant t_0,\ f(t) \leqslant g(t) + k\int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)}g(u)\,\mathrm{d}u.$$

2. Soient $A, B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continues, $T > t_0$, $K > 0$ et $\eta > 0$ tels que :

$$\forall\, t \in [t_0, T],\ \|A(t)\| \leqslant K \quad \text{et} \quad \|A(t) - B(t)\| \leqslant \eta.$$

On note M_0 (resp. N_0) la solution du problème de Cauchy

$$M(t_0) = I_n, M'(t) = A(t)M(t) \quad (\text{resp. } N(t_0) = I_n, N'(t) = B(t)N(t)).$$

Montrer que : $\forall\, t \in [t_0, T], \|M_0(t) - N_0(t)\| \leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)$.

3. On note X_0 (resp. Y_0) la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$: $X(t_0) = \alpha$, $X'(t) = A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0) = \alpha$, $Y'(t) = B(t)Y(t)$) où $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Quelle majoration a-t-on de $\|X_0(t) - Y_0(t)\|$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Il s'agit d'une variante de l'inégalité de Gronwall (cas particulier de l'exercice 2.30). Redonnons rapidement la preuve de ce cas facile. On pose, pour tout $t \geqslant t_0$, $\mathrm{F}(t) = e^{-kt} \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$. On a, pour tout $t \geqslant t_0$,

$$\mathrm{F}'(t) = e^{-kt}\left(f(t) - k\int_{t_0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u\right) \leqslant g(t)e^{-kt}.$$

On en déduit, pour tout $t \geqslant t_0$,

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} g(u)e^{-ku}\,\mathrm{d}u$$

et donc

$$\int_{t_0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u \leqslant e^{kt}\int_{t_0}^{t} g(u)e^{-ku}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{t_0}^{t} g(u)e^{k(t-u)}\,\mathrm{d}u.$$

En réinjectant ce résultat dans l'inégalité initiale, on obtient, pour tout $t \geqslant t_0$,

$$f(t) \leqslant g(t) + k\int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)}g(u)\,\mathrm{d}u.$$

2. On commence par majorer $\|\mathrm{M}_0(t)\|$. On a, pour tout $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{M}_0(t) = \mathrm{I}_n + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{M}_0'(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{I}_n + \int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(u)\mathrm{M}_0(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit

$$\|\mathrm{M}_0(t)\| \leqslant \|\mathrm{I}_n\| + \int_{t_0}^{t} \|\mathrm{A}(u)\|\,\|\mathrm{M}_0(u)\|\,\mathrm{d}u \leqslant 1 + \mathrm{K}\int_{t_0}^{t} \|\mathrm{M}_0(u)\|\,\mathrm{d}u.$$

On applique la première question avec $f = \|\mathrm{M}_0\|$ et $g = 1$. On obtient, pour tout $t \in [t_0, \mathrm{T}]$,

$$\|\mathrm{M}_0(t)\| \leqslant 1 + \mathrm{K}\int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{K}(t-u)}\,\mathrm{d}u \leqslant 1 - \left[e^{\mathrm{K}(t-u)}\right]_{t_0}^{t} \leqslant e^{\mathrm{K}(t-t_0)}.$$

On procède de même pour majorer $\|\mathrm{M}_0(t) - \mathrm{N}_0(t)\|$. Comme $\mathrm{M}_0(t_0) = \mathrm{N}_0(t_0)$, on a, pour tout $t \in [t_0, \mathrm{T}]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_0(t) - \mathrm{N}_0(t) &= \int_{t_0}^{t} (\mathrm{M}_0'(u) - \mathrm{N}_0'(u))\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{A}(u)\mathrm{M}_0(u) - \mathrm{B}(u)\mathrm{N}_0(u))\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{t_0}^{t} (\mathrm{A}(u) - \mathrm{B}(u))\mathrm{M}_0(u)\,\mathrm{d}u + \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}(u)(\mathrm{M}_0(u) - \mathrm{N}_0(u))\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Comme $\|B(t)\| \leqslant \|B(t) - A(t)\| + \|A(t)\| \leqslant (\eta + K)$, on en déduit,

$$\|M_0(t) - N_0(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(u) - B(u)\| \|M_0(u)\| \, du$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|B(u)\| \|M_0(u) - N_0(u)\| \, du$$

$$\leqslant \eta \int_{t_0}^{t} \|M_0(u)\| \, du + (\eta + K) \int_{t_0}^{t} \|M_0(u) - N_0(u)\| \, du.$$

De la majoration de $\|M_0\|$ obtenue précédemment, on déduit

$$\int_{t_0}^{t} \|M_0(u\| \, du \leqslant \int_{t_0}^{t} e^{K(u-t_0)} \, du \leqslant \frac{1}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)$$

et donc, pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$\|M_0(t) - N_0(t)\| \leqslant \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1) + (\eta + K) \int_{t_0}^{t} \|M_0(u) - N_0(u)\| \, du.$$

En appliquant de nouveau le résultat de la première question on obtient, pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$\|M_0(t) - N_0(t)\| \leqslant \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)$$

$$+ (\eta + K) \int_{t_0}^{t} \frac{\eta}{K}(e^{K(u-t_0)} - 1) e^{(\eta+K)(t-u)} \, du.$$

On trouve

$$(\eta + K) \int_{t_0}^{t} \frac{\eta}{K}(e^{K(u-t_0)} - 1) e^{(\eta+K)(t-u)} \, du$$

$$= \frac{(\eta + K)\eta}{K} \left(e^{(\eta+K)t} e^{-Kt_0} \int_{t_0}^{t} e^{-\eta u} \, du - \int_{t_0}^{t} e^{(\eta+K)(t-u)} \, du \right)$$

$$= \frac{\eta + K}{K} e^{(\eta+K)t} e^{-Kt_0} [-e^{-\eta u}]_{t_0}^{t} + \frac{\eta}{K} [e^{(\eta+K)(t-u)}]_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{\eta + K}{K}(-e^{K(t-t_0)} + e^{(K+\eta)(t-t_0)}) + \frac{\eta}{K} - \frac{\eta}{K} e^{(\eta+K)(t-t_0)}$$

$$= \frac{\eta}{K} - \frac{\eta + K}{K} e^{K(t-t_0)} + e^{(\eta+K)(t-t_0)}.$$

On obtient finalement, pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$\|M_0(t) - N_0(t)\| \leqslant e^{(K+\eta)(t-t_0)} - e^{K(t-t_0)} \leqslant e^{K(t-t_0)} \left(e^{\eta(t-t_0)} - 1 \right).$$

3. On remarque que, $X_0 = M_0\alpha$ et $Y_0 = N_0\alpha$. En effet, si on pose $Z = M_0\alpha$, on a $Z(t_0) = M_0(t_0)\alpha = \alpha$ et, pour tout réel t,

$$Z'(t) = M_0'(t)\alpha = A(t)M_0(t)\alpha = A(t)Z(t).$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on obtient $Z = X_0$ et donc $X_0 = M_0\alpha$. Pour la même raison, on a $Y_0 = N_0\alpha$. On en déduit, pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$\begin{aligned}\|X_0(t) - Y_0(t)\| = \|(M_0(t) - N_0(t))\alpha\| &\leqslant \|M_0(t) - N_0(t)\|\|\alpha\| \\ &\leqslant e^{K(t-t_0)}\left(e^{\eta(t-t_0)} - 1\right)\|\alpha\|. \triangleleft\end{aligned}$$

2.57. Solutions à coordonnées positives

Soit $A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \geqslant 0$, les coefficients de $A(t)$ sont positifs, et $X_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que la solution du système $Y' = AY$ valant X_0 en 0 est à valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^n$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On notera $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées de Y. Supposons pour commencer que les coordonnées de X_0 sont strictement positives et montrons qu'alors, pour tout $t \geqslant 0$, les coordonnées de $Y(t)$ sont strictement positives. Raisonnons par l'absurde et supposons donc qu'il existe $t > 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_i(t) \leqslant 0$. Notons $T = \{t \geqslant 0,\ \exists i \in [\![1, n]\!]\ y_i(t) \leqslant 0\}$ et $\alpha = \inf T$. Comme T est fermé, $\alpha \in T$ et on a donc $\alpha > 0$. On a pour tout $t \in [0, \alpha[$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$ $y_i(t) > 0$. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $t \in [0, \alpha[$,

$$y_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j(t) \geqslant 0.$$

Les fonctions y_i sont croissantes sur $[0, \alpha]$ et donc strictement positives sur $[0, \alpha]$. Cela contredit la définition de α et les fonctions y_i ne prennent donc que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+$.

Passons au cas général. Soit U le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1. Nous allons remplacer X_0 par $X_0 + \varepsilon U$, avec $\varepsilon > 0$ et faire tendre ε vers 0. Il s'agit de démontrer dans ce cas particulier facile que les solutions dépendent continûment des conditions initiales. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe une unique solution X_i de l'équation différentielle telle que $X_i(0) = e_i$, i-ième vecteur de la base canonique. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $X_1(t), \ldots, X_n(t)$. La matrice $A(t)M(t)$ a pour colonnes les vecteurs $A(t)X_i(t) = X_i'(t)$. Ainsi $A(t)M(t) = M'(t)$. On en déduit que pour tout vecteur X_0 et tout réel t, $A(t)(M(t)X_0) = M'(t)X_0$. Comme $M(0) = I_n$, la solution de l'équation prenant la valeur X_0 en 0 est $Y : t \longmapsto M(t)X_0$. Notons Y_ε la solution qui prend en 0 la valeur $X_0 + \varepsilon U$, *i.e.* $Y_\varepsilon : t \longmapsto M(t)(X_0 + \varepsilon U)$.

Revenons à la propriété à démontrer. Par hypothèse les coordonnées de X_0 sont positives donc celles de $X_0 + \varepsilon U$ sont strictement positives. De la première partie de la démonstration, on déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$, les coordonnées de $Y_\varepsilon(t) = M(t)(X_0 + \varepsilon U)$ sont strictement positives. En faisant tendre ε vers 0, on obtient que les coordonnées de $M(t)X_0 = Y(t)$ sont positives ou nulles. ◁

Les deux exercices suivants étudient les équations différentielles de la forme $A' = AB - BA$, *appelées équations différentielles de Lax. On dit que* A *et* B *forment une paire de Lax.*

2.58. Équation différentielle de Lax (1)

Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de l'équation différentielle : $X' = AX - XA$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $t \longmapsto \mathrm{Tr}(X(t)^k)$ est constante.

2. Montrer que les valeurs propres complexes de $X(t)$ ne dépendent pas de t.

3. Montrer que $X(t)$ est semblable à $X(0)$ pour tout t.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t, on pose $\varphi_k(t) = \mathrm{Tr}(X(t)^k)$. On a

$$(X^k)'(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (X(t))^i X'(t) (X(t))^{k-i-1}.$$

Par linéarité, la dérivée de la trace est la trace de la dérivée donc on obtient, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}\varphi_k'(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{Tr}\left((X(t))^i X'(t) (X(t))^{k-i-1}\right) = k\,\mathrm{Tr}\left((X(t))^{k-1} X'(t)\right) \\ &= k\left(\mathrm{Tr}((X(t))^{k-1} A(t) X(t)) - \mathrm{Tr}((X(t))^k A(t))\right) = 0,\end{aligned}$$

en appliquant la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. La fonction φ_k est constante.

2. Notons $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ les valeurs propres complexes de $X(t)$. On a $\mathrm{Tr}(X(t)) = \varphi_1(t)$ et

$$\begin{aligned}\det(X(t)) = \lambda_1(t)\lambda_2(t) &= \frac{1}{2}\left((\lambda_1(t) + \lambda_2(t))^2 - (\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t))\right) \\ &= \frac{1}{2}((\varphi_1(t))^2 - \varphi_2(t)),\end{aligned}$$

donc la trace et le déterminant de $X(t)$ sont indépendantes de t. Il en est de même de son polynôme caractéristique et donc de ses valeurs propres.

Cela reste encore vrai en dimension n mais il faut faire appel aux formules de Newton (cf. exercice 5.31 du tome algèbre 1) pour voir que les fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres sont constantes.

3. Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $X(t)$ qui sont indépendantes de t. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la matrice $X(t)$ est semblable pour tout t à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ donc $X(t)$ est semblable pour tout t à $X(0)$.

Supposons désormais que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Si $X(0) = \lambda I_2$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \lambda I_2$: en effet, la fonction $t \longmapsto \lambda I_2$ est l'unique solution de l'équation $X' = AX - XA$ qui en 0 prend la valeur λI_2. Pour les autres solutions, on a donc forcément $X(t) \neq \lambda I_2$ pour tout t et $X(t)$ n'est jamais diagonalisable. Dans ce cas $X(t)$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ pour tout t et donc à nouveau toutes les matrices $X(t)$ sont semblables entre elles. ◁

On voit dans l'exercice suivant que l'équation de Lax permet de caractériser les arcs de classe C^1 formés de matrices semblables.

2.59. Équation différentielle de Lax (2)

Soit A une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe une application S de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}(t)^{-1}\mathrm{A}(t)\mathrm{S}(t) = \mathrm{A}(0).$$

Montrer qu'il existe une application continue B de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{A}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}(t)\mathrm{A}(t).$$

2. Étudier la réciproque de 1.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Puisque l'on a, pour tout réel t, $\mathrm{A}(t) = \mathrm{S}(t)\mathrm{A}(0)\mathrm{S}(t)^{-1}$, la fonction A est de classe C^1. En effet, $\mathrm{S}(t)^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{S}(t)}\, {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{S}(t))$ et les coefficients de $\mathrm{S}(t)^{-1}$ sont des fractions rationnelles des coefficients de $\mathrm{S}(t)$ donc des fonctions de classe C^1. En dérivant la relation $\mathrm{A}(t)\mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(t)\mathrm{A}(0)$, on obtient, pour tout réel t, $\mathrm{A}'(t)\mathrm{S}(t) + \mathrm{A}(t)\mathrm{S}'(t) = \mathrm{S}'(t)\mathrm{A}(0)$ et donc

$$\begin{aligned} A'(t) &= -A(t)S'(t)S(t)^{-1} + S'(t)A(0)S(t)^{-1} \\ &= -A(t)S'(t)S(t)^{-1} + S'(t)S(t)^{-1}A(t), \end{aligned}$$

ce qui est la relation cherchée avec $B(t) = -S'(t)S(t)^{-1}$. La fonction B est continue car S est $\mathcal{C}^1$.

2. Réciproquement, supposons qu'il existe une $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$ pour tout t. La question précédente invite à chercher S comme solution de l'équation différentielle $S'(t) = -B(t)S(t)$. Prenons l'unique solution telle que $S(0) = I_n$. Les colonnes de $S(t)$ forment alors un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire $Y' = -B(t)Y$ puisque évaluées en 0 ces n colonnes donnent la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après le cours on sait que $S(t)$ est inversible pour tout t.

Posons alors $C(t) = S(t)^{-1}A(t)S(t)$. La fonction C est de classe $\mathcal{C}^1$ et $SC = AS$. On a donc $S'C + SC' = A'S + AS'$ et

$$SC' = ABS - BAS - ABS + BSC = 0,$$

car $AS = SC$. On en déduit $C' = 0$, puisque $S(t)$ est inversible pour tout t. La fonction C est constante égale à $C(0) = S(0)^{-1}A(0)S(0) = A(0)$, car $S(0) = I_n$. On a donc, pour tout réel t, $S(t)^{-1}A(t)S(t) = A(0)$. ◁

Si A, B *est une paire de Lax, toutes les matrices* $A(t)$ *sont semblables à* $A(0)$ *donc ont mêmes valeurs propres. Les fonctions* $\mathrm{Tr}(A^k)$ *si elles ne sont pas constantes sont des intégrales premières de l'équation de Lax, c'est-à-dire sont constantes sur les courbes intégrales. La représentation des systèmes d'équations différentielles sous la forme de Lax est une méthode importante pour trouver des intégrales premières.*

Voici maintenant une série d'exercices sur les exponentielles de matrices. Le lecteur trouvera dans le tome algèbre 2 d'autres énoncés sur cette notion qui n'ont pas de lien direct avec les équations différentielles.

2.60. Une identité remarquable

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C = AB - BA$ et on suppose que A et B commutent avec C. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $M(t) = e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB}$. Exprimer $M(t)$ en fonction de C et t.

(École normale supérieure, école polytechnique)

▷ **Solution.**

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la fonction $F : t \longmapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ pour tout t. La fonction

$t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathrm{M}'(t) = -e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}(\mathrm{A}+\mathrm{B})e^{t\mathrm{A}}e^{t\mathrm{B}} + e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{A}e^{t\mathrm{A}}e^{t\mathrm{B}} + e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}e^{t\mathrm{B}}$$

soit, en mettant $e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$ en facteur à gauche et $e^{t\mathrm{B}}$ en facteur à droite,

$$\mathrm{M}'(t) = e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\Big(-\mathrm{B}e^{t\mathrm{A}} + e^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\Big)e^{t\mathrm{B}}.$$

On va exprimer $[e^{t\mathrm{A}}, \mathrm{B}] = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{B} - \mathrm{B}e^{t\mathrm{A}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(\mathrm{A}^n\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^n)$ à l'aide de C. On a $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{C}$ et

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) + (\mathrm{AB} - \mathrm{BA})\mathrm{A} = \mathrm{AC} + \mathrm{CA} = 2\mathrm{CA},$$

car C et A commutent. Supposons que $\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k = k\mathrm{C}\mathrm{A}^{k-1}$ pour un entier $k \geqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^{k+1} &= \mathrm{A}(\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k) + (\mathrm{AB} - \mathrm{BA})\mathrm{A}^k \\ &= \mathrm{A}(k\mathrm{C}\mathrm{A}^{k-1}) + \mathrm{C}\mathrm{A}^k = (k+1)\mathrm{C}\mathrm{A}^k,\end{aligned}$$

car A et C commutent. Par récurrence la propriété est donc vraie pour tout $k \geqslant 1$. On en déduit que

$$e^{t\mathrm{A}}\mathrm{B} - \mathrm{B}e^{t\mathrm{A}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} n\mathrm{C}\mathrm{A}^{n-1} = t\mathrm{C}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{A}^n = t\mathrm{C}e^{t\mathrm{A}}.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{M}'(t) = e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}(t\mathrm{C}e^{t\mathrm{A}})e^{t\mathrm{B}} = t\mathrm{C}e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}e^{t\mathrm{A}}e^{t\mathrm{B}} = t\mathrm{C}\mathrm{M}(t)$$

car C commutant avec A et B, elle commute avec A + B donc avec $e^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$. D'autre part, on a $\mathrm{M}(0) = \mathrm{I}_n$. On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\mathrm{C}\right)$. ◁

2.61. Classification différentielle des flots linéaires

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$, on note $g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0)$ la solution du problème de Cauchy : $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ et $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall \mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad f \circ g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0) = g(\mathrm{B}, f(\mathrm{X}_0)) \ ;$$

(*ii*) A et B sont semblables.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Bien entendu $g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0)(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ pour tout réel t et tout $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$.

• Montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$. On a alors, pour tout réel t, $e^{t\mathrm{B}} = \mathrm{P}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{P}^{-1}$. Pour tout $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, $g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0)(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ et donc

$$\mathrm{P}g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0)(t) = \mathrm{P}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = e^{t\mathrm{B}}\mathrm{PX}_0 = g(\mathrm{B}, \mathrm{PX}_0)(t).$$

Ainsi $\mathrm{P}g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0) = g(\mathrm{B}, \mathrm{PX}_0)$. En posant $f(\mathrm{X}) = \mathrm{PX}$ pour tout X dans $\mathbb{R}^n$, on obtient $f \circ g(\mathrm{A}, \mathrm{X}_0) = g(\mathrm{B}, f(\mathrm{X}_0))$. L'automorphisme linéaire f est évidemment un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

• Montrons maintenant que $(i) \Longrightarrow (ii)$. On a pour $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}) = e^{t\mathrm{B}}f(\mathrm{X})$. À t fixé, les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ donc en différentiant on a $\mathrm{J}(f, e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X})e^{t\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{B}}\mathrm{J}(f, \mathrm{X})$ où $\mathrm{J}(f, \mathrm{X})$ désigne la jacobienne de f en X. En particulier en $\mathrm{X} = 0$ on a $\mathrm{J}(f, 0)e^{t\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{B}}\mathrm{J}(f, 0)$ et comme f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ la matrice $\mathrm{P} = \mathrm{J}(f, 0)$ est inversible. Cela vaut pour tout réel t et en en faisant le développement limité à l'ordre 1 en 0 on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{I}_n + t\mathrm{A} + o(t)) = (\mathrm{I}_n + t\mathrm{B} + o(t))\mathrm{P}.$$

Par unicité du développement limité il vient $\mathrm{PA} = \mathrm{BP}$ donc A et B sont semblables. ◁

La réciproque ne tient plus si on prend pour f un homéomorphisme : la classification topologique des flots linéaires est beaucoup plus complexe.

L'exercice suivant s'intéresse au comportement des solutions d'un système linéaire à coefficients constants $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. À quelle condition les solutions sont-elles toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$? À quelles conditions tendent-elles toutes vers 0 en $+\infty$? Ces questions (ou des variantes) reviennent très fréquemment à l'oral et sont parfois proposées en petite dimension pour simplifier. Il est clair que le spectre de la matrice A joue un rôle essentiel dans ces questions.

2.62. Stabilité d'un système à coefficients constants

Soit A une matrice carrée réelle et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $X' = AX$.

1. Montrer l'équivalence

$$\forall X \in \mathcal{S},\ \lim_{t\to+\infty} X(t) = 0 \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Re}\,\lambda < 0.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions soient bornées sur $\mathbb{R}_+$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Supposons que, pour tout $X \in \mathcal{S}$, $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$ et soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ une valeur propre complexe de A. Si $X_0 \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A associée à λ la fonction $f : t \mapsto e^{tA}X_0 = e^{\lambda t}X_0$ est une solution (complexe) de l'équation différentielle. Comme la partie réelle et la partie imaginaire de f sont des solutions réelles de l'équation (puisque A est réelle) l'hypothèse permet de dire que f tend vers 0 en $+\infty$. Cela impose $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. On va utiliser la décomposition de Dunford de A (voir l'exercice 2.40 du tome algèbre 2) : il existe N nilpotente et B diagonalisable qui commutent telles que $A = N + B$. Les matrices N et B sont uniques mais seule l'existence (qu'il faudrait rapidement retrouver à l'oral) est utile ici. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = e^{tN}e^{tB}$. En appelant p l'indice de nilpotence de N, on obtient pour tout réel t, $e^{tN} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k$. Soit P inversible et D diagonale telle que $B = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B donc de A. On a alors $e^{tB} = Pe^{tD}P^{-1}$. Les coefficients de e^{tA} sont donc des sommes de termes $ct^k e^{\lambda t}$, où c est une constante, $k \in [\![0, p-1]\!]$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Comme $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ on a $\lim_{t\to+\infty} ct^k e^{\lambda t} = 0$. On en déduit que $\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0$. Si $X \in \mathcal{S}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA}X(0)$ et donc $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$.

2. Les solutions sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $t \mapsto e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrons que cela équivaut à : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$ et, de plus, pour toute valeur propre λ pour laquelle le sous-espace propre correspondant n'est pas égal au sous-espace caractéristique, on a $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

• Supposons que e^{tA} est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X_0 un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. On a $e^{tA}X_0 = e^{\lambda t}X_0$.

Comme e^{tA} est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même de $e^{tA}X_0$ et comme $X_0 \neq 0$, $e^{\lambda t}$ est borné sur $\mathbb{R}_+$. Comme $|e^{\lambda t}| = e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t}$, cela nécessite $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que le sous-espace propre relatif à la valeur propre λ n'est pas égal au sous-espace caractéristique. Il existe donc $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. On pose $Y = AX - \lambda X$. Alors $Y \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ et donc $AY = \lambda Y$. La famille (X, Y) est libre car $X \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. La matrice de la restriction au plan $\mathrm{Vect}(Y, X)$ de l'endomorphisme canoniquement associé à A est $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On montre que, pour tout entier naturel k, $M^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$, par une récurrence immédiate. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = k\lambda^{k-1} Y + \lambda^k X$. On en déduit que

$$e^{tA}X = te^{\lambda t}X + e^{\lambda t}Y.$$

Si $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, on a, en posant $\mathrm{Im}\,\lambda = \beta$, $e^{tA}X = e^{i\beta t}(tX + Y)$. Si $\beta = 0$, $e^{tA}X$ n'est pas borné sur $\mathbb{R}_+$, car $X \neq 0$. Si $\beta \neq 0$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e^{\frac{2p\pi}{\beta}A}X = \dfrac{2p\pi}{\beta}X + Y$ et de nouveau $e^{tA}X$ n'est pas borné sur $\mathbb{R}_+$. *A fortiori* e^{tA} n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$. On a donc nécessairement $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

• Supposons réciproquement que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ et que, de plus, pour toute valeur propre λ pour lequel le sous-espace propre correspondant n'est pas égal au sous-espace caractéristique, on a $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Comme $\mathbb{C}^n$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques que l'on note $F_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^p$, il suffit de démontrer que, pour tout $X \in F_\lambda$, $e^{tA}X$ est borné sur $\mathbb{R}_+$.

Si $F_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, on a $e^{tA}X = e^{\lambda t}X$ et comme $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$, $e^{tA}X$ est borné sur $\mathbb{R}_+$.

Sinon on pose $N = A - \lambda I_n$. Soit n (resp. a) la restriction à F_λ de l'endomorphisme canoniquement associé N (resp. A). On a $a = \lambda\,\mathrm{Id} + n$, avec n nilpotent ($n^p = 0$) et $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. La deuxième partie de la première question montre que dans ces conditions $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{ta} = 0$. On en déduit $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA}X = 0$ et comme l'application $t \longmapsto e^{tA}X$ est continue, on en déduit que $e^{tA}X$ est borné sur $\mathbb{R}_+$. ◁

D'après la question 1, les solutions du système $X' = AX$ *tendent toutes vers* 0 *(on dit que le système est stable) si les valeurs propres de* χ_A *ont une partie réelle strictement négative (on dit que* χ_A *est un polynôme de Hurwitz). Une condition nécessaire est que tous les coefficients de* χ_A *soient strictement positifs. Cela se voit sur la factorisation du polynôme : en notant les racines réelles* $x_1, \ldots, x_r$ *et en regroupant deux à deux les racines non réelles* $z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_s, \bar{z}_s$*, on obtient*

$\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - x_k) \prod_{j=1}^{s} (X^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_k X + |z_k|^2)$, *ce qui montre que les coefficients de* χ_A *sont positifs. Cette condition n'est pas suffisante.*

Le lecteur trouvera dans l'exercice 5.48 du tome algèbre 1 le critère de Routh-Hurwitz pour les polynômes de degré 3 *: un tel polynôme* $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ *a toutes ses racines complexes de partie réelle strictement négative si et seulement si* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ *et* $ab - c > 0$. *Ce critère se généralise pour un polynôme de degré quelconque. À partir des coefficients du polynôme, on construit le tableau de Routh dont les coefficients sont définis par récurrence. Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme soit de Hurwitz est que les coefficients de la première colonne du tableau soient strictement positifs. On trouve par exemple pour un polynôme de degré* 4, *noté* $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, *outre la positivité des coefficients, la condition* $bc - ad > \dfrac{c^2}{a}$.

Nous proposons au lecteur de montrer que les solutions du système sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si la matrice* A *est diagonalisable avec des valeurs propres toutes imaginaires pures. Cela a aussi été proposé à l'oral de l'École polytechnique.*

2.63. Équation singulière d'ordre 1 dans $\mathbb{C}^n$

Soient $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrer qu'il existe $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, solution de

$$tX'(t) + A(t)X(t) = F(t).$$

On commencera par le cas $n = 1$ et A constante.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Notons pour commencer que sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, l'équation s'écrit sous forme résolue $X'(t) = -\dfrac{1}{t}X(t) + \dfrac{1}{t}F(t)$, et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Une récurrence évidente montre que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ possède des dérivées de tout ordre, donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'exercice consiste donc à regarder s'il est possible de raccorder deux telles solutions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Supposons qu'on ait démontré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'équation possède une unique solution X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\alpha, \alpha]$. Celle-ci coïncide sur $[-\alpha, 0[$ (resp. $]0, \alpha]$) avec l'unique solution sur $\mathbb{R}_-^*$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$) prenant

en $-\alpha$ (resp. α) la valeur $\mathrm{X}(-\alpha)$ (resp. $\mathrm{X}(\alpha)$). On en déduit une unique solution sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Traitons tout d'abord le cas $n = 1$ et A constante égale à a, avec $\mathrm{Re}(a) > 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, l'équation s'écrit $\mathrm{X}'(t) + \dfrac{a}{t}\mathrm{X}(t) = \dfrac{\mathrm{F}(t)}{t}$. L'équation homogène a pour solution les fonctions $t \longmapsto \dfrac{C}{|t|^a}$. Avec la méthode de la variation de la constante, on obtient $\dfrac{tC'(t)}{|t|^a} = \mathrm{F}(t)$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit $\mathrm{C}(t) = \int_0^t \mathrm{F}(u)u^{a-1}\,\mathrm{d}u + c$, où $c \in \mathbb{C}$ (l'intégrale converge car $\mathrm{Re}(a-1) > -1$) et $\mathrm{X}(t) = \dfrac{1}{t^a}\left(\int_0^t \mathrm{F}(u)u^{a-1}\,\mathrm{d}u + c\right)$. Pour que la solution soit prolongeable en 0, il faut $c = 0$ car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{|t^a|} = +\infty$. En faisant le changement de variable $v = \dfrac{u}{t}$, on obtient alors

$$\mathrm{X}(t) = \int_0^1 \mathrm{F}(tv)v^{a-1}\,\mathrm{d}v.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, on obtient $\mathrm{C}(t) = -\int_0^t \mathrm{F}(u)|u|^{a-1}\,\mathrm{d}u + c$. Il faut encore prendre $c = 0$ et le changement de variable $v = \dfrac{u}{t}$ donne encore

$$\mathrm{X}(t) = -\frac{1}{|t|^a}\int_0^t \mathrm{F}(u)|u|^{a-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{F}(tv)v^{a-1}\,\mathrm{d}v.$$

La fonction $\mathrm{X} : t \longmapsto \int_0^1 \mathrm{F}(tv)v^{a-1}\,\mathrm{d}v$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Elle est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et, par continuité de X et X', sur $\mathbb{R}$. L'équation possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons $n = 1$ et A non constante vérifiant $\mathrm{Re}(\mathrm{A}(0)) > 0$. Les solutions de l'équation homogène sont sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ les fonctions $\mathrm{Z} : t \longmapsto \mathrm{C}e^{-\int_{t_0}^t \frac{\mathrm{A}(u)}{u}\,\mathrm{d}t}$. La fonction $\mathrm{B} : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(0)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (avec $\mathrm{B}(0) = \mathrm{A}'(0)$). On obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on a pour $t \neq 0$, avec le changement de variable $v = \dfrac{u}{t}$,

$$\mathrm{B}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{A}'(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{A}'(tv)\mathrm{d}v,$$

formule également valable pour $t = 0$, et B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On peut donc écrire

$$\mathrm{Z}(t) = \mathrm{C}\exp\left(-\int_{t_0}^t \mathrm{B}(u)\,\mathrm{d}u - \mathrm{A}(0)\ln|t| + \mathrm{A}(0)\ln|t_0|\right),$$

et en changeant la constante

$$Z(t) = C\exp\left(-\int_0^t B(u)\,du\right)\frac{1}{|t|^{A(0)}}.$$

En appliquant la méthode de la variation de la constante, on obtient

$$C'(t) = \exp\left(\int_0^t B(u)\,du\right)F(t)|t|^{A(0)}\frac{1}{t}.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc

$$C(t) = \int_0^t \left(e^{\int_0^v B(u)\,du} F(v)v^{A(0)-1}\right)dv + c,$$

où $c \in \mathbb{C}$. Cette intégrale converge car $\mathrm{Re}(A(0) - 1)) > -1$. Si on veut prolonger X par continuité en 0, il fut prendre $c = 0$. On a alors, pour $t > 0$,

$$X(t) = e^{-\int_0^t B(u)\,du}\frac{1}{t^{A(0)}}\int_0^t \left(e^{\int_0^v B(u)\,du} F(v)v^{A(0)-1}\right)dv$$

$$= \frac{1}{t^{A(0)}}\int_0^t \left(e^{\int_t^v B(u)\,du} F(v)v^{A(0)-1}\right)dv.$$

En faisant le changement de variable $w = \dfrac{v}{t}$, on obtient

$$X(t) = \int_0^1 \left(e^{\int_t^{tw} B(u)\,du} F(tw)w^{A(0)-1}\right)dw.$$

En faisant le même raisonnement sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve le même résultat. On pose donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \int_0^1 \left(e^{\int_t^{tw} B(u)\,du} F(tw)w^{A(0)-1}\right)dw.$$

On voit que X est $\mathcal{C}^\infty$. Elle est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et par continuité sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas général, on ne peut pas résoudre explicitement l'équation. On la met sous forme intégrale. On pose, pour $t \neq 0$, $Y(t) = |t|^{A(0)}X(t)$, avec toujours $t^{A(0)} = \exp(\ln t\, A(0))$ pour $t > 0$. On obtient, pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$Y'(t) = |t|^{A(0)}(X'(t) + \frac{1}{t}A(0)X(t)) = \varepsilon|t|^{A(0)-1}(tX'(t) + A(0)X(t)),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ selon que t est positif ou négatif. On en déduit

$$tX'(t)+\mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) = \mathrm{F}(t) \Longleftrightarrow \mathrm{Y}'(t) = \varepsilon|t|^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}}(\mathrm{F}(t)-(\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(0))\mathrm{X}(t)).$$

Comme il a été démontré dans l'exercice 2.62, il résulte de la décomposition de Dunford que, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les coefficients de $e^{t\mathrm{M}}$ sont des sommes de termes de la forme $ct^k e^{\lambda t}$, où c est une constante, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$. Ainsi les coefficients de $|t|^{\mathrm{A}(0)} = \exp(\ln|t|\mathrm{A}(0))$ sont des sommes de $c(\ln|t|)^k e^{\lambda \ln|t|} = c(\ln|t|)^k|t|^\lambda$, où $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}(0)) \subset \mathbb{R}_+^*$. En notant μ la plus petite partie réelle des valeurs propres de $\mathrm{A}(0)$, on obtient au voisinage de 0, $|t|^{\mathrm{A}(0)} = o((\ln|t|)^n|t|^\mu)$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{Y}(t) = \lim\limits_{t\to 0} |t|^{\mathrm{A}(0)}\mathrm{X}(t) = 0$.
On a donc

$$\mathrm{Y}(t) = \varepsilon \int_0^t |s|^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}} \Big(\mathrm{F}(s) - (\mathrm{A}(s) - \mathrm{A}(0))\mathrm{X}(s)\Big)\, \mathrm{d}s,$$

puis

$$\mathrm{X}(t) = \varepsilon|t|^{-\mathrm{A}(0)} \int_0^t |s|^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}} \Big(\mathrm{F}(s) - (\mathrm{A}(s) - \mathrm{A}(0))\mathrm{X}(s)\Big)\, \mathrm{d}s,$$

ce qui avec le changement de variable $u = \dfrac{s}{t}$ donne

$$\mathrm{X}(t) = \int_0^1 u^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}} \Big(\mathrm{F}(tu) - (\mathrm{A}(tu) - \mathrm{A}(0))\mathrm{X}(tu)\Big)\, \mathrm{d}u.$$

Soit $\alpha > 0$ à choisir. Posons $\mathrm{E} = \mathcal{C}([-\alpha, \alpha], \mathbb{C}^n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme triple associé et E de la norme de la convergence uniforme. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, considérons l'application $\Phi(\mathrm{X})$ définie sur $[-\alpha, \alpha]$ par

$$\Phi(\mathrm{X})(t) = \int_0^1 u^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}} \left(\mathrm{F}(tu) - (\mathrm{A}(tu) - \mathrm{A}(0))\mathrm{X}(tu)\right) \mathrm{d}u.$$

Montrons que $\Phi(\mathrm{X}) \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire qu'elle est définie et continue sur $[-\alpha, \alpha]$. La fonction $h : (t, u) \longmapsto \mathrm{F}(tu) - (\mathrm{A}(tu) - \mathrm{A}(0))\mathrm{X}(tu)$ est continue sur $[-\alpha, \alpha] \times [0, 1]$ donc bornée. Pour tout $(t, u) \in [-\alpha, \alpha] \times [0, 1]$,

$$\|u^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}} h(x, t)\| \leqslant \|u^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}}\| \|h\|_\infty = o((\ln u)^n u^{\mu-1}.$$

La fonction $u \longmapsto (\ln u)^n u^{\mu-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. La fonction $(t, u) \longmapsto u^{\mathrm{A}(0)-\mathrm{I}} h(t, u)$ est continue sur $[-\alpha, \alpha]\times]0, 1]$ et on a une relation de domination, donc la fonction $\Phi(\mathrm{X})$ est définie et continue sur $[-\alpha, \alpha]$: Φ est une application de E dans E.

Pour $(X, Y) \in E^2$ et $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a

$$\|\Phi(X)(t) - \Phi(Y)(t)\| = \left\| \int_0^1 u^{A(0)-I} (A(0) - A(tu))(X(tu) - Y(tu))\, du \right\|$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 \left\| u^{A(0)-I} (A(0) - A(tu)) \right\| du \right) \|X - Y\|_\infty.$$

On notant K un majorant de $\|A(0) - A(t)\|$ pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, on obtient pour $t \in [-\alpha, \alpha]$ et $u \in [0, 1]$,

$$\left\| u^{A(0)-I} (A(0) - A(tu)) \right\| \leqslant K \|u^{A(0)-I}\| = o((\ln u)^n t^{\mu-1}).$$

Comme $\int_0^1 K\|u^{A(0)-I}\|\, du$ converge, on en déduit, par le théorème de convergence dominée, que $\lim_{t\to 0} \int_0^1 \|u^{A(0)-I} (A(0) - A(tu))\|\, du = 0$. On peut donc choisir $\alpha > 0$ tel que $\int_0^1 \|u^{A(0)-I}((A(0) - A(tu)))\|\, du \leqslant \frac{1}{2}$ pour $|t| \leqslant \alpha$. Pour un tel choix de α, on a

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \|X - Y\|_\infty,$$

donc l'application Φ est contractante sur E pour $\| \ \|_\infty$ et l'équation $\Phi(X) = X$ admet une solution unique.

Il reste à voir que X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\alpha, \alpha]$ et vérifie l'équation différentielle. Comme on l'a remarqué plus haut, dans un cas particulier, la fonction $t \longmapsto \dfrac{A(t) - A(0)}{t}$ peut être prolongée en une fonction B de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On écrit pour $t \in [-\alpha, \alpha]$,

$$X(t) = \int_0^1 u^{A(0)-I} F(tu)\, du - \int_0^1 u^{A(0)-I} tu B(tu) X(tu)\, du$$
$$= \int_0^1 u^{A(0)-I} F(tu)\, du - \int_0^1 u^{A(0)} t B(tu) X(tu)\, du.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} (u^{A(0)+(k-1)}) = F^{(k)}(tu)$. Comme $F^{(k)}$ est bornée sur $[-\alpha, \alpha]$ et $u \longmapsto u^{A(0)+(k-1)}$ est intégrable sur $[0, 1]$, la fonction $t \longmapsto \int_0^1 u^{A(0)-I} F(tu)\, du$ possède une dérivée k-ième pour tout k donc est $\mathcal{C}^\infty$. Posons, pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, $G(t) = \int_0^1 u^{A(0)} t B(tu) X(tu)\, du$. Pour $t \neq 0$, on a

$$G(t) = \int_0^t \left|\frac{t}{s}\right|^{A(0)} B(s) X(s)\, ds = |t|^{-A(0)} \int_0^t |s|^{A(0)} B(s) X(s)\, ds.$$

Il est clair que G est dérivable sur $[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$ et que, sur cet ensemble,

$$\begin{aligned}\mathrm{G}'(t) &= -\frac{1}{t}\mathrm{A}(0)|t|^{-\mathrm{A}(0)}\int_0^t |s|^{\mathrm{A}(0)}\mathrm{B}(s)\mathrm{X}(s)\,\mathrm{d}s + \mathrm{B}(t)\mathrm{X}(t)\\ &= -\int_0^1 \mathrm{A}(0)u^{\mathrm{A}(0)}\mathrm{B}(tu)\mathrm{X}(tu)\mathrm{d}u + \mathrm{B}(t)\mathrm{X}(t).\end{aligned}$$

La fonction G' est continue sur $[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$. Toujours grâce au théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{t\to 0}\mathrm{G}'(t) = -\int_0^1 \mathrm{A}(0)u^{\mathrm{A}(0)}\mathrm{B}(0)\mathrm{X}(0)\mathrm{d}u + \mathrm{B}(0)\mathrm{X}(0).$$

Par le théorème dit de la limite de la dérivée, on en déduit que G est dérivable en 0 et $\mathrm{G}'(0)$ est égal à cette limite. La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\alpha,\alpha]$ et il en est de même de X.

Supposons que X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[-\alpha,\alpha]$. Toujours d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, G' est de classe $\mathcal{C}^k$, G est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et il en est de même de X. Ainsi X est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Maintenant que l'on sait que X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on repart de l'égalité

$$\mathrm{X}(t) = \int_0^1 u^{\mathrm{A}(0)-1}\left(\mathrm{F}(tu) - (\mathrm{A}(tu)-\mathrm{A}(0))\mathrm{X}(tu)\right)\mathrm{d}u.$$

Comme toutes les fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$, on peut de nouveau appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On obtient, pour $t\in[-\alpha,\alpha]$,

$$\begin{aligned}t\mathrm{X}'(t) &= t\int_0^1 u^{\mathrm{A}(0)-1}u(\mathrm{F}-(\mathrm{A}-\mathrm{A}(0))\mathrm{X})'(tu)\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 u^{\mathrm{A}(0)}t(\mathrm{F}-(\mathrm{A}-\mathrm{A}(0))\mathrm{X})'(tu)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et en intégrant par parties

$$\begin{aligned}t\mathrm{X}'(t) &= \left[u^{\mathrm{A}(0)}(\mathrm{F}-(\mathrm{A}-\mathrm{A}(0))\mathrm{X})(tu)\right]_{u=0}^{u=1}\\ &\quad -\int_0^1 \mathrm{A}(0)u^{\mathrm{A}(0)-1}\left(\mathrm{F}(tu)-(\mathrm{A}(tu)-\mathrm{A}(0))\mathrm{X}(tu)\right)\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{F}(t)-(\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(0))\mathrm{X}(t)-\mathrm{A}(0)\mathrm{X}(t) = \mathrm{F}(t)-\mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t),\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité voulue. Comme il a été remarqué au début de l'exercice, X se prolonge en une unique solution $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. ◁

En automatique, l'équation $x'(t) = \mathrm{A}x(t) + u(t)b$ est une équation différentielle commandée, la fonction u étant appelée une commande.

On dit qu'un état $v \in \mathbb{R}^n$ est atteignable à partir de 0 en un temps T si l'équation différentielle possède une solution x tel que $x(0) = 0$ et $x(\mathrm{T}) = v$. Le système est commandable en un temps T si tout $v \in \mathbb{R}^n$ est atteignable en un temps T, commandable s'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que le système soit commandable en un temps T. L'exercice suivant donne une condition de commandabilité.

2.64. Commandabilité

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\mathrm{T} > 0$, on note $\mathcal{C}_\mathrm{T}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[0, \mathrm{T}]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(\mathrm{A}^k b)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $\mathbb{R}^n$;

(ii) pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mathrm{T} > 0$, $u \in \mathcal{C}_\mathrm{T}$ et une application x de $[0, \mathrm{T}]$ dans $\mathbb{R}^n$, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux tels que

$$x' = \mathrm{A}x + ub, \quad x(0) = 0, \quad x(\mathrm{T}) = v.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Soient $\mathrm{T} > 0$, $u \in \mathcal{C}_\mathrm{T}$ et $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_p = \mathrm{T}$ une subdivision de l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ adaptée à u. Cherchons $x : [0, \mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $x' = \mathrm{A}x + ub$ et $x(0) = 0$. On utilise la méthode de variation de la constante en considérant la fonction C définie par $\mathrm{C}(t) = e^{-t\mathrm{A}}x(t)$. La fonction C est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a alors, en tout point de dérivabilité, $\mathrm{C}'(t) = e^{-t\mathrm{A}}(x'(t) - \mathrm{A}x(t))$ et le système équivaut à $\mathrm{C}(0) = 0$ et $\mathrm{C}'(t) = u(t)e^{-t\mathrm{A}}b$. La fonction $t \longmapsto u(t)e^{-t\mathrm{A}}b$ est continue par morceaux sur $[0, \mathrm{T}]$. On a nécessairement, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{C}(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)e^{-s\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s$ et donc

$$x(t) = e^{t\mathrm{A}} \int_0^t u(s)e^{-s\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s = \int_0^t u(s)e^{(t-s)\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s.$$

Comme $s \longmapsto u(s)e^{-s\mathrm{A}}b$ est continue par morceaux sur $[0, \mathrm{T}]$, cette fonction x est continue. Enfin x est dérivable sur $[0, \mathrm{T}] \setminus \{t_0, \ldots, t_p\}$ et $x'(t) = \mathrm{A}x(t) + u(t)b$. Comme x est continue et u continue par morceaux, x' est continue par morceaux donc x est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a donc obtenu une solution unique.

Notons $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $u \in \mathcal{C}_\mathrm{T}$ et une application x de $[0, \mathrm{T}]$ dans $\mathbb{R}^n$, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux tels que $x' = \mathrm{A}x + ub$, $x(0) = 0$, $x(\mathrm{T}) = v$. Il résulte de ce qui précède que $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$: c'est l'image de $\mathcal{C}_\mathrm{T}$ par l'application

linéaire $u \longmapsto \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} u(s)e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s$. Notons $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(b, \mathrm{A}b, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}b)$. Nous allons démontrer que, pour tout réel $\mathrm{T} > 0$, on a $\mathcal{A}_\mathrm{T} = \mathrm{E}$.

Soit $v \in \mathcal{A}_\mathrm{T}$. Il existe $u \in \mathcal{C}_\mathrm{T}$ tel que $v = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} u(s)e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}^n = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ et donc $\mathrm{A}^n b \in \mathrm{E}$. On montre alors facilement, par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^k b \in \mathrm{E}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!}\mathrm{A}^i b \in \mathrm{E}$. Comme E est un fermé de $\mathbb{R}^n$, car un sous-espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\mathrm{A}}b = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!}\mathrm{A}^i b \in \mathrm{E}.$$

Pour démontrer que $v \in \mathrm{E}$, on utilise ce qui précède et des sommes de Riemann. On pose, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$u_\mathrm{N} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} u\left(\frac{j\mathrm{T}}{\mathrm{N}}\right) e^{(\mathrm{T}-\frac{j\mathrm{T}}{\mathrm{N}})\mathrm{A}}b.$$

On sait que, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $u_\mathrm{N} \in \mathrm{E}$. Toujours grâce au caractère fermé de E on en déduit $v = \displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} u_\mathrm{N} \in \mathrm{E}$. On a montré que $\mathcal{A}_\mathrm{T} \subset \mathrm{E}$.

Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit de démontrer que l'on a $(\mathcal{A}_\mathrm{T})^\perp \subset \mathrm{E}^\perp$ pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $w \in (\mathcal{A}_\mathrm{T})^\perp$. Posons, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$,

$$u(t) = \langle e^{(\mathrm{T}-t)\mathrm{A}}b, w\rangle.$$

La fonction u est continue sur $[0, \mathrm{T}]$. Le vecteur v correspondant est

$$v = \int_0^{\mathrm{T}} u(s)e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s = \int_0^{\mathrm{T}} \langle e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b, w\rangle e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b\,\mathrm{d}s.$$

Comme $w \in (\mathcal{A}_\mathrm{T})^\perp$, on a

$$0 = \langle v, w\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} \langle e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b, w\rangle^2\,\mathrm{d}s.$$

On en déduit que, pour tout $s \in [0, \mathrm{T}]$, on a $\langle e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b, w\rangle = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. En dérivant cette égalité k fois par rapport à s, on obtient, pour tout $s \in [0, \mathrm{T}]$, $\langle \mathrm{A}^k e^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}b, w\rangle = 0$. Cela donne en particulier, pour $s = \mathrm{T}$, $\langle \mathrm{A}^k b, w\rangle = 0$. Cela étant vrai pour tout entier k, on en déduit que $w \in \mathrm{E}^\perp$. On conclut que $(\mathcal{A}_\mathrm{T})^\perp \subset \mathrm{E}^\perp$ et donc que $\mathcal{A}_\mathrm{T} = \mathrm{E}$. Cela montre en particulier que $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ est indépendant de T.

Venons-en à la démonstration de l'équivalence demandée.

• Supposons que (i) est réalisé. On a donc $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. On en déduit que pour tout $\mathrm{T} > 0$, $\mathcal{A}_\mathrm{T} = \mathbb{R}^n$. Si $v \in \mathbb{R}^n$, alors $v \in \mathcal{A}_\mathrm{T}$, donc il existe $u \in \mathcal{C}_\mathrm{T}$ et une application x de $[0, \mathrm{T}]$ dans $\mathbb{R}^n$, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux tels que $x' = \mathrm{A}x + ub$, $x(0) = 0$, $x(\mathrm{T}) = v$. Ainsi (ii) est réalisé.

• Supposons que (ii) est réalisé. Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que $v \in \mathcal{A}_\mathrm{T}$. Comme tous les $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ sont égaux, $v \in \mathcal{A}_1$. On obtient $\mathcal{A}_1 = \mathbb{R}^n$ et donc $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. La famille $(\mathrm{A}^k b)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est donc une base de $\mathbb{R}^n$ et (i) est réalisé. ◁

L'exercice peut se généraliser à des équations différentielles commandées de la forme $x'(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)$, *où* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, *et* u *est une fonction continue par morceaux sur* $[0, \mathrm{T}]$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$, *l'exercice traitant le cas particulier* $m = 1$. *On montre que, pour tout* $\mathrm{T} > 0$, $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ *est égal à l'image de la matrice* $\mathcal{C} = [\mathrm{B}, \mathrm{AB}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}]$ *de* $\mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$ *(matrice de commandabilité), donc est indépendant de* T. *On en déduit que le système est commandable si le rang de* $\mathcal{C}$ *est égal à* n *(critère de Kalman).*

Chapitre 3

Équations différentielles non linéaires

Depuis Newton, l'objectif de la « modélisation » d'un système mécanique ou physique est le plus souvent d'aboutir à une équation différentielle, dont la résolution doit permettre de prévoir l'évolution du système. Cette approche a été étendue dès le XVIII^e^ *siècle à des questions de biologie (par Daniel Bernoulli et d'Alembert), et un peu plus tard à des questions d'économie. Selon Vladimir Arnold (1937-2010), « les équations différentielles sont le pivot de la conception scientifique du monde. »*

L'origine même de la notion de fonction se trouve dans les travaux de Leonhard Euler (1707-1783) sur les équations différentielles. Parmi une multitude de travaux sur le sujet, il propose une méthode d'approximation des solutions d'une équation différentielle en opérant une discrétisation du problème : la méthode des polygones d'Euler.

C'est sur cette méthode simple et ancienne que se fonde Cauchy pour démontrer (dans son cours à l'École polytechnique publié en 1829) le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle du type $y' = f(x, y)$ vérifiant une condition initiale, lorsque f est continûment différentiable, résultat qui s'accorde avec le déterminisme de la physique. Jusqu'à Cauchy la conception de l'existence et de l'unicité reposait sur l'observation que la « solution générale » d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n constantes arbitraires. En imposant les valeurs de $y, y', \ldots, y^{n-1}$ en un point donné x_0, on obtient un système de n équations à n inconnues qui permet de fixer les valeurs des n constantes. En 1831, en exil à Turin, Cauchy reprend la question et montre par une autre méthode l'existence et l'unicité d'une solution analytique (c'est-à-dire développable en série entière) lorsque $f(x, y)$ est elle-même la somme d'une série entière à deux variables — ou plus simplement un polynôme.

Vers 1868, Lipschitz, ignorant les travaux de Cauchy, énonce et démontre un théorème similaire au théorème de Cauchy de 1829, où l'hypothèse f C^1 est remplacée par une hypothèse plus faible[1] *(théorème de Cauchy-Lipschitz). Vers 1890, Peano reprenant la démonstration de*

---

1. La fonction f, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est supposée continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable y, ce qui signifie que pour tout $(a, b) \in \mathrm{U}$, il existe un voisinage V de (a, b) et $\mathrm{K} > 0$ tels que $\|f(x, y) - f(x, y')\| \leqslant \mathrm{K}\|y - y'\|$ pour (x, y) et (x, y') dans V. On montre facilement grâce au théorème des accroissements finis que cette hypothèse est satisfaite quand f est C^1. C'est d'ailleurs

Cauchy et s'appuyant sur des résultats de topologie dûs à Arzela, montre que la continuité de f suffit à assurer l'existence de la solution, sans toutefois garantir son unicité. C'est le théorème de Cauchy-Peano-Arzela.

Mais la théorie des équations différentielles ne se résume pas aux théorèmes d'existence et d'unicité. Au début l'objectif a été d'intégrer (aujourd'hui on dit plutôt résoudre) le plus grand nombre possibles d'équations différentielles particulières, souvent suggérées par les applications. Intégrer une équation différentielle à l'époque, c'est donner ses solutions au moyen d'une formule explicite, ou semi-explicite, dans laquelle on autorise la présence d'intégrales non calculables. On dit dans ce cas que l'équation différentielle est intégrable par quadratures. Par exemple, l'équation différentielle $y' = 2xy + 1$ a comme solutions les fonctions

$$y = e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt + \mathrm{C}\right).$$

Dès le XVIII^e siècle, on s'est douté que la plupart des équations différentielles ne sont pas intégrables par quadratures. L'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert indique notamment (en 1751) que l'équation de Ricatti

$$y' = ay^2 + bx^n$$

a été résolue dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = -4m/(2m \pm 1)$, m entier $\geqslant 0$, mais que « personne n'a encore donné de solution générale. Peut-être n'est-elle pas susceptible d'en avoir une en termes finis. » C'est Abel qui prouva ce résultat. À sa suite, Liouville, après avoir caractérisé les fonctions dont les primitives sont calculables en termes de fonctions élémentaires (il prouve que e^{-x^2} n'est pas dans ce cas), donne une condition pour que l'équation du second ordre $y'' = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)y$ soit intégrable par quadratures. Finalement, Picard et Vessiot donnent en 1892 une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité pour le cas général, montrant ainsi de façon nette que le cas intégrable est l'exception plutôt que la règle.

Comme l'écrit Paul Painlevé, « la vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les problèmes naturels, fut intégré ». Les mathématiciens se tournèrent alors vers des questions purement qualitatives : comportement asymptotique, comparaison de solutions, caractère borné et stabilité des solutions. En fait, ce tournant majeur fut pratiquement tout entier l'œuvre d'un seul homme, Henri Poincaré (1854-1912).

L'impulsion est venue de la mécanique céleste, précisément du problème de la stabilité du système solaire : les huit planètes vont-elles

---

ce que faisait implicitement Cauchy, qui était l'inventeur de la formule des accroissements finis.

tourner éternellement autour du Soleil? Les solutions des équations différentielles du mouvement du système solaire ne sont pas exprimables au moyen de formules, et le calcul numérique ne permet d'approcher les solutions que sur un intervalle fini $[0, T]$. *Mais les mathématiciens ne manquent pas d'imagination. On sait résoudre les équations du mouvement du système Soleil-Terre-Lune (problème des trois corps) quand la masse de la Lune est supposée nulle : on est ramené au problème à deux corps dont la solution est connue (les trajectoires sont des ellipses). D'où l'idée de supposer que la masse de la Lune est une constante très petite* ε *et de chercher un développement en série de la solution en puissances de* ε, *le terme de degré zéro étant la solution classique du problème des deux corps. On obtient des résultats intéressants si on arrête le développement à un ordre fixé, mais Poincaré montre en 1890 que ces séries entières en* ε *ne sont jamais convergentes*[2]. *Quant aux développements limités de la forme*

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{k} x_i(t)\varepsilon^i + \mathrm{O}(\varepsilon^k)$$

(les fonctions x *et* x_i *sont à valeurs dans un espace* $\mathbb{R}^N$*) qui donnent les solutions, il s'avère que les constantes qui figurent dans le* $\mathrm{O}(\varepsilon^k)$ *ne demeurent bornées que sur un intervalle* $[0, T]$. *Pour obtenir des informations sur le comportement des solutions quand* t *tend vers l'infini, il faut donc des « méthodes nouvelles » : introduire des notions nouvelles et se poser à leur propos des questions nouvelles.*

Pour commencer, il faut s'intéresser à la question des singularités des solutions : on dit qu'on a une singularité pour $t = T$ *si la solution cesse d'être définie en ce point. Pour les équations de la mécanique céleste, cela signifie concrètement, ou bien qu'il y a choc entre deux corps à l'instant* T, *ou bien que l'un d'eux s'échappe à l'infini quand* t *tend vers* T. *C'est cela le problème de la stabilité du système solaire : y a-t-il ou non singularité en temps fini? Dans le langage en vigueur aujourd'hui, Poincaré s'intéresse à l'intervalle de définition des solutions maximales. Jusqu'alors, les diverses variantes du théorème de Cauchy avaient des énoncés purement locaux : pour tout* t_0 *et tout* y_0 *il existe un* $\varepsilon > 0$ *et une solution* y *de l'équation différentielle définie sur* $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *telle que* $y(t_0) = y_0$, *etc. On se pose désormais des problèmes de nature globale. Le théorème de Cauchy-Lipschitz prend la forme qu'il a aujourd'hui.*

Appelons courbe intégrale *le graphe d'une solution maximale de l'équation différentielle* (E) $y' = f(t, y)$. *Alors le théorème de Cauchy-*

---

2. C'est à cette occasion que Poincaré établit de façon nette la distinction entre série entière convergente et développement limité valable à tout ordre (comme le développement de Taylor d'une fonction C^∞ en un point x_0).

Lipschitz affirme que si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$ (ou plus généralement de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$), alors

- *par tout point de U, il passe une courbe intégrale (existence) ;*
- *deux courbes intégrales qui se rencontrent en un point sont confondues (unicité).*

On peut combiner les deux énoncés en disant que par tout point de U, il passe une courbe intégrale et une seule, ou bien encore que les courbes intégrales forment une partition de U. En particulier, deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se croiser. Il en résulte que si deux solutions y et z sont définies sur un intervalle I et s'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $y(t_0) < z(t_0)$ alors $y(t) < z(t)$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ (car sinon, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, les graphes de y et z se croiseraient).

Il est intéressant de noter qu'avec un délai d'un siècle, les questions posées aux oraux des concours suivent l'évolution historique. Jusqu'aux années 1960, l'exercice standard sur les équations différentielles consistait à intégrer une équation différentielle soit donnée par l'examinateur, soit obtenue par le candidat au cours de la solution d'un problème de géométrie. Les exercices qui suivent dans ce chapitre, posés récemment, portent pour la plupart sur des questions « qualitatives ».

Voici pour fixer les idées un premier exemple de ce qu'on entend par méthode qualitative. On associe à f un champ de directions en plaçant en tout point (x, y) de U un petit segment de pente $f(x, y)$. Une courbe intégrale est alors un graphe de fonction qui en tout point a pour tangente le petit segment du champ. Voici par exemple (fig. 3.1) le champ obtenu pour l'équation logistique $y' = y(1-y)$. On a représenté quelques solutions maximales, et le dessin donne une assez bonne idée du comportement de toutes les solutions maximales.

Avec le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est un jeu d'enfant de prouver rigoureusement et sans intégrer explicitement l'équation différentielle *que ses solutions ont le comportement indiqué par le dessin*[3].

---

3. Par exemple, la solution maximale y caractérisée par $y(0) = 1/2$ doit prendre ses valeurs dans $]0, 1[$, sinon elle croiserait les droites $y = 0$ et $y = 1$, qui sont aussi des courbes intégrales, ce qui est interdit par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il en résulte qu'on a $y' > 0$ et que y est croissante. Soit $\mathrm{I} =]a, b[$ l'intervalle de définition de y. On a $b = +\infty$, car si b était fini, la solution y se prolongerait en une solution sur $]a, b]$ et ne serait plus maximale. On de même $a = -\infty$. Enfin, on a $\lim_{t \to +\infty} y = 1$. En effet, la limite existe car y est croissante et majorée par 1. Si elle était < 1, la dérivée y' aurait une limite non nulle en $+\infty$, ce qui est incompatible avec le fait que y soit bornée. On a de même $\lim_{t \to -\infty} y = 0$.

On peut observer que les seules propriétés de f utilisées sont que $f(x, y)$ ne dépend pas de x, s'annule pour $y = 0$ et $y = 1$, et est strictement positive pour $0 < y < 1$. Il s'agit bien de propriétés qualitatives, et d'une étude qualitative.

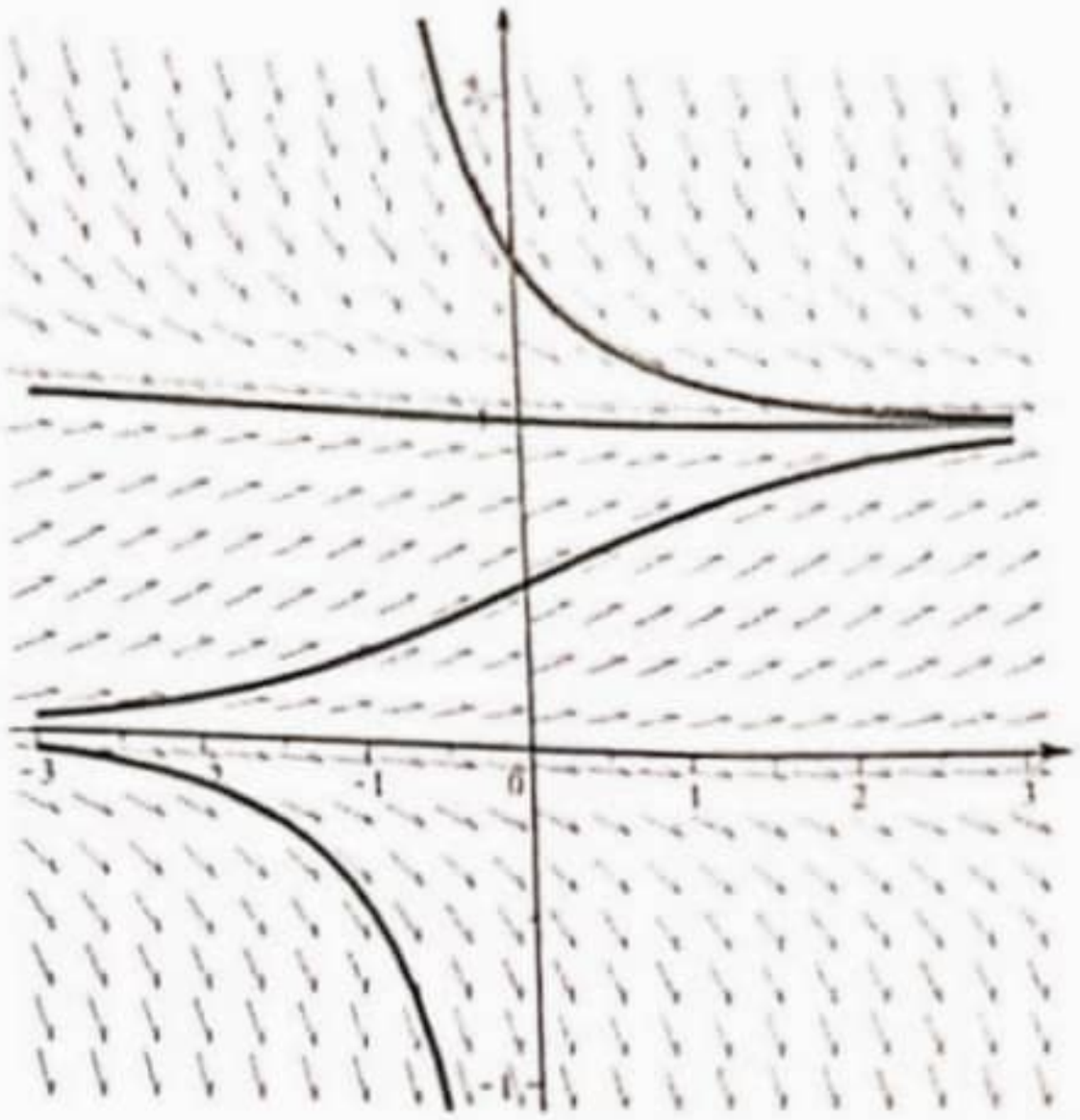


FIGURE 3.1.

Dans ce premier exercice, on s'intéresse aux conséquences pour la fonction f de propriétés sur les tangentes aux courbes intégrales.

3.1. Tangentes aux courbes intégrales

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et (E) l'équation différentielle $y' = f(x, y)$.

1. Quelles sont les droites tangentes au graphe d'une solution de (E) ?

2. Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on note D_{x_0,y_0} la droite tangente en (x_0, y_0) à l'unique solution maximale de (E) prenant la valeur y_0 en x_0. Pour quelles f est-il vrai que, pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, les droites D_{x_0,y_0} pour $y_0 \in \mathbb{R}$ sont concourantes ou parallèles ?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale y de l'équation différentielle vérifiant $y(x_0) = y_0$. Une droite passant par le point (x_0, y_0) est tangente au graphe d'une solution en ce point si son coefficient directeur est $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Les droites tangentes au graphe d'une solution de (E) sont donc les droites D_{x_0,y_0} d'équation

$$y = (x - x_0)f(x_0, y_0) + y_0,$$

où (x_0, y_0) décrit $\mathbb{R}^2$.

2. Fixons x_0. Les droites D_{x_0,y_0} sont toutes parallèles si $f(x_0, y_0)$ est indépendant de y_0. Elles sont toutes concourantes s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

tel que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, $b = (a - x_0)f(x_0, y_0) + y_0$. On a nécessairement $a \neq x_0$ et donc, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0, y_0) = \dfrac{1}{x_0 - a}\, y_0 + \dfrac{b}{a - x_0}$, ce qu'on peut écrire $f(x_0, y_0) = g(x_0)y_0 + h(x_0)$ (en effet a et b dépendent de x_0). Notons que cette expression reste valable dans le cas du parallélisme avec $g(x_0) = 0$. Ainsi, si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ les droites D_{x_0,y_0} sont toutes parallèles ou concourantes quand y_0 décrit $\mathbb{R}$, il existe $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x)y + h(x).$$

La fonction f est de classe C^1 si et seulement si g et h le sont. En effet $h(x) = f(x, 0)$ et $g(x) = f(x, 1) - f(x, 0)$ pour tout x.

Réciproquement, supposons cette condition réalisée. En x_0 tel que $g(x_0) = 0$ les droites D_{x_0,y_0} sont toutes parallèles. Et si $g(x_0) \neq 0$ les droites passent toutes par (a, b) avec $a = x_0 - \dfrac{1}{g(x_0)}$ et $b = -\dfrac{h(x_0)}{g(x_0)}$. ◁

Les développements en séries entières sont le plus souvent utilisés pour trouver des solutions aux équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux. Dans certains cas favorables, ils permettent aussi de trouver des solutions particulières à des équations non linéaires. Les quatre exercices suivants en donnent des exemples.

3.2. Équation différentielle $y' = x + y^2$

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x + y^2$.

1. Montrer qu'il existe une solution développable en série entière autour de 0.

2. Soit (F) l'équation différentielle $y' + xy^2 + 1 = 0$. On note g la solution maximale de (F) qui s'annule en 0. Montrer que $h = \dfrac{1}{g}$ est définie sur $]-r, 0[\cup]0, r[$ pour un certain r, et est une solution de (E) sur chacun de ces intervalles. Trouver des équivalents de h en 0 à gauche et à droite.

3. Soit f une solution de (E) sur $]0, r[$, tendant vers $-\infty$ en 0. Montrer que f est la restriction de h à $]0, r[$. Montrer un résultat analogue à gauche de 0.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Alors f^2 est développable en série entière avec le même rayon et son développement est obtenu par un produit de Cauchy.

action f est solution de (E) si, pour $|x| < \mathrm{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = x + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^2 ,$$

ce qui équivaut à $a_1 = a_0^2$, $2a_2 = 1 + 2a_0 a_1$ et, pour tout $n \geqslant 3$,

$$n a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}.$$

Pour tout réel a_0, ces relations définissent une suite (a_n) unique. Montrons qu'alors la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Soit un réel $\alpha \geqslant 1$. Supposons que, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ $(n \geqslant 3)$, on ait $|a_k| \leqslant \alpha^k$. On a alors

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k a_{n-1-k}| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1} \leqslant \alpha^{n-1} \leqslant \alpha^n.$$

Si on choisit α tel que $|a_k| \leqslant \alpha^k$, pour $0 \leqslant k \leqslant 3$, cette relation est valable pour tout entier k et le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à $\frac{1}{\alpha}$. Par construction, la série entière obtenue est solution de l'équation différentielle.

2. Nous avons $g(0) = 0$ et $g'(0) = -1$. Par continuité de la fonction g' (car $g'(x) = -xg(x)^2 - 1$), il existe $r > 0$ tel que g' soit strictement négative sur $]-r, r[$. La fonction g est strictement décroissante sur $]-r, r[$ donc ne s'annule qu'en 0. Ainsi $h = \frac{1}{g}$ est définie sur $]-r, 0[\cup]0, r[$. Elle est dérivable et, pour tout $x \in]-r, 0[\cup]0, r[$,

$$h'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{xg(x)^2 + 1}{g(x)^2} = x + h(x)^2.$$

La fonction h est solution de (E) sur $]-r, 0[$ et sur $]0, r[$.

Comme $g(0) = 0$ et $g'(0) = -1$, on a au voisinage de 0,

$$g(x) = g(x) - g(0) \sim g'(0)(x - 0) \sim -x.$$

On en déduit qu'au voisinage de 0, on a $h(x) \sim -\frac{1}{x}$.

3. Comme f tend vers $-\infty$ en 0, il existe $s \in]0, r[$ tel que $f(x) < 0$ sur $]0, s[$. La fonction $k = \frac{1}{f}$ est définie sur $]0, s[$. Elle est dérivable et, pour tout $x \in]0, s[$,

$$k'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{x + f(x)^2}{f(x)^2} = -xk(x)^2 - 1.$$

La fonction k est solution de (F) sur $]0, s[$. Cette solution peut se prolonger en 0. En effet, on a par hypothèse, $\lim_0 k = \lim_0 \frac{1}{f} = 0$ et $\lim_0 k' = \lim_{x\to 0}(-xk(x)^2 - 1) = -1$. La fonction k est prolongeable par continuité en 0 et la fonction obtenue est dérivable en 0 avec $k'(0) = -1$ d'après le théorème de la limite de la dérivée. Il s'ensuit que la fonction obtenue est solution de (F) sur $[0, s[$. La solution maximale de (F) qui prolonge k est donc définie en 0 et est nulle en 0. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, c'est g. Les fonctions f et h coïncident donc sur $]0, s[$ et par unicité de la solution maximale, elles coïncident sur $]0, r[$: f est la restriction de h à $]0, r[$. On montre de même que si f est une solution de (E) sur $]-r, 0[$, tendant vers $+\infty$ en 0, f est la restriction de h à $]-r, 0[$. ◁

Le fait que l'intervalle I *de définition d'une solution maximale est ouvert a des conséquences sur le comportement de la solution au bord. En effet, si* β *est la borne supérieure de* I *et si* $\beta \neq +\infty$*, alors* y *ne peut tendre vers une limite finie* ℓ *si le point* (ℓ, β) *est encore dans* U*. En effet, si tel était le cas, on pourrait prolonger par continuité* y *en* β *en posant* $y(\beta) = \ell$*. Dans ces conditions, la dérivée* $y'(x) = f(x, y(x))$ *admettrait comme limite* $f(\beta, \ell)$ *et d'après le théorème de la limite de la dérivée*[4]*,* y *serait dérivable en* β *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathrm{I} \cup \{\beta\}$*. On disposerait alors d'une solution de* $y' = f(x, y)$ *sur* $\mathrm{I} \cup \{\beta\}$ *ce qui contredit le caractère maximal de* y*. Cet argument clef sera repris bon nombre de fois dans les exercices de ce chapitre.*

3.3. Solution développable en série entière de $xy' = x + y^2$

On considère l'équation différentielle $xy' = x + y^2$.

1. Montrer qu'il existe une solution f_0 développable en série entière en 0. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière appartient à $[1, 2]$.

2. Soit f la solution maximale de l'équation différentielle qui prolonge f_0. Elle est définie sur l'intervalle I. Démontrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathrm{I} =]-\infty, \beta[$. Étudier les variations de f sur I.

3. Trouver un équivalent de f en β.

(École polytechnique)

---

4. Rappelons que si y est à valeurs réelles (on peut s'y ramener), il s'agit de dire que le taux d'accroissement $\dfrac{y(x) - y(\beta)}{x - \beta}$ s'écrit $y'(c_x)$ avec $c_x \in]x, \beta[$ et de faire tendre x vers β.

▷ **Solution.**

1. *Analyse.* Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que cette série entière a un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On a alors $xf_0'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ et $f_0(x)^2$ est donné par un produit de Cauchy. Ainsi f_0 est solution de l'équation différentielle si et seulement si $a_0^2 = 0$, $a_1 = 1 + 2a_0a_1$ et, pour $n \geqslant 2$, $na_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On obtient donc

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

Cela définit une suite unique.

Synthèse. Montrons que le rayon de convergence de la série obtenue n'est pas nul et plus précisément que $\mathrm{R} \in [1, 2]$.

Pour la minoration montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leqslant 1$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$ $(n \geqslant 2)$, on a

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} |a_k a_{n-k}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} 1 \leqslant 1.$$

La relation est vraie pour tout n, ce qui montre que $\mathrm{R} \geqslant 1$.

Montrons, *a contrario*, que pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. C'est vrai pour $n = 1$ et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$ $(n \geqslant 2)$, alors

$$a_n \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2^{n-k-1}} \geqslant \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2^{n-2}} \geqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

car $\frac{2(n-1)}{n} \geqslant 1$ si $n \geqslant 2$. On a donc $a_n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 1$. Cela montre que $\mathrm{R} \leqslant 2$.

La série entière obtenue a un rayon de convergence dans $[1, 2]$. Par construction la fonction f_0 obtenue est solution de l'équation différentielle.

2. Remarquons avant toute chose que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas ici directement puisqu'on ne peut diviser par x pour mettre l'équation sous forme résolue. Cependant, en se restreignant à $\mathbb{R}_+^*$ (resp. à $\mathbb{R}_-^*$), la solution f_0 se prolonge en une solution maximale définie sur un intervalle ouvert $\mathrm{I}_+ =]0, \beta[$ (resp. $\mathrm{I}_- =]\alpha, 0[$). Ces prolongements sont uniques et clairement f_0 est la restriction d'une unique solution maximale f définie sur l'intervalle ouvert $\mathrm{I} = \mathrm{I}_+ \cup \{0\} \cup \mathrm{I}_- =]\alpha, \beta[$.

Il faut montrer que I est majoré c'est-à-dire que β est fini. Supposons par l'absurde que I contienne $[0, +\infty[$. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f(0) = f_0(0) = 0$, elle est positive. D'autre part, on peut écrire $xf'(x) \geqslant f(x)^2$ et donc $\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} \geqslant \dfrac{1}{x}$. En intégrant entre 1 et $x > 1$, on obtient

$$-\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(1)} \geqslant \ln x.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{f}$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, ce qui est absurde car cette fonction est positive.

Montrons maintenant que I n'est pas minoré. Raisonnons par l'absurde en supposant $\alpha \neq -\infty$. Nous allons classiquement démontrer que l'on peut prolonger f sur $\mathrm{I} \cup \{\alpha\}$ en une solution de notre équation différentielle ce qui constituera bien une contradiction avec le caractère maximal de f. L'idée consiste à prouver que f' est bornée et donc intégrable sur l'intervalle borné $]\alpha, 0]$. Dans ces conditions, f admet une limite ℓ en α et en posant $f(\alpha) = \ell$, le prolongement par continuité ainsi obtenu est solution de l'équation différentielle : en effet, $\lim_{\alpha} f' = 1 + \dfrac{\ell}{\alpha}$ et d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en α et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, 0]$ et l'équation différentielle est bien vérifiée en $x = \alpha$.

On a $f'(0) = f_0'(0) = 1$. Pour tout $x \in]\alpha, 0]$, on a $f'(x) < 1$. Montrons que l'on a aussi $f'(x) > 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons que f' prenne des valeurs négatives ou nulles sur $]\alpha, 0]$. Posons

$$x_0 = \sup\{x \in]\alpha, 0],\ f'(x) \leqslant 0\}.$$

Il existe $\eta > 0$ tel que $f'(x) = f_0'(x) > 0$ sur $[-\eta, 0]$ donc $x_0 < 0$. Par continuité de f' on a $f'(x_0) = 0$ et pour $x \in]x_0, 0]$, $f'(x) > 0$. Ainsi la fonction $x \longmapsto x + f(x)^2$ est nulle en 0 et en x_0 et strictement négative sur $]0, x_0[$. Sa dérivée en x_0 est donc négative. Or elle vaut $1 + 2f(x_0)f'(x_0) = 1$, ce qui est absurde. Ainsi la fonction f' reste positive sur $]\alpha, 0]$.

On a donc, pour tout $x \in]\alpha, 0[$, $0 < f'(x) < 1$. La fonction f' est bornée sur $]\alpha, 0[$ et l'argumentaire développé plus haut prouve que l'on prolonger f en α en une solution de l'équation différentielle ce qui est contradictoire. En conclusion l'intervalle I est de la forme $\mathrm{I} =]-\infty, \beta[$ avec β réel strictement positif.

Il résulte des démonstrations précédentes que f' est toujours strictement positive : la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, \beta[$. La fonction f ne peut avoir une limite finie en β, sinon f' aurait aussi une limite finie en β et on montrerait comme précédemment que f peut

être prolongée en β. On a donc $\lim_{\beta} f = +\infty$. De même, si f possède une limite finie en $-\infty$, on obtient $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{f(x)^2}{x}\right) = 1$. Mais alors $\int_{-\infty}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x$ diverge et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est contradictoire. On a donc $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

3. On vient de voir que $\lim_{\beta} f = +\infty$. On en déduit qu'en β, on a $\beta f' \sim f^2$ et donc $\frac{f'}{f^2} \sim \frac{1}{\beta}$. Comme la fonction $\frac{1}{\beta}$ est intégrable et de signe constant au voisinage de β, on en déduit par le théorème d'intégration des relations de comparaison que

$$\int_x^\beta \frac{f'}{f^2} = \frac{1}{f(x)} \sim \int_x^\beta \frac{1}{\beta} \sim \frac{\beta - x}{\beta}$$

et donc $f(x) \sim \frac{\beta}{\beta - x}$ lorsque $x \to \beta^-$. ◁

3.4. Solution approchée de $y' = x^2 + y^2$

On considère $\mathcal{P}$ le problème de Cauchy $y' = x^2+y^2$ avec $y(0) = 0$.

1. Montrer que la solution est développable en série entière autour de zéro. Calculer les sept premiers coefficients.

2. Pour $a > 0$, on note E l'ensemble des applications continues sur $[-a, a]$ muni de la norme de la convergence uniforme et pour $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{F}(f) : x \longmapsto \int_0^x (t^2 + f(t)^2)\mathrm{d}t.$$

On fixe $r > 0$. Montrer que pour a assez petit, la boule fermée B de centre 0 et de rayon r vérifie $\mathrm{F(B)} \subset \mathrm{B}$ avec $\mathrm{F}|_{\mathrm{B}}$ contractante. Démontrer que dans ces conditions, pour toute élément f de B, la suite $(\mathrm{F}^n(f))$ converge uniformément sur $[-a, a]$ vers la solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}$ sur $[-a, a]$.

3. Appliquer la méthode des approximations successives en calculant $\mathrm{F}^n(f_0)$ pour $f_0 = 0$ et $n \leqslant 3$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Comme la fonction $(x, y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence d'une unique solution maximale g au problème de Cauchy $\mathcal{P}$ définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Cherchons maintenant une solution y développable en série entière autour de 0 et vérifiant $y(0) = 0$. Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\mathrm{R} > 0$ tels que, pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n.$$

Quant à $y(x)^2$, il est obtenu par un produit de Cauchy $y(x)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$, avec $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ puisque $a_0 = 0$. Ainsi y est solution de $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ 3a_3 = 1 + a_1^2 = 1 \\ \\ \forall n \geqslant 3,\ (n+1)a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}. \end{cases}$$

Cela définit une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Vérifions que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ n'est pas nul. Pour cela nous montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant 1$.

C'est vrai pour $n \leqslant 3$, et si on suppose la propriété vérifiée jusqu'au rang n, alors

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k||a_{n-k}| \leqslant \frac{1}{n+1}(n-1) \leqslant 1,$$

ce qui démontre la propriété par récurrence.

Nous en déduisons que le rayon de la série entière est $\geqslant 1$. La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de $\mathcal{P}$ sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\subset \mathrm{I}$ et cette fonction n'est autre que la restriction de g qui est donc développable en série entière en 0.

Les sept premiers coefficients a_n sont $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$ et $a_4 = \frac{2}{4}a_1 a_2 = 0$. On a de même $a_5 = a_6 = 0$, puis $a_7 = \frac{1}{63}$.

2. Si f appartient à B on a pour tout $t \in [-a, a]$, $t^2 + f(t)^2 \leqslant t^2 + r^2$, et donc, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$|\mathrm{F}(f)(x)| \leqslant \int_0^a (t^2 + r^2)\mathrm{d}t \leqslant \frac{a^3}{3} + ar^2.$$

On en déduit que $\|\mathrm{F}(f)\|_\infty \leqslant \dfrac{a^3}{3} + ar^2$. On a donc $\mathrm{F}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$ dès lors que $\dfrac{a^3}{3} + ar^2 \leqslant r$. Pour $r > 0$ donné, on a $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{a^3}{3} + ar^2 = 0$ et donc $\dfrac{a^3}{3} + ar^2 \leqslant r$ pour a assez petit. Pour $r > 0$ quelconque et a assez petit, on a donc $\mathrm{F}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$. Supposons cette condition réalisée.

Par ailleurs, pour $(f, g) \in \mathrm{B}^2$ et $x \in [-a, a]$, on a

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(f)(x) - \mathrm{F}(g)(x)| &= \left|\int_0^x (f(t)^2 - g(t)^2)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^x (f(t) + g(t))(f(t) - g(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant 2r\int_0^a |f(t) - g(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2ra\|f - g\|_\infty.\end{aligned}$$

On a donc $\|\mathrm{F}(f) - \mathrm{F}(g)\|_\infty \leqslant 2ar\|f - g\|_\infty$. Ainsi, $\mathrm{F}|_\mathrm{B}$ est contractante si $2ar < 1$, c'est-à-dire $a < \dfrac{1}{2r}$. Pour $r > 0$ donné, et a assez petit, les deux conditions voulues sont réalisées.

On peut alors conclure que la suite $(\mathrm{F}^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une limite qui est nécessairement l'unique point fixe de* F *en appliquant le théorème du point fixe de Picard : en effet* B *est une partie fermée – donc complète – de l'espace de Banach* $(\mathcal{C}^0([-a, a], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$. *Le lecteur trouvera la preuve du théorème du point fixe dans le tome analyse 3 (page 159). Pour la commodité de la lecture, nous redonnons toutefois la preuve dans ce cas particulier.*

Fixons $f \in \mathrm{B}$ et considérons les itérées de f sous l'action de F. La suite $(\mathrm{F}^n(f))_{n\geqslant 0}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. En effet, soit $\mathrm{K} = 2ar$, on a alors pour $n \geqslant 0$,

$$\|\mathrm{F}^{n+1}(f) - \mathrm{F}^n(f)\|_\infty \leqslant \mathrm{K}\|\mathrm{F}^n(f) - \mathrm{F}^{n-1}(f)\|_\infty \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{K}^n\|\mathrm{F}(f) - f\|_\infty,$$

si bien que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{F}^{n+p}(f) - \mathrm{F}^n(f)\|_\infty &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \|\mathrm{F}^{n+k}(f) - \mathrm{F}^{n+k-1}(f)\|_\infty \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} \mathrm{K}^{n+k-1}\right)\|\mathrm{F}(f) - f\|_\infty \\ &\leqslant \frac{\mathrm{K}^n(1 - \mathrm{K}^p)}{1 - \mathrm{K}}\|\mathrm{F}(f) - f\|_\infty. \\ &\leqslant \frac{\mathrm{K}^n}{1 - \mathrm{K}}\|\mathrm{F}(f) - f\|_\infty.\end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\dfrac{\mathrm{K}^n}{1 - \mathrm{K}}\|\mathrm{F}(f) - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour

tout $n \geqslant n_0$, et donc $\|\mathrm{F}^{n+p}(f) - \mathrm{F}^n(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite de fonctions $(\mathrm{F}^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[-a, a]$: $\mathbb{R}$ étant complet, elle converge donc uniformément sur $[-a, a]$ vers une fonction φ de E et même de B puisque B est fermé. L'application F étant continue, car lipschitzienne, en passant à la limite dans l'égalité $\mathrm{F}^{n+1}(f) = \mathrm{F}(\mathrm{F}^n(f))$, on obtient $\varphi = \mathrm{F}(\varphi)$: c'est un point fixe de $\mathrm{F} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}$. Ce point fixe est d'ailleurs unique puisque $\mathrm{F}|_\mathrm{B}$ est contractante. En particulier, la limite φ de la suite $\mathrm{F}^n(f)$ ne dépend pas du terme initial $f \in \mathrm{B}$. Cette fonction φ vérifie : pour tout $x \in [-a, a]$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 + \varphi(t)^2 \mathrm{d}t$. Elle est donc dérivable sur $[-a, a]$ et pour tout $x \in [-a, a]$,

$$\varphi'(x) = x^2 + \varphi(x)^2.$$

De plus $\varphi(0) = 0$. Donc φ est solution sur $[-a, a]$ du problème de Cauchy posé. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $[-a, a] \subset \mathrm{I}$ et φ est la restriction de g.

3. On considère la suite de terme général $f_n = \mathrm{F}^n(f_0)$ qui converge vers φ dans E. On a successivement $f_0 = 0$, et pour tout $x \in [-a, a]$,

$$f_1(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3,$$

$$f_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9}t^6\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7,$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{2}{189}t^{10} + \frac{1}{3969}t\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}. \end{aligned}$$

Le calcul des termes suivants peut être confié à Maple. ◁

On retrouve dans cet exercice les ingrédients de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz : on transforme le problème de Cauchy en équation intégrale et l'on fait apparaître la solution comme un point fixe d'un opérateur défini sur l'espace complet des fonctions continues sur un segment muni de la norme $\| \|_\infty$. Comme dans notre exemple, la définition même de cet opérateur nécessite de prendre un segment suffisamment petit pour assurer la contractance ce qui conduit à la notion de « cylindre de sécurité ». Nous renvoyons par exemple le lecteur au chapitre 10 des Éléments d'analyse pour l'agrégation *de Zuily et Queffélec (Masson, 1995) ou à n'importe quel traité sur les équations différentielles pour les détails de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Dans l'exercice suivant, on remarquera que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas à l'équation différentielle étudiée.

Scanné avec CamScanner

3.5. Recherche de solutions développables en série entière

Déterminer les fonctions développables en série entière autour de 0 vérifiant

$$x'(t) = \frac{t^2}{x(t)} - 1 \quad \text{et} \quad x(0) = 0.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Soit $x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $x(0) = 0$. La fonction x répond au problème posé, si, pour tout $t \in]-R, R[$, $x(t)(1 + x'(t)) = t^2$. On a

$$1 + x'(t) = (1 + a_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = (1 + a_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

et on obtient $x(t)(1 + x'(t))$ par un produit de Cauchy. Celui-ci est égal à t^2 si et seulement si $(a_1 + 1)a_1 = 0$, $(1 + 3a_1)a_2 = 1$ et pour $n \geqslant 3$,

$$a_n(1 + a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (n + 1 - k) a_{n+1-k} = 0,$$

ce qui donne, en regroupant les termes en a_n,

$$(1 + (n+1)a_1)a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k (n + 1 - k) a_{n+1-k} = 0.$$

Observons qu'il ne reste dans la somme de 2 à $n - 1$ que des termes a_k avec $2 \leqslant k \leqslant n - 1$. En faisant le changement $j = n + 1 - k$ dans la somme, on obtient $(1 + (n+1)a_1)a_n + \sum_{j=2}^{n-1} j a_j a_{n+1-j} = 0$ et donc en sommant les deux relations

$$2(1 + (n+1)a_1)a_n + (n+1) \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k} = 0.$$

La relation $a_1(a_1 + 1) = 0$ conduit à deux cas :

- Si $a_1 = 0$ on a $a_2 = 1$ et pour $n \geqslant 3$, $a_n = -\dfrac{n+1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}$.
- Si $a_1 = -1$ on a $a_2 = -\dfrac{1}{2}$ et pour $n \geqslant 3$, $a_n = \dfrac{n+1}{2n} \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}$.

Ces relations définissent dans chaque cas une suite (a_n) unique. Étudions le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$.

Dans le premier cas, on observe que la suite des a_k est alternée, ce qu'on peut justifier en écrivant

$$(-1)^n a_n = \frac{n+1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k a_k (-1)^{n+1-k} a_{n+1-k},$$

d'où l'on déduit par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, $(-1)^n a_n \geqslant 0$. On a donc, pour $n \geqslant 3$,

$$|a_n| = \frac{n+1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} |a_k|\,|a_{n+1-k}| \geqslant \frac{n+1}{2} |a_{n-1}|.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| = +\infty$ et le rayon de convergence de la série entière est nul.

Démontrons que dans le deuxième cas le rayon de convergence de la série est strictement positif. On a, pour tout $n \geqslant 3$,

$$|a_n| \leqslant \frac{n+1}{2n} \sum_{k=2}^{n-1} |a_k|\,|a_{n+1-k}| \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} |a_k|\,|a_{n+1-k}|.$$

Soit $(b_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $b_2 = |a_2| = \dfrac{1}{2}$ et pour $n \geqslant 3$,

$$b_n = \sum_{k=2}^{n-1} b_k\, b_{n+1-k}.$$

On a $|a_n| \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 2$ et il suffit de démontrer que $\sum b_n t^n$ a un rayon de convergence R non nul. En supposant que cela est réalisé, on pose $g(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n t^n$, pour tout $t \in]\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. On va en fait reconnaitre un développement classique. En effet, on obtient $g(t)^2 = \sum\limits_{n=4}^{+\infty} c_n t^n$, où $c_n = \sum\limits_{k=2}^{n-2} b_k b_{n-k} = b_{n-1}$ et donc

$$g(t)^2 = \sum_{n=4}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=4}^{+\infty} b_{n-1} t^n = t \sum_{n=3}^{+\infty} b_n t^n = t\left(g(t) - \frac{1}{2}t^2\right),$$

d'où l'on déduit en résolvant l'équation du second degré

$$g(t) = \frac{1}{2} t(1 \pm \sqrt{1-2t}).$$

Le signe dépend *a priori* de t, mais la continuité de g impose un signe constant pour $t < 0$ et $t > 0$. Comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(t)}{t} = g'(0) = 0$, le signe est négatif pour chacun des côtés.

Réciproquement, posons $S(t) = \frac{1}{2}t(1-\sqrt{1-2t})$. Il résulte du cours que cette fonction est développable en série entière avec un rayon de convergence $\frac{1}{2}$. Il existe une suite $(d_n)_{n\geqslant 2}$ telle que $S(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} d_n t^n$, pour tout $t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, car $S(0) = S'(0) = 0$. On vérifie que $d_2 = \frac{1}{2}$. Comme $S(t)^2 = t\left(S(t) - \frac{1}{2}t^2\right)$, par construction, la suite (d_n) vérifie, pour tout $n \geqslant 3$,

$$d_n = \sum_{k=2}^{n-1} d_k\, d_{n+1-k}.$$

On en déduit que $d_n = b_n$ pour tout $n \geqslant 2$. Cela montre que le rayon de convergence de $\sum b_n t^n$ est $\frac{1}{2}$. Le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$ est donc supérieur à $\frac{1}{2}$.

Le problème posé possède donc une seule solution développable en série entière autour de 0. Elle s'écrit $x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, où

$$\boxed{a_1 = -1,\ a_2 = -\frac{1}{2} \text{ et } \forall n \geqslant 3,\ a_n = \frac{n+1}{2n}\sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}}. \quad \triangleleft$$

Considérons une équation différentielle du premier ordre $y' = f(t,y)$, où le paramètre t désigne par exemple le temps. Lorsque la fonction f ne dépend pas de t, l'équation différentielle, qui s'écrit donc $y' = f(y)$, est qualifiée d'autonome : par exemple, en Mécanique, cela traduit que la condition différentielle ne dépend que de la position du point et est indépendante du temps. On remarque que si $t \longmapsto y(t)$ est solution sur un intervalle I, il en va de même de la translatée $t \longmapsto y(t+c)$ sur l'intervalle $I - c$ et ce pour tout réel c.

Lorsque f est de classe C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. La figure formée par les courbes intégrales est invariante par translation de vecteurs parallèles à l'axe du temps. En particulier, il suffit de déterminer les solutions avec une condition initiale de la forme $y(0) = y_0$: les autres solutions s'obtiennent par translations.

3.6. Équation se ramenant à une équation autonome (1)

Étudier les solutions C^1 de l'équation différentielle

$$y'^2(2-3y)^2 = 4(1-y).$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Si y est une solution de l'équation différentielle, elle ne prend pas la valeur $\frac{2}{3}$ donc on peut écrire $y'^2 = \frac{4(1-y)}{(2-3y)^2}$.

On va dans un premier temps chercher les solutions y définies sur un intervalle I, qui ne prennent pas la valeur 1. Dans ce cas y' ne s'annule pas sur I donc garde un signe constant car elle est continue. On a donc $y < 1$ et $y' = \varepsilon \frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y}$, où $\varepsilon = \pm 1$ (indépendant de x), soit encore $\frac{y'(2-3y)}{2\sqrt{1-y}} = \varepsilon$. On cherche une primitive de $y \longmapsto \frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}}\mathrm{d}y &= -(2-3y)\sqrt{1-y} - 3\int \sqrt{1-y}\,\mathrm{d}y \\ &= -(2-3y)\sqrt{1-y} + 2(1-y)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = y\sqrt{1-y} + \mathrm{C},\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $y(x)\sqrt{1-y(x)} = \varepsilon(x-c)$.

La fonction $y \longmapsto y\sqrt{1-y}$ est strictement croissante (respectivement décroissante) sur $\left]-\infty, 2/3\right[$ (respectivement $\left]\frac{2}{3}, 1\right[$). Elle réalise une bijection f_1 (resp. f_2) de $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ (resp. $]2/3, 1[$) sur $\left]-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right[$ (resp. $\left]0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right[$). On pose $g_i = f_i^{-1}$.

La fonction y ne prend pas la valeur $\frac{2}{3}$.

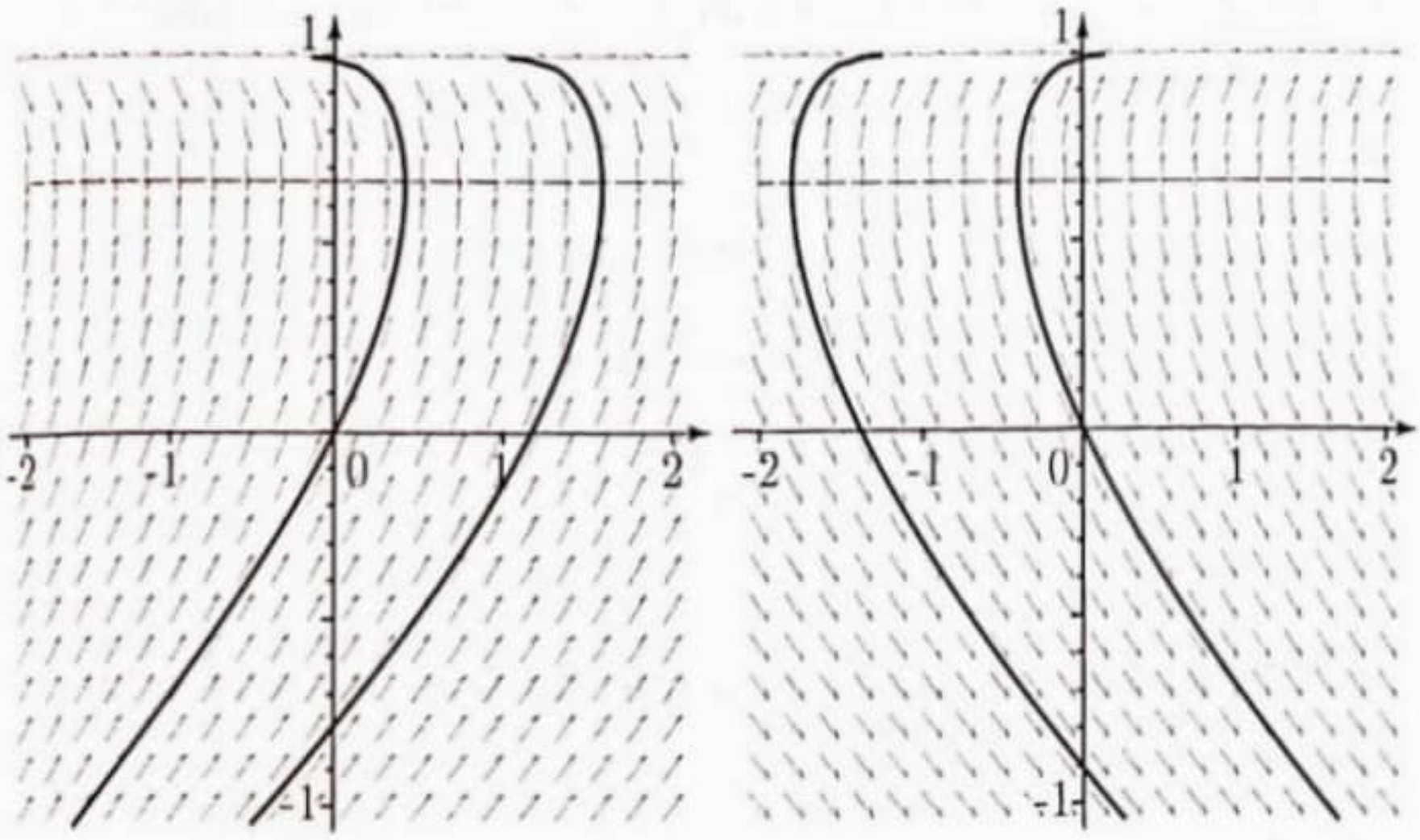
• Si $y < \frac{2}{3}$ sur I, on a, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $y(x) = g_1(\varepsilon(x-c))$ et donc pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\varepsilon(x-c) < \frac{2\sqrt{3}}{9}$. On a donc $\mathrm{I} \subset \left]-\infty, c+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right[$ si $\varepsilon = 1$ et $\mathrm{I} \subset \left]c-\frac{2\sqrt{3}}{9}, +\infty\right[$ pour $\varepsilon = -1$. Inversement, $x \longmapsto g_1(x-c)$ est une solution maximale sur $\left]-\infty, c+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right[$ et $x \longmapsto g_1(c-x)$ est une solution maximale sur $\left]c-\frac{2\sqrt{3}}{9}, +\infty\right[$. En effet, il est impossible de prolonger ces solutions en $c+\frac{2\sqrt{3}}{9}$ pour $\varepsilon = 1$ (resp. en $c-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ pour $\varepsilon = -1$), car $\lim_{\frac{2\sqrt{3}}{9}} g_1' = +\infty$ (le théorème des accroissements finis donne que le taux d'accroissement de g_1 éventuellement prolongée par continuité tend vers l'infini : le prolongement ne serait pas dérivable).

• Si $y > \frac{2}{3}$ sur I (et $y < 1$), on a, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $y(x) = g_2(\varepsilon(x-c))$ et donc pour tout $x \in \mathrm{I}$, $0 < \varepsilon(x-c) < \frac{2\sqrt{3}}{9}$. On a donc $\mathrm{I} \subset \left]c, c+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right[$

si $\varepsilon = 1$ et $I \subset \left]c - \frac{2\sqrt{3}}{9}, c\right[$ pour $\varepsilon = -1$. Là encore, il est impossible de prolonger ces solutions en $c + \frac{2\sqrt{3}}{9}$ pour $\varepsilon = 1$ (resp. $c - \frac{2\sqrt{3}}{9}$ pour $\varepsilon = -1$) car $\lim_{\frac{2\sqrt{3}}{9}} g_2' = -\infty$.

On a ainsi obtenu toutes les solutions maximales y telles que $y < 1$.

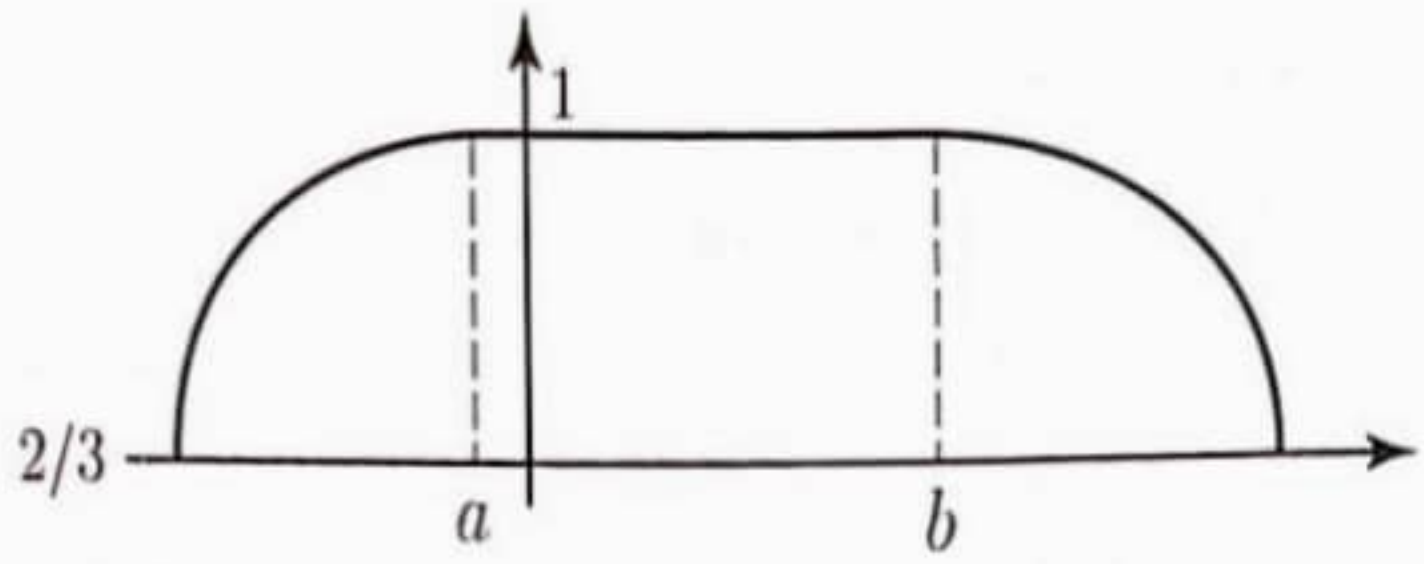
La figure suivante représente les champs de direction et quelques solutions : à gauche le cas $\varepsilon = 1$ et à droite le cas $\varepsilon = -1$. Les graphes des solutions ont un point d'arrêt au niveau de la droite $y = \frac{2}{3}$.



Si l'on fixe par exemple $\varepsilon = 1$ et si l'on considère les solutions avec $y \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ (resp. $\left]\frac{2}{3}, 1\right[$) de l'équation $y' = \frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y}$, on est face à une équation autonome redevable du théorème de Cauchy-Lipschitz : le champs des courbes intégrales est invariant par translation de vecteur parallèle à l'axe des x et à condition initiale fixée, il passe une et une seule courbe intégrale.

Il reste à déterminer les solutions qui prennent la valeur 1. Remarquons que la fonction constante égale à 1 est une solution maximale sur $\mathbb{R}$. Soit y une solution définie sur un intervalle ouvert I. L'ensemble $J = \{x \in I, y(x) < 1\}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ qui est donc réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont des intervalles ouverts. Si l'on prend une de ces composantes connexes $]\alpha, \beta[$, $y(x)$ est sur cet intervalle de la forme $g_2(\varepsilon(x - c))$. Or, si $\alpha \in I$, $y(\alpha) = 1$ et si $\beta \in I$, $y(\beta) = 1$. La fonction $x \longmapsto g_2(\varepsilon(x - c))$ étant monotone, on ne peut avoir $y(\alpha) = y(\beta) = 1$ et nécessairement $\alpha \notin I$ ou $\beta \notin I$. Autrement dit, α ou β est une borne de I. Il ne peut donc y avoir au plus que deux composantes connexes pour J : $]\alpha, a[$ et $]b, \beta[$, où α et β les bornes de I. Réciproquement, pour $a \leqslant b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, si l'on pose pour $y(x) = g_2(-(x-a))$ $x \in \left]a - \frac{2\sqrt{3}}{9}, a\right[$, $y(x) = 1$ pour $x \in [a, b]$ et enfin $y(x) = g_2(x - b)$ pour

$x \in \left]b, b+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right[$, on obtient une solution maximale prenant la valeur 1. Voici un exemple dans le cas a et b finis :



On a ainsi décrit toutes les solutions de l'équation proposée. ◁

On peut remarquer que l'équation autonome $y' = \dfrac{2\sqrt{1-y}}{2-3y}$, *avec* $2/3 < y \leqslant 1$ *ne vérifie pas l'unicité des solutions maximales pour une condition de Cauchy : il y a en effet une infinité de solutions de cette équation vérifiant* $y(0) = 1$. *La fonction* $y \longmapsto \dfrac{2\sqrt{1-y}}{2-3y}$ *n'étant pas de classe* C^1 *(ni même localement lipschitzienne), le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.*

3.7. Équation se ramenant à une équation autonome (2)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'^2 = f$. Montrer que l'ensemble des zéros de f est un intervalle.

2. Résoudre les équations différentielles

$$y'^2 = y \quad \text{et} \quad y'^2 + 2y' + y + x = 0.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Notons Z l'ensemble des zéros de f. Soient $a < b$ deux éléments de Z et $m = |f(c)|$, où $c \in [a, b]$, le maximum de $|f|$ sur $[a, b]$. Si $m \neq 0$, alors $c \in]a, b[$ et f possède un extremum local en c, donc $f'(c) = 0$, d'où l'on déduit $m = |f(c)| = 0$. On aboutit à une contradiction. Ainsi $m = 0$ et f est nulle sur $[a, b]$. Ainsi, si a et b sont dans Z, $[a, b] \subset$ Z. Cela montre que Z un intervalle, fermé par continuité de f.

2.a. Considérons l'équation différentielle $y'^2 = y$. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle. D'après la question 1, l'ensemble des zéros de f est un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$.

Si J est vide, f' ne s'annule pas sur I donc garde un signe constant (une dérivée vérifie le théorème de valeurs intermédiaires d'après le théorème de Darboux : on pourra se reporter à l'exercice 4.29 du tome

analyse 1). On a donc $\dfrac{f'}{\sqrt{f}} = \pm 1$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\sqrt{f(x)} = \pm\dfrac{1}{2}(x-a)$ et donc $f(x) = \dfrac{1}{4}(x-a)^2$. Réciproquement, cette expression définit une solution de l'équation différentielle ne s'annulant pas sur tout intervalle I ne contenant pas a.

Si J n'est pas vide, deux cas se présentent.

• Ou bien $\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$ est un intervalle K, et K et J ont une extrémité a en commun : $\mathrm{J} = \{x \in \mathrm{I}, x \geqslant a\}$ et $\mathrm{K} = \{x \in \mathrm{I}, x < a\}$, ou bien $\mathrm{J} = \{x \in \mathrm{I}, x \leqslant a\}$ et $\mathrm{K} = \{x \in \mathrm{I}, x > a\}$.

On montre, comme dans le cas précédent (J vide), que sur K f est de la forme $f(x) = \dfrac{1}{4}(x-\alpha)^2$, avec $\alpha \notin \mathrm{K}$, et par continuité de f en a, on a donc $\alpha = a$. D'où, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-a)^2 & \text{si } x \leqslant a \\ 0 & \text{si } x \geqslant a \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{1}{4}(x-a)^2 & \text{si } x \geqslant a. \end{cases}$$

• Ou bien $\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$ est la réunion de deux intervalles K et K′. Dans ce cas, on peut écrire $\mathrm{J} = [a,b]$, $\mathrm{K} = \{x \in \mathrm{I}, x < a\}$, $\mathrm{K}' = \{x \in \mathrm{I}, x > b\}$ et le même raisonnement montre que, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-a)^2 & \text{si } x \leqslant a \\ 0 & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{1}{4}(x-b)^2 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

On vérifie réciproquement que toute fonction de ce type est solution de l'équation différentielle.

Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$, s'annulent nécessairement sur $\mathbb{R}$ et sont, outre la fonction nulle, de l'un des trois types trouvés précédemment.

b. Considérons l'équation différentielle $y'^2 + 2y' + y + x = 0$. On peut l'écrire $(y'+1)^2 = -y - x + 1$. En posant $z = -y - x + 1$, on obtient $z' = -(y'+1)$ et l'équation différentielle équivaut à $z'^2 = z$. On est ramené à l'équation différentielle précédente. ◁

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Lorsqu'on étudie les solutions de $y' = f(y)$, il est naturel de s'intéresser aux zéros de f. En effet, si $f(y_0) = 0$, il est clair que la fonction constante $t \longmapsto y_0$ est une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$. Par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, toute solution prenant la valeur y_0 sera constante égale à y_0.

Il s'ensuit que toute solution dont la dérivée s'annule est constante. En effet, si y est une solution maximale de l'équation différentielle telle

que $y'(t_0) = 0$, alors, en posant $y_0 = y(t_0)$, on a $f(y_0) = 0$, donc y est constante égale à y_0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On en déduit que toute solution non constante est strictement monotone : la dérivée y' d'une solution y non constante ne s'annule pas, et comme elle est continue par hypothèse, elle est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. En particulier, il n'y a pas de solution périodique non constante.

On montre enfin que les limites d'une solution maximale aux bornes de l'intervalle de définition sont soit des zéros de f, soit $\pm\infty$. Ce point fait l'objet de plusieurs exercices.

Dans l'exercice suivant, on suppose f seulement continue et le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas. On démontre néanmoins que les solutions sont monotones.

3.8. Monotonie des solutions d'une équation autonome

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que toute solution de $y' = f(y)$ est monotone.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Soit y une solution de $y' = f(y)$ définie sur un intervalle J. Supposons y non monotone. Cela revient à dire qu'il existe dans J trois réels a, b, c tels que

$$a < b < c$$

et que $y(b)$ ne soit pas compris au sens large entre $y(a)$ et $y(c)$. Il y a deux situations possibles :

(i) $y(b) > y(a)$ et $y(b) > y(c)$;

(ii) $y(b) < y(a)$ et $y(b) < y(c)$.

Voyons le premier cas. On peut de plus supposer qu'on a $y(a) = y(c)$. En effet, si par exemple $y(a) < y(c)$, on a $y(a) < y(c) < y(b)$, et il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel a' situé dans $]a, b[$ tel que $y(a') = y(c)$. On remplace alors a par a'. On raisonne de la même façon si $y(c) < y(a)$.

Dans le second cas, on peut aussi supposer que $y(a) = y(c)$. Nous avons donc trois réels a, b, c tels que

$$a < b < c \quad \text{et} \quad y(a) = y(c) \neq y(b).$$

Soit F une primitive de la fonction continue f. On a

$$(\mathrm{F} \circ y)' = f(y)y' = y'^2 \geqslant 0$$

et la fonction $\mathrm{F} \circ y$ est croissante (au sens large). Mais d'autre part, comme $y(a) = y(c)$, on a $(\mathrm{F} \circ y)(a) = (\mathrm{F} \circ y)(c)$ et la fonction $\mathrm{F} \circ y$ est constante sur $[a, c]$. La dérivée y'^2 de cette fonction est donc nulle sur $[a, c]$ et y est constante sur cet intervalle, ce qui est absurde puisque $y(b) \neq y(a)$. ◁

Nous abordons maintenant le thème très riche de l'étude qualitative des solutions d'équations différentielles. Dans l'exercice suivant, on s'intéresse particulièrement à la monotonie et à l'image des solutions.

3.9. Équation autonome $x' = f(x)$, où f est positive

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, strictement positive sur $]a, b[$, nulle en a et b. Que peut-on dire des solutions maximales de l'équation différentielle $x' = f(x)$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Afin de nous placer dans les conditions d'application des théorèmes usuels sur les équations différentielles, qui nécessitent que f soit définie sur un intervalle ouvert, considérons pour commencer un prolongement f_1 de classe $\mathcal{C}^1$ de f à $\mathbb{R}$, qui ne s'annule qu'en a et b. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$.

• Les fonctions constantes définies sur $\mathbb{R}$, $t \longmapsto a$ et $t \longmapsto b$ sont des solutions maximales de l'équation différentielle $x' = f_1(x)$. Ce sont les seules solutions constantes c avec $c \in [a, b]$, car f ne s'annule qu'en a et b. Dans la suite de l'exercice, on suppose que x est une solution non constante.

Montrons que si une solution maximale x de l'équation différentielle $x' = f(x)$ définie sur l'intervalle I n'est pas constante, elle prend ses valeurs dans $]a, b[$. Raisonnons par l'absurde et supposons, par exemple qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $x(t_0) = a$. La fonction x peut être prolongée en une fonction y solution maximale de $y' = f_1(y)$. Alors y coïncide avec la fonction constante $t \longmapsto a$ en t_0. Du théorème de Cauchy-Lipschitz, on déduit que y est la fonction constante $t \longmapsto a$, définie sur $\mathbb{R}$. *A fortiori*, x est la fonction constante $t \longmapsto a$; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. On démontrerait de même, que si $x(t_0) = b$, x est constante.

On note qu'alors on est ramené à l'étude de $x' = f(x)$, avec f définie sur l'ouvert $]a, b[$, ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses conséquences. Cela montre également que si x n'est pas constante, alors x' est strictement positive sur I et x est strictement croissante sur I.

• La fonction x est définie sur un intervalle ouvert I. Montrons qu'en fait $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que $\alpha = \sup \mathrm{I}$ est fini. Comme x est croissante et bornée, elle possède une limite finie $\ell \in [a, b]$ en α. Comme f est continue, x' a pour limite $f(\ell)$ en α. Ainsi la solution x peut se prolonger par continuité en α et ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ en vertu du théorème de la limite de la dérivée. On obtient ainsi une solution de l'équation différentielle sur $\mathrm{I} \cup \{\alpha\}$. C'est contradictoire avec le fait que x est une solution maximale définie sur I. On a donc $\alpha = +\infty$, et on montre de même que $\inf \mathrm{I} = -\infty$: la solution x est définie sur $\mathbb{R}$.

• Montrons qu'on a alors de plus $\lim\limits_{-\infty} x = a$ et $\lim\limits_{+\infty} x = b$. La fonction x possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ car elle est croissante et bornée. Supposons que $\lim\limits_{-\infty} x = \ell \neq a$. Alors $\ell \in]a, b[$, car x est strictement croissante donc $\ell \neq b$. On a $\lim\limits_{-\infty} x' = f(\ell) > 0$ car f est continue. Cela est contradictoire avec le fait que x est bornée. En effet, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x'(t) \geqslant \dfrac{f(\ell)}{2}$ si $t \leqslant t_0$. Mais alors, pour $t \leqslant t_0$,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{f(\ell)}{2}(t - t_0),$$

et $\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$. On a donc $\lim\limits_{-\infty} x = a$ et, pour les mêmes raisons, $\lim\limits_{+\infty} x = b$.

• La fonction x est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]a, b[$. Posons $z = x^{-1}$. Comme x' ne s'annule pas, z est dérivable sur $]a, b[$ et $z' = \dfrac{1}{x' \circ x^{-1}} = \dfrac{1}{f}$, par définition. Une solution maximale est définie de manière unique par sa valeur en 0 (par exemple). Soit $\alpha \in]a, b[$; notons x_α la solution maximale telle $x_\alpha(0) = \alpha$. D'après ce qui précède sa bijection réciproque z_α est définie pour tout $t \in]a, b[$ par

$$z_\alpha(t) = \int_\alpha^t \frac{1}{f(u)}\mathrm{d}u \qquad (*)$$

• Réciproquement, pour tout $\alpha \in]a, b[$, la fonction z_α ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]a, b[$, car $z_\alpha = \dfrac{1}{f} > 0$. Comme au voisinage de a, $f(u) = f'(a)(x - a) + o(x - a)$, $\displaystyle\int_a^a \frac{1}{f}$ diverge et $\lim\limits_{a} z_\alpha = -\infty$; de même, $\lim\limits_{b} z_\alpha = +\infty$. Ainsi, z_α réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque x_α vérifie $x'_\alpha = \dfrac{1}{z'_\alpha \circ x_\alpha} = f \circ x_\alpha$.

Conclusion. Toutes les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$. Hormis les deux fonctions constantes

$t \longmapsto a$ et $t \longmapsto b$, ce sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $]a,b[$ dont la bijection réciproque est donnée par $(*)$, α étant un élément quelconque de $]a,b[$. ◁

L'exercice suivant est analogue, mais précise la vitesse de convergence des solutions en $+\infty$, à partir d'une hypothèse de régularité sur la fonction qui définit l'équation différentielle.

3.10. Équation autonome $x' = g(x)$, où g est négative

Soient $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = g(1) = 0$ et $a \in]0,1[$.

1. Montrer que l'équation $x' = g(x)$, $x(0) = a$ admet une solution unique définie sur $[0,+\infty[$.

2. On suppose de plus $g(s) < 0$ pour $s \in]0,1[$ et $g'(0) = -\alpha$ avec $\alpha > 0$. Montrer que si $\beta < \alpha$ il existe $C_\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$x(t) \leqslant C_\beta e^{-\beta t}.$$

3. On suppose de plus g de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $t \longmapsto x(t)e^{\alpha t}$ a une limite finie strictement positive en $+\infty$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, nous sommes dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'équation différentielle possède une unique solution maximale x telle que $x(0) = a$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

• Montrons que x prend ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que x prend des valeurs inférieures ou égales à 0. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $x(t_0) = 0$. Mais nous remarquons que la fonction constante $t \longmapsto 0$ est une solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. D'après l'unicité de la solution maximale prenant en t_0 une valeur donnée, la fonction x est égale à la fonction $t \longmapsto 0$. C'est impossible, car $x(0) = a \in]0,1[$. On montre de même que x ne peut prendre de valeurs supérieures ou égales à 1, car sinon elle serait égale à la fonction constante $t \longmapsto 1$.

• Montrons maintenant que l'intervalle I contient $[0,+\infty[$. Raisonnons par l'absurde et posons $\mathrm{A} = \sup \mathrm{I} \in \mathbb{R}$. La fonction x prend ses valeurs dans $[0,1]$. Comme g est continue, elle est bornée sur $[0,1]$. On en déduit que la dérivée x' de x est bornée (et continue) et donc intégrable sur l'intervalle borné $[0,\mathrm{A}[$. On en déduit que x a une limite finie ℓ en A.

Ainsi x peut être prolongée par continuité en A. La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, x' a une limite finie $g(\ell)$ en A : le prolongement est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en vertu du théorème de la limite de la dérivée. On en déduit que la fonction x peut être prolongée en une solution définie sur $\mathrm{I} \cup \{\mathrm{A}\}$, ce qui est contraire au fait que x est une solution maximale définie sur l'intervalle I. On a donc $\mathrm{A} = +\infty$ et I contient $[0, +\infty[$. En fait, on pourrait démontrer de même que $\inf \mathrm{I} = -\infty$ et donc que x est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x(t) \in]0, 1[$ et donc $x'(t) < 0$: la fonction x est strictement décroissante sur I. Étant bornée, elle possède en $+\infty$ une limite finie L. On en déduit que x' a une limite finie en $+\infty$ égale à $g(\mathrm{L})$. Si $g(\mathrm{L})$ n'est pas nul, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} x'$ diverge et x n'a pas une limite finie en $+\infty$. On a donc $g(\mathrm{L}) = 0$ et $\mathrm{L} \in [0, 1[$, car x décroît, c'est-à-dire $\mathrm{L} = 0$. On conclut que $\lim\limits_{+\infty} x = 0$, d'où l'on déduit

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x'(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{g(x(t))}{x(t)} = \lim_{u\to 0} \frac{g(u)}{u} = g'(0) = -\alpha.$$

Soit maintenant $\beta < \alpha$ et donc $-\alpha < -\beta$. Par définition de la limite, il existe $t_0 > 0$ tel que $t \geqslant t_0$ implique $\dfrac{x'(t)}{x(t)} < -\beta$. Considérons la fonction $h_\beta : t \longmapsto x(t)e^{\beta t}$. On a, pour tout $t \geqslant t_0$,

$$h'_\beta(t) = e^{\beta t}(x'(t) + \beta x(t)) < 0.$$

La fonction h_β est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ donc majorée. Sur le segment $[0, t_0]$, elle est continue donc bornée. Finalement h_β est majorée sur $\mathbb{R}$, par une constante C_β. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x(t)e^{\beta t} \leqslant \mathrm{C}_\beta$, et donc $x(t) \leqslant \mathrm{C}_\beta e^{-\beta t}$.

3. Avec les notations précédentes, il faut démontrer que la fonction h_α possède une limite finie strictement positive en $+\infty$, ce qui revient à montrer que $\ln h_\alpha$ possède une limite finie. Pour cela, il suffit de montrer que $(\ln h_\alpha)' = \dfrac{x'}{x} + \alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$, on a au voisinage de 0

$$g(x) = -\alpha x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + o(x^2) = -\alpha x + O(x^2).$$

On peut trouver $\mathrm{K} > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour $|x| \leqslant \eta$,

$$|g(x) + \alpha x| \leqslant \mathrm{K}x^2.$$

Sachant que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, il existe $t_0 > 0$, tel que, pour $t \geqslant t_0$,

$$|x'(t) + \alpha x(t)| = |g(x(t)) + \alpha x(t)| \leqslant \mathrm{K}x(t)^2.$$

Ainsi, pour $t \geqslant t_0$,

$$\left|\frac{x'(t)}{x(t)} + \alpha\right| \leqslant \mathrm{K}x(t) \leqslant \mathrm{K}\mathrm{C}_\beta e^{-\beta t},$$

où β a été choisi dans $]0, \alpha[$. Par théorème de comparaison, la fonction $\frac{x'}{x} + \alpha$ est bien intégrable. D'où le résultat. ◁

On compare dans l'exercice suivant deux solutions correspondant à deux équations autonomes associées à deux fonctions f et g avec $g < f$.

3.11. Comparaison de solutions d'équations autonomes

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout réel u, $f(u) > g(u)$. On considère des fonctions x et y définies sur un intervalle I contenant 0, vérifiant $x' = f \circ x$ et $y' = g \circ y$. On suppose $x(0) \geqslant y(0)$. Montrer que pour tout réel positif t appartenant à l'intervalle I, on a $x(t) \geqslant y(t)$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t \geqslant 0$ dans I tel que $x(t) < y(t)$. Considérons $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathrm{I},\, x(t) < y(t)\}$. Par continuité, on a forcément $x(t_0) = y(t_0)$. On en déduit que

$$x'(t_0) = f(x(t_0)) > g(x(t_0)) = g(y(t_0)) = y'(t_0).$$

Par continuité de x' et y', il existe $\eta > 0$ tel que, pour $t \in [t_0, t_0 + \eta]$, on ait $x'(t) > y'(t)$. La fonction $x - y$ croît strictement sur $[t_0, t_0 + \eta]$ et s'annule en t_0. On a donc, pour tout $t \in]t_0, t_0 + \eta]$, $x(t) > y(t)$. C'est contraire à la définition de t_0. D'où la contradiction cherchée. ◁

La situation étudiée dans l'exercice suivant peut être vue comme une perturbation de l'équation autonome $y' = y^4$.

3.12. Équation $y' = y^4 + g(x)$, où g tend vers 0 en $+\infty$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(x) - f(x)^4$ a pour limite 0 en $+\infty$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Traitons pour commencer le cas particulier où $f' - f^4$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est alors solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation autonome à variables séparables $y' = y^4$. Écartons le cas trivial où f est identiquement nulle. Dans ce cas f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ (car si $f(x_0) = 0$ alors $f'(x_0) = 0$ et, par unicité de la solution, f est la fonction nulle). Elle est strictement croissante, donc admet une limite en $+\infty$ par le théorème des limites monotones. On intègre l'égalité $\dfrac{f'}{f^4} = 1$ entre 0 et $x \in \mathbb{R}_+$ pour obtenir

$$x = \frac{1}{3f(0)^3} - \frac{1}{3f(x)^3},$$

relation qui montre que la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ est nulle (et f est donc strictement négative sur $\mathbb{R}_+$).

Pour le cas général on va adapter cette solution en quantifiant. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$,

$$|f'(x) - f(x)^4| \leqslant \frac{\varepsilon^4}{2}$$

et, en particulier, $f'(x) \geqslant f(x)^4 - \dfrac{\varepsilon^4}{2}$.

Montrons que pour tout $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant \varepsilon$, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \geqslant A$ tel que $f(x_0) > \varepsilon$. Montrons qu'alors $f(x) > \varepsilon$ pour tout $x \geqslant x_0$. Sinon, on pose $\alpha = \inf\{x > x_0,\ \ f(x) \leqslant \varepsilon\}$. Comme $f(x) > \varepsilon$ dans un voisinage de x_0, on a $\alpha > x_0$. On obtient, pour $x \in [x_0, \alpha[$,

$$f'(x) \geqslant f(x)^4 - \frac{\varepsilon^4}{2} \geqslant \frac{\varepsilon^4}{2}.$$

La fonction f est croissante sur $[x_0, \alpha]$, donc $f(\alpha) > \varepsilon$ et par continuité $f(x) > \varepsilon$ dans un voisinage de α, ce qui contredit la définition de α. On a donc, pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) > \varepsilon$ et donc $f'(x) \geqslant \dfrac{\varepsilon^4}{2}$. On en déduit, pour $x \geqslant x_0$,

$$f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)\frac{\varepsilon^4}{2},$$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) - f(x)^4 = 0$, donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)^4} = 1$. Mais alors

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3f(x)^3} + \frac{1}{3f(x_0)^3}$$

a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est impossible car $f(x)$ tend vers $+\infty$. On a la contradiction cherchée et $f(x) \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$.

Montrons qu'il existe $x \geqslant A$ tel que $f(x) \geqslant -\varepsilon$, toujours par l'absurde. Sinon, on a, pour tout $x \geqslant A$, $f(x) < -\varepsilon$ donc

$$f'(x) \geqslant f(x)^4 - \frac{\varepsilon^4}{2} \geqslant \frac{\varepsilon^4}{2}.$$

On en déduit de nouveau $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est contradictoire.

Soit $x_1 \geqslant A$ tel que $f(x_1) \geqslant -\varepsilon$ et donc $|f(x_1)| \leqslant \varepsilon$. Montrons qu'alors on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant x_1$. On raisonne de nouveau par l'absurde. On suppose qu'il existe $x > x_1$ tel que $f(x) < -\varepsilon$ et on considère $\beta = \inf\{x > x_1, \ \ f(x) < -\varepsilon\}$. Par continuité, on a $f(\beta) \leqslant -\varepsilon$ et donc $f'(\beta) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante dans un voisinage de β. Il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) < f(\beta) \leqslant -\varepsilon$ si $x \in [\beta - \eta, \beta[$, ce qui contredit la définition de β.

On a donc $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant x_1$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on peut conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $\lhd$

On retiendra la méthode qui consiste, pour démontrer qu'une inégalité est vérifiée pour tout x, à raisonner par l'absurde et à considérer la borne inférieure de l'ensemble des x pour lesquels elle n'est pas vérifiée. Elle sera utilisée très souvent dans ce chapitre.

L'exercice suivant propose l'étude qualitative d'une équation qui n'est pas autonome.

3.13. Étude qualitative d'une solution de $x' = \lambda + \dfrac{x^2}{1+t^2}$

Soit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

1. Établir l'existence de $k > 0$ tel que $k > \lambda + \dfrac{(kt)^2}{1+t^2}$ pour tout réel t.

2. On considère la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = \lambda + \frac{x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = 0.$$

Montrer qu'elle est impaire, croissante, définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On veut avoir, pour tout réel t,

$$(k - k^2 - \lambda)t^2 + k - \lambda > 0.$$

Il suffit pour cela d'avoir $k - k^2 \geqslant \lambda$ et $k > \lambda$. Comme $\lambda \leqslant \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$ convient.

2. La fonction $(t, x) \longmapsto \lambda + \dfrac{x^2}{1 + t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe une solution maximale de l'équation différentielle telle que $x(0) = 0$.

Supposons que x est définie sur l'intervalle ouvert I. Montrons qu'elle est impaire. Considérons la fonction y définie sur $-\mathrm{I}$, ensemble des opposés des éléments de I, par $y(t) = -x(-t)$. On a, pour tout $t \in -\mathrm{I}$,

$$y'(t) = x'(-t) = \lambda + \frac{x(-t)^2}{1 + (-t)^2} = \lambda + \frac{y(t)^2}{1 + t^2}.$$

La fonction y est donc une solution de l'équation différentielle telle que $y(0) = -x(0) = 0$. On en déduit que $-\mathrm{I} \subset \mathrm{I}$ et donc $\mathrm{I} = -\mathrm{I}$. Par unicité de la solution maximale $y = x$, donc x est impaire. On pose $\mathrm{I} =]-a, a[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

La fonction x' est strictement positive donc x croît strictement : elle est positive sur $[0, a[$ et négative sur $]-a, 0]$. Montrons que pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $|x(t)| \leqslant k|t|$. Pour $t > 0$, cela revient à démontrer que $x(t) \leqslant kt$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $x(t) > kt$. Considérons $t_1 = \inf\{t \in \mathrm{I}, t > 0, x(t) > kt\}$. Comme $x'(0) = \lambda < k$, on a $x(t) < kt$ dans un voisinage à droite de 0, donc $t_1 > 0$. On a, pour tout $t \in [0, t_1]$, $x(t) \leqslant kt$ donc

$$x'(t) = \lambda + \frac{x(t)^2}{1 + t^2} \leqslant \lambda + \frac{(kt)^2}{1 + t^2} < k.$$

On en déduit que $x(t_1) = \displaystyle\int_0^{t_1} x'(t)\,\mathrm{d}t < kt_1$ et par continuité, $x(t) < kt$ dans un voisinage de t_1, ce qui contredit la définition de t_1. On a donc pour $t \in [0, a[$, $0 \leqslant x(t) \leqslant kt$. Puisque x est impaire, on $|x(t)| \leqslant k|t|$, pour tout $t \in \mathrm{I}$.

On aurait également pu démontrer par des procédés analogues que $|x'| \leqslant k$.

Si par exemple I est majoré la fonction x est croissante et majorée sur I par ka. Elle a donc une limite finie ℓ en a. On la prolonge par continuité en a. On a alors $\lim\limits_{t \to a} x'(t) = \lambda + \dfrac{\ell^2}{1 + a^2}$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I} \cup \{a\}$ et on obtient ainsi une solution de l'équation différentielle définie sur $\mathrm{I} \cup \{a\}$, ce qui contredit le caractère maximal de x. Ainsi $a = +\infty$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) \geqslant \lambda$, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $x(t) \geqslant \lambda t$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$. Par imparité de x, on a $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$. ◁

Dans l'exemple suivant, l'intervalle de définition des solutions maximales est borné. L'équation mettant en jeu une racine carrée, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne peut s'appliquer directement.

3.14. Étude qualitative des solutions de $y' = \alpha\sqrt{y} - x$

Soit $\alpha \in]0, \sqrt{2}[$.

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier les solutions maximales du problème de Cauchy

$$y' = \alpha\sqrt{y} - x \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

On montrera notamment que l'intervalle de définition est borné et on donnera l'allure générale du champ des courbes intégrales.

2. Le problème de Cauchy $y' = \alpha\sqrt{y} - x$ et $y(0) = 0$ possède-t-il une solution ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. La racine carrée n'étant pas dérivable en 0, on va d'abord regarder les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $(x, y) \longmapsto \alpha\sqrt{y} - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si $y_0 > 0$, $(0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, il existe une unique solution du problème de Cauchy $y' = \alpha\sqrt{y} - x$ et $y(0) = y_0$.

Soit I l'intervalle de définition de y. Montrons que I est borné. On raisonne par l'absurde.

• Supposons que $\inf \mathrm{I} = -\infty$. On a $y'(x) = \alpha\sqrt{y(x)} - x \geqslant 0$ pour tout $x \leqslant 0$. La fonction y est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Comme elle est minorée par 0, elle possède une limite finie en $-\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} y'(x) = +\infty$. Mais cela entraîne $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$, ce qui est contradictoire. Donc I est minoré.

• Supposons que $\sup \mathrm{I} = +\infty$. Notons que comme la fonction y ne s'annule pas sur I, y' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \geqslant 0$,

$$y''(x) = \frac{\alpha y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} - 1 = \frac{\alpha(\alpha\sqrt{y(x)} - x)}{2\sqrt{y(x)}} - 1 \leqslant \frac{\alpha^2}{2} - 1 < 0$$

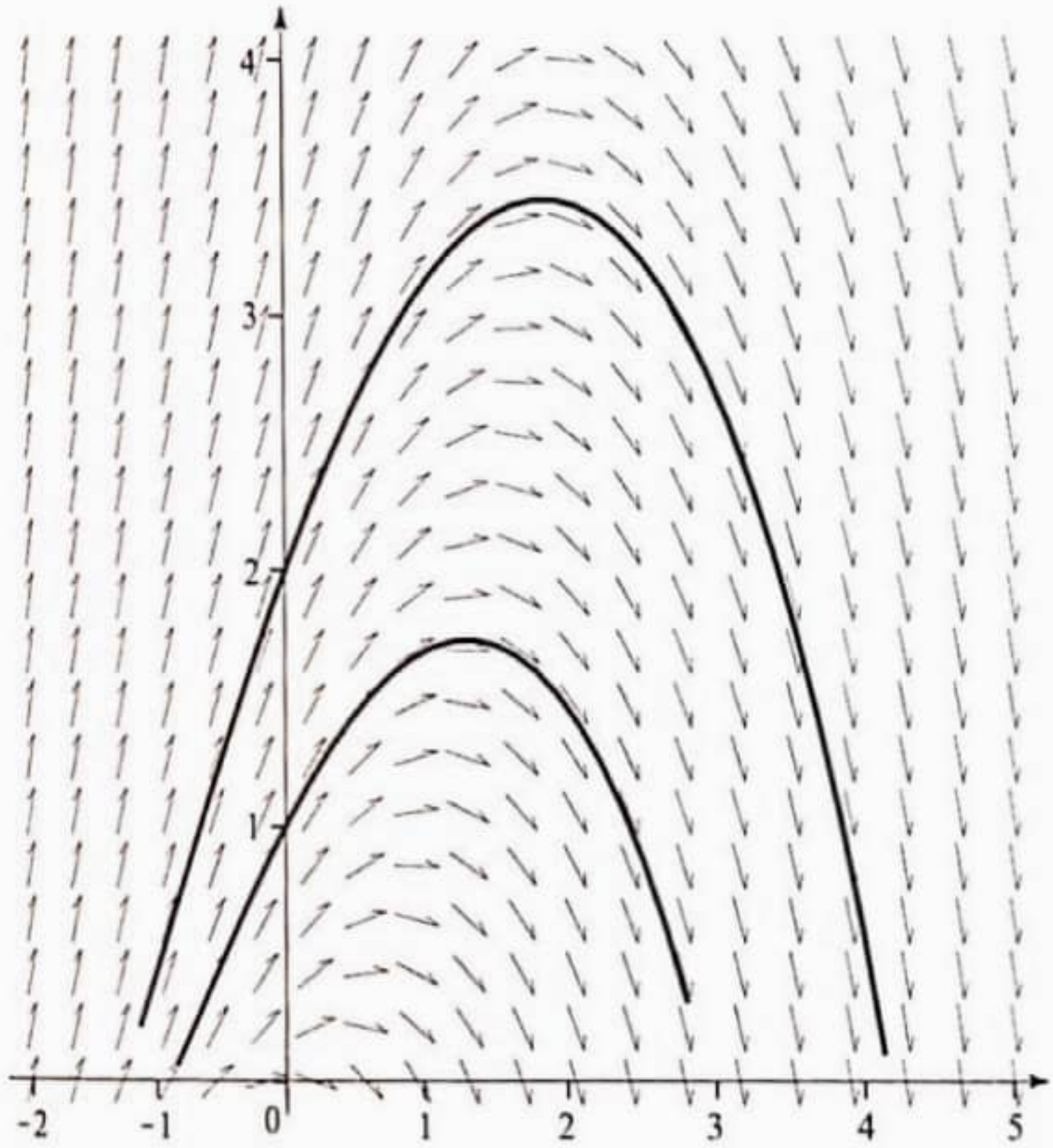
car $0 < \alpha < \sqrt{2}$ (ainsi y est concave sur $\mathbb{R}_+$). Pour $x > 0$, on obtient $y'(x) - y'(0) \leqslant \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) x$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = -\infty$, puis

que $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$, ce qui impossible car y est positive. Donc I est majoré. On pose $\mathrm{I} =]a, b[$, où $a < 0$ et $b > 0$.

La fonction y' est positive donc y est croissante sur $]a, 0]$. Comme elle est minorée par 0, elle possède une limite finie ℓ en a. On en déduit $\lim_{x\to a} y'(x) = \sqrt{\ell} - a$. On peut prolonger par continuité y en a et le prolongement est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ en vertu du théorème de la limite de la dérivée. Si $\ell \neq 0$, alors le prolongement de y reste à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui contredit le caractère maximal de y. On a donc $\ell = 0$ et $\lim_{x\to a} y'(x) = -a$. On en déduit que $y(x) = \displaystyle\int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to a}{\sim} -a(x-a)$.

On a vu précédemment que y' est décroissante sur $[0, b[$. Comme pour $x < b$, $y'(x) = \sqrt{y(x)} - x \geqslant -x \geqslant -b$, la fonction y' est minorée donc possède une limite finie ℓ' en b. On en déduit que $\lim_{x\to b} y(x) = \lim_{x\to b}(y'(x)+x)^2 = (\ell' + b)^2$. On montre comme on l'a fait en a que nécessairement la limite de y en b est nulle, ce qui donne $\ell' = -b$. On en déduit que $y(x) \underset{x\to b}{\sim} -b(x-b)$.

Il résulte de ce qui précède que y est strictement croissante sur $]a, 0]$. La fonction y' est strictement décroissante sur $[0, b[$. Comme de plus $y'(0) = \sqrt{y_0} > 0$ et $\lim_b y' = -b < 0$, il existe c unique dans $]0, b[$ tel que $y'(c) = 0$. La fonction y croît sur $]a, c]$ et décroît sur $[c, b[$. La figure suivante permet de visualiser toutes ces propriétés. Elle représente, dans le cas $\alpha = 1$, les solutions définies par $y(0) = 1$ et $y(0) = 2$.



Considérons maintenant une solution maximale z à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie sur un intervalle J. En posant $a_1 = \sup\{t \in \mathrm{J}, t < 0, y(t) = 0\}$ et $b_1 = \inf\{t \in \mathrm{J}, t > 0, y(t) = 0\}$, on a z strictement positive sur $]a_1, b_1[\cap \mathrm{J}$; elle coïncide donc avec la solution précédente y puisqu'alors le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. On en déduit que $a_1 = a$ et $b_1 = b$. On a $z'(a) = -a > 0$. Si z était définie au voisinage à gauche en a, elle prendrait des valeurs strictement négatives : c'est exclu. Donc a est la borne inférieure de J et de même b est la borne supérieure : ainsi $\mathrm{J} = [a, b]$ et z correspond au prolongement par continuité en a et b de la fonction y.

2. Si $y_0 = 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas. Montrons que le problème de Cauchy ne possède pas de solution. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il possède une solution y définie sur un intervalle I contenant 0, non réduit à un point. Si $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-^* \neq \emptyset$, on a alors $y' > 0$ sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-^*$, donc y est strictement croissante sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-$ et comme $y(0) = 0$, y est strictement négative sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-^*$ ce qui est impossible. Donc $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+$. Notons $b = \sup \mathrm{I}$. La fonction y ne peut pas s'annuler sur $]0, b[$ car s'il existe $x_0 \in]0, b[$ tel que $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) = -x_0 < 0$ et il existe $\eta > 0$ tel que y décroisse et donc soit négative sur $]x_0, x_0 + \eta]$. On a donc $y > 0$ sur $]0, b[$. On en déduit, comme précédemment que $y'' < 0$ sur $[0, b[$. Comme $y'(0) = 0$, la fonction y décroît sur $[0, b[$ et comme $y(0) = 0$, la fonction y est négative sur $]0, b[$. C'est impossible : le problème de Cauchy n'a donc pas de solution. ◁

De manière générale, une solution maximale de $x' = f(x,t)$ avec f de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, si $\alpha = \sup \mathrm{I} \in \mathbb{R}$, où I est l'intervalle de définition de x, la dérivée x' est bornée sur I et est donc intégrable sur $[t_0, \alpha[$ (avec $t_0 \in \mathrm{I}$ quelconque). Ainsi, x admet une limite finie ℓ en α et $\lim_{\alpha} x' = f(\ell, \alpha)$. Si l'on prolonge x par continuité en α, le prolongement obtenu est C^1 sur $\mathrm{I} \cup \{\alpha\}$ en vertu du théorème de la limite de la dérivée et le prolongement est solution de $x' = f(x,t)$ sur $\mathrm{I} \cup \{\alpha\}$ ce qui contredit le caractère maximal de x. Donc $\alpha = \sup \mathrm{I} = +\infty$ et de même $\inf \mathrm{I} = -\infty$.

Dans l'exercice suivant, on considère une équation $x' = f(x,t)$ avec f périodique de période 1 par rapport à chacune des variables x et t. On se retrouve alors face à la situation classique qui vient d'être décrite. De plus, on peut encadrer les solutions.

3.15. Équation $x' = f(x,t)$ avec f doublement 1-périodique

On considère l'équation différentielle $x' = f(x,t)$, où f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ \ f(x+m, t+n) = f(x,t).$$

1. Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
Soit x une solution maximale.

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x(q) = x(0) + p$. Montrer que, pour tout réel t, $x(t+q) = x(t) + p$.

3. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x(q) > x(0) + p$. Montrer que, pour tout réel t, $x(t+q) > x(t) + p$.

4. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$x(q) = x(0) + p \iff x(mq) = x(0) + mp.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit x une solution maximale définie sur l'intervalle ouvert I. Par hypothèse, on a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,t) = f(x - \mathrm{E}(x), t - \mathrm{E}(t)).$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est bornée sur le compact $[0,1]^2$ et d'après ce qui précède, $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} |f| = \sup\limits_{[0,1]^2} |f|$. La fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}^2$, donc x' est bornée sur I.

Supposons que l'intervalle I est majoré et posons $a = \sup \mathrm{I}$. On a, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(u)\,\mathrm{d}u$. Comme x' est bornée, $\int_0^a x'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, donc x possède une limite finie ℓ en a. Comme $x'(t) = f(x(t),t)$ et que f est continue, x' possède aussi une limite finie $f(\ell,a)$ en a. On en déduit que x peut être prolongée en a par continuité. Le prolongement est en fait de classe C^1 d'après le théorème de la limite de la dérivée et il est solution de l'équation différentielle sur $\mathrm{I} \cup \{a\}$. Cela contredit le caractère maximal de x. Donc I n'est pas majoré et on démontre de même qu'il n'est pas minoré : toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = x(t+q) - p$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y'(t) = x'(t+q) = f(x(t+q), t+q)) = f(x(t+q) - p, t) = f(y(t), t),$$

d'après la double périodicité de f. La fonction y est donc solution de l'équation différentielle. De plus, par hypothèse, $y(0) = x(q) - p = x(0)$. Par unicité de la solution prenant en 0 la valeur $x(0)$, on a donc $y = x$, c'est-à-dire, pour tout réel t, $x(t+q) = x(t) + p$.

3. La fonction $y : t \longmapsto x(t+q) - p$ est, d'après la question précédente, solution de l'équation différentielle et $y(0) > x(0)$. Si on n'a pas $y(t) > x(t)$ pour tout réel t, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $y - x$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) = x(t_0)$. Par unicité de la solution prenant en t_0 la valeur $x(t_0)$, on a donc $y = x$, ce qui contredit le fait que $y(0) > x(0)$.

4. Supposons que $x(q) = x(0) + p$. D'après la question 2, on a, pour tout réel t, $x(q+t) = x(t) + p$. On en déduit pour tout entier naturel $m \geqslant 1$, $x(mq) = x((m-1)q) + p$. Un récurrence banale conduit alors à $x(mq) = x(0) + mp$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Supposons réciproquement qu'il existe un entier naturel $m \geqslant 1$ tel que $x(mq) = x(0) + mp$. Montrons que $x(q) = x(0) + p$ en raisonnant par l'absurde.

Si $x(q) > x(0) + p$, on a, pour tout réel t, $x(t+q) > x(t) + p$. Par une récurrence immédiate, on obtient $x(nq) > x(0) + np$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

De même, si $x(q) < x(0) + p$, on montre comme dans la question 3 que, pour tout réel t, $x(t+q) < x(t) + p$. On obtient $x(nq) < x(0) + np$, pour tout entier naturel n, ce qui contredit encore l'hypothèse. On a donc $x(q) = x(0) + p$. ◁

En adaptant ce qui précède, on peut montrer que si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $x(0) + p \leqslant x(1) < x(0) + p + 1$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) + p \leqslant x(t+1) < x(t) + p + 1$$

et si $q \in \mathbb{Z}$,

$$x(t) + qp \leqslant x(t+q) < x(t) + qp + q.$$

La connaissance de x sur $[0,1]$ permet de contrôler les valeurs de x sur $\mathbb{R}$.

On prouve dans ce qui suit que si f est à dérivées partielles bornées sur $\mathbb{R}^2$, alors les solutions de $y' = f(y,t)$ sont définies sur $\mathbb{R}$. En effet, l'hypothèse de périodicité n'intervient pas dans la démonstration de la question 1 ci-dessous, seul le fait que les dérivées partielles sont bornées est utilisé.

3.16. Équation $y' = f(y,t)$ où f est périodique par rapport à t

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivées partielles bornées. On suppose qu'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que $f(x,t) = f(x,t+\mathrm{T})$ pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Le réel t_0 étant fixé, on note g_x la solution maximale de

$$\begin{cases} y' = f(y,t) \\ y(t_0) = x. \end{cases}$$

1. Montrer que g_x est toujours définie sur $\mathbb{R}$.
2. On note P_{t_0} l'application $x \mapsto g_x(t_0+\mathrm{T})$.
Montrer que $\mathrm{P}_{t_0} = \mathrm{P}_{t_0+\mathrm{T}}$.
3. Calculer P_{t_0} lorsque $f(x,t) = x\cos t$.
4. Montrer que P_{t_0} est croissante.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. L'équation différentielle est bien redevable du théorème de Cauchy-Lipschitz. Notons I l'intervalle de définition de g_x, K_1 (resp. K_2) un majorant de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ (resp. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|$).

Supposons que $b = \sup \mathrm{I}$ soit fini. Nous allons démontrer qu'alors g_x est bornée sur $[t_0, b[$. Ceci étant réalisé, on en déduit que g'_x est bornée sur $[t_0, b[$. En effet, si K est un majorant de $|g_x|$ sur $[t_0, b[$, la fonction continue f est bornée sur le compact $[-\mathrm{K}, \mathrm{K}] \times [t_0, b]$. Il existe M tel que, pour tout $t \in [t_0, b[$, $|g'_x(t)| = |f(g_x(t), t)| \leqslant \mathrm{M}$. La fonction g'_x étant bornée est intégrable sur $[t_0, b[$. On en déduit que g_x a une limite finie ℓ en b. Alors $g'_x(t) = f(g_x(t), t)$ a pour limite $f(\ell, b)$ quand t tend vers b. En appliquant le théorème de la limite de la dérivée, on voit que g_x peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I} \cup \{b\}$ qui est encore solution de l'équation différentielle, ce qui contredit le caractère maximal de g_x. On conclut que I n'est pas majoré.

Reste à montrer que g_x est bornée sur $[t_0, b[$. On a, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} |g'_x(t)| &\leqslant |g'_x(t_0)| + |f(g_x(t),t) - f(g_x(t_0),t_0)| \\ &\leqslant |g'_x(t_0)| + |f(g_x(t),t) - f(g_x(t_0),t)| + |f(g_x(t_0),t) - f(g_x(t_0),t_0)| \\ &\leqslant |g'_x(t_0)| + \mathrm{K}_1 |g_x(t) - g_x(t_0)| + \mathrm{K}_2 |t - t_0| \\ &\leqslant \mathrm{K}_2(b - t_0) + |g'_x(t_0)| + \mathrm{K}_1 |g_x(t) - g_x(t_0)|. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $t \geqslant t_0$,

$$|g_x(t) - g_x(t_0)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |g'_x(u)|\,\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{K}_1 |g_x(u) - g_x(t_0)|\,\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \varphi(b) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{K}_1 |g_x(u) - g_x(t_0)|\,\mathrm{d}u,$$

où $\varphi(t) = (\mathrm{K}_2(b - t_0) + |g'_x(t_0)|)(t - t_0)$. Du lemme de Gronwall (voir page 120), on déduit que pour $t \in \mathrm{I}$, $t \geqslant t_0$, on a

$$|g_x(t) - g_x(t_0)| \leqslant \varphi(b) e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{K}_1 \mathrm{d}u} = \varphi(b) e^{\mathrm{K}_1(t-t_0)}.$$

On a donc

$$|g_x(t)| \leqslant |g_x(t_0)| + \varphi(b) e^{\mathrm{K}_1(b-t_0)},$$

ce qui garantit que g_x est bornée sur $[t_0, b[$ et conclut la démonstration.

On démontre de la même façon que I n'est pas minoré : la fonction g_x est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x, on considère la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}$ par $h_x(t) = g_x(t - \mathrm{T})$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$h'_x(t) = g'_x(t - \mathrm{T}) = f(g_x(t - \mathrm{T}), t - \mathrm{T}) = f(g_x(t - \mathrm{T}), t) = f(h_x(t), t).$$

De plus $h_x(t_0 + \mathrm{T}) = g_x(t_0) = x$. La fonction h_x est donc la solution de l'équation différentielle qui prend la valeur x en $t_0 + \mathrm{T}$. Par définition, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}_{t_0+\mathrm{T}}(x) = h_x(t_0 + \mathrm{T} + \mathrm{T}) = g_x(t_0 + \mathrm{T}) = \mathrm{P}_{t_0}(x).$$

On a bien $\mathrm{P}_{t_0+\mathrm{T}} = \mathrm{P}_{t_0}$.

3. Ici on a $\mathrm{T} = 2\pi$. L'équation différentielle est $y' = y \cos t$ donc les solutions sont les fonctions $t \longmapsto Ce^{\sin t}$. On obtient en particulier, pour tout réel t, $g_x(t) = xe^{\sin t - \sin t_0}$ et donc $\mathrm{P}_{t_0}(x) = g_x(t_0 + 2\pi) = x$. L'application P_{t_0} est $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, ce qui traduit la 2π-périodicité de toutes les solutions.

4. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux réels x et y tels que $x < y$ et $\mathrm{P}_{t_0}(x) > \mathrm{P}_{t_0}(y)$, c'est-à-dire $g_x(t_0) < g_y(t_0)$ et $g_x(t_0+\mathrm{T}) > g_y(t_0+\mathrm{T})$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors un réel t tel que $g_x(t) = g_y(t)$. Mais par unicité de la solution du problème de Cauchy au point $(t, g_x(t))$, on a alors $g_x = g_y$, ce qui est faux car ces fonctions n'ont pas même valeur en t_0. L'application P_{t_0} est donc croissante. ◁

Avec ce qui suit, nous restons dans le thème des fonctions périodiques, mais ce sera aussi l'occasion d'aborder le problème de la dépendance continue des solutions par rapport à la condition initiale.

3.17. Existence d'une solution périodique

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,t)$ de classe C^1 et T-périodique en t telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(a,t) > 0$, $f(b,t) < 0$. Pour $y_0 \in [a,b]$, on considère le problème de Cauchy (E_{y_0}) :

$$y' = f(y,t), \quad y(0) = y_0.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale (I,φ) de (E_{y_0}). Montrer que l'intervalle de définition I contient $[0,+\infty[$ et que $\varphi([0,+\infty[) \subset [a,b]$.

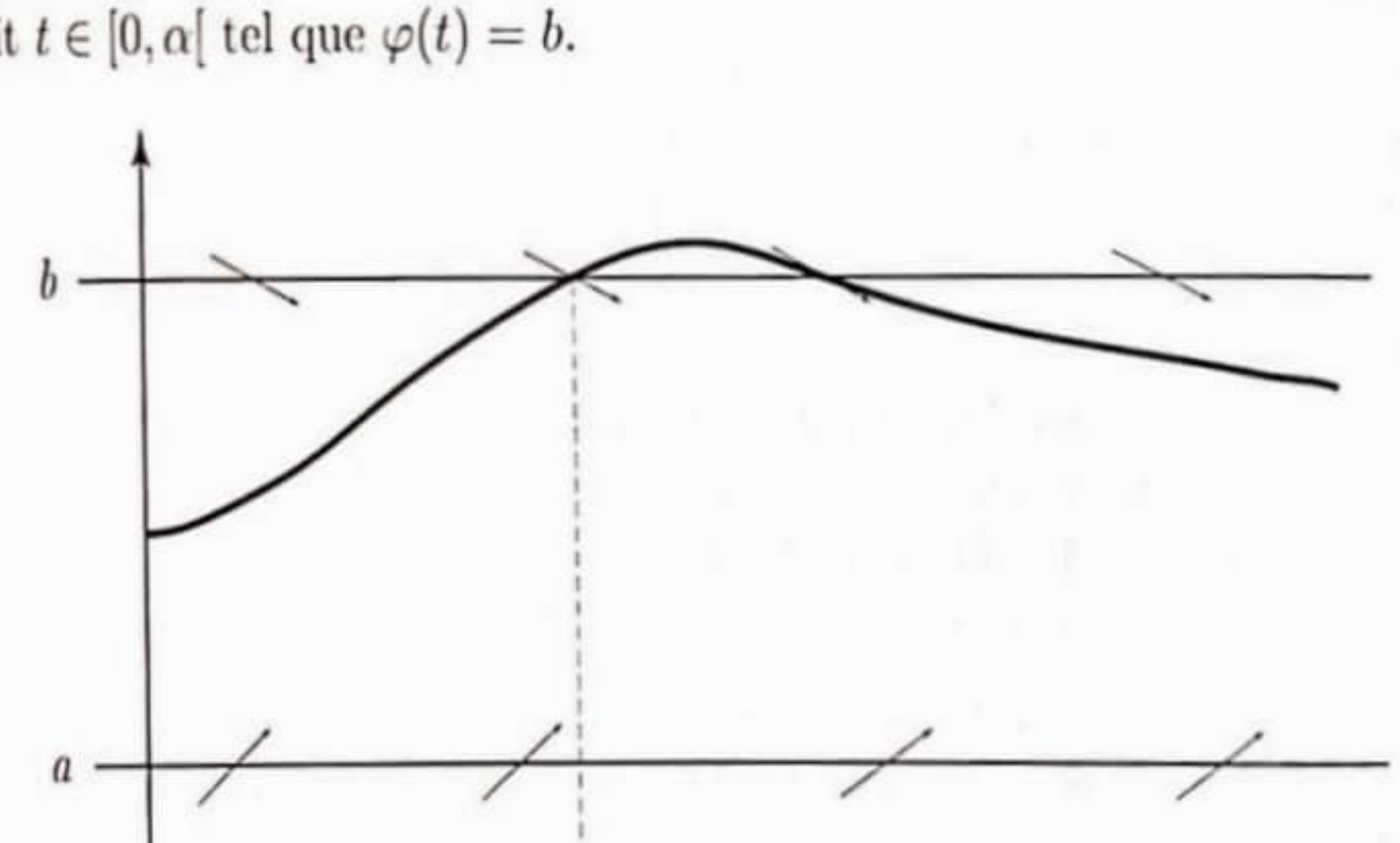
2. Montrer l'existence d'une solution T-périodique de l'équation différentielle $y' = f(y,t)$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. La fonction f étant de classe C^1, nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'équation différentielle possède une unique solution maximale φ vérifiant la condition $\varphi(0) = y_0$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Nous voulons montrer que I contient $[0,+\infty[$. Posons $\mathbb{R}_+ \cap I = [0,\alpha[$, avec α éventuellement infini et commençons par démontrer que, pour tout $t \in [0,\alpha[$, $\varphi(t) \in [a,b]$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) > b$. On sent bien que, puisque $\varphi(t)$ passe au-dessus de b, il doit exister un t tel que $\varphi(t) = b$ et $\varphi'(t) > 0$, ce qui est impossible. Malheureusement, $\varphi(t) = b$ n'entraîne pas $\varphi'(t) > 0$, car $\varphi(t)$ peut passer en-dessous de b en t. La clé est de considérer t_1, le plus petit $t \in [0,\alpha[$ tel que $\varphi(t) = b$.



Soit donc $A = \{t \in [0,\alpha[, \varphi(t) > b\}$, qui est non vide par hypothèse

et $t_1 = \inf A$. Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers t_1, donc par continuité $\varphi(t_1) \geqslant b$. D'autre part, si $t_1 > 0$, alors, pour tout $t \in [0, t_1[$ on a $\varphi(t) \leqslant b$ et par continuité $\varphi(t_1) \leqslant b$. Cela est vrai également si $t_1 = 0$. On conclut que $\varphi(t_1) = b$ et donc que $\varphi'(t_1) = f(b, t_1) < 0$. Mais alors, on a $\varphi(t) > b$ sur un voisinage à gauche de t_1, ce qui est contradictoire avec la définition de t_1. On démontre de même qu'il n'existe pas $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) < a$.

Montrons maintenant que $\alpha = +\infty$ en raisonnant par l'absurde. Si α est fini, la fonction f est continue donc bornée sur le compact $[a, b] \times [0, \alpha]$ et on pose $K = \sup_{[a,b]\times[0,\alpha]} |f|$. Alors, pour tout $t \in [0, \alpha[$, $|\varphi'(t)| \leqslant K$. La fonction φ' est intégrable sur $[0, \alpha[$ et φ admet donc une limite finie en α. Mais alors φ' a aussi une limite finie en α : $\lim_{\alpha} \varphi' = f(\lim_{\alpha} \varphi, \alpha)$. Le théorème de la limite de la dérivée assure que le prolongement par continuité de φ en α est dérivable en α et qu'il est solution du même problème de Cauchy sur $I \cup \{\alpha\}$, ce qui contredit le fait que φ est une solution maximale définie sur I. On a donc $\alpha = +\infty$. L'intervalle I contient donc $[0, +\infty[$.

2. Soit φ une solution maximale de notre équation différentielle telle que $\varphi(0) \in [a, b]$. Montrons que pour que φ soit T-périodique, il suffit que l'on ait $\varphi(T) = \varphi(0)$.

Soit I l'intervalle sur lequel est définie φ. Considérons la fonction ψ définie sur $J = \{t - T, t \in I\}$ par $\psi(t) = \varphi(t + T)$. On a, pour tout $t \in I$,

$$\psi'(t) = \varphi'(t + T) = f(\varphi(t + T), t + T)) = f(\psi(t), t),$$

puisque f est T-périodique en t. Donc ψ est solution de l'équation différentielle. De plus $\psi(0) = \varphi(T) = \varphi(0)$. On déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz que φ et ψ coïncide sur $I \cap J$. Comme φ est une solution maximale on a de plus $J \subset I$. Cela implique que la borne inférieure de I est $-\infty$, et donc que φ est définie sur $\mathbb{R}$. L'égalité de φ et ψ signifie que φ est T-périodique.

On aurait pu démontrer dans la question 1 que $\inf I = -\infty$ *et donc que toute solution* φ *de* (E_{y_0}) *est définie sur* $\mathbb{R}$.

Tout revient à montrer que l'on peut choisir $y_0 = \varphi(0)$ tel que l'on ait $\varphi(T) - \varphi(0) = 0$. Remarquons que si $\varphi(0) = a$, alors $\varphi(T) - \varphi(0) \geqslant 0$, car φ est à valeurs dans $[a, b]$. De même, si $\varphi(0) = b$, alors $\varphi(T) - \varphi(0) \leqslant 0$. Pour montrer l'existence de y_0 tel que $\varphi(T) - \varphi(0) = 0$, nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b. Il ne manque pour cela que la continuité de l'application

$$y_0 \in [a, b] \longmapsto \varphi(T) - \varphi(0) = \varphi(T) - y_0 \in \mathbb{R},$$

où φ est l'unique solution maximale de (E_{y_0}). Il suffit de démontrer la

continuité de l'application $y_0 \longmapsto \varphi(\mathrm{T})$. Il s'agit donc de montrer, dans ce cas particulier, la continuité de φ par rapport à la condition initiale.

Soit φ_1 et ϕ_2 deux solutions maximales de l'équation différentielle, avec $y_1 = \varphi_1(0)$ et $y_2 = \varphi_2(0) \in [a, b]$. Posons $\mathrm{K} = \sup_{[a,b]\times[0,\mathrm{T}]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$. Les fonctions φ_1 et φ_2 prennent leurs valeurs dans $[a, b]$ donc on a, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$,

$$|\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)| = |f(\varphi_1(t), t) - f(\varphi_2(t), t)| \leqslant \mathrm{K}|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|,$$

par l'inégalité des accroissements finis. On en déduit, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$,

$$\begin{aligned}|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leqslant |y_1 - y_2| + \left|\int_0^t \varphi_1'(u) - \varphi_2'(u)\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant |y_1 - y_2| + \mathrm{K}\int_0^t |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)|\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Du lemme de Gronwall (voir page 120), on déduit alors, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$,

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant |y_1 - y_2|e^{\mathrm{K}t}.$$

On a, en particulier $|\varphi_1(\mathrm{T}) - \varphi_2(\mathrm{T})| \leqslant |y_1 - y_2|e^{\mathrm{K}\mathrm{T}}$, ce qui montre la continuité de l'application $y_0 \longmapsto \varphi(\mathrm{T})$ et donc celle de l'application $y_0 \longmapsto \varphi(\mathrm{T}) - \varphi(0)$. Cette dernière fonction prenant des valeurs positives (en a) et négatives (en b), il existe un réel $y_0 \in [a, b]$ pour lequel elle s'annule. La solution maximale qui prend en 0 la valeur y_0 est T-périodique.

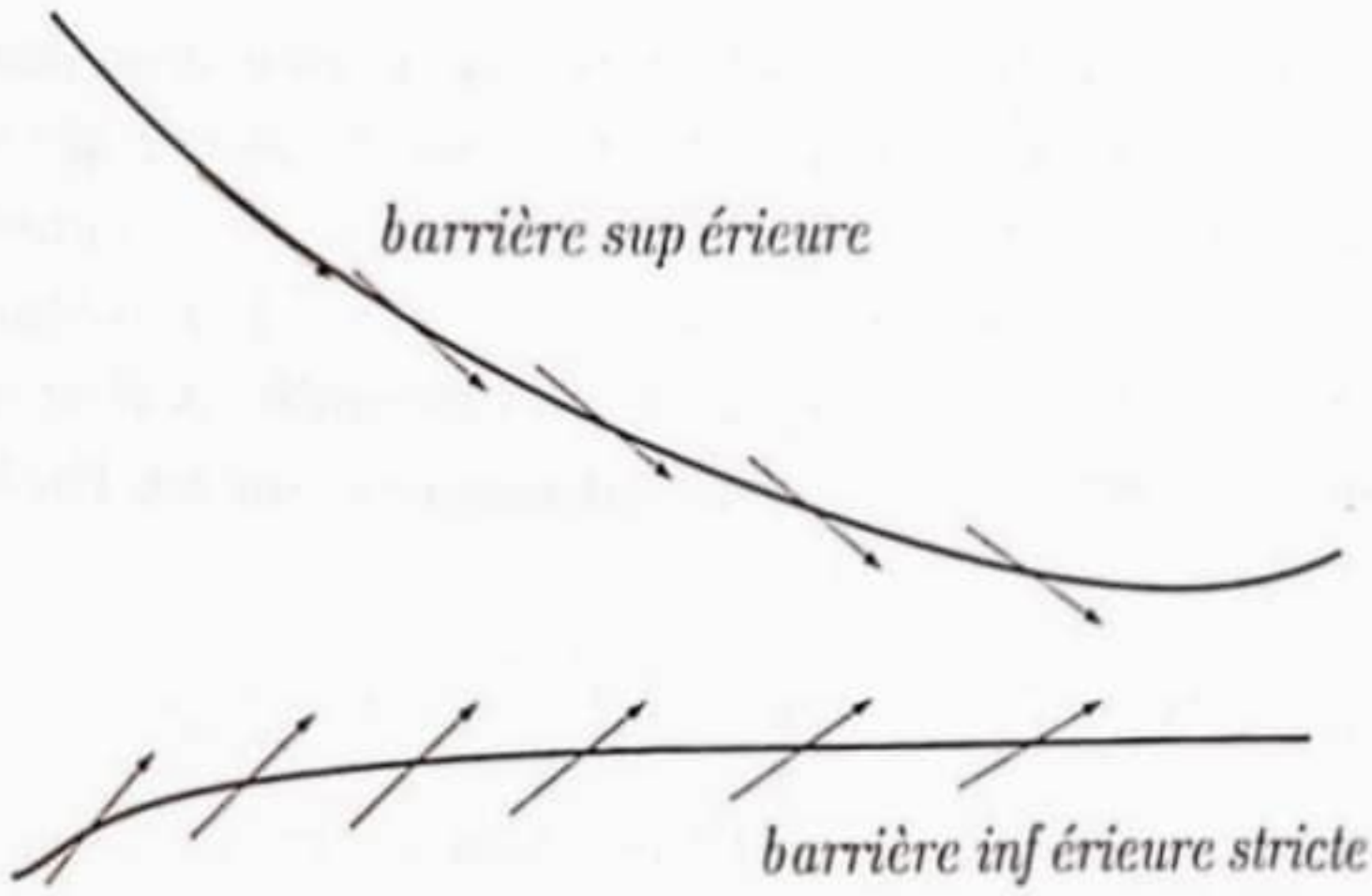
Conclusion. L'équation différentielle possède une solution T-périodique. ◁

Dans l'exercice précédent, les droites $x = a$ et $x = b$ se comportent comme des barrières infranchissables : si la condition initiale est comprise entre a et b, la solution reste comprise entre a et b. De manière plus générale, une fonction dérivable α (resp. β) est une barrière inférieure (resp. supérieure) sur l'intervalle I *pour l'équation $x' = f(t, x)$ si, pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a*

$$\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) \quad \Big(\textit{resp. } \beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t))\Big).$$

Si les inégalités sont strictes, on dit que la barrière est stricte.

Une barrière inférieure (resp. supérieure) sur l'intervalle I *est dite non poreuse si, pour tout solution u de l'équation différentielle vérifiant $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ (resp. $u(t_0) \leqslant \beta(t_0)$) pour un certain $t_0 \in \mathrm{I}$, alors on a $\alpha(t) \leqslant u(t)$ (resp. $u(t) \leqslant \beta(t)$) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $t \geqslant t_0$.*



Si α est une barrière inférieure non poreuse et β une barrière supérieure non poreuse sur I *telle que $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$ pour tout t, on dit que $\{(t,x),\ t \in \mathrm{I}, \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$ est un entonnoir. Une solution de l'équation qui rentre dans l'entonnoir y reste. Dans l'exercice précédent, $\alpha = a$ et $\beta = b$ sont des barrières non poreuses.*

Ces notions sont étudiées à travers de nombreux exemples (dont certains repris à l'oral des concours) dans Équations différentielles et systèmes dynamiques *de John Hubbard et Beverly West (Editions Cassini, 1999).*

L'exercice suivant étudie un entonnoir formé de barrières strictes, puis montre que si f est $\mathcal{C}^1$, toute barrière est non poreuse et qu'ainsi une barrière inférieure α et une barrière supérieure β telles que $\alpha \leqslant \beta$ constituent un entonnoir.

3.18. Théorème de l'entonnoir

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et α et β deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\alpha(t_0) \leqslant \beta(t_0)$ et, pour $t \geqslant t_0$, $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ et $\beta'(t) > f(t, \beta(t))$. Montrer que, pour tout $t > t_0$, $\alpha(t) < \beta(t)$.

2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, $\alpha(t_0) \leqslant \beta(t_0)$ et que, pour tout $t \geqslant t_0$, $\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$, $\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t))$. Soit $\omega \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$. Montrer l'existence d'une application u de classe $\mathcal{C}^1$ de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $u(t_0) = \omega$ et pour tout $t \geqslant t_0$, $u'(t) = f(t, u(t))$ et $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Notons pour commencer qu'on a forcément $\alpha(t) < \beta(t)$ sur un intervalle ouvert $]t_0, t_0 + \eta[$. C'est clair par continuité si $\alpha(t_0) < \beta(t_0)$ et dans le cas où $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ cela provient de ce que $\beta'(t_0) - \alpha'(t_0) > 0$

car $\beta - \alpha$ est alors strictement croissante sur un voisinage de t_0 (car les fonctions sont de classe C^1). Supposons alors par l'absurde que l'ensemble $X = \{t > t_0, \alpha(t) \geqslant \beta(t)\}$ est non vide et considérons sa borne inférieure t_1. D'après ce qu'on vient de dire on a $t_1 > t_0$. Par continuité on a forcément $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$ (si $\alpha(t_1) > \beta(t_1)$ l'ensemble X contiendrait un voisinage de t_1 et cela contredirait le fait que $t_1 = \inf X$). Par hypothèse on a alors

$$\alpha'(t_1) < f(t_1, \alpha(t_1)) = f(t_1, \beta(t_1)) < \beta'(t_1).$$

La fonction $\beta - \alpha$ qui est de classe C^1 est donc strictement croissante sur un voisinage de t_1 : c'est absurde car elle est nulle en t_1 et strictement positive sur $]t_0, t_1[$.

2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de l'équation différentielle $u'(t) = f(t, u(t))$ telle que $u(t_0) = \omega$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I. On pose $I \cap [t_0, +\infty[= [t_0, b[$, avec b éventuellement infini. Montrons d'abord que $\alpha(t) \leqslant u(t)$ pour tout $t \in [t_0, b[$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $t_1 \in]t_0, b[$ tel que $\alpha(t_1) > u(t_1)$. On pose alors $A = \{t \in [t_0, t_1],\ \alpha(t) = u(t)\}$ et $t_2 = \sup A$ (A est non vide d'après le théorème des valeurs intermédiaires et majoré). On a alors $\alpha(t) > u(t)$ pour tout $t \in]t_2, t_1]$ et $\alpha(t_2) = u(t_2)$.

Par hypothèse, on a $(\alpha - u)'(t_2) \leqslant 0$. Si l'inégalité est stricte, on arrive à une contradiction de la même manière qu'à la question précédente. Par contre, si la dérivée est nulle, la question est plus délicate : les fonctions α et u sont bornées sur le compact $[t_2, t_1]$, et leur image est incluse dans un intervalle compact K. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est bornée sur le compact $[t_2, t_1] \times K$. On note M un majorant de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur ce compact. On a, pour tout $t \in [t_2, t_1]$ et $(x_1, x_2) \in K^2$,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)\, dz\right| \leqslant M|x_2 - x_1|.$$

On a en particulier, pour tout $t \in [t_2, t_1]$,

$$f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t)) \leqslant |f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leqslant M(\alpha(t) - u(t)).$$

Mais $f(t, u(t)) = u'(t)$ et $\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$ donc *a fortiori*,

$$\alpha'(t) - u'(t) \leqslant M(\alpha(t) - u(t)).$$

Considérons la fonction φ définie sur $[t_2, t_1]$ par $\varphi(t) = (\alpha(t) - u(t))e^{-Mt}$. La fonction φ est dérivable et, pour $t \in [t_2, t_1]$,

$$\varphi'(t) = \Big(\alpha'(t) - u'(t) - M(\alpha(t) - u(t))\Big)e^{-Mt} \leqslant 0.$$

La fonction φ décroît, mais $\varphi(t_2) = 0$ et $\varphi(t_1) = (\alpha(t_1) - u(t_1))e^{-Mt_1} > 0$. Nous avons la contradiction voulue. On obtient donc $\alpha(t) \leqslant u(t)$, pour tout $t \in [t_0, b[$. On montre de la même manière que $u(t) \leqslant \beta(t)$, pour tout $t \in [t_0, b[$.

Montrons, pour finir que $b = +\infty$. On raisonne de nouveau par l'absurde. Si b est fini, les fonction α et β sont bornées sur $[t_0, b]$ donc u est bornée sur $[t_0, b[$. Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c \leqslant u(t) \leqslant d$ si $t \in [t_0, b[$. La fonction f est bornée sur $[t_0, b] \times [c, d]$ donc u' est bornée sur $[t_0, b[$. On en déduit que u' est intégrable sur $[t_0, b[$ donc que u a une limite finie ℓ en b. On peut prolonger u par continuité en b. Comme $\lim_{t \to b} u'(t) = \lim_{t \to b} f(t, u(t)) = f(b, \ell)$, ce prolongement est dérivable en b en vertu du théorème de la limite de la dérivée et il est solution de l'équation différentielle sur $[t_0, b]$, ce qui contredit le caractère maximal de u. On a donc $b = +\infty$. La fonction u est définie sur $[t_0, +\infty[$ et

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t). \triangleleft$$

Les exercices qui suivent illustrent les notions de barrière et d'entonnoir. Dans les solutions nous n'utiliserons pas le résultat précédent, qui n'est pas supposé être connu des candidats, mais donnerons des preuves directes (souvent plus simples).

3.19. Étude de $x' = \cos x + \cos t$

On considère l'équation différentielle $x' = \cos x + \cos t$.

1. Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0, \pi]$ et f la solution maximale qui vérifie $f(\alpha) = \beta$. Montrer que, pour tout $t \geqslant \alpha$, $f(t) \in [0, \pi]$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit x une solution maximale définie sur un intervalle ouvert I et $a \in$ I. Supposons que I soit minoré et posons $\inf \mathrm{I} = a$. On a, pour tout $t \in$ I, $|x'(t)| \leqslant 2$. La fonction continue x' est donc intégrable sur $]a, \alpha]$ et x possède donc une limite finie en a. Elle est prolongeable par continuité en a. Comme x' vérifie $x'(t) = \cos x(t) + \cos t$ pour $t \in]a, \alpha]$, la fonction x' possède une limite finie en a et d'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement est une fonction dérivable sur $[a, \alpha]$ qui vérifie encore l'équation différentielle. Cela contredit la maximalité de x. L'intervalle I n'est donc pas minoré. On montre de la même façon que I n'est pas majoré. On a donc $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que f prenne sur $[\alpha, +\infty[$ des valeurs hors de l'intervalle $[0, \pi]$. Supposons d'abord que f prenne des valeurs supérieures à π. Soit $A = \{t \geqslant \alpha,\ f(t) > \pi\}$ et $t_0 = \inf A$. Par continuité de f on a $f(t_0) = \pi$. Si $f'(t_0) < 0$, f' reste négative dans un voisinage à droite de f, ce qui implique $f(t) < \pi$, dans ce voisinage, ce qui contradictoire avec la définition de t_0. On a donc

$$f'(t_0) = \cos f(t_0) + \cos t_0 = -1 + \cos t_0 \geqslant 0,$$

ce qui implique $\cos t_0 \geqslant 1$ et donc $\cos t_0 = 1$ et $f'(t_0) = 0$. Par une démonstration par récurrence immédiate, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On calcule les dérivées en t_0. En dérivant l'équation différentielle, on obtient, pour tout réel t, $f''(t) = -f'(t)\sin f(t) - \sin t$, puis

$$f'''(t) = -f''(t)\sin f(t) - f'(t)^2 \cos f(t) - \cos t,$$

ce qui donne $f''(t_0) = 0$, puis $f'''(t_0) = -1$. On a donc au voisinage de t_0,

$$f(t) = f(t_0) - \frac{1}{6}(t - t_0)^3 + o((t - t_0)^3).$$

Au voisinage de t_0, $f(t) - \pi = f(t) - f(t_0)$ a le signe de $-\frac{1}{6}(t - t_0)^3$. Il existe donc un voisinage à droite de t_0 sur lequel $f(t) - \pi$ est négatif. Cela contredit la définition de t_0.

On aboutit ensuite à une contradiction en supposant que f prend des valeurs inférieures à 0. En considérant cette fois $B = \{t \geqslant \alpha,\ f(t) < 0\}$ et $t_1 = \inf B$, on obtient $f(t_1) = 0$ et $f'(t_1) \leqslant 0$, puis $\cos t_1 = -1$ et $f'(t_1) = 0$. On en déduit $f''(t_1) = 0$ et $f'''(t_1) = 1$. On a alors $f(t) \sim \frac{1}{6}(t - t_1)^3$ au voisinage de t_1. Sur un voisinage à droite de t_1, f reste positive, ce qui contredit la définition de t_1.

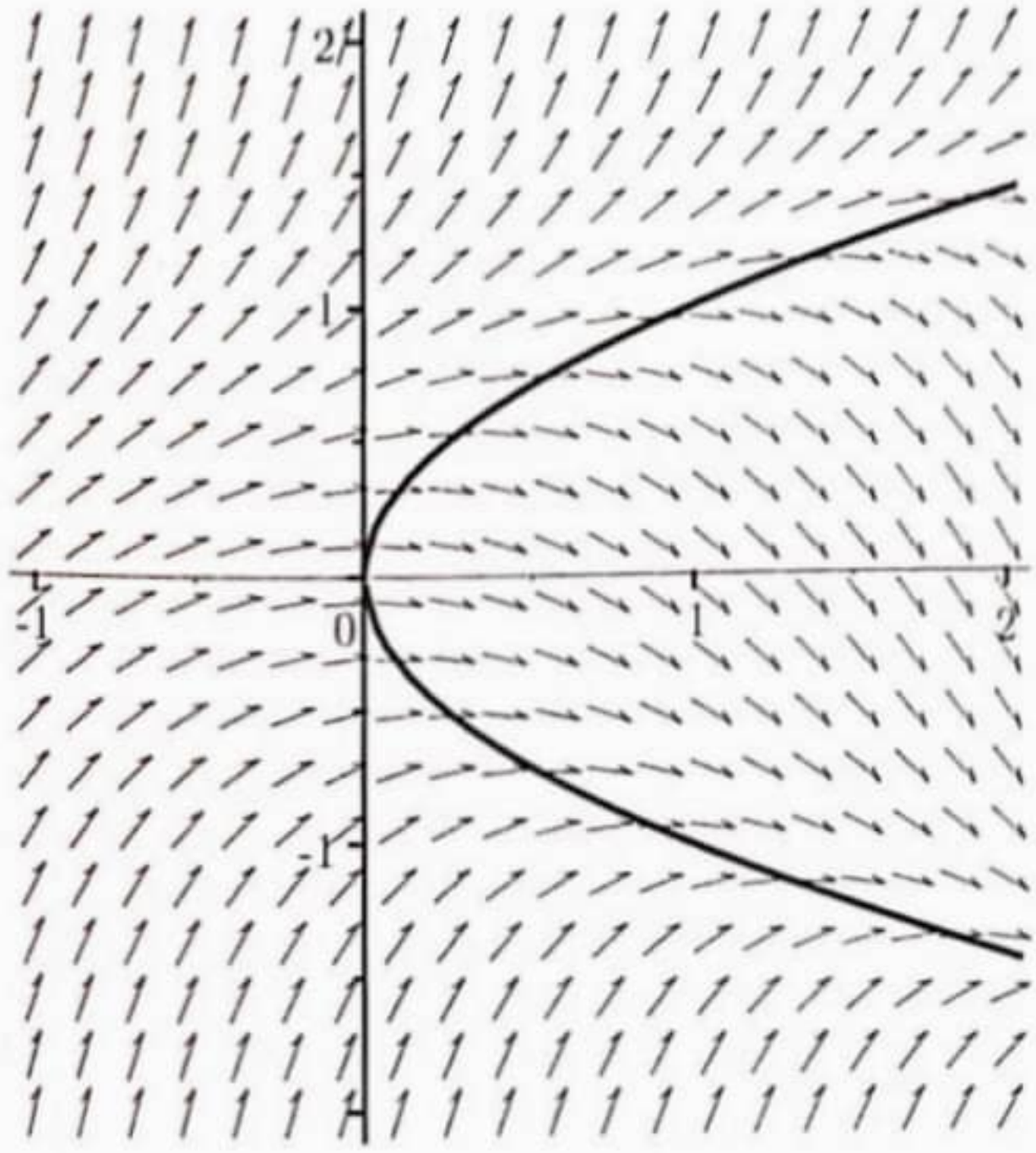
On a donc, pour tout $t \geqslant \alpha$, $f(t) \in [0, \pi]$. ◁

Les fonctions $\alpha : t \longmapsto 0$ et $\beta : t \longmapsto \pi$ constituent donc des barrières non poreuses. C'est en accord avec le théorème de l'entonnoir (voir la deuxième question de l'exercice précédent) puisqu'on a pour t réel,

$$\alpha'(t) = 0 \leqslant \cos 0 + \cos t = 1 + \cos t \quad \textit{et} \quad \beta'(t) = 0 \geqslant \cos \pi + \cos t = -1 + \cos t.$$

L'application $(x, t) \longmapsto \cos x + \cos t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, ces barrières sont non poreuses.

On s'intéresse dans les trois exercices suivants aux barrières de l'équation différentielle $x' = x^2 - t$. Voici dans le plan (t, x) la représentation du champ de direction associé ainsi que la parabole $t = x^2$ (qui correspond à l'isocline de pente 0 : en un point de cette parabole une solution x admet une tangente horizontale)



Dans le premier énoncé, on prouve de manière directe que $t \longmapsto -\sqrt{t}$ *et* $t \longmapsto -\sqrt{t-1}$ *sont deux barrières non poreuses (ce qui est aussi une conséquence du théorème de l'entonnoir (voir exercice 3.18).*

3.20. Étude de $x' = x^2 - t$ (1)

On considère l'équation différentielle (E) : $x' = x^2 - t$ et des réels t_0 et x_0 tels que $t_0 > \dfrac{5}{4}$ et $-\sqrt{t_0} \leqslant x_0 \leqslant -\sqrt{t_0 - 1}$. Soit x la solution maximale de (E) telle que $x(t_0) = x_0$. Elle est définie sur $]a, b[$.

1. Montrer que $-\sqrt{t} \leqslant x(t) \leqslant -\sqrt{t-1}$ pour tout $t \in [t_0, b[$.
2. Montrer que $b = +\infty$ et déterminer un équivalent de $x(t)$ en $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On raisonne par l'absurde : si $\{t \geqslant t_0,\ x(t) < -\sqrt{t}\}$ n'est pas vide, on note t_1 sa borne inférieure. Par continuité, on a $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$ et $x'(t_1) = x^2(t_1) - t_1 = 0$. Si f est la fonction $t \longmapsto -\sqrt{t}$, on a $f'(t_1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$ donc $f'(t_1) < x'(t_1)$. La fonction $x - f$ est strictement croissante au voisinage de t_1 et s'annule en t_1, ce qui contredit la définition de t_1.

De même, si $\{t \geqslant t_0,\ x(t) > -\sqrt{t-1}\}$ n'est pas vide, on note t_1 sa

borne inférieure. Par continuité, on a $x(t_1) = -\sqrt{t_1 - 1}$ et donc $x'(t_1) = x^2(t_1) - t_1 = -1$. Si g est la fonction $t \longmapsto -\sqrt{t-1}$, $g'(t_1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t_1 - 1}}$, et comme $t_1 \geqslant t_0 > \dfrac{5}{4}$, on obtient $g'(t_1) > -1$, *i.e.* $g'(t_1) > x'(t_1)$. La fonction $x - g$ décroît strictement au voisinage de t_1 et s'annule en t_1, ce qui contredit la définition de t_1.

2. On raisonne de nouveau par l'absurde et on suppose que b est fini. On a, pour tout $t \in [t_0, b[$, $-\sqrt{t} \leqslant x(t) \leqslant -\sqrt{t-1}$ et donc $t - 1 \leqslant x^2(t) \leqslant t$ et $-1 \leqslant x'(t) \leqslant 0$. La fonction x' est bornée sur $[t_0, b[$. On en déduit que x' est intégrable et x a donc une limite finie en b. Il en est de même de $x'(t) = x^2(t) - t$. La solution x de l'équation différentielle peut être prolongée par continuité en b et le théorème de la limite de la dérivée assure que le prolongement est dérivable en b et solution sur $]a, b]$, ce qui contredit le caractère maximal de x. On a donc $b = +\infty$.

Comme $-\sqrt{t} \leqslant x(t) \leqslant -\sqrt{t-1}$ pour tout $t \geqslant t_0$, on obtient

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}. \quad \triangleleft$$

Dans ce deuxième exercice sur $x' = x^2 - t$, on montre que si une solution rentre dans le domaine $x^2 < t$, elle y reste et on en obtient un équivalent en $+\infty$.

3.21. Étude de $x' = x^2 - t$ (2)

On considère l'équation différentielle (E) : $x' = x^2 - t$ et l'ensemble $\mathrm{D}_0 = \{(t, x),\ x^2 - t < 0\}$.

1. Montrer que si x est une solution maximale de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in \mathrm{D}_0$, alors x est définie sur $[t_0, +\infty[$ et la courbe intégrale reste dans D_0.

2. En déduire que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Supposons qu'il existe $t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geqslant 0$. On considère alors $t_1 = \inf\{t > t_0,\ x^2(t) - t > 0\}$. On a $x^2(t_1) - t_1 = 0$ et donc $x'(t_1) = 0$. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $f : t \longmapsto x(t) - \sqrt{t}$. On a $f(t_1) = 0$ et $f'(t_1) = x'(t_1) - \dfrac{1}{2\sqrt{t_1}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $x \in [t_1 - \eta, t_1[$, on ait $f(t) > 0$ et donc $x^2(t) - t > 0$. Cela contredit la définition de t_1. De même si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $t \longmapsto x(t) + \sqrt{t}$ pour aboutir à une contradiction. Par conséquent, la courbe intégrale reste dans D_0.

Si la solution maximale est définie sur un intervalle I majoré, on pose $a = \sup \mathrm{I}$. Alors pour tout $t \in [t_0, a[$, on a $|x'(t)| = t - x^2(t) \leqslant t \leqslant a$. On en déduit que x' est intégrable sur $[t_0, a[$ et donc que x admet une limite finie ℓ en a. On peut prolonger la fonction x par continuité en a. Mais on alors $\lim\limits_{t \to a} x'(t) = \ell^2 - a$. Par le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement est dérivable en a et vérifie l'équation différentielle (E) sur $\mathrm{I} \cup \{a\}$, ce qui contredit la maximalité de x. On en déduit que $a = +\infty$.

2. Pour trouver l'équivalent de x en $+\infty$, on commence par chercher les limites de x et x' en $+\infty$. On a, pour tout $t \geqslant t_0$, $x'(t) < 0$: x est décroissante. Si x a une limite finie en $+\infty$ alors x' tend vers $-\infty$, ce qui est impossible, car cela entraîne que x tend vers $-\infty$. Par conséquent x tend vers $-\infty$.

En dérivant (E) on obtient $x'' = 2xx' - 1$, puis $x''' = 2x'^2 + 2xx''$.

• S'il existe $t_1 \geqslant t_0$ tel que $x''(t_1) \geqslant 0$, on a alors $x''(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant t_1$. On le montre en raisonnant par l'absurde. On suppose que l'ensemble $\mathrm{A} = \{t \geqslant t_1,\ x''(t) < 0\}$ n'est pas vide. On note t_2 sa borne inférieure. On a par continuité $x''(t_2) = 0$ et $x'''(t_2) = 2(x'(t_2))^2 > 0$ car $x' < 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $x''(t) < 0$ si $t \in]t_2 - \eta, t_2[$, ce qui contredit la définition de t_2. On a donc $x''(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_1$. La fonction x' est croissante sur $[t_1, +\infty[$ et majorée par 0. Elle converge vers un réel négatif ou nul. On en déduit $x^2(t) = x'(t) + t \underset{t \to +\infty}{\sim} t$ et comme $x(t) < 0$ pour t assez grand,

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}.$$

• Sinon, on a $x''(t) < 0$, *i.e.* $2x'(t)x(t) < 1$ pour tout $t \geqslant t_0$. Pour t assez grand, on a $x(t) < 0$ et donc $0 > x'(t) > \dfrac{1}{2x(t)}$. Comme x tend vers $-\infty$ en $+\infty$, x' tend vers 0. On en déduit, comme dans le premier cas que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$. ◁

Dans ce troisième exercice, on cherche des solutions qui restent dans le domaine $\{(t,x) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{t} \leqslant x \leqslant \sqrt{t+1}\}$.

3.22. Étude de $x' = x^2 - t$ (3)

1. Soit (I, φ) une solution maximale de (E) : $x' = x^2 - t$ définie en 0. Montrer que

$$\varphi(0) > 1 \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+,\ \ \varphi(t) > \sqrt{t+1}$$

$$\varphi(0) < 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+,\ \ \varphi(t) < \sqrt{t}.$$

2. Soit $s > 0$, (I, φ_s) et (J, θ_s) les solutions maximales de (E) telles que $\varphi_s(s) = \sqrt{s+1}$ et $\theta_s(s) = \sqrt{s}$. Montrer que $0 \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. Étudier les variations de $s \longmapsto \varphi_s(0)$ et de $s \longmapsto \theta_s(0)$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Supposons que $\varphi(0) > 1$. L'inégalité $\varphi(t) > \sqrt{t+1}$ est vérifiée pour $t = 0$. Si elle n'est pas vraie pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$, on considère $t_0 = \inf\{t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) \leqslant \sqrt{t+1}\}$. On a alors $t_0 > 0$ et par continuité de φ, $\varphi(t_0) = \sqrt{t_0+1}$. Considérons la fonction $f : t \longmapsto \varphi(t) - \sqrt{t+1}$. On a $f(t_0) = 0$ et

$$f'(t_0) = \varphi'(t_0) - \frac{1}{2\sqrt{t_0+1}} = \varphi(t_0)^2 - t_0 - \frac{1}{2\sqrt{t_0+1}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t_0+1}} > 0.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que sur $[t_0 - \alpha, t_0[$, on ait $f(t) < 0$, *i.e.* $\varphi(t) < \sqrt{t+1}$, ce qui contredit la définition de t_0. On a donc $\varphi(t) > \sqrt{t+1}$ est pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.

On raisonne de même si $\varphi(0) < 0$: si l'inégalité $\varphi(t) < \sqrt{t}$, qui est vérifiée pour $t = 0$, n'est pas vraie pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$, on considère $t_1 = \inf\{t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) \geqslant \sqrt{t}\}$. On a alors $t_1 > 0$ et par continuité de φ, $\varphi(t_1) = \sqrt{t_1}$. On considère la fonction $g : t \longmapsto \varphi(t) - \sqrt{t}$. On a $g(t_1) = 0$ et

$$g'(t_1) = \varphi'(t_1) - \frac{1}{2\sqrt{t_1}} = \varphi(t_1)^2 - t_1 - \frac{1}{2\sqrt{t_1}} = -\frac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que sur $]t_1 - \alpha, t_1]$, on ait $g(t) > 0$, *i.e.* $\varphi(t) > \sqrt{t}$, ce qui contredit la définition de t_1. On a donc $\varphi(t) < \sqrt{t}$ pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.

Si $\varphi(0) = 1$, alors $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi''(0) = 2\varphi'(0)\varphi(0) - 1 = 1 > 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $t \in]0, \alpha]$, on a $\varphi'(t) > 1$ et $\varphi(t) > t + 1 > \sqrt{t+1}$. Le raisonnement précédent montre que $\varphi(t) > \sqrt{1+t}$ pour $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+^*$. On montre de même que si $\varphi(0) = 0$, on $\varphi(t) < \sqrt{t}$ pour $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit φ une solution maximale avec $\varphi(s) \in [\sqrt{s}, \sqrt{s+1}]$, définie sur l'intervalle L. Nous allons démontrer que $0 \in \mathrm{L}$ et que pour $t \in [0, s[$, $\varphi(t) \in]\sqrt{t}, \sqrt{t+1}[$. À cette fin, considérons encore $f, g :]0, s] \cap \mathrm{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(t) = \varphi(t) - \sqrt{t+1}$ et $g(t) = \varphi(t) - \sqrt{t}$. On a, par hypothèse, $f(s) \leqslant 0 \leqslant g(s)$. Si $f(s) < 0$, alors f reste strictement négative sur un voisinage à gauche de s ; si $f(s) = 0$, on constate, comme à la question précédente, que $f'(s) > 0$ et on aboutit à la même conclusion. On démontre de même, en distinguant les cas $g(s) > 0$ et $g(s) = 0$ (et

$g'(s) < 0$) que sur un voisinage à gauche de s, g strictement positive. Finalement, on a $\varphi(t) \in]\sqrt{t}, \sqrt{t+1}[$ sur un voisinage à gauche de s.

• Imaginons qu'il existe $t \in [0, s[\cap \mathrm{L}$ tel que $\varphi(t) \geqslant \sqrt{t+1}$. Considérons $t_0 = \sup\{t \in [0, s[\cap \mathrm{L}, \varphi(t) = \sqrt{t+1}\}$ (l'ensemble est non vide en vertu du théorème des valeurs intermédiaires). Cette borne supérieure existe et se situe dans $]0, s[$; en effet, elle ne peut être nulle d'après la remarque qui clôt la première question. Par continuité, on a $\varphi(t_0) = \sqrt{t_0+1}$. En dérivant $f : t \longmapsto \varphi(t) - \sqrt{t+1}$, on montre que $f'(t_0) > 0$ si bien que $f(t) > 0$ sur un voisinage à droite de t_0. Cela est exclu car le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait l'existence d'un point d'annulation de f entre t_0 et s, puisque f est strictement négative sur un voisinage à gauche de s. Ainsi, pour tout $t \in [0, s[\cap \mathrm{L}$, on a $\varphi(t) < \sqrt{t+1}$.

• De la même façon, imaginons qu'il existe $t \in [0, s[\cap \mathrm{L}$ tel que $\varphi(t) \leqslant \sqrt{t}$. Considérons $t_0 = \sup\{t \in [0, s[\cap \mathrm{L}, \varphi(t) = \sqrt{t}\}$. Cette borne supérieure existe et se situe dans $]0, s[$ (elle ne peut être nulle toujours d'après la remarque précédant la question). Par continuité, on a $\varphi(t_0) = \sqrt{t_0}$. En dérivant $g : t \longmapsto \varphi(t) - \sqrt{t}$, on montre que $g'(t_0) < 0$ si bien que $g(t) < 0$ sur un voisinage à droite de t_0. Cela est exclu car le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait l'existence d'un point d'annulation de g entre t_0 et s, puisque g est strictement positive sur un voisinage à gauche de s. Ainsi, pour tout $t \in [0, s[\cap \mathrm{L}$, on a $\varphi(t) > \sqrt{t}$.

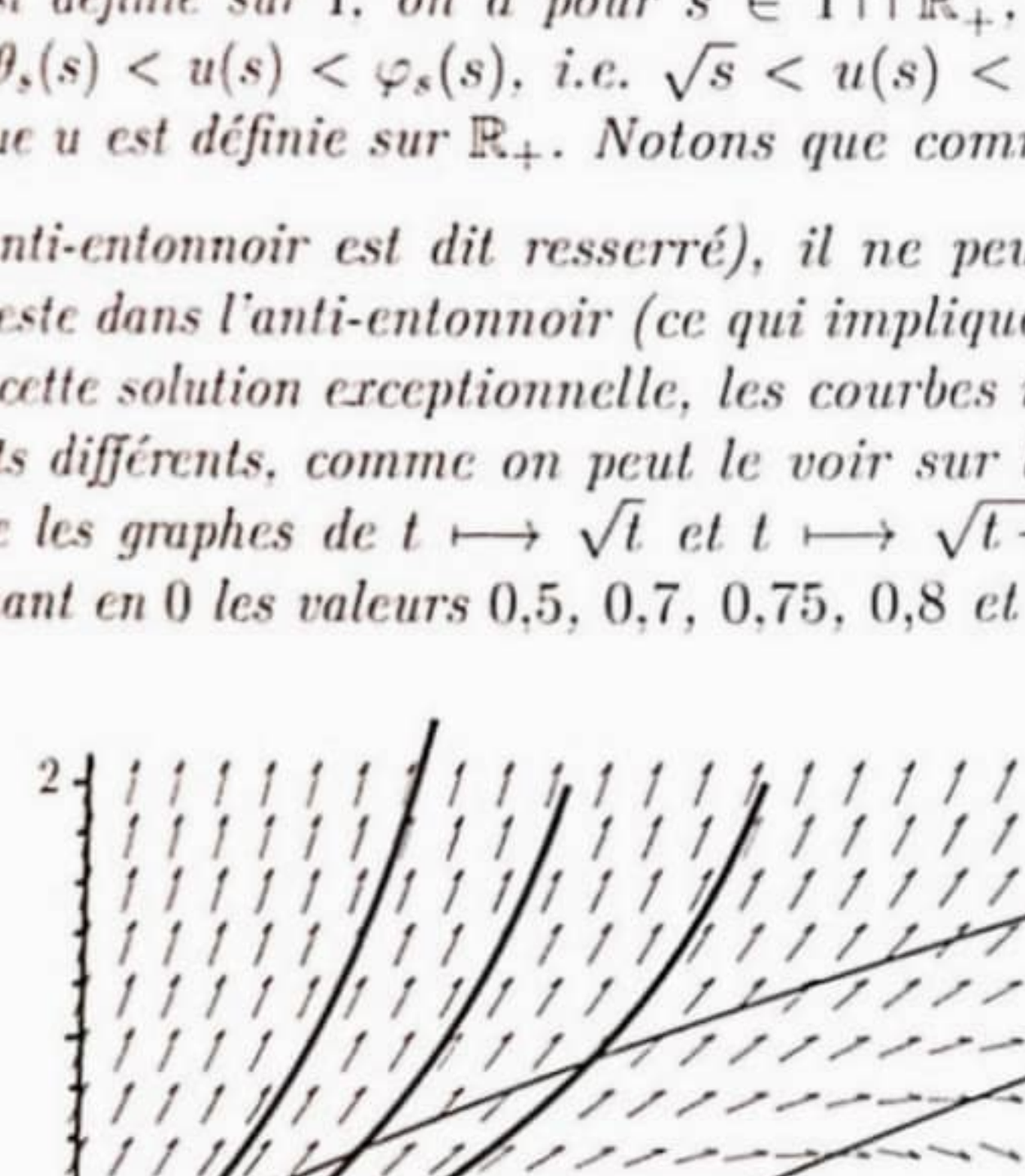
• On a donc $\sqrt{t} < \varphi(t) < \sqrt{t+1}$ pour tout $t \in [0, s[\cap \mathrm{L}$. Soit $a = \inf \mathrm{L}$. Montrons par l'absurde que $a < 0$. Si $a \geqslant 0$, l'encadrement trouvé prouverait que φ est bornée sur $]a, s]$ et φ' aussi vue l'équation différentielle. Ainsi, φ' serait intégrable et φ admettrait une limite finie ℓ en a. Elle serait donc prolongeable par continuité en a. D'après le théorème de la limite de la dérivée, comme φ' tendrait vers $\ell^2 - a$ en a, φ serait dérivable en a et le prolongement vérifierait encore l'équation différentielle sur $\mathrm{L} \cup \{a\}$ ce qui contredirait le caractère maximal de (L, φ). On conclut que $a < 0$.

• Nous avons prouvé en particulier que, pour tout $s > 0$, 0 est dans I et J et que $\varphi_s(0)$ et $\theta_s(0)$ appartienne à $]0, 1[$. Comme $\theta_s(s) < \varphi_s(s)$, θ_s et φ_s sont deux solutions distinctes de l'équation différentielle, leurs courbes ne peuvent se couper. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi_s - \theta_s$ garde un signe constant et on a en particulier $\theta_s(0) < \varphi_s(0)$. On a donc, pour tout $s > 0$, $0 < \theta_s(0) < \varphi_s(0) < 1$.

Supposons que $0 < s < s'$. Comme $\theta_{s'}(s') = \sqrt{s'} \in [\sqrt{s'}, \sqrt{s'+1}]$, on a, d'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, s'[$, $\theta_{s'}(t) > \sqrt{t}$. En particulier $\theta_{s'}(s) > \sqrt{s} = \theta_s(s)$. Les fonctions $\theta_{s'}$ et θ_s sont distinctes, donc leurs courbes ne peuvent être sécantes. Ainsi, $\theta_s - \theta_{s'}$ garde un signe constant et en particulier $\theta_{s'}(0) > \theta_s(0)$. La fonction $s \longmapsto \theta_s(0)$ est donc strictement croissante.

De la même façon, $\varphi_{s'}(s') = \sqrt{s'+1} \in [\sqrt{s'}, \sqrt{s'+1}]$ donc, pour tout $t \in [0, s']$, $\varphi_{s'}(t) < \sqrt{t+1}$. En particulier $\varphi_{s'}(s) < \sqrt{s+1} = \varphi_s(s)$. Les courbes de $\varphi_{s'}$ et φ_s ne peuvent se couper et donc $\varphi_s - \varphi_{s'}$ est strictement positive. On a en particulier $\varphi_{s'}(0) < \varphi_s(0)$ si bien que $s \longmapsto \varphi_s(0)$ est strictement décroissante. ◁

La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est une barrière supérieure non poreuse et la fonction $t \longmapsto \sqrt{t+1}$ est une barrière inférieure non poreuse. On dit que $\{(t,x) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{t} \leqslant x \leqslant \sqrt{t+1}\}$ est un anti-entonnoir. On comprend que la plupart des solutions φ de l'équation vérifiant $\varphi(0) \in]0,1[$ vont quitter la zone $\sqrt{t} < x < \sqrt{t+1}$. Cependant, au moins une solution va rester dans cette zone. Posons $\alpha = \lim_{s \to +\infty} \theta_s(0)$ et $\beta = \lim_{s \to +\infty} \varphi_s(0)$: ces limites existent et sont finies, car les fonctions $s \longmapsto \varphi_s(0)$ et $s \longmapsto \theta_s(0)$ sont monotones et bornées, et $\alpha \leqslant \beta$: de plus, pour tout $s > 0$, on a : $0 < \theta_s(0) < \alpha \leqslant \beta < \varphi_s(0) < 1$. Une solution u de l'équation différentielle qui vérifie $u(0) \in [\alpha, \beta]$ reste « piégée » dans cet anti-entonnoir. En effet, si u est définie sur I, on a pour $s \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+^*$, $\theta_s(0) < u(0) < \varphi_s(0)$, donc $\theta_s(s) < u(s) < \varphi_s(s)$, i.e. $\sqrt{s} < u(s) < \sqrt{s+1}$. On peut en déduire que u est définie sur $\mathbb{R}_+$. Notons que comme $\lim_{t+\infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t}) = 0$ (l'anti-entonnoir est dit resserré), il ne peut y avoir qu'une solution qui reste dans l'anti-entonnoir (ce qui implique $\alpha = \beta$). De part et d'autre de cette solution exceptionnelle, les courbes intégrales ont des comportements différents, comme on peut le voir sur la figure suivante qui représente les graphes de $t \longmapsto \sqrt{t}$ et $t \longmapsto \sqrt{t+1}$ ainsi que les solutions prenant en 0 les valeurs 0,5, 0,7, 0,75, 0,8 et 0,9.



Lors de l'oral suivant, on a demandé au candidat de montrer, dans une première question, qu'une barrière inférieure stricte est non poreuse : soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathrm{I} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *; soient* $t_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *et* y *la solution maximale de* $y' = f(t, y)$ *telle que* $y(t_0) = y_0$ *; soient enfin* α *une fonction dérivable définie sur le même intervalle que* y *telle que* $\alpha(t_0) \leqslant y_0$ *et* $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ *pour* $t > t_0$. *Alors on a pour* $t > t_0$, $\alpha(t) < y(t)$. *Cela se prouve comme dans la première question de l'exercice 3.18 auquel nous renvoyons le lecteur. Ce résultat pourra donc être utilisé dans l'exercice. Rappelons enfin que la ligne de niveau de* f *définie par* $\{(t, y),\ f(t, y) = m\}$ *est appelée isocline de pente* m. *En effet, la tangente à une courbe intégrale en un tel point a pour pente* m.

3.23. Étude de $y' = y^2 - t^2$

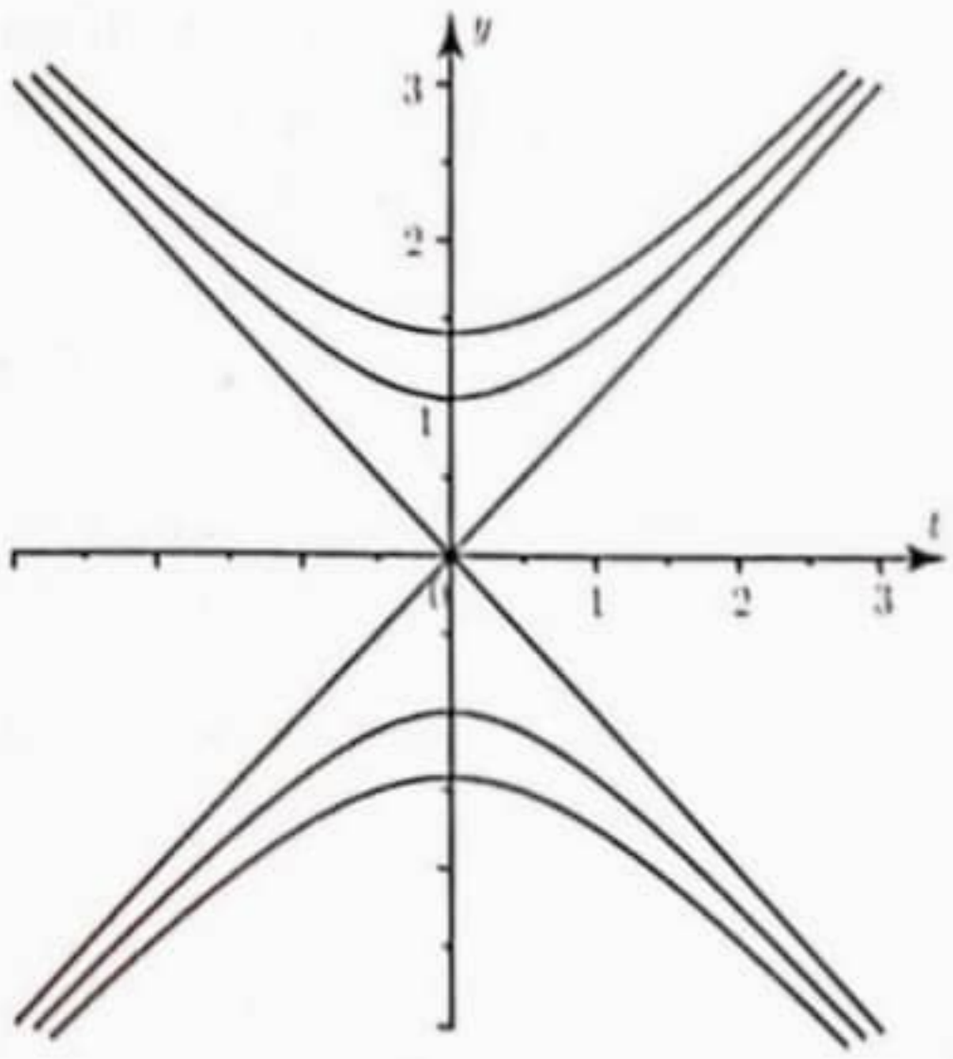
On considère l'équation (E) : $y' = y^2 - t^2$ et y la solution maximale telle que $y(t_0) = y_0$ où $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Tracer les isoclines 0, 1, 2 de (E).
2. On suppose que $y_0 \geqslant \sqrt{1 + t_0^2}$. Montrer que, pour tout $t > t_0$, $y(t) > \sqrt{1 + t^2}$.
3. On suppose que $y_0 \geqslant \sqrt{1 + t_0^2}$ et que y a une asymptote verticale à droite. Soit y_1 une solution maximale de (E) telle que $y_1(t_0) > y_0$. Montrer que y_1 possède une asymptote verticale.
4. On suppose que $t_0 = 0$ et $y_0 > 1$. Montrer que y a une asymptote verticale.

(École polytechnique)

Solution.

1.



L'isocline de pente 0 est la réunion des deux droites d'équation $y = \pm t$ et les isoclines de pentes 1 et 2 sont des hyperboles ayant les droites précédentes pour asymptotes.

2. On pose $f(t,y) = y^2 - t^2$ et $\alpha(t) = \sqrt{1+t^2}$. On a, pour tout réel t, $f(t,\alpha(t)) = 1 + t^2 - t^2 = 1$ et $\alpha'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} < 1$. D'après le résultat rappelé avant l'exercice, on a donc $y(t) > \alpha(t)$ pour tout $t > t_0$ (α est une barrière inférieure stricte non poreuse).

3. Il existe $t_1 > t_0$ tel que $\lim\limits_{t\to t_1} y(t) = +\infty$ (c'est $+\infty$ car $y(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$). S'il existe $t > t_0$ tel que $y_1(t) = y(t)$, on a par unicité du problème de Cauchy, $y_1 = y$, ce qui contredit l'hypothèse $y_1(t_0) > y_0$. Ainsi, on a $y_1(t) \neq y_0(t)$ pour tout t et comme $y_1(t_0) > y(t_0)$, on a $y_1(t) > y_0(t)$ pour tout t.

Si l'intervalle de définition de y_1 contient $[t_0, t_1[$, on $\lim\limits_{t_1} y_1 = +\infty$, car $y_1 > y_0$. Sinon la borne supérieure de cet intervalle est $t_2 < t_1$. Comme $y_1(t_0) > y_0 \geqslant \sqrt{1+t_0^2}$, on a, pour $t \in]t_0, t_2[$, $y_1(t) > \sqrt{1+t^2}$ et donc $y_1'(t) = y_1^2(t) - t^2 \geqslant 1$. La fonction y_1 est croissante. Elle possède une limite finie ou égale à $+\infty$ en t_2. Si y_1 possède une limite finie, il en est de même de y_1' qui est donc intégrable sur $[t_0, t_2[$. Le prolongement par continuité de y_1 est alors dérivable par le théorème de la limite de la dérivée et l'équation est aussi vérifiée en t_2, ce qui contredit le caractère maximal de y_1. On a donc $\lim\limits_{t_2} y_1 = +\infty$: la fonction y_1 possède une asymptote verticale.

4. D'après 2, on a, pour tout $t > 0$, $y(t) > \sqrt{1+t^2}$ et donc $y'(t) > 1$; la fonction y est croissante. Si l'intervalle de définition de y est majoré de borne supérieure t_1, la fonction y possède une limite en t_1 finie ou égale à $+\infty$. Si la limite est finie, on montre comme dans la question précédente que y peut être prolongée en t_1, ce qui contredit son caractère maximal. On a donc $\lim\limits_{t_1} y = +\infty$ et la courbe de y possède une asymptote verticale.

Il ne reste plus qu'à démontrer que y est définie sur un intervalle majoré. Supposons que y est définie sur $[0, +\infty[$. On a, pour tout $t > 0$, $y'(t) > 1$. On en déduit que, pour $t > 0$, $y(t) \geqslant y_0 + t$ et donc

$$y'(t) = y^2(t) - t^2 \geqslant 2ty_0 + y_0^2 \geqslant 2t + 1.$$

En intégrant de nouveau cette relation, on en déduit que pour $t \geqslant 0$, $y(t) \geqslant y_0 + t^2 + t$. On a donc, au voisinage de $+\infty$, $t = o(y(t))$ et donc $y'(t) \sim y^2(t)$, soit $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)} \sim 1$. Comme la fonction $t \longmapsto 1$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit

$$\int_0^t \frac{y'(u)}{y^2(u)}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} \underset{t\to+\infty}{\sim} t,$$

ce qui est impossible puisque $y(t)$ a pour limite $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. ◁

Actuellement l'énoncé suivant, sans doute trop long, n'est plus posé dans son intégralité. On y trouve une notion de barrière généralisée avec des fonctions seulement continues et de classe C^1 par morceaux.

3.24. Étude de $x' = \sin(tx)$

On considère l'équation différentielle (E) $x' = \sin(tx)$.

1. Montrer que les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on note x_b la solution maximale de (E) vérifiant $x(0) = b$. Étudier la parité de x_b. Comment déduit-on x_{-b} de x_b ?

Dans toute la suite, on suppose $b > 0$.

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_b(t) > 0$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_k = \{(t, x) \in (\mathbb{R}_+)^2, xt = k\pi\}$. On définit la fonction $f_b : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue et affine par morceaux par : $f_b(0) = b$; entre Γ_{2k} et Γ_{2k+1}, le graphe de f_b est un segment parallèle à la première bissectrice ; entre Γ_{2k+1} et Γ_{2k+2} le graphe de f_b est un segment parallèle à l'axe des t.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_b(t) \leqslant f_b(t)$.

4. Montrer que le graphe de f_b rencontre la première bissectrice. En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $x_b(t_0) = t_0$. Prouver alors que $x_b(t) > t$ si $t < t_0$ et $x_b(t) < t$ si $t > t_0$.

5. Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que l'on ait, pour tout $t \geqslant t_0$, $\dfrac{\alpha}{t} \leqslant x_b(t) \leqslant \dfrac{\beta}{t}$.

(École polytechnique)

Solution.

1. On est dans la situation décrite dans la remarque qui précède l'exercice 3.15 page 213 : la fonction $f : (t, x) \mapsto \sin(tx)$ est de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^2$. Il en découle que les solutions maximales de (E) sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

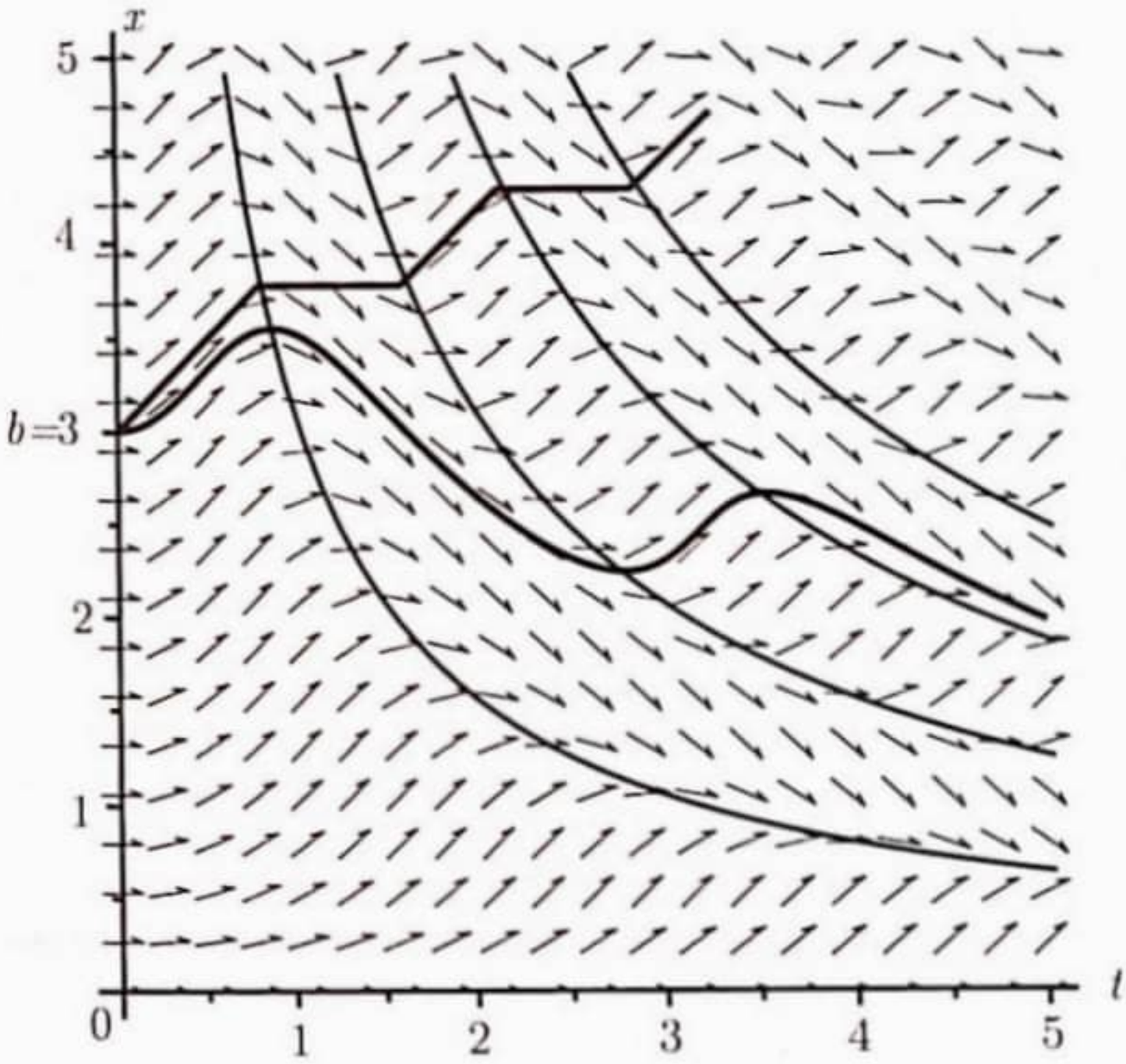
Soit $b \in \mathbb{R}$. On observe que l'application $t \longmapsto x_b(-t)$ est solution de (E) et prend la valeur b en 0. Par unicité il s'agit de x_b qui est donc paire. De la même manière, $t \longmapsto -x_b(t)$ est la solution maximale prenant la valeur $-b$ en 0. Ainsi, $x_{-b} = -x_b$. Ces diverses symétries permettent de limiter l'étude qualitative des solutions à $\mathbb{R}_+$ et seulement pour le cas $b \geqslant 0$

2. La fonction x_0 est la fonction nulle qui est clairement solution. Comme les courbes intégrales ne se coupent pas, x_b garde un signe

constant sur $\mathbb{R}$ lorsque $b \neq 0$, et si $b > 0$ on a $x_b > 0$ sur $\mathbb{R}$ puisque $x_b(0) = b > 0$.

3. L'ensemble Γ_0 est la réunion des deux demi-axes de coordonnées et pour $k \geqslant 1$ Γ_k est une branche d'hyperbole. La réunion de ces ensembles Γ_k est tout simplement l'isocline de pente 0 (dans le domaine $(\mathbb{R}_+)^2$). En un point (t, x) qui se trouve entre Γ_{2k} et Γ_{2k+1} on a $\sin(xt) > 0$ et on peut le majorer par 1. En un point (t, x) qui se trouve entre Γ_{2k+1} et Γ_{2k+2} on a $\sin(xt) < 0$ et on peut le majorer par 0. Cela explique la construction de f_b : en tout point de dérivabilité de f_b on va avoir $f_b'(t) \geqslant \sin(tf_b(t))$ avec $f_b(0) = b$. On a donc une barrière supérieure.

Voici une représentation graphique du champ de tangentes associé à (E) avec les premières hyperboles Γ_k et la représentation de f_3 et x_3.



Montrons que $x_b \leqslant f_b$ sur $\mathbb{R}_+$. On procède par l'absurde en supposant que l'ensemble $\mathrm{A} = \{t \in \mathbb{R}_+^*, \quad x_b(t) > f_b(t)\}$ est non vide. Comme x_b et f_b sont continues, A est un ensemble ouvert. Soit α sa borne inférieure. On a nécessairement $x_b(\alpha) = f_b(\alpha)$. Distinguons alors trois cas selon la position du point $\mathrm{M} = (\alpha, x_b(\alpha))$.

• Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{M} \in \Gamma_k$. On a alors $x_b'(\alpha) = 0$. Si k est pair, la dérivée à droite de f_b en α est égale à 1 et il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]\alpha, \alpha + \eta[$, $x_b(t) < f_b(t)$ ce qui contredit la définition de α. Si k est impair, c'est la dérivée à gauche de f_b en α qui est égale à 1 et il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]\alpha - \eta, \alpha[$, $f_b(t) < x_b(t)$ ce qui contredit la définition de α.

• Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que M soit entre Γ_{2k} et Γ_{2k+1}. On a $x_b'(\alpha) \leqslant 1$ et $f_b'(\alpha) = 1$. Si $x_b'(\alpha) < 1$, cela implique comme dans le point précédent que $x_b(t) < f_b(t)$ sur un intervalle ouvert $]\alpha, \alpha + \eta[$, contredisant ainsi la définition de α. Si $x_b'(\alpha) = 1$, on obtient en dérivant l'équation différentielle, $x_b''(\alpha) = 0$ et $x_b'''(\alpha) < 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que sur l'intervalle $]\alpha, \alpha + \eta[$, on ait $x_b'(t) < 1$ et $f_b'(t) = 1$, donc $x_b - f_b$ décroît et $x_b(t) - f_b(t) > 0$ sur $]\alpha, \alpha + \eta[$, ce qui conduit à la même contradiction.

• Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que M soit entre Γ_{2k+1} et Γ_{2k+2}. On a alors $f_b'(\alpha) = 0$ et $x_b'(\alpha) < 0$ de sorte qu'à nouveau $x_b(t) < f_b(t)$ sur un intervalle ouvert $]\alpha, \alpha + \eta[$ et contradiction.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{M}_k(x_k, y_k)$ le point d'intersection de f_b et de Γ_k. Posons $\Delta_k = y_k - x_k$. Comme la droite $(\mathrm{M}_{2k}, \mathrm{M}_{2k+1})$ est parallèle à la première bissectrice on a $\Delta_{2k+1} = \Delta_{2k}$. D'autre part, on a $y_{2k+2} = y_{2k+1}$ et

$$x_{2k+2} = \frac{(2k+2)\pi}{y_{2k+2}} = \frac{(2k+2)\pi}{y_{2k+1}} = x_{2k+1} + \frac{\pi}{y_{2k+1}} = x_{2k+1} + \frac{x_{2k+1}}{2k+1}.$$

Ainsi, $\Delta_{2k+2} = \Delta_{2k+1} - \dfrac{x_{2k+1}}{2k+1}$. Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_{2n} = \Delta_{2n+1} = \Delta_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{2k+1}}{2k+1} \leqslant b - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_1}{2k+1}.$$

Comme la série $\sum \dfrac{1}{2k+1}$ diverge, $\Delta_n = f_b(x_n) - x_n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini. De plus $f_b(0) - 0 = b > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue $x \longmapsto f_b(x) - x$ s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $x_b \leqslant f_b$ d'après la question 3, on a pour tout $t \geqslant 0$, $x_b(t) - t \leqslant f_b(t) - t$. En particulier, pour n assez grand, $x_b(x_n) - x_n$ est négatif. Comme $x_b(0) = b > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires, donne l'existence d'un point $t_0 > 0$ tel que $x_b(t_0) = t_0$. Montrons en fait que ce point est unique ce qui terminera la question. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \neq t_0$ tel que $x_b(t_1) = t_1$, avec par exemple $t_0 < t_1$. Alors

$$t_1 - t_0 = x_b(t_1) - x_b(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x_b'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sin(tx_b(t))\mathrm{d}t$$

de sorte que $x_b'(t) = \sin(tx_b(t))$ doit valoir 1 sur tout l'intervalle $[t_0, t_1]$. Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $tx_b(t) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. C'est impossible car $t_0 x_b(t_0) = t_0^2 < t_1^2 = t_1 x_b(t_1)$. Donc t_0 est unique.

La fonction continue $t \longmapsto x_b(t) - t$ garde donc un signe constant sur $[0, t_0[$ et $]t_0, +\infty[$. Comme $x_b(0) = b > 0$ et $x_b(x_n) - x_n < 0$ pour n assez grand, on obtient $x_b(t) > t$ si $t < t_0$ et $x_b(t) < t$ si $t > t_0$.

5. Nous allons trouver de nouvelles barrières de la forme $t \longmapsto \frac{\lambda}{t}$. Prenons λ de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et posons $g : t \longmapsto \frac{\lambda}{t}$. Le graphe de g est une demi-hyperbole incluse dans l'isocline de pente 1 pour f et on a pour tout $t > 0$, $g'(t) < f(t, g(t)) = 1$ puisque $g' < 0$. Ainsi g est une barrière inférieure stricte. Pour λ de la forme $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, posons $h : t \longmapsto \frac{\lambda}{t}$. On a pour $t > 0$, $h'(t) = -\frac{\lambda}{t^2} > f(t, h(t)) = -1$ si $t > \sqrt{\lambda}$. Donc h est une barrière supérieure stricte sur $\left]\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}, +\infty\right[$. On distingue alors deux cas :

- Il existe $k \in \mathbb{N}$ et $t_1 \geqslant t_0$ tel que

$$\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \leqslant t_1 x_b(t_1) \leqslant \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi.$$

On a alors $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \leqslant t x_b(t) \leqslant \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$ pour tout $t \geqslant t_1$. Pour l'inégalité de droite, on note qu'elle est évidente si $t \leqslant \sqrt{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$, car comme $t \geqslant t_1 > t_0$, $t x_b(t) < t^2$ et que, pour $t > \sqrt{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$, elle résulte du fait que h est une barrière supérieure. Par ailleurs la fonction $t \longmapsto t x_b(t)$ est bornée sur $[t_0, t_1]$ et atteint ses bornes. Comme elle est strictement positive, il existe α' et β' dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha' \leqslant t x_b(t) \leqslant \beta'$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Finalement, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $\alpha \leqslant t x_b(t) \leqslant \beta$, où $\alpha = \min\left(\alpha', \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ et $\beta = \max\left(\beta', \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right)$.

- Si t_1 et k n'existent pas, $t x_b(t)$ ne prend jamais une valeur de la forme $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ou $\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$. Ainsi, soit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \geqslant t_0$, on ait $\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi < t x_b(t) < \left(2k + \frac{7}{2}\right)\pi$, soit on a pour tout $t \geqslant t_0$, $0 < t x_b(t) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas, on a le résultat voulu. Montrons que le deuxième est impossible. On aurait, pour tout $t \geqslant t_0$, $x_b'(t) = \sin(t x_b(t)) \geqslant 0$. La fonction x_b serait croissante, ce qui contredit le fait que $\lim_{+\infty} x_b = 0$ (qui résulte de $0 \leqslant x_b(t) \leqslant \frac{\pi}{2t}$). ◁

En raffinant un peu l'étude finale on peut montrer que $t x_b(t)$ admet une limite finie lorsque $t \to +\infty$.

Les deux exercices suivants proposent des inégalités différentielles. Le premier fait appel à une technique déjà largement utilisée : considérer la borne inférieure des réels où l'inégalité voulue n'est plus vérifiée.

3.25. Inégalité différentielle (1)

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, et $\Phi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On se donne $a > 0$ et $t_0 > 0$. On suppose que

$$\forall t > t_0, \quad \Phi(t) \leqslant a + \int_{t_0}^{t} f(u)\sqrt{1 + \Phi^2(u)}\,du.$$

Montrer que

$$\forall t > t_0, \quad \operatorname{Argsh}(\Phi(t)) \leqslant \operatorname{Argsh}(a) + \int_{t_0}^{t} f.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Pour se ramener à des inégalités strictes, considérons $\varepsilon > 0$ et Ψ la solution du problème de Cauchy $y' = f\sqrt{1 + y^2}$, $y(t_0) = a + \varepsilon$, définie sur I (le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique car f est C^1). On a $\dfrac{\Psi'}{1 + \Psi^2} = f$, ce qui équivaut à

$$\forall t \in \mathrm{I}, \ \operatorname{Argsh}(\Psi(t)) - \operatorname{Argsh}(a + \varepsilon) = \int_{t_0}^{t} f$$

et donc à

$$\forall t \in \mathrm{I}, \ \Psi(t) = \operatorname{sh}\left(\operatorname{Argsh}(a + \varepsilon) + \int_{t_0}^{t} f\right).$$

car la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction $t \longmapsto \operatorname{sh}\left(\operatorname{Argsh}(a + \varepsilon) + \int_{t_0}^{t} f\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, la fonction Ψ est définie sur $\mathbb{R}_+$. On a de plus, pour $t \geqslant 0$,

$$a + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + \Psi^2} f = \Psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Psi' = \Psi(t).$$

Nous allons démontrer que, pour tout $t \geqslant t_0$,

$$\operatorname{Argsh} \Phi(t) < \operatorname{Argsh}(a + \varepsilon) + \int_{t_0}^{t} f,$$

c'est-à-dire $\Phi(t) < \Psi(t)$ puisque la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par continuité, on déduit de l'hypothèse, $\Phi(t_0) \leqslant a < \Psi(t_0)$ et donc $\Phi(t) < \Psi(t)$ sur un voisinage à droite de t_0. Si l'inégalité n'est pas vérifiée pour tout $t \geqslant t_0$, considérons $t_1 = \inf\{t \geqslant t_0, \ \Psi(t) \geqslant \Psi(t)\}$. D'après ce qui précède, on a $t_1 > t_0$ et par continuité $\Phi(t_1) = \Psi(t_1)$. Pour

tout $t \in [t_0, t_1[$, $\Phi(t) < \Psi(t)$ et donc $\Phi^2(t) < \Psi^2(t)$, car les fonctions sont positives sur $[t_0, +\infty[$. On en déduit

$$\Phi(t_1) \leqslant a + \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \Phi^2(u)} f(u)\,\mathrm{d}u < a + \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \Psi^2(u)} f(u)\,\mathrm{d}u < \Psi(t_1),$$

ce qui conduit à une contradiction.

On a donc, pour tout $t \geqslant t_0$, $\operatorname{Argsh} \Phi(t) < \operatorname{Argsh}(a + \varepsilon) + \int_{t_0}^{t} f$ pour tout $\varepsilon > 0$ et, en faisant tendre ε vers 0, $\operatorname{Argsh} \Phi(t) \leqslant \operatorname{Argsh}(a) + \int_{t_0}^{t} f$. ◁

L'exercice suivant utilise essentiellement les propriétés des fonctions intégrales.

3.26. Inégalité différentielle(2)

Soit y une application $\mathcal{C}^1$ et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Soient a et b deux constantes strictement positives et h une application $\mathcal{C}^0$ et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que

$$\forall t > 0, \quad y'(t) \leqslant a + by^2(t) + h(t).$$

Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

On raisonne par l'absurde. Si y ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \mathrm{A} > 0, \quad \exists x \geqslant \mathrm{A}, \quad y(x) \geqslant \varepsilon.$$

On va montrer qu'il existe alors une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\mathrm{A} > 0$ assez grand, on peut trouver $(\alpha, \beta)^2$ vérifiant $\mathrm{A} \leqslant \alpha \leqslant \beta$ et $\int_\alpha^\beta y \geqslant c$, ce qui contredira l'intégrabilité de y.

Soit $\mathrm{A} > 0$. On ne peut avoir $y(x) > \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, sinon y n'est pas intégrable. Il existe donc $x_0 \geqslant \mathrm{A}$ tel que $y(x_0) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. De plus, il existe $x \geqslant x_0$ tel que $y(x) \geqslant \varepsilon$ et donc $x \geqslant x_0$ tel que $y(x) = \varepsilon$, par le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $\beta = \inf\{x \geqslant x_0, \quad y(x) = \varepsilon\}$. Puisque $y(x_0) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a $\beta > x_0$ et $y(\beta) = \varepsilon$; de plus, $y(x) \leqslant \varepsilon$ si $x_0 \leqslant x \leqslant \beta$. Toujours par le théorème des valeurs intermédiaires, existe $x \in [x_0, \beta]$ tel que $y(x) = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $\alpha = \sup\{x \in [x_0, \beta], \quad f(x) = \dfrac{\varepsilon}{2}\}$. On a alors $\alpha < \beta$, $y(\alpha) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant y(x) \leqslant \varepsilon$ pour $x \in [\alpha, \beta]$. En utilisant

l'inégalité vérifiée par y, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{2} = y(\beta) - y(\alpha) = \int_\alpha^\beta y' \leqslant \int_\alpha^\beta (a + by^2) + \int_\alpha^\beta h \leqslant (a + b\varepsilon^2)(\beta - \alpha) + \int_\alpha^\beta h.$$

Pour A assez grand, on a $\int_\Lambda^{+\infty} h \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ et donc $\int_\alpha^\beta h \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. On en déduit

$$\beta - \alpha \geqslant \frac{\varepsilon}{4(a + b\varepsilon^2)},$$

puis

$$\int_\alpha^\beta y \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{8(a + b\varepsilon^2)}.$$

Nous avons la contradiction voulue. ◁

L'exercice suivant étudie deux équations différentielles dépendant d'un paramètre et le comportement des solutions quand le paramètre tend vers 0.

3.27. Équations différentielles dépendant d'un paramètre

Soit $\varepsilon > 0$. On note u_ε la solution maximale du problème avec condition initiale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

et v_ε la solution maximale du problème avec condition initiale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y - y|y| + \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

1. Montrer que v_ε est définie sur un intervalle I incluant $[0, +\infty[$.

2. Étudier la limite de $u_\varepsilon(t)$ quand ε tend vers 0. Cette limite est-elle uniforme ?

3. Étudier la limite de $v_\varepsilon(t)$ quand ε tend vers 0.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Considérons la fonction $\mathrm{F} : (t, y) \longmapsto y - y|y| + \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, elle est clairement continue ainsi que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}$. On trouve en distinguant les cas $y < 0$, $y = 0$ et $y > 0$, $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(t, y) = 1 - 2|y|$,

pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il existe une solution maximale v_ε définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

On remarque que, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$v_\varepsilon(t) \geqslant 2 \Longrightarrow v'_\varepsilon(t) \leqslant v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)^2 + 1 \leqslant -1 < 0.$$
$$v_\varepsilon(t) \leqslant -2 \Longrightarrow v'_\varepsilon(t) \geqslant v_\varepsilon(t) + v_\varepsilon(t)^2 - 1 \geqslant 1 > 0.$$

On montre pour commencer que $v_\varepsilon(t) \in [-2, 2]$ pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t > 0$ tel que $|v_\varepsilon(t)| > 2$: on considère l'ensemble $\mathrm{A} = \{t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+,\ |v_\varepsilon(t)| = 2\}$ et $t_0 = \inf \mathrm{A}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, A n'est pas vide donc t_0 existe. On a $|v_\varepsilon(t_0)| = 2$, donc $t_0 > 0$. Si $v_\varepsilon(t_0) = 2$, alors $v'_\varepsilon(t_0) < 0$. On a donc $v_\varepsilon(t) > 2$ sur un intervalle à gauche de t_0, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, v_ε prend la valeur 2 sur $]0, t_0[$, ce qui contredit la définition de t_0. De même, si $v_\varepsilon(t_0) = -2$, alors $v'_\varepsilon(t_0) > 0$, $v_\varepsilon(t) < -2$ sur un intervalle à gauche de t_0 et, par le théorème des valeurs intermédiaires, v_ε prend la valeur -2 sur $]0, t_0[$, ce qui est contraire à la définition de t_0. On a donc $v_\varepsilon(t) \in [-2, 2]$ pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.

On montre maintenant que I contient $\mathbb{R}_+$ en raisonnant de nouveau par l'absurde. On suppose que I est majoré et on pose $\sup \mathrm{I} = b$. La fonction v_ε est bornée sur $[0, b[$. Il en est donc de même de v'_ε, puisque le cosinus est borné. Ainsi, v'_ε est intégrable sur $[0, b[$, d'où l'on déduit que v_ε a une limite finie ℓ en b : la fonction possède un prolongement continue sur $\mathrm{I} \cup \{b\}$. Comme v'_ε a une limite finie $\ell(1 - |\ell|) + \cos\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)$ n b, ce prolongement est $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de la limite de la dérivée. Il est solution de l'équation différentielle, ce qui contredit le caractère maximale de v_ε. Ainsi I contient $\mathbb{R}_+$.

2. L'équation différentielle possède une solution particulière φ de la forme $\varphi : t \longmapsto a\cos\dfrac{t}{\varepsilon} + b\sin\dfrac{t}{\varepsilon}$. On trouve $\varphi'(t) = -\dfrac{a}{\varepsilon}\sin\dfrac{t}{\varepsilon} + \dfrac{b}{\varepsilon}\cos\dfrac{t}{\varepsilon}$, ce qui donne $-\dfrac{a}{\varepsilon} = b$ et $\dfrac{b}{\varepsilon} = a + 1$ et donc $a = \dfrac{-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$, $b = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ u_\varepsilon(t) = \frac{-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\cos\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin\frac{t}{\varepsilon} + ce^t.$$

De $u_\varepsilon(0) = 1$, on déduit $c = \dfrac{1+2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ u_\varepsilon(t) = \frac{-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\cos\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin\frac{t}{\varepsilon} + \frac{1+2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}e^t.$$

On en déduit, pour tout réel t, $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t) = e^t$. On a

$$u_\varepsilon(t) - e^t = \frac{-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\cos\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}e^t.$$

Comme $u_\varepsilon(t) - e^t$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, mais elle est uniforme sur tout compact K, car pour tout $t \in \mathrm{K}$,

$$|u_\varepsilon(t) - e^t| \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 \mathrm{M},$$

où M est un majorant de exp sur K.

3. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On montre que, pour tout $t \geqslant 0$, $|v_\varepsilon(t) - 1| < 2\varepsilon$, ce qui démontrera que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(t) = 1$ et que la convergence est uniforme.

On note que $y - y|y| < 0$ si $y > 1$ et $y - y|y| > 0$ si $y \in]0, 1[$.

• Supposons qu'il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que $v_\varepsilon(t_0) > 1$ et considérons un intervalle maximal I contenant t_0 sur lequel $v_\varepsilon > 1$. En notant $a = \inf \mathrm{I}$, on a $a \geqslant 0$ et $v_\varepsilon(a) = 1$ car $v_\varepsilon(0) = 1$. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $v'_\varepsilon(t) < \cos\frac{t}{\varepsilon}$. On en déduit

$$v_\varepsilon(t_0) - 1 = \int_a^{t_0} v'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^{t_0} \cos\frac{t}{\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \varepsilon\left[\sin\frac{t}{\varepsilon}\right]_a^{t_0} \leqslant 2\varepsilon$$

et donc $1 < v_\varepsilon(t_0) < 1 + 2\varepsilon$.

• Supposons qu'il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que $v_\varepsilon(t_0) < 1$ et considérons un intervalle maximal I contenant t_0 sur lequel $v_\varepsilon < 1$. En notant $a = \inf \mathrm{I}$, on a de nouveau $a \geqslant 0$ et $v_\varepsilon(a) = 1$ car $v_\varepsilon(0) = 1$.

Supposons qu'il existe $t \in \mathrm{I}$ tel que $v_\varepsilon(t) = 0$ et considérons alors $\alpha = \inf\{t > a, \quad v_\varepsilon(t) = 0\}$. On a alors $v_\varepsilon(\alpha) = 0$, $\alpha > a$ et pour $t \in]a, \alpha[$, $v_\varepsilon(t) \in]0, 1[$, donc $v'_\varepsilon(t) > \cos\frac{t}{\varepsilon}$. On en déduit

$$-1 = v_\varepsilon(\alpha) - v_\varepsilon(a) = \int_a^{\alpha} v'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t > \int_a^{\alpha} \cos\frac{t}{\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \varepsilon\left[\sin\frac{t}{\varepsilon}\right]_a^{\alpha} \geqslant -2\varepsilon,$$

ce qui est impossible car $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

On a donc, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $v_\varepsilon(t) \in]0, 1[$ et donc $v'_\varepsilon(t) > \cos\frac{t}{\varepsilon}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$v_\varepsilon(t_0) - 1 = \int_a^{t_0} v'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t > -2\varepsilon$$

et donc $1 - 2\varepsilon < v_\varepsilon(t_0) < 1$.

Il résulte de ce qui précède que si $t \geqslant 0$, on a soit $v_\varepsilon(t) = 1$, soit $1 < v_\varepsilon(t) < 1 + 2\varepsilon$, soit $1 - 2\varepsilon < v_\varepsilon(t) < 1$. On a donc $|v_\varepsilon(t) - 1| < 2\varepsilon$ pour tout $t \geqslant 0$, ce qui est le résultat annoncé. ◁

On constate que les limites des fonctions u_ε et v_ε quand ε tend vers 0 sont les solutions prenant la valeur 1 en 0 des équations différentielles $y' = y$ et $y' = y - y|y|$ respectivement. Le terme $\cos\frac{t}{\varepsilon}$ ne tend pas vers 0, mais il peut se voir comme une perturbation périodique de valeur moyenne nulle ; on constate sur ces deux exemples que lorsque la fréquence de la perturbation tend vers l'infini, son effet s'atténue jusqu'à devenir négligeable.

Nous passons maintenant à l'étude des systèmes différentiels autrement dit, à la résolution des équations différentielles vectorielles $X' = f(t, X)$, avec $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, n étant supérieur ou égal à 2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'exprime de la même manière que pour le cas $n = 1$: à condition de Cauchy fixée, il y a existence et unicité des solutions maximales lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme pour $n = 1$, on peut mener des études qualitatives autour du domaine de définition et du comportement aux bornes de ce domaine. En voici quelques exemples.

3.28. Système différentiel (1)

Soit a et b des réels strictement positifs. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -(b+1)x + x^2y + a \\ y' = x - x^2y \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur I avec 0 dans l'intérieur de I.

On suppose de plus $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ et on note $t_m = \sup \mathrm{I}$.

2. Montrer que x et y restent strictement positives sur $[0, t_m[$.

3. Montrer que $t_m = +\infty$.

4. Montrer que $\liminf\limits_{t \to +\infty} x(t) \geqslant \dfrac{a}{b+1}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (-(b+1)x + xy^2 + a, x - x^2y)$$

est polynomiale donc de classe C^1. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy $(x', y') = f(x, y)$ avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I qui contient 0.

2. Écrivons le système différentiel en isolant la partie linéaire :

$$\begin{cases} x' + (b+1)x = x^2y + a = z \\ y' - x = x^2y \end{cases}$$

• On va résoudre la première équation linéaire du premier ordre en regardant le terme non linéaire $z = x^2y + a$ comme un second membre. Comme $t \longmapsto e^{-(b+1)t}$ est solution de l'équation homogène, la fonction $x(t)$ s'écrit donc pour $t \in [0, t_m[$, $\mathrm{C}(t)e^{-(b+1)t}$ avec C de classe C^1 et vérifiant pour $t \in [0, t_m[$,

$$\mathrm{C}'(t)e^{-(b+1)t} = z = x^2(t)y(t) + a.$$

Il existe donc C_0 constante réelle telle que si $t \in [0, t_m[$,

$$\mathrm{C}(t) = \mathrm{C}_0 + \int_0^t x^2(u)y(u)e^{(b+1)u}\mathrm{d}u + \frac{a}{b+1}e^{(b+1)t}.$$

D'où $x(t) = \mathrm{C}_0e^{-(b+1)t} + \displaystyle\int_0^t x^2(u)y(u)e^{-(b+1)(t-u)}\mathrm{d}u + \frac{a}{b+1}$ et comme $x(0) = x_0$, on a finalement

$$x(t) = x_0e^{-(b+1)t} + \int_0^t x^2(u)y(u)e^{-(b+1)(t-u)}\mathrm{d}u + \frac{a}{b+1}(1 - e^{-(b+1)t}).$$

• Montrons que sur $[0, t_m[$, y reste strictement positive. Raisonnons par l'absurde et supposons que y s'annule. On peut alors considérer $t_0 = \inf\{t \in [0, t_m[, y(t) = 0\}$. Comme y est continue, on a $y(t_0) = 0$. Toujours par continuité, comme $y(0) = y_0 > 0$, $t_0 > 0$. La formule donnant x garantit que $x(t_0) > 0$, puisque y reste positive sur $[0, t_0]$. Il s'ensuit que

$$y'(t_0) = x(t_0) - x(t_0)^2y(t_0) = x(t_0) > 0.$$

Donc pour t voisin de t_0 et $t < t_0$ on a $y(t) < 0$ ce qui est contradictoire.

On conclut que y reste strictement positive sur $[0, t_m[$ et d'après la formule donnant x, c'est le cas de x aussi.

3. Montrons que $t_m = +\infty$. Raisonnons encore par l'absurde en supposant t_m fini. En combinant les deux équations du système différentiel, on obtient

$$x' + (b+1)y' = -bx^2y + a$$

qui s'intègre en $x(t) + (b+1)y(t) = x_0 + (b+1)y_0 + at - b\int_0^t x^2 y$ pour tout $t \in [0, t_m[$. Donc

$$x(t) + (b+1)y(t) \leqslant x_0 + (b+1)y_0 + at \leqslant x_0 + (b+1)y_0 + at_m.$$

Ainsi x et y restent bornées sur $[0, t_m[$. Par conséquent, d'après les relations donnant x' et y', ces dérivées sont bornées. Les fonctions x' et y' étant bornées, elles sont intégrables sur $[0, t_m[$, donc x et y ont des limites finies en t_m et par conséquent x' et y' aussi. On peut donc prolonger x et y par continuité sur $[0, t_m]$ et d'après le théorème de la limite de la dérivée, ces prolongements sont dérivables en t_m. Les fonctions ainsi prolongées sont alors solution du système différentiel sur $[0, t_m]$ ce qui contredit la maximalité de la solution (x, y).

4. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et $y > 0$. Par conséquent, pour $t \geqslant 0$, $x(t) \geqslant \dfrac{a}{b+1}(1 - e^{(b+1)t}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{a}{b+1}$, ce qui garantit que $\liminf\limits_{t\to+\infty} x(t) \geqslant \dfrac{a}{b+1}$. ◁

3.29. Système différentiel (2)

1. On considère l'équation différentielle (E) : $\theta' = 1 + \sin\theta$. Prouver l'existence d'une solution maximale (I, f) de (E) telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et étudier le comportement de f en $\pm\infty$.

2. On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x' = -1 - y + x^2 \\ y' = x + xy \end{cases}$$

Déterminer toutes les solutions $g : t \longmapsto (x(t), y(t))$ telles qu'il existe t_0 vérifiant $\|g(t_0)\| = 1$ en donnant en particulier le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine, l'allure des courbes intégrales.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. La fonction $\varphi : (t, \theta) \longmapsto 1 + \sin\theta$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz d'où l'existence et l'unicité de la solution. L'intervalle de définition I de f est ouvert. Comme φ est bornée sur $\mathbb{R}^2$, toutes les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ (voir la remarque qui précède l'exercice 3.15 page 213).

On a $f' = 1 + \sin f \geqslant 0$, donc la fonction f est croissante et admet une limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

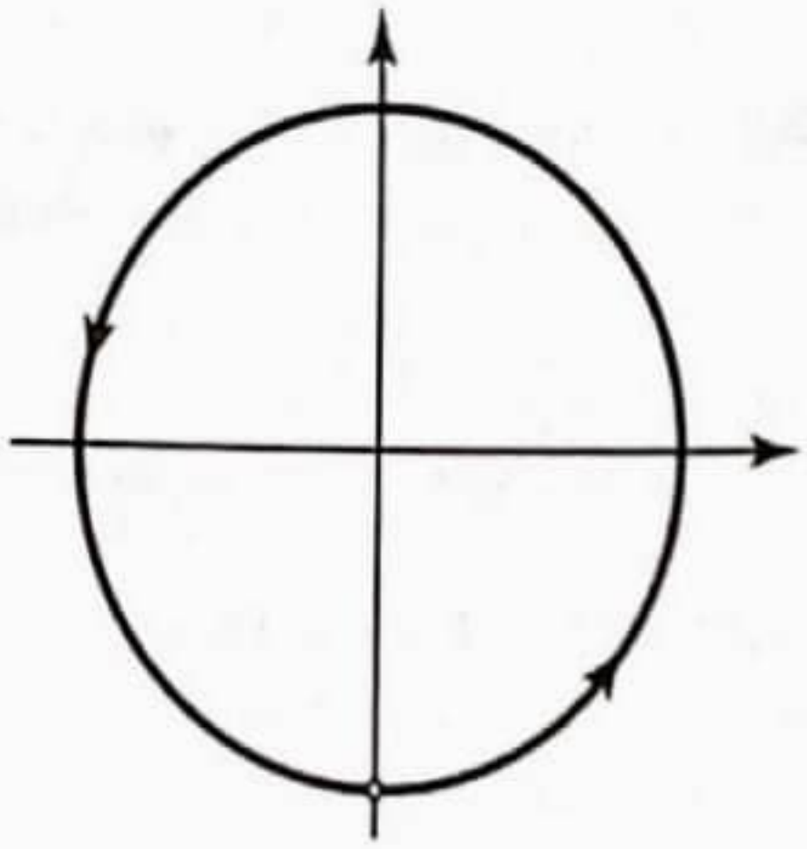
Notons que si x_0 est un réel tel que $\sin x_0 = -1$, la fonction $t \longmapsto x_0$ est solution de l'équation différentielle. Il s'ensuit que la fonction f ne peut pas prendre la valeur x_0, sinon par unicité de la solution, on aurait pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = x_0$, ce qui n'est pas le cas en 0. Comme $f(0) = 0$, il s'ensuit que, pour tout réel t, $f(t) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. La limite de f en $\pm\infty$ est donc finie. Si $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$, alors $\lim\limits_{+\infty} f' = \sin\ell$. On a $\sin\ell = 0$, car sinon $\int_0^{+\infty} f'$ diverge et f ne peut avoir une limite finie en $+\infty$. Comme $\ell \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = \frac{3\pi}{2}$. On montre de même que $\lim\limits_{-\infty} f = -\frac{\pi}{2}$.

2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x_0, y_0)\| = 1$. On est, puisque la fonction $(t, x, y) \longmapsto (-1 - y + x^2, x + xy)$ est de classe C^1, dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il existe donc une unique solution g telle que $g(t) = (x_0, y_0)$. Soit θ_0 un réel tel que $x_0 = \cos\theta_0$ et $y_0 = \sin\theta_0$. L'équation différentielle $\theta' = 1 + \sin\theta$ possède une unique solution θ telle que $\theta(t_0) = \theta_0$. D'après la première question, θ est définie sur $\mathbb{R}$. Soient x et y définies par $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

On a

$$x' = -\sin\theta \times \theta' = -\sin\theta - \sin^2\theta = -\sin\theta - 1 + \cos^2\theta = -1 - y + x^2,$$
$$y' = \cos\theta \times \theta' = \cos\theta + \sin\theta\cos\theta = x + xy.$$

Comme $(x(t_0), y(t_0)) = g(t_0)$, on a par unicité de la solution, $g = (x, y)$. En particulier, g est définie sur $\mathbb{R}$, son image est contenu dans le cercle unité. De plus en prenant $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on montre comme dans la première question que la limite de θ en $+\infty$ est $\frac{3\pi}{2}$ et en $-\infty$, $-\frac{\pi}{2}$ (sauf pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ qui donne θ constant). Ainsi, la limite de g en $\pm\infty$ est $(0, -1)$.



La fonction θ est croissante, donc le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, entièrement à part le point $(0,-1)$. ◁

Il est possible de déterminer explicitement la fonction f, ce qui donne une autre solution de la question 1. On a $f(0)=0$ et $1+\sin f(0)=1$. Soit J l'intervalle maximal contenant 0 sur lequel $1+\sin f>0$. Comme $f(0)=0$, on a, pour tout $t\in \mathrm{J}$, $f(t)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$. On peut écrire, pour tout $t\in \mathrm{J}$, $\dfrac{f'(t)}{1+\sin f(t)}=1$. On en déduit, pour tout $t\in \mathrm{J}$,

$$t=\int_0^t du=\int_0^t \frac{f'(u)}{1+\sin f(u)}\,du=\int_0^{f(t)}\frac{1}{1+\sin u}\,du$$
$$=\int_0^{f(t)}\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\,du$$
$$=\left[\tan\left(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{f(t)}=\tan\left(\frac{f(t)}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1.$$

Comme $\dfrac{f(t)}{2}-\dfrac{\pi}{4}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, cela équivaut à

$$\forall t\in \mathrm{J},\quad f(t)=2\arctan(t-1)+\frac{\pi}{2}.$$

Si $\mathrm{J}\neq\mathbb{R}$, on a nécessairement aux extrémités de J, $\lim\sin f(t)=-1$ et donc $\lim f=-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$. On en déduit que $\mathrm{J}=\mathbb{R}$ et donc $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=2\arctan(t-1)+\dfrac{\pi}{2}$. On obtient enfin $\lim\limits_{+\infty} f=\dfrac{3\pi}{2}$ et $\lim\limits_{-\infty} f=-\dfrac{\pi}{2}$.

On étudie une nouvelle fois un système différentiel autonome. Si le paramètre t s'interprète comme le temps, on va montrer que la solution a une durée de vie infinie et qu'elle converge vers 0.

3.30. Système différentiel (3)

Soit $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto(y-x^3,-x-y^3)\in\mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, non nul. Soit $t\in \mathrm{I}\longmapsto(x(t),y(t))\in\mathbb{R}^2$, la solution maximale de

$$\begin{cases}(x',y')=f(x,y)\\(x(0),y(0))=(x_0,y_0).\end{cases}$$

1. Montrer que l'intervalle I n'est pas majoré.

2. Montrer que $\inf \mathrm{I} \geqslant -\dfrac{1}{x_0^2 + y_0^2}$.

3. Montrer que $(x(t), y(t))$ tend vers $(0,0)$ quand $t \to +\infty$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On remarque que l'on a, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = -x(t)^4 - y(t)^4 \leqslant 0.$$

La fonction $x^2 + y^2$ est donc décroissante. Pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$, on a donc $0 \leqslant x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant x(0)^2 + y(0)^2$. On en déduit que les fonctions x et y sont bornées sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$ et il en est donc de même de x' et y'. Supposons que I soit majoré et notons α sa borne supérieure. On a donc $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ = [0, \alpha[$. Comme les fonctions x' et y' sont bornées sur $[0, \alpha[$, elles y sont intégrables et donc x et y peuvent se prolonger par continuité en α. Il s'ensuit que x' et y' admettent des limites finies en α si bien que les prolongements de x et y sont dérivables en α d'après le théorème de la limite de la dérivée. De plus, le prolongement de (x, y) obtenu vérifie l'équation différentielle sur $\mathrm{I} \cup \{\alpha\}$ ce qui contredit le caractère maximal de la solution étudiée. Ainsi l'intervalle I n'est pas majoré.

2. Posons $z = x^2 + y^2$. On remarque que

$$z' = 2xx' + 2yy' = -2x^4 - 2y^4 = -(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 \leqslant -z^2.$$

La fonction z décroît donc pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-$, on a $z(t) \geqslant z(0) > 0$, car $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. On peut donc écrire $\dfrac{z'(t)}{z(t)^2} \leqslant -1$. En intégrant cette inégalité entre $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-$ et 0, on en déduit, puisque z est positive

$$-\frac{1}{z(0)} \leqslant -\frac{1}{z(0)} + \frac{1}{z(t)} \leqslant \int_t^0 \frac{z'(u)}{z(u)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant -\int_t^0 \mathrm{d}u \leqslant t.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-$, on a $t \geqslant -\dfrac{1}{z(0)}$ et donc $\inf I \geqslant -\dfrac{1}{z(0)}$.

3. La fonction z décroît et est minorée par 0. Elle possède donc une limite finie $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$. On a montré que $z' \leqslant -z^2$. On en déduit que $z' \leqslant -\ell^2$. On obtient en intégrant, pour $t \geqslant 0$, $z(t) - z(0) \leqslant -\ell^2 t$. Si $\ell > 0$, on obtient $\lim\limits_{+\infty} z = -\infty$, ce qui est contradictoire. Ainsi z a pour limite 0 en $+\infty$, ce qui implique que x et y ont aussi 0 comme limite en $+\infty$. ◁

Le point $(0,0)$ *est limite d'une courbe intégrale et c'est un zéro de* f *: ce fait est tout à fait général pour un système différentiel autonome (le*

vecteur dérivé a pour limite $f(0,0)$ qui doit être forcément nulle : l'argumentation est similaire au cas $n = 1$ des fonctions scalaires ; on pourra se reporter par exemple à l'exercice 3.9).

L'exercice suivant est à relier au théorème d'Hadamard qui caractérise les C^1-difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$: une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 est un C^1-difféomorphisme si, et seulement si, f est propre (i.e. l'image réciproque d'un compact est un compact) et la différentielle de f en tout point est inversible. La nécessité de la condition est évidente mais la réciproque n'est pas simple du tout. Il est toutefois possible, lorsque f est de classe C^2, de la déduire du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'exercice suivant propose une partie de ce travail (à savoir la surjectivité) dans un contexte un peu plus général.

3.31. Surjectivité d'une application propre, localement inversible

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert convexe de E, f une application de classe C^2 de U dans V dont la différentielle en tout point de U est inversible et telle que pour tout compact K de V, l'image réciproque $f^{-1}(\mathrm{K})$ est un compact de U.

Soient y dans V et a dans U. Montrer que le problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\mathrm{d}f_x)^{-1}(y - f(x)), \quad x(0) = a$$

admet une solution Φ sur $[0, +\infty[$. Montrer que f est surjective.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

La fonction $x \longmapsto \mathrm{d}f_x$ est de classe C^1 sur U, car f est de classe C^2. L'application qui à un automorphisme de E associe l'application réciproque est de classe C^1, car une base de E étant fixée, les coordonnées de h^{-1} sont des fractions rationnelles des coordonnées de h. On en déduit que $x \longmapsto (\mathrm{d}f_x)^{-1}$ et donc $\mathrm{F} : x \longmapsto (\mathrm{d}f_x)^{-1}(y - f(x))$ sont de classe C^1 sur U. Ainsi, l'application $(x,t) \longmapsto \mathrm{F}(x)$ est de classe C^1 sur $\mathrm{U} \times \mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation différentielle possède une unique solution Φ à valeurs dans U vérifiant $\Phi(0) = a \in \mathrm{U}$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Montrons que I n'est pas majoré. Soit $b = \sup \mathrm{I} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Considérons la fonction $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{V}$ définie par $g = f \circ \Phi$ (elle est définie car $\mathrm{Im}\,\Phi \subset \mathrm{U}$). La fonction g est de classe C^1 car composée de deux fonctions de classe C^1 et, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$g'(t) = \mathrm{d}f_{\Phi(t)}(\Phi'(t)) = y - f(\Phi(t)) = y - g(t).$$

Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathrm{E}$ tel que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $g(t) = y + e^{-t}\mathrm{C}$. De $g(0) = f(a)$, on tire $\mathrm{C} = f(a) - y$ et donc

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \ g(t) = y + e^{-t}(f(a) - y) = e^{-t}f(a) + (1 - e^{-t})y.$$

Pour tout $t \in [0, b[$, $e^{-t} \in [0, 1]$ donc $g(t) \in [f(a), y] = \mathrm{K}$. On sait que $f(a)$ et y appartiennent à V et que V est convexe, donc $\mathrm{K} \subset \mathrm{V}$. L'ensemble K est un compact de V, donc par hypothèse, $\mathrm{K}' = f^{-1}(\mathrm{K})$ est un compact de U. Pour tout $t \in [0, b[$, $g(t) = f(\Phi(t)) \in \mathrm{K}$, donc $\Phi(t) \in \mathrm{K}'$. La fonction continue $x \longmapsto (\mathrm{d}f_x)^{-1}(y - f(x))$ est bornée sur le compact K' donc Φ' est bornée sur $[0, b[$.

Supposons que $b \in \mathbb{R}$. La fonction Φ' étant bornée, elle est intégrable sur $[0, b[$, donc Φ possède une limite ℓ en b. Comme K' est compact, ℓ appartient à K' donc à U. Comme F est continue sur U, on en déduit $\lim_b \Phi' = \lim_b \mathrm{F} \circ \Phi = \mathrm{F}(\ell)$. On peut donc prolonger Φ en b par continuité et d'après le théorème de la limite de la dérivée[5], ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I} \cup \{b\}$ et il est solution du problème de Cauchy, ce qui contredit la maximalité de Φ. On a donc $b = +\infty$.

On note que $\lim_{t \to +\infty} f(\Phi(t)) = \lim_{t \to +\infty} g(t) = y$. Comme $\Phi(t) \in \mathrm{K}'$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on en déduit que y appartient à l'adhérence de $f(\mathrm{K}')$. Or $f(\mathrm{K}')$ est compact car image d'un compact par une fonction continue donc fermé. On en déduit $y \in f(\mathrm{K}')$ et *a fortiori* $y \in f(\mathrm{U})$. L'application f est donc surjective. ◁

Remarquons que l'on pouvait également utiliser le théorème de l'inversion locale (voir page 31) qui garantit que l'image $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de E *: c'est aussi un ouvert de* V *et comme f est propre, c'est un fermé de* V. *En effet, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(\mathrm{U})^{\mathbb{N}}$ converge vers $y \in \mathrm{V}$, $\mathrm{K} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y\}$ est un compact de* V. *Son image réciproque* K' *est donc aussi un compact de* U. *Si $x_n \in \mathrm{K}'$ avec $y_n = f(x_n)$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence $x \in \mathrm{K}' \subset \mathrm{U}$. Par continuité, $f(x)$ est une valeur d'adhérence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et comme cette suite converge, $f(x) = y \in f(\mathrm{K}') \subset f(\mathrm{U})$. Comme $f(\mathrm{U})$ est à la fois ouvert et fermé dans* V *qui est connexe par arcs, $f(\mathrm{U})$ qui est non vide est égal à* V.

Le système différentiel autonome étudié dans l'exercice suivant modélise l'évolution d'un couple proie-prédateur. On y utilise une intégrale première du système : pour $\mathrm{X}' = f(\mathrm{X})$, il s'agit d'une fonction scalaire H *telle que $\langle \mathrm{grad}\,\mathrm{H}, f\rangle = 0$ en tout point. Si on considère une*

5. Ce théorème est encore vrai pour les fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie ; il se démontre par exemple en prenant une base pour se ramener au cas bien connu des fonctions à valeurs réelles.

courbe intégrale $t \longmapsto \mathrm{X}(t)$, *la quantité* $\mathrm{H}(\mathrm{X}(t))$ *a pour dérivée*

$$\langle \operatorname{grad} \mathrm{H}(\mathrm{X}(t)), \mathrm{X}'(t) \rangle = \langle \operatorname{grad} \mathrm{H}(\mathrm{X}(t)), f(\mathrm{X}(t)) \rangle = 0.$$

Autrement dit, cette quantité est constante : les courbes intégrales sont donc contenues dans les lignes de niveau $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \mathrm{C}$, *où* C *est une constante.*

3.32. Système proie-prédateur de Lotka-Volterra

Soit a, b, c, d, x_0, y_0 des réels strictement positifs. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$ avec $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

1. Interpréter ce système différentiel en considérant que $x(t)$ représente un nombre de proies (sardines) et $y(t)$ un nombre de prédateurs (requins).

2. Soit $\mathrm{X}(t) = (x(t), y(t))$ la solution maximale. Montrer que x, y sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\mathrm{H}(x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y$ est une intégrale première du système sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. En déduire que la solution maximale X est définie sur $\mathbb{R}$.

3. On suppose que x et y sont T-périodiques. Calculer la valeur moyenne de x et y.

4. Montrer que x et y sont périodiques. Indication : séparer $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en quatre zones suivant le signe de $a - by$, $dx - c$.

5. Comment modéliser l'influence de la pêche ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On considère que sans prédateur les sardines, qui ne se nourrissent que de plancton, ont un taux de croissance de a et leur nombre $x(t)$ vérifie alors $x' = ax$ (croissance exponentielle de la population). Mais il y a des requins ! On considère que le taux de prédation est proportionnel au nombre de requins. Cela explique la première équation : $x' = ax - bxy$. Par ailleurs, on considère que la population de requins suit, en l'absence de sardines, une loi de décroissance exponentielle $y' = -cy$ (les requins ne mangent pas de plancton). En présence de sardines, le nombre de requins augmente avec un taux proportionnel au nombre de proies. Cela explique la seconde équation $y' = -cy + dxy$.

Les hypothèses faites ici sont assez simplistes et le modèle est en fait loin d'être parfait. Il a surtout le mérite de conduire à une étude mathématique assez simple. On a toutefois pu constater expérimentalement des phénomènes cohérents avec les résultats qui vont suivre.

2. Le fait que les solutions x et y restent à valeurs strictement positives découle du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, imaginons que x prenne une valeur négative. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_1 tel que $x(t_1) = 0$. Mais l'unique solution au problème de Cauchy en t_1 est $x(t) = 0$ et $y(t) = y(t_1)e^{-c(t-t_1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela contredit le fait que $x(0) > 0$. On fait de même pour y.

On a facilement

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{H}(x(t), y(t)) =& dx' + by' - c\frac{x'}{x} - a\frac{y'}{y}\\ =& d(ax - bxy) + b(dxy - cy) - ca + bcy + ac - adx = 0\end{aligned}$$

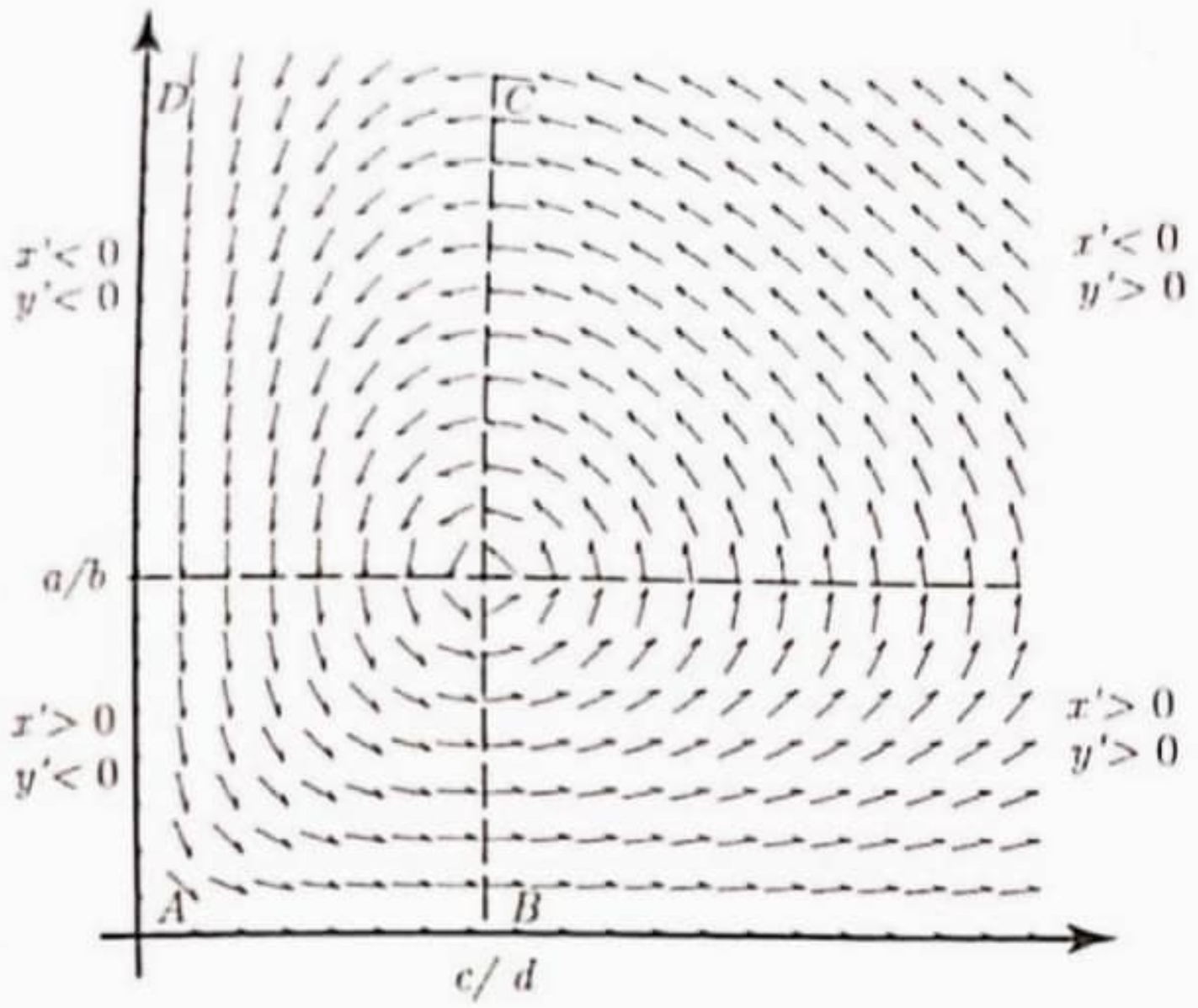
de sorte que H est constante sur une trajectoire.

Il est alors possible de démontrer que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = dx - c\ln x$ et $g(x) = bx - a\ln x$. La fonction f possède un minimum $m = f\left(\frac{c}{d}\right)$. De même, g possède un minimum $m' = g\left(\frac{a}{b}\right)$. On observe que $\mathrm{H}(x, y) = f(x) + g(y)$. Notons I l'intervalle ouvert de définition de X. D'après ce qui précède, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(x(t)) + g(y(t)) = c$. On en déduit que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(x(t)) = c - g(x(t) \leqslant c - m$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe α et β strictement positifs tel que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\alpha \leqslant x(t) \leqslant \beta$. Le même raisonnement montre que y est bornée. Du système différentiel, on déduit que x' et y' sont bornées.

Supposons que I soit majoré et notons $s = \sup \mathrm{I}$. Comme x' et y' sont bornées, elles sont intégrables sur $[0, s[$ et x et y ont des limites finies en s. Il en est donc de même de x' et y'. Les fonctions x et y peuvent être prolongées par continuité en s et par le théorème de la limite de la dérivée, ces prolongements sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I} \cap \{s\}$ qui sont encore solutions du système différentiel, ce qui contredit la maximalité de X. On montre de même que I n'est pas minoré. On a donc $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

3. On a $\int_0^{\mathrm{T}} \frac{y'}{y} = [\ln y]_0^{\mathrm{T}} = 0$ car y est T-périodique. En remplaçant y' par $-cy + dxy$ on obtient directement $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} x = \frac{c}{d}$. Il vient de même $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} y = \frac{a}{b}$. On notera que le point $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est l'un des deux points critiques du système différentiel (l'autre étant l'origine).

4. On va montrer que les solutions sont toutes périodiques. Deux approches sont possibles : on peut décrire les lignes de niveau de H et montrer que ce sont des courbes fermées (homéomorphes à des cercles) ou suivre la démarche proposée par l'énoncé, ce que nous allons faire ici. Voici une figure montrant les quatre zones (à l'oral le raisonnement sera exposé sur une figure de ce genre) :



On élimine le cas où $x_0 = \frac{c}{d}$ et $y_0 = \frac{a}{b}$, car alors les fonctions x et y sont constantes. Notons par exemple A la zone où $x \leqslant \frac{c}{d}$ et $y \leqslant \frac{a}{b}$ et supposons que la condition initiale (x_0, y_0) soit dans cette zone. Supposons que la trajectoire reste toujours dans cette zone A. Alors x est une fonction croissante (car x' est positive) et y est décroissante. Comme x est majorée par $\frac{c}{d}$ et y minorée par 0 les deux fonctions ont une limite en $+\infty$. À l'aide de l'équation, on en déduit que x' et y' ont aussi une limite finie en $+\infty$, limites qui sont forcément nulles, sans quoi x et y ne seraient pas bornées. On en déduit que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{a}{b}$ (car x ne peut pas tendre vers 0). Si $y_0 < \frac{a}{b}$ cela contredit la décroissance de y et si $y_0 = \frac{a}{b}$, la fonction y est constante, y' est nulle, donc x est constante, égale à $\frac{c}{d}$, cas que nous avons exclu. Ainsi la solution quitte A. On note $t_1 = \inf\{t > 0,\ (x(t), y(t)) \notin \mathrm{A}\}$. Par continuité on a forcément $x(t_1) = \frac{c}{d}$ et $y(t_1) < \frac{a}{b}$. On a alors $y'(t_1) = 0$ et $x'(t_1) > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $t \in]t_1, t_1 + \eta[$ la trajectoire se trouve dans la zone B définie par $x > \frac{c}{d}$ et $y < \frac{a}{b}$. Tant qu'elle reste dans cette zone, x et y sont croissantes. Si cela a toujours lieu, x et y ont des limites finies (car x et y sont bornées). On montre encore que x' et y' ont pour limite 0, que x et y ont pour limites respectives $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$, ce qui est absurde car $x(t_1 + \eta) > \frac{c}{d}$. De sorte qu'il existe t_2 tel que $y(t_2) = \frac{a}{b}$. On entre alors dans la troisième zone C définie par $x > \frac{c}{d}$ et $y > \frac{a}{b}$, puis dans la

quatrième D définie par $x < \frac{c}{d}$ et $y > \frac{a}{b}$ et on revient dans la zone A, etc.

Il reste à expliquer pourquoi la trajectoire est périodique. Pour cela on remarque que la fonction $y \mapsto \mathrm{H}\left(\frac{c}{d}, y\right) = m + g(y)$ est décroissante strictement sur $\left[\frac{a}{b}, +\infty\right[$. Comme H est constante sur une trajectoire, celle-ci ne peut passer que par un unique point de la demi-droite $x = \frac{c}{d}$, $y \geqslant \frac{a}{b}$. Or à chaque passage entre la zone A et la zone B, on passe par ce point. Il est donc obtenu une infinité de fois. Si on note t_1 et t_2 deux dates de passage en ce point, le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que x et y sont $\mathrm{T} = t_2 - t_1$ périodiques. En effet, considérons les fonctions x_1 et y_1 définies sur $\mathbb{R}$ par $x_1(t) = x(t + \mathrm{T})$ et $y_1(t) = y(t + \mathrm{T})$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1'(t) = x'(t + \mathrm{T}) = ax(t + \mathrm{T}) - bx(t + \mathrm{T})y(t + \mathrm{T}) = ax_1(t) - by_1(t)$$

et de même $y_1'(t) = cy_1(t) + dx_1(t)y_1(t)$. Ainsi (x_1, y_1) est solution du système différentiel, et comme $x_1(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$ et $y_1(t_1) = y(t_1)$, on a $x_1 = x$ et $y_1 = y$. Les fonctions x et y sont T-périodiques.

5. Rajoutons de la pêche. Les bateaux prélèvent un même taux de sardines et de requins ce qui revient à ajouter un terme $-\varepsilon x$ à la première équation et $-\varepsilon y$ a la seconde. Cela consiste donc simplement à remplacer a par $a - \varepsilon$ et c par $c + \varepsilon$. On constate que la moyenne des sardines devient $\frac{c+\varepsilon}{d}$ et la moyenne des requins $\frac{a-\varepsilon}{b}$. Autrement dit, la pêche favorise les sardines. ◁

Aussi étrange que cela puisse paraître, ce phénomène a été observé expérimentalement (la proportion de requins pêchés en mer Adriatique était plus élevée que la normale pendant la première guerre mondiale, période durant laquelle la pêche était réduite). C'est même la recherche d'une explication de ces observations qui a motivé les travaux de Volterra.

Dans l'exercice suivant, on montre qu'avec un contrôle sur la fonction f les solutions maximales de $y' = f(t, y)$ sont globales.

3.33. Intervalle de définition d'une solution

Soit $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(t, y), y \rangle \leqslant a(t)\|y\|^2 + b(t).$$

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et y la solution maximale de $y' = f(t, y), y(t_0) = 0$. Montrer que y est définie sur $[t_0, \beta[$ (on pourra étudier $t \longrightarrow \|y(t)\|^2$).

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $J \subset I$ l'intervalle sur lequel est définie y et $\beta' = \sup J$. Comme le suggère l'énoncé, on considère la fonction $z : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $z(t) = \|y(t)\|^2$. On a, pour tout $t \in J$,

$$z'(t) = 2\langle y'(t), y(t)\rangle = 2\langle f(t, y(t)), y(t)\rangle \leqslant 2a(t)z(t) + 2b(t).$$

Comme z est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient pour $t \in [t_0, \beta[$,

$$z(t) \leqslant z(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{d}u + 2\int_{t_0}^{t} a(u)z(u)\mathrm{d}u.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons $\beta' < \beta$. Alors $\beta' \in I$ et les fonctions positives continues a et b sont majorées sur le compact $[t_0, \beta']$ par A et B respectivement, si bien que

$$z(t) \leqslant z(t_0) + 2B(\beta' - t_0) + 2A\int_{t_0}^{t} z(u)\mathrm{d}u = C_0 + 2A\int_{t_0}^{t} z(u)\mathrm{d}u,$$

en notant $C_0 = z(t_0) + 2B(\beta' - t_0)$. Le lemme de Gronwall (voir page 120) assure alors que

$$z(t) \leqslant C_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} 2A\right) \leqslant C_0 \exp(2A(\beta' - t_0)).$$

La fonction z est donc bornée sur $[t_0, \beta'[$. Il en est de même de y. Soit M tel que, pour tout $t \in [t_0, \beta'[$, $\|y(t)\| \leqslant M$. La fonction f est bornée sur le compact $K = [t_0, \beta'] \times \{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leqslant M\}$. Il existe donc un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in [t_0, \beta[$, $\|y'(t)\| \leqslant C$. La fonction y' est donc intégrable sur $[t_0, \beta'[$ et la fonction y admet donc une limite finie en β' et se prolonge par continuité sur $[t_0, \beta']$. Or $y'(t) = f(t, y(t))$ admet également une limite en β' et d'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement est dérivable en β' et est solution de l'équation différentielle sur $[t_0, \beta']$. Cela contredit la maximalité de y. On a donc $\sup J = \beta' = \beta = \sup I$. ◁

Nous passons à l'étude d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté. Elles sont souvent issues de questions d'électromagnétisme. Dans les deux exercices suivants, on utilisera la formule du double produit vectoriel : pour $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, on a

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c.$$

3.34. Équation différentielle dans $\mathbb{R}^3$ euclidien (1)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne et de son orientation canoniques. Soit $u_0 \in E$, $\|u_0\| = 1$ et $e \in E$, $e \neq 0$. On considère l'équation différentielle $u' = u \wedge e - u \wedge (u \wedge e)$, $u(0) = u_0$.

1. Montrer que l'équation possède une unique solution maximale et que celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Étudier la limite de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. L'application $(t, u) \longmapsto u \wedge e - u \wedge (u \wedge e)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation possède une solution unique. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

On remarque que $(\|u\|^2)' = 2\langle u', u\rangle = 0$. Ainsi $\|u\|$ est constante, égale à $\|u_0\| = 1$. On en déduit que, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\|u'(t)\| \leqslant \|u(t) \wedge e\| + \|u(t) \wedge (u(t) \wedge e)\| \leqslant 2\|e\|.$$

Supposons que $\sup \mathrm{I} = a \in \mathbb{R}$. Comme u' est bornée sur $[0, a[$, elle est intégrable sur $[0, a[$. Dans ces conditions, u admet une limite finie en a. On peut prolonger par continuité u en a. Vue l'équation différentielle, u' admet une limite finie en a et le théorème de la limite de la dérivée assure que le prolongement de u est dérivable sur $[0, a]$ et est solution de l'équation différentielle sur $[0, a]$, ce qui contredit le caractère maximal de u. Cela montre que $a = +\infty$. On démontre de la même façon que $\inf \mathrm{I} = -\infty$. La fonction u est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour commencer, étudions la composante de u dans la direction de e et pour cela considérons $\varphi = \langle u, e\rangle$. On a, d'après la formule du double produit vectoriel,

$$u' = u \wedge e - u \wedge (u \wedge e) = u \wedge e - \langle u, e\rangle u + \|u\|^2 e.$$

On en déduit

$$\varphi' = \langle u', e\rangle = -\langle u, e\rangle^2 + \|u\|^2\|e\|^2 = -\langle u, e\rangle^2 + \|e\|^2 \geqslant 0.$$

La fonction φ est croissante et majorée par $\|u\|\|e\| = \|e\|$. Elle possède donc une limite finie ℓ en $+\infty$. Comme $\varphi' = -\varphi^2 + \|e\|^2$, on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} \varphi' = -\ell^2 + \|e\|^2$. Si cette limite n'est pas nulle, alors φ tend vers $\pm\infty$, ce qui est contradictoire. On a donc $\ell = \pm\|e\|$ et comme φ croît au sens large, $\ell = \|e\|$, sauf si la fonction φ est constante, égale à $-\|e\|$.

Dans ce dernier cas, on a, pour tout réel t,

$$\varphi(t) = \langle u(t), e\rangle = -\|e\| = -\|e\|\,\|u(t)\|,$$

ce qui n'est possible que si $u(t)$ et e sont de colinéaire de sens contraire. On obtient, pour tout réel t, $u(t) = -\dfrac{1}{\|e\|}e$. On vérifie que cette fonction

constante est solution de l'équation différentielle. On a alors

$$\lim_{+\infty} u = -\frac{1}{\|e\|}e.$$

Dans tous les autres cas, on écrit $u = \dfrac{\langle u,e\rangle}{\|e\|^2}e + v = \dfrac{\varphi}{\|e\|^2}e + v$. Le vecteur v est orthogonal à e et

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 - \left\|\frac{\varphi}{\|e\|^2}e\right\|^2 = \|u\|^2 - \frac{\varphi^2}{\|e\|^2} = 1 - \frac{\varphi^2}{\|e\|^2}.$$

De ce qui précède, on déduit que $\lim\limits_{+\infty} v = 0$ et

$$\lim_{+\infty} u = \lim_{+\infty} \frac{\varphi}{\|e\|^2}e = \frac{1}{\|e\|}e. \quad \triangleleft$$

On peut préciser le comportement de u. On se place dans un repère orthonormé où le vecteur e a pour coordonnées $(0,0,a)$ avec $a>0$. On montre facilement que les coordonnées (x,y,z) de u vérifient le système

$$\begin{cases} x' = ay - axz \\ y' = -ax - ayz \\ z' = ax^2 + ay^2 \end{cases}$$

On note au passage que $xx' + yy' + zz' = 0$ donc que $x^2+y^2+z^2$ est constante, égale à 1, ce qui redonne analytiquement le fait que $\|u\|$ est constant.

La composante colinéaire à e est donnée par z (qui est égal à φ). On a $z' = a(x^2+y^2) = a(1-z^2) \geqslant 0$; comme z est majoré par 1, il tend vers une limite finie k en $+\infty$. On en déduit que z' tend vers $a(1-k^2)$ et que cette limite est nulle sinon z tendrait vers l'infini. On a donc $k = \pm 1$ et, hormis le cas où $z=-1$ et donc u est contant égal à $(-1,0,0)$, z tend vers 1, x et y tendent vers 0 et u tend vers $(1,0,0)$. On retrouve ce qui a été montré géométriquement. Pour aller plus loin, on peut passer en polaire, en posant

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$$

On obtient

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\theta' = ar\sin\theta - azr\cos\theta \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\theta' = -ar\cos\theta - azr\sin\theta \end{cases}$$

d'où on tire

$$\begin{cases} r' = -azr \\ \theta' = -a. \end{cases}$$

La trajectoire de $u(t)$ est une spirale tracée sur la sphère unité, parcourue dans le sens des z croissants et à une vitesse angulaire constante autour de l'axe de z.

On peut préciser les variations de z et r. On se place dans le cas où z n'est pas constante égale à ± 1. L'équation différentielle $z' = a(1 - z^2)$ s'écrit $z'\left(-\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right) = -2a$. Il existe une constante $C = \ln\frac{1-z(0)}{1+z(0)}$ telle que $\ln\left(\frac{1}{C}\frac{1-z}{1+z}\right) = -2at$ et donc

$$z = \frac{1 - Ce^{-2at}}{1 + Ce^{-2at}}.$$

On en déduit $r^2 = 1 - z^2 = \frac{4Ce^{-2at}}{(1+Ce^{-2at})^2}$ et donc $r = \frac{2\sqrt{C}e^{-at}}{1+Ce^{-2at}}$.

3.35. Équation différentielle dans $\mathbb{R}^3$ euclidien (2)

Soit $u, v, w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$ trois fonctions de classe C^1 et e un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} u' + u \wedge u' = u \wedge (v + e) \\ u' + v' = w \\ w' = -v. \end{cases}$$

1. Montrer que $\|u\|$ est constante.
2. Montrer que $\|w\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, e\rangle$ décroît.
3. Montrer que v et w sont bornées.
4. Montrer que $\|u'\|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
5. Soit (t_n) une suite de $\mathbb{R}_+$ de limite $+\infty$ telle que $(u(t_n))$ ait une limite ℓ. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} u(s)\,ds = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} v(s)\,ds = 0.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On a $u' = -u \wedge u' + u \wedge (v + e)$ et donc $\langle u, u'\rangle = 0$. La fonction $\|u\|^2$, dont la dérivée $2\langle u, u'\rangle$ est nulle, est constante. Il en est de même de $\|u\|$.
2. Posons $z = \|w\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, e\rangle$. On obtient

$$\begin{aligned} z' &= 2\langle w, w'\rangle + 2\langle v, v'\rangle - 2\langle u', c\rangle \\ &= -2\langle w, v\rangle + 2\langle w, v\rangle - 2\langle u', v\rangle - 2\langle u', c\rangle \\ &= -2\langle u', v + c\rangle \end{aligned}$$

On a, en multipliant vectoriellement à gauche par u' la première égalité, $u' \wedge (u \wedge u') = u' \wedge (u \wedge (v + c))$. En utilisant la formule du double produit vectoriel $a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$, on obtient, compte tenu de l'orthogonalité de u et u', $\|u'\|^2 u = \langle u', v + c\rangle u$. Comme $\|u\|$ est constante, soit u ne s'annule pas et l'on a $\|u'\|^2 = \langle u', v + c\rangle$, soit u est la fonction nulle, $u' = 0$ et l'égalité reste vraie. Dans tous les cas, on a

$$z' = -2\|u'\|^2 \leqslant 0.$$

La fonction z décroît.

3. On a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 = z(t) + 2\langle u(t), c\rangle &\leqslant z(0) + 2\|u(t)\|\|c\| \\ &\leqslant z(0) + 2\|u(0)\|\|c\|, \end{aligned}$$

car z décroît et $\|u\|$ est constante. Donc $\|v\|$ et $\|w\|$ sont majorées.

4. On a vu à la question 2 que $z' = -2\|u'\|^2$. On a donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\int_0^t \|u'(s)\|^2 \,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_0^t z'(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(z(0) - z(t)).$$

On a, pour tout $t \geqslant 0$, $z(t) \geqslant -2\langle u(t), c\rangle \geqslant -2\|u(t)\|\|c\| \geqslant -2\|u(0)\|\|c\|$. La fonction z décroît et est minorée donc elle a une limite finie en $+\infty$. On obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \|u'(s)\|^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(z(0) - \lim_{+\infty} z).$$

La fonction $\|u'\|^2$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

5. On compare la première expression à $u(t_n)$ en intégrant par parties. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} u(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi}\left[(s - t_n - 2\pi)u(s)\right]_{t_n}^{t_n+2\pi} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} (s - t_n - 2\pi)u'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= u(t_n) - \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} (s - t_n - 2\pi)u'(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers ℓ. Montrons que le second tend vers 0 en utilisant la question précédente. On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|\int_{t_n}^{t_n+2\pi}(s-t_n-2\pi)u'(s)\,\mathrm{d}s\right\|^2 \leqslant \left(\int_{t_n}^{t_n+2\pi}|s-t_n-2\pi|\|u'(s)\|\,\mathrm{d}s\right)^2$$
$$\leqslant \int_{t_n}^{t_n+2\pi}(s-t_n-2\pi)^2\,\mathrm{d}s\int_{t_n}^{t_n+2\pi}\|u'(s)\|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \frac{8\pi^3}{3}\int_{t_n}^{t_n+2\pi}\|u'(s)\|^2\,\mathrm{d}s.$$

Comme $\|u'\|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et (t_n) tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_{t_n}^{t_n+2\pi}\|u'(s)\|^2\,\mathrm{d}s$ tend vers 0, ce qui implique le premier résultat.

Pour établir le second, on remarque que $-w$ est une primitive de v. On a donc $\int_{t_n}^{t_n+2\pi}v(s)\,\mathrm{d}s = w(t_n) - w(t_n+2\pi)$.

On remarque que $w = u' + v' = u' - w''$, c'est-à-dire $w'' + w = u'$. On exprime w en fonction de u' en utilisant la méthode la variation de la constante. L'équation $y'' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto (\cos t)\ a + (\sin t)\ b$, où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}^3$. On écrit $w(t) = \cos t\ \mathrm{A}(t) + \sin t\ \mathrm{B}(t)$, où A et B sont de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^3$ dérivables vérifiant, pour tout $t \geqslant 0$, $\cos t\ \mathrm{A}'(t) + \sin t\ \mathrm{B}'(t) = 0$. On obtient $w''(t) + w(t) = -\sin t\ \mathrm{A}'(t) + \cos t\ \mathrm{B}'(t) = u'(t)$, d'où l'on tire $\mathrm{A}'(t) = -\sin t\ u'(t)$ et $\mathrm{B}'(t) = \cos t\ u'(t)$. Il existe donc des vecteurs a et b tels que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$w(t) = \cos t\left(a - \int_0^t \sin s\,u'(s)\,\mathrm{d}s\right) + \sin t\left(b + \int_0^t \cos s\ u'(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Après transformation, on obtient

$$w(t) = \cos t\,a + \sin t\,b + \int_0^t \sin(t-s)\,u'(s)\,\mathrm{d}s.$$

On en déduit que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$w(t+2\pi) = \cos t\,a + \sin t\,b + \int_0^{t+2\pi}\sin(t-s)\,u'(s)\,\mathrm{d}s,$$

puis

$$w(t) - w(t+2\pi) = -\int_t^{t+2\pi}\sin(t-s)u'(s)\mathrm{d}s.$$

On a donc

$$\|w(t) - w(t+2\pi)\|^2 \leqslant \left(\int_t^{t+2\pi}\|u'(s)\|\mathrm{d}s\right)^2$$
$$\leqslant \int_t^{t+2\pi}\mathrm{d}s\int_t^{t+2\pi}\|u'(s)\|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant 2\pi\int_t^{t+2\pi}\|u'(s)\|^2\mathrm{d}s.$$

Comme $\|u'\|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_t^{t+2\pi} \|u'\|^2$ et donc $\|w(t) - w(t+2\pi)\|$ tend vers 0 quand t vers $+\infty$. En particulier $\int_{t_n}^{t_n+2\pi} v(s)\,\mathrm{d}s = w(t_n) - w(t_n+2\pi)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. ◁

L'énoncé suivant considère une équation différentielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3.36. Équation différentielle $\dfrac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M}^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il une solution $t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de

$$\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M}^2\ ,\ \mathrm{M}(0) = \mathrm{A}\ ?$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

La fonction $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ regardé comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n^2$ (les coefficients de M^2 sont des polynômes en les coefficients de M). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème posé admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

On cherche à savoir quand cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et pour cela nous allons la déterminer explicitement. Pour avoir des idées, on commence par regarder le cas $n = 1$. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle autonome $x' = x^2$ avec la condition $x(0) = a$. Si $a = 0$ la solution est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Il en découle que si $a \neq 0$, la solution maximale x ne s'annule pas et en écrivant l'équation sous la forme $\dfrac{x'}{x^2} = 1$ on obtient $x(t) = \dfrac{1}{1/a - t} = \dfrac{a}{1 - at}$. Cette solution maximale est définie sur $]1/a, +\infty[$ dans le cas $a < 0$ et sur $]-\infty, 1/a[$ dans le cas $a > 0$. On notera que l'expression reste valable pour $a = 0$.

Revenons au cas général et, en nous inspirant de la solution trouvée dans le cas $n = 1$, posons $\mathrm{M}(t) = \mathrm{A}(\mathrm{I}_n - t\mathrm{A})^{-1}$, matrice qui est bien définie au voisinage de 0 puisque le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert. La fonction $\mathrm{N} \longmapsto \mathrm{N}^{-1}$ étant rationnelle sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $\mathrm{N}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{N}}\ {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{N})$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc $t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Comme pour tout t, $\mathrm{M}(t)(\mathrm{I}_n - t\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ on a, en dérivant $\mathrm{M}'(t)(\mathrm{I}_n - t\mathrm{A}) - \mathrm{M}(t)\mathrm{A} = 0$ soit encore

$$\mathrm{M}'(t) = \mathrm{M}(t)\mathrm{A}(\mathrm{I}_n - t\mathrm{A})^{-1} = \mathrm{M}(t)^2.$$

Comme $M(0) = A$, $t \longmapsto M(t)$ est solution de notre problème de Cauchy.

Regardons à quelle condition M est définie sur $\mathbb{R}$. Pour t non nul, $A(I_n - tA)^{-1}$ est définie et dérivable si $\frac{1}{t}$ n'est pas valeur propre de A. Ainsi si A n'a pas de valeur propre réelle ou si sa seule valeur propre réelle est 0, $t \longmapsto M(t) = A(I_n - tA)^{-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est solution de notre problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$.

Sinon, on note $\rho \neq 0$ une valeur propre réelle non nulle de A de valeur absolue maximale. Alors pour $t \in]0, 1/\rho[$, $\frac{1}{t}$ n'est pas valeur propre de A et $M(t) = A(I_n - tA)^{-1}$ est bien défini. Soit X_0 un vecteur propre de A pour ρ. On a $(I_n - tA)X_0 = (1 - t\rho)X_0$ ce qui donne pour $t \in]0, 1/\rho[$,

$$M(t)X_0 = \frac{\rho}{1 - t\rho}X_0 \text{ et } \lim_{t \to 1/\rho} \|M(t)X_0\| = +\infty.$$

Donc $t \longmapsto M(t)$ ne peut se prolonger par continuité en $1/\rho$ et la solution maximale n'est donc pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Conclusion. Le problème posé admet une solution définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A n'a pas de valeur propre réelle non nulle. ◁

La série d'exercices suivant porte sur des équations différentielles faisant intervenir le gradient d'une fonction scalaire. Dans le premier, on démontre que le gradient d'une fonction minorée prend des valeurs arbitrairement proches de 0.

3.37. Gradient d'une fonction minorée

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, minorée. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels telle que $\lim_{n \to +\infty} f'(x_n) = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, minorée. Montrer qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^k$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{grad} f(x_n) = 0$.

Indication : on pourra considérer une solution maximale de l'équation différentielle $x' = \dfrac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x)$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. La question consiste à prouver que $\alpha = \inf\{|f'(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ est nul. Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha > 0$. Comme f' est continue on a soit $f' \leqslant -\alpha$ soit $f' \geqslant \alpha$ sur $\mathbb{R}$. Dans le premier cas on intègre l'inégalité entre 0 et x pour $x \geqslant 0$ ce qui donne $f(x) \leqslant f(0) - \alpha x$. Cela implique que $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to +\infty$ ce qui est absurde puisque

f est minorée. Dans le second cas on procède de même en intégrant l'inégalité entre x et 0 pour $x \leqslant 0$ et en faisant tendre x vers $-\infty$.

2. Si $\operatorname{grad} f$ s'annule en a, la suite constante égale à a convient. Sinon, on considère une solution maximale x de l'équation différentielle $x' = \dfrac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x)$. Une telle solution existe car la fonction $\mathrm{F} = \dfrac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^k$.

Comme F est bornée (par 1) la solution maximale x est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'argument est le même que dans le cas scalaire expliqué page 213 : on raisonne par l'absurde en supposant par exemple que l'intervalle I de définition de x est majoré. On pose $b = \sup \mathrm{I}$. On a, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\|x'(t)\| = 1$ et x' est donc intégrable sur $[a, b[$ (a étant un point fixé de I). Ainsi, x admet une limite finie en b et $x' = \mathrm{F}(x)$ aussi. On peut donc prolonger x par continuité en b et d'après le théorème de la limite de la dérivée, x est dérivable en b et le prolongement vérifie l'équation différentielle sur $\mathrm{I} \cup \{b\}$, ce qui contredit le caractère maximal de x. Ainsi I n'est pas majoré, et on démontre de la même façon qu'il n'est pas minoré. On a donc $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(t) = f(x(t))$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Comme f est minorée, la fonction Φ l'est aussi, donc d'après la question 1, il existe une suite (t_n) de réels telle que $(\Phi'(t_n))$ converge vers 0. Mais on a, pour tout réel t,

$$\Phi'(t) = \langle \operatorname{grad}(f)(x(t)), x'(t) \rangle = \|\operatorname{grad}(f)(x(t))\|.$$

Ainsi la suite $(\|\operatorname{grad}(f)(x(t_n)\|)$ converge vers 0, *i.e.* la suite $(\operatorname{grad} f(x_n))$ converge vers 0, où $x_n = x(t_n)$. ◁

3.38. Étude des solutions de $x' = \operatorname{grad} f(x)$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et x une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, bornée sur $\mathbb{R}_+$, telle que $x'(t) = \operatorname{grad} f(x(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

La fonction $\varphi = f \circ x$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\varphi'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t) \rangle = \|x'(t)\|^2 \geqslant 0.$$

On en déduit que φ est croissante. La fonction x est supposée bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\|x(t)\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t \geqslant 0$. La fonction f

est bornée sur la boule fermée B de centre 0 et de rayon M donc φ est bornée. Comme elle est croissante, elle possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Il s'agit de démontrer que φ' tend vers 0 en $+\infty$.

La fonction grad f est continue donc bornée sur B. Ainsi la fonction $x' = \operatorname{grad} f(x)$ est bornée. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $x' = \operatorname{grad} f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))$ et

$$x_i''(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x(t)) x_j'(t).$$

On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$\varphi''(t) = 2\langle x'(t), x''(t)\rangle = 2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x(t)) x_j'(t) x_i'(t).$$

Les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues donc bornées sur B et les fonctions x_i' sont bornées donc φ'' est bornée. Soit $K > 0$ tel que $|\varphi''(t)| \leqslant K$ pour tout $t \geqslant 0$.

Montrons donc que φ' tend vers 0 en $+\infty$ en raisonnant par l'absurde. Si φ' ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (t_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $|\varphi'(t_n)| \geqslant \varepsilon$ pour tout n. Comme φ' est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ on a $|\varphi'(t)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in [t_n, t_n + \alpha]$ où $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2K}$. Par le théorème des accroissements finis on a $|\varphi(t_n + \alpha) - \varphi(t_n)| \geqslant \dfrac{\varepsilon\alpha}{2}$ pour tout n, mais cela est absurde puisque le membre de gauche tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Conclusion. La fonction φ' tend vers 0 et donc x' tend vers 0 en $+\infty$. ◁

On pouvait également utiliser pour la fin de la solution le fait que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ et si $\int_0^{+\infty} f$ existe, alors f est de limite nulle (voir le lemme de l'exercice 4.6 du tome analyse 3) : la fonction φ' vérifie en effet ces hypothèses.

Le système différentiel $x' = \operatorname{grad} f(x)$ (ou $x' = -\operatorname{grad} f(x)$) joue un rôle particulier dans l'étude d'une fonction scalaire f. En effet, les courbes intégrales (aussi appelées lignes de champ du champ de vecteurs grad f *sont les courbes le long desquelles la variation de f (par unité de longueur) est la plus rapide. Trois exercices vont l'illustrer.*

3.39. Dynamique du gradient (1)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\|\operatorname{grad} f(\mathrm{X})\| \geqslant 1$ pour tout X où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne. Pour $r \geqslant 0$ on pose $\mathrm{M}(r) = \sup_{\|\mathrm{X}\| \leqslant r} f(\mathrm{X})$ et $m(r) = \inf_{\|\mathrm{X}\| \leqslant r} f(\mathrm{X})$.

Montrer que pour tout $r \geqslant 0$ on a $\mathrm{M}(r) - m(r) \geqslant 2r$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Comme le disque fermé de centre 0 et de rayon r est compact et f continue, les quantités $\mathrm{M}(r)$ et $m(r)$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont atteintes. On va considérer des courbes intégrales pour lesquelles les variations de f sont maximales *i.e* les courbes tangentes au gradient. Ce sont les solutions du système différentiel

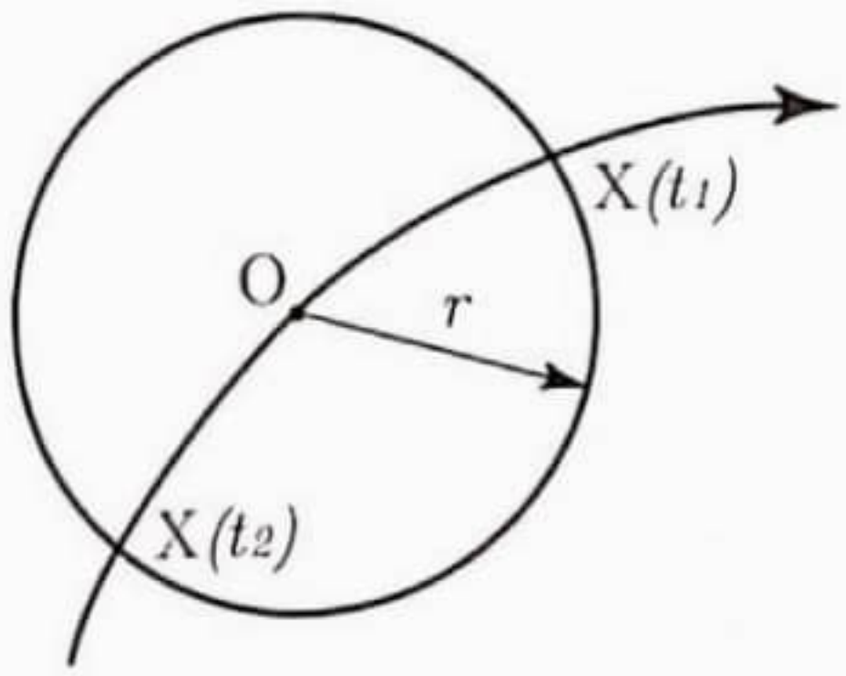
$$\begin{cases} x' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ y' = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

ou encore $\mathrm{X}' = \operatorname{grad} f(\mathrm{X})$ en posant $\mathrm{X} = (x, y)$. Comme les dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : on peut considérer une solution maximale (I, X) de ce système. La fonction $\varphi : t \longmapsto f(\mathrm{X}(t))$ est dérivable, de dérivée

$$\varphi' : t \longmapsto x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \|\operatorname{grad} f(\mathrm{X}(t))\|^2 \geqslant 1.$$

D'autre part, la norme du vecteur dérivée de l'arc $t \longmapsto \mathrm{X}(t)$ est la norme du gradient.

Supposons que la courbe intégrale correspondant à $x(0) = y(0) = 0$ coupe le cercle de centre 0 et de rayon r en deux points $\mathrm{X}(t_1)$ et $\mathrm{X}(t_2)$ avec $t_2 < 0 < t_1$.



Si cela est acquis, comme l'arc passe par l'origine, sa longueur entre $\mathrm{X}(t_1)$ et $\mathrm{X}(t_2)$ est plus grande que $2r$. La longueur étant l'intégrale de

la norme du vecteur dérivé, il vient

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \|\operatorname{grad} f(\mathrm{X}(t))\|^2 \mathrm{d}t \geqslant \int_{t_2}^{t_1} \|\operatorname{grad} f(\mathrm{X}(t))\| \mathrm{d}t \geqslant 2r,$$

car $\|\operatorname{grad} f(\mathrm{X}(t))\| \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathrm{X}(t))\|^2$. Ainsi, $f(\mathrm{X}(t_1)) - f(\mathrm{X}(t_2)) \geqslant 2r$, ce qui prouve que $\mathrm{M}(r) - m(r) \geqslant 2r$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que la courbe intégrale qui correspond à $\mathrm{X}(0) = (0,0)$ coupe bien le cercle de centre 0 et de rayon r en deux points $\mathrm{X}(t_1)$ et $\mathrm{X}(t_2)$ avec $t_2 < 0 < t_1$. Appelons I l'intervalle ouvert de définition de la courbe intégrale et $\beta \in]0, +\infty]$ sa borne supérieure. Supposons que la courbe intégrale ne coupe pas le cercle sur $]0, \beta[$. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, la courbe intégrale reste pour $t > 0$ dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r. Or la fonction grad f qui est continue est bornée sur ce disque. Donc la fonction X' reste bornée sur $[0, \beta[$. Si β est réel, elle est donc intégrable sur $[0, \beta[$ et finalement $t \longmapsto \mathrm{X}(t)$ se prolonge par continuité en β. Le vecteur dérivé admet grad $f(\mathrm{X}(\beta))$ comme limite en β si bien que par le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de X est dérivable en β et encore solution sur $\mathrm{I} \cup \{\beta\}$: c'est exclu. Ainsi, β est égal à $+\infty$. Mais alors, on a

$$f(\mathrm{X}(t)) - f(\mathrm{X}(0)) = \int_0^t \varphi' \geqslant t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty,$$

ce qui est impossible car f est bornée sur le disque compact de centre 0 et de rayon r. On en déduit l'existence de $t_1 > 0$ tel que $\mathrm{X}(t_1)$ soit sur le cercle de centre 0 et de rayon r. On ferait de même pour t_2. ◁

Dans l'exercice suivant, la technique de la dynamique du gradient est utilisée pour construire des courbes intégrales qui convergent vers un minimum d'une fonction scalaire.

3.40. Dynamique du gradient (2)

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On considère le problème de Cauchy (P) $\begin{cases} x' = -\operatorname{grad} f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ et on note $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sa solution maximale.

1. Montrer que x est défini sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que grad f s'annule en un point de $\mathbb{R}^n$. *On suppose dorénavant que* grad f *s'annule en un seul point que l'on note* ω.

3. Montrer que f présente en ω un minimum global strict. On pose $m = f(\omega)$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x(t)) = m$.

4. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \omega$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

L'équation $x' = -\operatorname{grad} f(x)$ est redevable du théorème de Cauchy-Lipschitz puisque $\operatorname{grad} f$ est $\mathcal{C}^1$. Il y a donc existence et unicité de la solution maximale x du problème (P) et celle-ci est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

1. Considérons $\varphi(t) = f(x(t))$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée

$$\varphi'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t)\rangle = -\|x'(t)\|^2 \leqslant 0.$$

Donc φ est décroissante et pour tout $t \geqslant 0$, $f(x(t)) \leqslant f(0)$. Or il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que si $\|y\| \geqslant \mathrm{A}$, $f(y) > f(0)$. Donc, pour $t \geqslant 0$, $x(t)$ reste dans la boule fermée B de centre 0 et de rayon A. Comme $\operatorname{grad} f$ est continue sur ce compact, elle y est bornée et finalement $x' = -\operatorname{grad} f(x)$ reste bornée sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathrm{I}$. Si $\beta = \sup \mathrm{I}$ est réel, x' est donc intégrable sur $[0, \beta[$ et x admet une limite finie en β. La fonction x se prolonge par continuité en β et comme $x' = -\operatorname{grad} f(x)$, x' possède une limite finie en β. Ainsi, par le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de x est dérivable sur $\mathrm{I} \cup \{\beta\}$ et il est solution de l'équation différentielle. Cela est contraire au caractère maximal de la solution x. Donc $\beta = +\infty$ et x est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. La fonction f est continue sur la boule compacte B de centre 0 et de rayon A. Elle admet donc un minimum sur cette boule en un point ω. Comme pour $\|y\| \geqslant \mathrm{A}$, $f(y) > f(0)$, ω est un minimum de f sur $\mathbb{R}^n$. En ce point là, on a un point critique *i.e.* $\operatorname{grad} f(\omega) = 0$.

3. Les points y où f est minimale sont des points critiques *i.e.* tels que $\operatorname{grad} f(y) = 0$: nécessairement $y = \omega$ et ω est un minimum global strict pour f.

La fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, minorée par $f(\omega)$ et elle admet donc une limite $\ell \geqslant f(\omega) = m$ en $+\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell > m$. Par continuité de f, il existe un voisinage ouvert de ω contenu dans B tel que $f(y) < \ell$ sur ce voisinage. Considérons le complémentaire K dans B de ce voisinage ouvert. C'est un compact qui contient $x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Comme le gradient ne s'annule pas sur ce compact et est continu, il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in \mathrm{K}$, $\|\operatorname{grad} f(y)\| \geqslant r$. On en déduit que $\|x'(t)\| \geqslant r^2$ et $\varphi'(t) \leqslant -r^2$ pour tout t et finalement φ tend vers $-\infty$: contradiction. On a donc

$$\lim_{t\to+\infty} f(x(t)) = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \ell = m.$$

4. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ tendant vers l'infini. Montrons que $(x(t_n))$ converge vers ω. Comme cette suite est bornée (elle reste dans B), si tel n'était pas le cas, elle posséderait une valeur d'adhérence distincte de ω, disons ω'. Soit $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante avec $x(t_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega'$. Alors $\varphi(t_{\psi(n)}) = f(x(t_{\psi(n)}))$ converge vers $f(\omega') = m$: c'est impossible puisque ω est un minimum global strict. Donc $(x(t_n))$ converge vers ω et, par caractérisation séquentielle des limites, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \omega$. ◁

Dans l'exercice suivant, on s'intéresse au cas où f possède un minimum strict local. Dans ce cas, on va encore prouver que les courbes intégrales sont convergentes vers le minimum pour peu que l'on choisisse la condition initiale proche de ce minimum.

3.41. Théorème de stabilité de Liapounov

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on considère le problème de Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} x' = -\operatorname{grad} f(x) \\ x(0) = y_0. \end{cases}$$

On note x_{y_0} l'unique solution maximale de $(*)$. Soit x_0 un point critique de f. On suppose que la matrice $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.

Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que l'on ait, pour tout $y_0 \in \mathrm{V}$, $\lim_{t\to+\infty} x_{y_0}(t) = x_0$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Comme $\operatorname{grad} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons l'existence et l'unicité de x_{y_0} solution maximale du problème $(*)$. Notons I son intervalle ouvert de définition. Notons pour simplifier $x = x_{y_0}$.

Pour $t \in \mathrm{I}$, on pose $\varphi(t) = f(x(t))$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée :

$$\varphi'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t)\rangle = -\|x'(t)\|^2 \leqslant 0.$$

En particulier, elle est décroissante sur I.

D'après le cours, f possède en x_0 un minimum local strict. Prenons donc $r > 0$ tel que pour tout y dans $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, $f(y) > f(x_0)$. Soit S la sphère de centre x_0 et de rayon r : c'est un compact sur lequel f continue atteint son minimum que nous appelons m. On a $m > f(x_0)$ et par continuité de f en x_0, il existe $s > 0$ tel que pour tout $y \in \mathrm{B}(x_0, s)$, on a $f(y) < m$.

Si on choisit une condition initiale y_0 dans $\mathrm{B}(x_0, s)$, la fonction φ étant décroissante, on a pour tout $t \in \mathrm{I}$ positif, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) = f(y_0) < m$. En particulier, $f(x(t)) < m$ pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$, $x(t)$ reste à l'intérieur de $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$.

Montrons que I contient $\mathbb{R}_+$. Puisque grad f est continue sur le compact $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$, cette application y est bornée. Si $\beta = \sup \mathrm{I}$ est réel, $x' = -\operatorname{grad} f(x)$ reste bornée sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathrm{I}$. La fonction x' est donc intégrable sur $[0, \beta[$ et x admet une limite finie en β. La fonction x se prolonge par continuité en β et comme $x' = -\operatorname{grad} f(x)$, x' possède une limite finie en β. Ainsi, par le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de x est dérivable sur $\mathrm{I} \cup \{\beta\}$ et il est solution de l'équation différentielle. Cela est contraire au caractère maximal de la solution x. Donc $\beta = +\infty$ et x est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$. Tout d'abord, vérifions que pour y proche de x_0, différent de x_0, on a grad $f(y) \neq 0$. Pour cela, faisons un développement limité à l'ordre 1 de la différentielle de f en x_0 : pour $h \in \mathbb{R}^n$, tendant vers 0, on a en posant $\mathrm{A} = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$,

$$\mathrm{d}f_{x_0+h} = \mathrm{d}f_{x_0} + {}^t h\mathrm{A} + o(\|h\|) = {}^t h\mathrm{A} + o(\|h\|),$$

qui, lorsqu'on évalue en h donne

$$\mathrm{d}f_{x_0+h}(h) = \langle \operatorname{grad} f(x_0 + h), h \rangle = {}^t h\mathrm{A}h + o(\|h\|^2).$$

Si $\lambda > 0$ désigne la plus petite valeur propre de A, pour h proche de 0, on a ${}^t h\mathrm{A}h \geqslant \lambda \|h\|^2$ et

$$\langle \operatorname{grad} f(x_0 + h), h \rangle \geqslant \lambda \|h\|^2 + o(\|h\|^2) \geqslant \frac{\lambda}{2} \|h\|^2.$$

En particulier, pour $h \neq 0$ proche de 0, on a grad $f(x_0 + h) \neq 0$.

Supposons quitte à réduire r, que grad f ne s'annule qu'en x_0 sur $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$. Alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = f(x_0)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas. Comme φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \geqslant f(x_0)$, elle admet une limite $\ell > f(x_0)$. Par continuité de f, il existe $\rho > 0$ tel que si $y \in \mathrm{B}(x_0, \rho)$, $f(y) < \ell$. Il apparaît que $x(t)$ reste dans la couronne $\mathrm{C} = \{y \in \mathbb{R}^n, \rho \leqslant \|y - x_0\| \leqslant r\}$.

Or, il s'agit là d'un compact sur lequel la fonction continue $\|\operatorname{grad} f\|$ atteint son minimum $\mu > 0$. On a donc pour tout $t \geqslant 0$, $\|x'(t)\| \geqslant \mu$ et $\varphi'(t) \leqslant -\mu^2$: il s'ensuit que φ diverge vers $-\infty$ ce qui n'est pas le cas. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = f(x_0)$.

Montrons enfin que $x(t)$ tend vers x_0 en $+\infty$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ tendant vers l'infini. Montrons que $(x(t_n))$ converge vers x_0. Comme cette suite est bornée (elle reste dans $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$), si ce n'est pas le cas, elle possède une valeur d'adhérence x_1 distincte de x_0. Soit $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante avec $x(t_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_1$. Alors $\varphi(t_{\psi(n)}) = f(x(t_{\psi(n)}))$ converge vers $f(x_1) = f(x_0)$: c'est impossible puisque x_0 est un minimum strict sur $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$. Donc $(x(t_n))$ converge vers x_0 et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$, ceci quelle que soit la condition initiale $y_0 \in \mathrm{V} = \mathrm{B}(x_0, s)$. ◁

Dans l'exercice précédent, en x_0 point critique de f, le gradient est nul et $t \longmapsto x_0$ est une solution maximale constante sur $\mathbb{R}$. On a démontré que si on modifie légèrement la condition initiale, les solutions maximales sont toujours définies sur $\mathbb{R}_+$ et convergent vers x_0. On peut alors parler de stabilité du système différentiel en x_0. Nous allons préciser cela en donnant quelques définitions. Soit (E) $x' = f(t, x)$.

(i) Soit φ_0 une solution de (E) *définie sur un intervalle contenant $[0, +\infty[$. On dit que φ_0 est stable sur $[0, +\infty[$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que toute solution maximale φ de* (E) *telle que $\|\varphi(0) - \varphi_0(0)\| \leqslant \eta$ est définie sur un intervalle contenant $[0, +\infty[$ et vérifie, pour tout $t \geqslant 0$, $\|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| \leqslant \varepsilon$.*

(ii) Si de plus on a $\lim\limits_{t\to+\infty} (\varphi(t) - \varphi_0(t)) = 0$, on dit que φ_0 est asymptotiquement stable.

Cela est souvent appliqué à des systèmes $x' = f(x)$ avec $\varphi(t) = x_0$ où x_0 est un point d'annulation de f. Cette solution constante est appelée point d'équilibre.

Dans l'exercice suivant, on s'intéresse à ces questions de stabilité en comparant la situation d'une équation non linéaire autonome $x' = f(x)$ à celle du système linéarisé au voisinage d'un point critique. On se place dans le cas où la différentielle de f en ce point a ses valeurs propres non réelles de partie réelle strictement négative (cas d'un foyer stable).

3.42. Stabilité de la solution nulle d'un système différentiel (1)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on suppose que A n'a pas de valeur propre réelle et que $a + d < 0$.

1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ et donner l'allure des solutions.

2. Soient f_1 et f_2 deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, nulles en $(0,0)$ et de différentielle nulle en $(0,0)$. Montrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre isolé et stable pour le système différentiel

$$\begin{cases} x' = ax + by + f_1(x,y) \\ y' = cx + dy + f_2(x,y). \end{cases}$$

Est-il asymptotiquement stable ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. En posant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système s'écrit $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Comme A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous allons chercher les solutions complexes. Par hypothèse A possède deux valeurs propres complexes conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. Posons $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$. Soit Z_1 un vecteur propre (complexe) associé à λ. Comme A est réelle, $\overline{\mathrm{Z}_1}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$. Les solutions complexes du système différentiel sont les fonctions

$$\mathrm{X} : t \longmapsto \mathrm{C}e^{\lambda t}\mathrm{Z}_1 + \mathrm{C}'e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathrm{Z}_1}.$$

où $(\mathrm{C}, \mathrm{C}') \in \mathbb{C}^2$. Une telle fonction est réelle si et seulement si $\mathrm{C}' = \overline{\mathrm{C}}$. Le plan réel des solutions réelles du système est donc formé des fonctions $t \longmapsto 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{C}e^{\lambda t}\mathrm{Z}_1)$ soit

$$t \longmapsto e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\sin\beta t)\,\mathrm{Re}(\mathrm{Z}_1) + e^{\alpha t}(a\sin\beta t + b\cos\beta t)\,\mathrm{Im}(\mathrm{Z}_1)$$

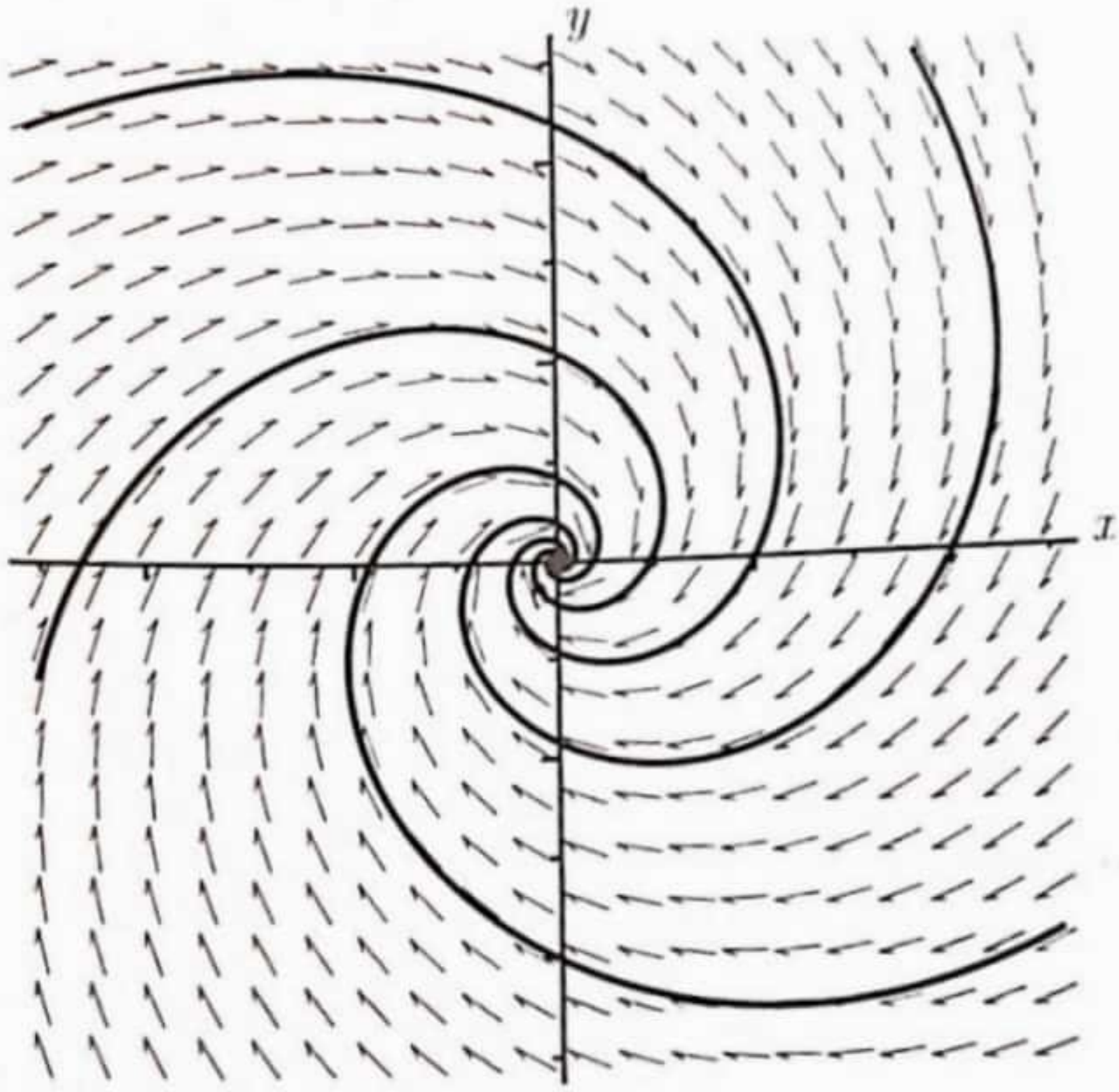
où l'on a posé $2\mathrm{C} = a + ib$. Les vecteurs $\mathrm{Re}(\mathrm{Z}_1)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Z}_1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ (sinon Z_1 et $\overline{\mathrm{Z}_1}$ seraient $\mathbb{C}$-colinéaires et on aurait $\lambda = \bar{\lambda}$). On voit, en travaillant dans cette base, que les trajectoires sont des spirales logarithmiques. En effet, si on écrit $a + ib = \mathrm{R}e^{i\varphi}$, avec R réel positif et φ réel, les solutions s'écrivent dans la base $(\mathrm{Re}(\mathrm{Z}_1), \mathrm{Im}(\mathrm{Z}_1))$

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) \\ y = \mathrm{R}e^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi). \end{cases}$$

Il ne s'agit de *vraies* spirales logarithmique que si la base $(\mathrm{Re}(\mathrm{Z}_1), \mathrm{Im}(\mathrm{Z}_1))$ est orthonormée, ce qui est le cas dans l'exemple étudié plus bas.

Comme $\alpha = \dfrac{a+d}{2} < 0$, toutes les solutions $\mathrm{X}(t)$ tendent vers le point stationnaire $(0,0)$ lorsque $t \to +\infty$: ce point est asymptotiquement stable. On parle de foyer stable.

Voici une représentation de quelques trajectoires en prenant la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$:



2. • Remarquons que le système étudié ici résulte d'une perturbation du système linéaire étudié dans la première question.

Rappelons qu'un point d'équilibre d'un système différentiel autonome est une solution constante. Tous les systèmes linéaires ont $(0,0)$ comme

d'équilibre. Ici les hypothèses sur f_1 et f_2 impliquent que $(0,0)$ est encore un point d'équilibre pour le système perturbé.

Démontrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre isolé consiste à montrer qu'il existe un voisinage de $(0,0)$ ne contenant pas de point d'équilibre à part $(0,0)$.

Considérons la fonction $F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in \mathbb{R}^2$. Par hypothèse la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, nulle et de différentielle nulle en $(0,0)$.

Soit (x_0, y_0) un point d'équilibre quelconque. On a alors

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + f_1(x_0,y_0) = 0 \\ cx_0 + dy_0 + f_2(x_0,y_0) = 0 \end{cases},$$

ce qui peut s'écrire

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -F(x_0,y_0)$$

et donc, la matrice A étant inversible (elle n'a pas de valeur propre réelle)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{F}(x_0, y_0).$$

Les hypothèses sur F impliquent qu'on a $\|\mathrm{F}(x,y)\| = o(\|(x,y)\|)$ au voisinage de $(0,0)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que $\|(x,y)\| \leqslant \eta$ implique $\|\mathrm{F}(x,y)\| \leqslant \varepsilon\|(x,y)\|$. Si (x_0,y_0) est un point d'équilibre tel que $\|(x_0,y_0)\| \leqslant \eta$, on a alors

$$\|(x_0,y_0)\| = \|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{F}(x_0,y_0)\| \leqslant |\!|\!|\mathrm{A}^{-1}|\!|\!|\,\|\mathrm{F}(x_0,y_0)\| \leqslant \varepsilon |\!|\!|\mathrm{A}^{-1}|\!|\!|\,\|(x_0,y_0)\|.$$

Si l'on choisit $\varepsilon < \dfrac{1}{|\!|\!|\mathrm{A}^{-1}|\!|\!|}$, on obtient pour $\|(x_0,y_0)\| \leqslant \eta$, $\|(x_0,y_0)\| = 0$ et donc $(x_0,y_0) = (0,0)$. Le point $(0,0)$ est donc le seul point d'équilibre de la boule de centre $(0,0)$ et de rayon η ; c'est un point d'équilibre isolé.

• Montrons que $\varphi_0 = 0$ est une solution constante stable.

Notre équation différentielle s'écrit : $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{F}(\mathrm{X})$. La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$, nous sommes dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Étant donné $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale φ telle que $\varphi(0) = \mathrm{X}_0$. Celle-ci est définie sur un intervalle ouvert dont l'intersection avec $\mathbb{R}_+$ est $\mathrm{I} = [0, \mathrm{T}[$, avec $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Appliquons la méthode de la variation de la constante et écrivons φ sous la forme : $\varphi(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{C}(t)$, où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$. La fonction φ est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, $\mathrm{C}'(t) = e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{F}(\varphi(t))$. Cela donne pour $t \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{C}(t) = \mathrm{C}(0) + \int_0^t e^{-u\mathrm{A}}\mathrm{F}(\varphi(u))\mathrm{d}u = \mathrm{X}_0 + \int_0^t e^{-u\mathrm{A}}\mathrm{F}(\varphi(u))\mathrm{d}u$$

et donc $\varphi(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}(0) + \int_0^t e^{(t-u)\mathrm{A}}\mathrm{F}(\varphi(u))\mathrm{d}u$.

Commençons par majorer $|\!|\!|e^{t\mathrm{A}}|\!|\!|$ pour $t \geqslant 0$, $|\!|\!|\ |\!|\!|$ désigne la norme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle s'écrit $\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}\mathrm{P}$, avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\mathrm{A}} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda} t} \end{pmatrix}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{pmatrix}\mathrm{P}.$$

Il existe donc des matrices U et V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\mathrm{A}} = e^{\alpha t}\cos\beta t\ \mathrm{U} + e^{\alpha t}\sin\beta t\ \mathrm{V}.$$

On en déduit $|\!|\!|e^{t\mathrm{A}}|\!|\!| \leqslant e^{\alpha t}(|\!|\!|\mathrm{U}|\!|\!| + |\!|\!|\mathrm{V}|\!|\!|)$. Il existe donc une constant $\mathrm{K} > 0$ telle, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\!|\!|e^{t\mathrm{A}}|\!|\!| \leqslant \mathrm{K}e^{\alpha t}$. On pose $\gamma = -\alpha$, pour se ramener à une constante positive. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\!|\!|e^{t\mathrm{A}}|\!|\!| \leqslant \mathrm{K}e^{-\gamma t}$.

Revenons à la solution φ. Nous allons démontrer que si $\|X_0\|$ est assez petit, alors φ est bornée par une constante qu'on peut choisir arbitrairement petite et que, pour un tel choix de X_0, la fonction φ est définie sur $[0, +\infty[$.

En utilisant la majoration de e^{tA}, on obtient la majoration suivante : pour tout $t \in I$,

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \|X_0\| K e^{-\gamma t} + \int_0^t K e^{-\gamma(t-u)} \|F(\varphi(u))\| du. \qquad (*)$$

Utilisons maintenant le fait que $\|F(X)\| = o(\|X\|)$ au voisinage de 0. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe δ appartenant à $]0, \varepsilon[$, tel que si $\|X\| \leqslant \delta$, alors $\|F(X)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{K}\|X\|$.

Supposons $\|X_0\| < \delta$. On ne peut pas majorer $\|F(\varphi(t))\|$ dans $(*)$, parce qu'on n'a pas nécessairement $\|\varphi(t)\| \leqslant \delta$ pour tout $t \in I$. On opère donc en deux temps. Soit

$$T' = \sup\{t \in I,\ \|\varphi(t)\| \leqslant \delta\},$$

avec éventuellement $T' = +\infty$. Par continuité de φ, on a $T' > 0$. On a alors, pour tout $t \in [0, T'[$,

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \|X_0\| K e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} \varepsilon \|\varphi(u)\| du,$$

c'est-à-dire

$$e^{\gamma t}\|\varphi(t)\| \leqslant K\|X_0\| + \varepsilon \int_0^t e^{\gamma u}\|\varphi(u)\| du.$$

Le lemme de Gronwall (voir page 120) fournit alors la majoration : pour tout $t \in [0, T'[$,

$$e^{\gamma t}\|\varphi(t)\| \leqslant K\|X_0\| e^{\varepsilon t}$$

et donc $\|\varphi(t)\| \leqslant K\|X_0\| e^{(-\gamma+\varepsilon)t}$. Supposons que $\varepsilon < \gamma$. Si on choisit X_0 tel que $\|X_0\| < \eta = \min\left(\delta, \frac{\delta}{2K}\right)$, on a alors, pour tout $t \in [0, T'[$, $\|\varphi(t)\| \leqslant \frac{\delta}{2}$. Montrons qu'on a alors $T' = T$. Raisonnons par l'absurde et supposons $T' < T$. On vient de voir que si $0 \leqslant t < T'$, $\|\varphi(t)\| \leqslant \frac{\delta}{2}$. On a par continuité $\|\varphi(T)\| \leqslant \frac{\delta}{2}$. On peut alors trouver T'' tel que $T' < T'' < T$ tel que, pour tout $t \in [T', T'']$, on ait $\|\varphi(t)\| < \delta$, ce qui est contraire à la définition de T'. On a donc $T' = T$ et pour tout $t \in [0, T[$, $\|\varphi(t)\| \leqslant \delta$.

Montrons maintenant que, pour le même choix de X_0, on a $T = +\infty$. Raisonnons par l'absurde. D'après ce qui précède, on a pour tout $t \in I$,

$\|\varphi(t)\| \leqslant \delta$. L'application $X \in \mathbb{R}^2 \longmapsto AX+F(X) \in \mathbb{R}^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est bornée sur la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon δ. Il existe donc $k > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|\varphi'(t)\| \leqslant k$. Alors classiquement, φ' est intégrable sur $[0, T[$ et φ se prolonge par continuité sur $[0, T]$. Le théorème de la limite de la dérivée permet de dire que ce prolongement est dérivable sur $[0, T]$ et constitue une solution définie sur $[0, T]$, ce qui est contradictoire avec le fait que φ est maximale. On a donc $T = +\infty$.

Ce qui précède montre que si $\|X_0\| < \eta$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on $\|\varphi(t)\| \leqslant \delta < \varepsilon$, d'après le choix de δ. On a donc démontré que 0 est une solution stable

Reste à démontrer la stabilité asymptotique. Reprenons notre majoration de φ. On a donc, pour tout $t \geqslant 0$, $\|\varphi(t)\| \leqslant K\|X_0\|e^{(-\gamma+\varepsilon)t}$. Puisque $0 < \varepsilon < \gamma$, on en déduit que $\varphi(t)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Conclusion. Nous avons démontré que, pour $0 < \varepsilon < \gamma$, il existe $\eta > 0$ tel que toute solution maximale φ de l'équation différentielle avec $\|\varphi(0)\| < \eta$ est définie sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$\begin{cases} (i) \text{ pour tout } t \geqslant 0, \ \|\varphi(t)\| < \varepsilon; \\ (ii) \ \lim\limits_{+\infty} \varphi = 0. \end{cases}$$

Le point $(0,0)$ est une solution asymptotiquement stable sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle. ◁

On reprend le même problème en dimension n, mais avec une matrice symétrique réelle.

3.43. Stabilité de la solution nulle d'un système différentiel (2)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, définie négative. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et $df(0) = A$.

1. Soit $(*)$ $x' = Ax$. Montrer que toute solution maximale de $(*)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$.

2. Soit $(**)$ $x' = f(x)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|x_0\| \leqslant \varepsilon$, la solution maximale de $(**)$ telle que $x(0) = x_0$ est définie sur un intervalle contenant $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 en $+\infty$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. L'équation $(*)$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants : les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Les valeurs propres de A sont toutes strictement négatives.

considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée de vecteurs propres (qui existe par application du théorème spectral). e_i étant associé à la valeur propre λ_i. Alors $e^{t\mathrm{A}}e_i = e^{\lambda_i t}e_i$ tend vers 0 en $+\infty$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{A}}x_0 = 0$. Toute solution de $(*)$ converge vers 0 en $+\infty$.

2. On a, au voisinage de 0,

$$f(x) = \mathrm{A}x + o(\|x\|) \text{ et } \langle f(x), x\rangle = \langle \mathrm{A}x, x\rangle + o(\|x\|^2).$$

Posons $\lambda = \max(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$\langle \mathrm{A}x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \lambda\|x\|^2.$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x \in \mathbb{R}^n$ de norme $\|x\| \leqslant \varepsilon$, on a

$$\langle f(x), x\rangle \leqslant \langle \mathrm{A}x, x\rangle - \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 \leqslant \frac{\lambda}{2}\|x\|^2.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| \leqslant \varepsilon$ et x la solution maximale de l'équation $(**)$ telle que $x(0) = x_0$, qui existe et est unique car f est de classe $\mathcal{C}^1$. Si $x_0 = 0$, comme $f(0) = 0$, la fonction x est la fonction nulle, qui vérifie les propriétés voulues. On suppose désormais que $x_0 \neq 0$. La fonction x est définie sur un intervalle I. On a, pour tout $t \in \mathrm{I}$ tel que $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$,

$$(\|x\|^2)'(t) = 2\langle f(x(t)), x(t) \leqslant \lambda\|x(t)\|^2 \leqslant 0$$

et même $(\|x\|^2)'(t) < 0$ si $x(t) \neq 0$. Comme $x(0) \neq 0$, la fonction $\|x\|^2$ est strictement décroissante, donc vérifie $\|x(t)\| < \varepsilon$ dans un voisinage de 0. Montrons que l'on a, pour tout $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$, $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $t > 0$ tel que $\|x(t)\| > \varepsilon$ et on considère $\alpha = \inf\{t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+,\ \|x(t)\| > \varepsilon\}$. D'après ce qui précède, on a $\alpha > 0$ et par continuité, $\|x(\alpha)\| = \varepsilon$. On en déduit $(\|x\|^2)'(\alpha) < 0$ et $\|x\|$ décroît dans un voisinage de α, ce qui contredit la définition de α. On a donc pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ et $\|x\|$ décroît.

On en déduit que la fonction x est bornée et que son image est contenue dans un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^n$, la dérivée $x' = f \circ x$ est bornée. Supposons que I est majoré et notons $b = \sup \mathrm{I}$. La fonction x' est bornée donc intégrable sur $[0, b[$. On en déduit que x a une limite finie ℓ en b, puis que x' a pour limite $f(\ell)$ en b. La fonction x possède un prolongement par continuité en b qui se retrouve être dérivable en b (par le théorème de la limite de la dérivée) et qui vérifie l'équation différentielle : cela contredit le caractère maximal de x. Ainsi I contient $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $t \geqslant 0$,

$$(\|x\|^2)'(t) \leqslant \lambda\|x(t)\|^2.$$

La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \|x(t)\|^2 e^{-\lambda t}$ est décroissante. On a donc, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \leqslant \|x(0)\|^2$ et finalement

$$\|x(t)\|^2 \leqslant \|x(0)\|^2 e^{\lambda t},$$

inégalité que l'on pouvait obtenir également par application du lemme de Gronwall. Comme $\lambda < 0$, on en déduit que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$. ◁

On vient donc de démontrer que si la différentielle de f en un point d'équilibre de $x' = f(x)$ est symétrique, définie négative, ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Nous entamons maintenant une série d'exercices portant sur des équations générales d'ordre 2. Nous savons que l'on peut se ramener à l'ordre 1 en surdimensionnant l'équation : plus précisément, on se donne une équation du type $y'' = f(x, y, y')$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I} \times \mathrm{U}$ (I intervalle ouvert, U ouvert de $\mathbb{R}^2$). On pose alors $\mathrm{Y} = (y, z)$ et $\mathrm{F}(x, y, z) = (z, f(x, y, z))$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ aussi. Alors toute solution de $y'' = f(x, y, y')$ est la première composante d'une solution Y de $\mathrm{Y}' = \mathrm{F}(x, \mathrm{Y})$. De plus, par application du théorème de Cauchy-Lipschitz, si on fixe $x_0 \in \mathrm{I}$ et $(y_0, y_1) \in \mathrm{U}$, il existe une unique solution de $y'' = f(x, y, y')$ avec $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ (c'est la première composante de Y solution du problème de Cauchy $\mathrm{Y}' = \mathrm{F}(x, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{Y}(x_0) = (y_0, y_1)$). Cela porte encore le nom de problème de Cauchy et l'on peut généraliser à des ordres supérieurs.

Voici un premier exemple où la résolution est explicite.

3.44. Une équation autonome d'ordre 2

Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Si y est une solution, on a $2y''y' = 4y^3y'$ donc, compte tenu des conditions initiales, $y'^2 = y^4$. Soit I le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $y' > 0$ (un tel intervalle existe car $y'(0) = 1$). On a, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $y'(t) = y^2(t) > 0$ donc $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$. On en déduit, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$t = \int_0^t \mathrm{d}u = \int_0^t \frac{y'(u)}{y^2(u)}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{y(u)}\right]_0^t = -\frac{1}{y(t)} + 1$$

puis

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

On vérifie que, réciproquement, cette fonction est solution du problème de Cauchy. Elle est définie sur $]-\infty, 1[$ et ne peut pas se prolonger au-delà car sa limite en 1 est $+\infty$. ◁

3.45. Une équation du second ordre

Soit $y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$2y'' = (1+y'^2)(y - xy'), \quad \lim_{+\infty} y = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{0} y' = -\infty.$$

Montrer que y est convexe et strictement positive.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Posons $z = y - xy'$. On a alors $z' = -xy'' = -\frac{1}{2}x(1+y'^2)z$. On en déduit qu'il existe un réel C tel que, pour $x > 0$, on ait

$$z(x) = Ce^{-\frac{1}{2}\int_0^x t(1+(y'(t))^2)\,dt}.$$

Si $C = 0$, z est la fonction nulle et $y' = \frac{1}{x}y$. On en déduit qu'il existe un réel A tel que, pour tout $x > 0$, $y(x) = Ax$. On ne peut pas avoir alors $\lim_0 y' = -\infty$. Ainsi C n'est pas nul, donc z ne s'annule pas. On en déduit qu'il en est de même de z' et de y''. La fonction y'' garde donc un signe constant et y' est strictement monotone. Comme la limite de y' en 0 est $-\infty$, y' est donc strictement croissante, donc y est convexe.

La fonction $z = y - xy'$ est strictement positive comme y''. On en déduit que $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2} < 0$. La fonction $\frac{y}{x}$ décroît et comme sa limite en $+\infty$ est nulle, elle est strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que y est strictement positive. ◁

Pour les équations du second ordre, à la place de la condition de Cauchy sur la solution et sa dérivée, on peut chercher à imposer la valeur de la solution en deux points distincts. On parle alors de problème aux limites. Voici deux exemples.

3.46. Équation différentielle $\varphi'' = \dfrac{k}{\sqrt{\varphi}}$

1. On suppose qu'il existe une fonction φ définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue et de classe C^2 sur $]0,1[$, solution du problème (E_0)

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1 \ \text{ et sur } \ ]0,1[,\ \ \varphi'' = \frac{k}{\sqrt{\varphi}},$$

où k est une constante réelle. Montrer que $k \leqslant \dfrac{4}{9}$.

2. Soit $k \in \left]0, \dfrac{4}{9}\right[$. Montrer l'existence d'une solution de (E_0).

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On peut supposer $k > 0$, sinon il n'y a rien à démontrer. Sur $]0,1[$, la fonction φ est strictement positive et $2\varphi'\varphi'' = \dfrac{2k\varphi'}{\sqrt{\varphi}}$. On en déduit qu'il existe une constante C telle que $\varphi'^2 = 4k\sqrt{\varphi} + \mathrm{C}$. On obtient ensuite $\lim\limits_0 \varphi'^2 = \mathrm{C}$, car $\lim\limits_0 \varphi = 0$. Cela montre que $\mathrm{C} \geqslant 0$. On a donc $\varphi'^2 > 0$ sur $]0,1[$, donc φ' ne s'annule pas sur $]0,1[$. Elle garde un signe constant. Ainsi φ est strictement monotone sur $[0,1]$ et comme $\varphi(1) > \varphi(0)$, elle est strictement croissante. Sur $]0,1[$, on a $\varphi'^2 = 4k\sqrt{\varphi} + \mathrm{C} \geqslant 4k\sqrt{\varphi}$ et donc $\varphi' \geqslant 2\sqrt{k}\varphi^{\frac{1}{4}}$. En intégrant, on obtient

$$2\sqrt{k} = \int_0^1 2\sqrt{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4}{3}\left[\varphi(t)^{\frac{3}{4}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

On en déduit que $k \leqslant \dfrac{4}{9}$.

2. D'après la question 1, si φ est une solution de (E_0), il existe une constante $\mathrm{C} \geqslant 0$ telle que $\varphi'^2 = 4k\sqrt{\varphi} + \mathrm{C}$ et $\varphi' \geqslant 0$. On obtient donc $\dfrac{\varphi'}{(4k\sqrt{\varphi} + \mathrm{C})^{\frac{1}{2}}} = 1$. On suppose $\mathrm{C} > 0$, car d'après la question 1, $\mathrm{C} = 0$ conduit à $k = \dfrac{4}{9}$.

Considérons la fonction $f : u \longmapsto \dfrac{1}{(4k\sqrt{u} + \mathrm{C})^{\frac{1}{2}}}$ et F la primitive sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 0 de f. La fonction F est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ (car F a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, puisque f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$). On veut avoir $(f \circ \varphi)\,\varphi' = (\mathrm{F} \circ \varphi)' = 1$. Comme on veut de plus $\varphi(0) = 0$, il faut $(\mathrm{F} \circ \varphi)(0) = 0$ et donc $\mathrm{F} \circ \varphi = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire $\varphi = \mathrm{F}^{-1}$ sur $[0,1]$.

Réciproquement si φ est définie ainsi, on a $\varphi(0) = 0$. Comme on a $\mathrm{F}' = f > 0$, la fonction $\mathrm{F}^{-1} = \varphi$ est dérivable sur $[0, 1]$. En dérivant, on obtient

$$(f \circ \varphi)\, \varphi' = \frac{\varphi'}{(4k\sqrt{\varphi} + \mathrm{C})^{\frac{1}{2}}} = 1$$

et donc $\varphi' = (4k\sqrt{\varphi} + \mathrm{C})^{\frac{1}{2}}$. Cela montre que φ' est dérivable sur $]0, 1]$. En élevant φ' au carré et en dérivant, on obtient

$$2\varphi'\varphi'' = \frac{2k\varphi'}{\sqrt{\varphi}}$$

et donc $\varphi'' = \dfrac{k}{\sqrt{\varphi}}$, puisque φ' ne s'annule pas.

Ainsi φ est continue, de classe C^2 sur $]0, 1[$ et vérifie l'équation différentielle voulue. Il reste à montrer que l'on peut choisir $\mathrm{C} > 0$ tel que $\varphi(1) = 1$. Cette condition équivaut à $\mathrm{F}(1) = 1$, c'est-à-dire à $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(4k\sqrt{u} + \mathrm{C})^{\frac{1}{2}}} = 1$. Notons $g(\mathrm{C})$ cette dernière intégrale et montrons qu'elle est continue pour la variable $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$. La fonction

$$h : (u, \mathrm{C}) \longmapsto \frac{1}{(4k\sqrt{u} + \mathrm{C})^{\frac{1}{2}}}$$

est continue sur $]0, 1] \times \mathbb{R}_+$ et $0 \leqslant h(u, \mathrm{C}) \leqslant h(u, 0)$. Or la fonction dominante $u \longmapsto \mathrm{F}(u, 0) = \dfrac{1}{2\sqrt{k}u^{1/4}}$ est intégrable sur $]0, 1]$. Nous savons alors que $g : \mathrm{C} \longmapsto \displaystyle\int_0^1 h(u, \mathrm{C})\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est clairement décroissante. Comme $0 \leqslant g(\mathrm{C}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{C}}}$, on a $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. Pour qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $g(\mathrm{C}) = 1$, il suffit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que $g(0) > 1$. Or on a $g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{k}(u)^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3\sqrt{k}} > 1$ car $k \in \left]0, \dfrac{4}{9}\right[$. On peut donc trouver $\mathrm{C} > 0$ tel que $g(\mathrm{C}) = 1$, ce qui nous fournit une solution au problème posé. ◁

L'équation étudiée provient d'un modèle simplifié pour décrire le potentiel crée entre deux plaques métalliques infinies situées en $x = 0$ et $x = 1$. Remarquons que dans le cas $k = \dfrac{4}{9}$ la fonction puissance $x \longmapsto x^{4/3}$ est solution du problème posé.

3.47. Solution de $u'' + f(u) = 0$ avec $u(-1) = u(1) = 0$

Soient f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$u'' + f(u) = 0, \quad u(1) = u(-1) = 0, \quad \forall x \in]-1, 1[\quad u(x) > 0.$$

Montrer que u est paire.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Considérons la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = u(-x)$. On va montrer que $v = u$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$v''(x) + f(v(x)) = u''(-x) + f(u(-x)) = 0.$$

La fonction v est solution de la même équation différentielle que u. La fonction f étant de classe C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Pour prouver que $v = u$, il suffit de vérifier $v(1) = u(1)$ et $v'(1) = u'(1)$. La première condition est réalisée car $v(1) = u(-1) = 0 = u(1)$. On va comparer $v'(1) = -u'(-1)$ à $u'(1)$.

Soit F une primitive de f. De $2u'u'' + 2u'f(u) = 0$, on déduit qu'il existe une constante K telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'^2 + 2\mathrm{F}(u) = \mathrm{K}$. On obtient pour $x = \pm 1$, $\mathrm{K} = 2\mathrm{F}(0) + u'(-1)^2 = 2\mathrm{F}(0) + u'(1)^2$. On en déduit que $u'(-1) = \pm u'(1)$. La fonction u étant positive sur $]-1, 1[$, on a, pour $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{u(x) - u(1)}{x - 1} = \dfrac{u(x)}{x - 1} < 0$. On en déduit que $u'(1) \leqslant 0$. Le même raisonnement conduit à $u'(-1) \geqslant 0$. On a donc $u'(-1) = -u'(1)$ et donc $v'(1) = -u'(-1) = u'(1)$.

Conclusion. On a donc $v = u$, c'est-à-dire u paire. ◁

3.48. Équation $u'' + u^{2n+1} = u$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (E) l'équation différentielle $u'' + u^{2n+1} = u$. Trouver les solutions non nulles u définies sur $\mathbb{R}$, positives, paires et telles que u^2 et u'^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Si $n = 0$ on a $u'' = 0$ donc u est affine et il n'y a pas de solution non nulle ayant les propriétés voulues. On suppose dorénavant $n > 0$.

• *Analyse.* Soit u une solution de (E) vérifiant toutes les conditions de l'énoncé. On a $2u'u'' + 2u'u^{2n+1} = 2uu'$ donc il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$u'^2 + \frac{1}{n+1}u^{2n+2} = u^2 + \mathrm{C}.$$

Comme u^2 et u'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, il en est de même de uu' en vertu de la majoration $|uu'| \leqslant \frac{1}{2}(u^2 + u'^2)$. Ainsi

$$u^2(x) = u^2(0) + 2\int_0^x u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t$$

a une limite finie en $\pm\infty$. Comme u^2 est intégrable cette limite est nécessairement nulle. Par ailleurs, la fonction $\frac{1}{n+1}u^{2n+2} - \mathrm{C}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car différence de fonctions intégrables, donc sa limite en $\pm\infty$ qui est $-\mathrm{C}$ est également nulle. On a donc $\mathrm{C} = 0$ et par conséquent

$$u'^2 = u^2 - \frac{1}{n+1}u^{2n+2}.$$

Nous allons essayer de nous ramener à une équation résolue en u'. La fonction u' n'est pas identiquement nulle car u n'est pas constante. Par ailleurs, on a $u'(0) = 0$ car u' est impaire. Considérons un intervalle maximal I sur lequel u' ne s'annule pas. On a $\dfrac{u'}{u\sqrt{1 - \dfrac{u^{2n}}{n+1}}} = \pm 1$ sur I.

Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $u(t)$ appartient à $\mathrm{J} =]0, (n+1)^{\frac{1}{2n}}[$ car u est positive. On pose, pour tout $u \in \mathrm{J}$,

$$\mathrm{F}(u) = \int_{(n+1)^{\frac{1}{2n}}}^{u} \frac{1}{x\sqrt{1 - \dfrac{x^{2n}}{n+1}}}\,\mathrm{d}x.$$

Cette intégrale existe, car lorsque t tend vers 1 on a $1 - t^{2n} \sim 2n(1-t)$ de sorte que

$$\frac{1}{x\sqrt{1 - \dfrac{x^{2n}}{n+1}}} \sim \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{4n}}\sqrt{2n}\sqrt{(n+1)^{\frac{1}{2n}} - x}},$$

pour x tendant vers $(n+1)^{\frac{1}{2n}}$. La fonction F est strictement croissante sur J et $\lim\limits_{u\to 0} \mathrm{F}(u) = -\infty$, car $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1 - \dfrac{x^{2n}}{n+1}}}$ est positive non intégrable au voisinage de 0. Elle réalise donc une bijection de J sur $]-\infty, 0[$.

On obtient qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{F}(u(t)) = \pm t + c.$$

Regardons alors ce qui se passe aux extrémités de I. Si a est une borne finie de I (et il y en a au moins une puisque $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$), u' tend vers 0 en a donc u tend vers 0 ou vers $(n+1)^{\frac{1}{2n}}$. Le premier cas est impossible, car si $u(t)$ tend vers 0 alors $\mathrm{F}(u(t))$ tend vers $-\infty$ et cela nécessite que t tende vers $\pm\infty$. Si $u(t)$ tend vers $(n+1)^{\frac{1}{2n}}$ en a, alors $\mathrm{F}(u(t))$ tend vers 0 et on obtient $c = \pm a$. Il découle de cela que les deux bornes de l'intervalle I ne peuvent pas être finies et on a $\mathrm{I} =]a, +\infty[$ ou $\mathrm{I} =]-\infty, a[$. On a de plus

$$u''(a) = u(a) - u(a)^{2n+1} = u(a)(1 - u(a)^{2n}) = -nu(a) < 0$$

donc a est un zéro isolé de u'. En appliquant ce qui précède de l'autre côté de a on peut affirmer que u' ne s'annule ni sur $]-\infty, a[$, ni sur $]a, +\infty[$. On a forcément $a = 0$ puisque $u'(0) = 0$. Sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, u' garde un signe constant. Comme u est positive et a pour limite 0 en $+\infty$, on a $u' < 0$ sur $]0, +\infty[$ et par imparité $u' > 0$ sur $]-\infty, 0[$.

Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$, $\mathrm{F}(u(t)) = -t + c$. Comme u' s'annule en 0, on a $\mathrm{F}(u(0)) = \mathrm{F}((n+1)^{\frac{1}{2n}}) = 0$ et $c = 0$. On obtient, pour $t \geqslant 0$, $u(t) = \mathrm{F}^{-1}(-t)$ et de même, pour $t \leqslant 0$, $u(t) = \mathrm{F}^{-1}(t)$.

• *Synthèse.* On vérifie que la fonction ainsi définie convient. Elle est positive et paire, continue sur $\mathbb{R}$. On a, pour $t > 0$,

$$u'(t) = -\frac{1}{\mathrm{F}'(u(t))} = -u(t)\sqrt{1 - \frac{u(t)^{2n}}{n+1}}$$

et

$$u''(t) = -u'(t)\sqrt{1 - \frac{u(t)^{2n}}{n+1}} + u(t)\frac{2nu'(t)u(t)^{2n-1}}{2(n+1)\sqrt{1 - \frac{u(t)^{2n}}{n+1}}}$$

$$= u(t)\left(1 - \frac{u(t)^{2n}}{n+1}\right) - \frac{n}{n+1}u(t)^{2n+1} = u(t) - u(t)^{2n+1}.$$

On obtient la même égalité pour $t < 0$. De plus, on a $\lim_{t\to 0} u'(t) = 0$, donc la fonction u est dérivable en 0 de dérivée nulle et u est de classe $\mathcal{C}^1$ en vertu du théorème de la limite de la dérivée. Enfin, on obtient $\lim_{t\to 0} u''(t) = u(0) - u(0)^{2n+1}$. Par le même théorème, la fonction est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle.

Il reste à justifier l'intégrabilité de u^2 et u'^2. Pour cela, on cherche un équivalent de ces fonctions en $+\infty$. Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1 - \dfrac{x^{2n}}{n+1}}}$ est positive non intégrable au voisinage de 0^+ avec $\dfrac{1}{x\sqrt{1 - \dfrac{x^{2n}}{n+1}}} \sim \dfrac{1}{x}$, on

a, quand $u \to 0^+$,

$$\mathrm{F}(u) \sim \int_{(n+1)^{\frac{1}{2n}}}^{u} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \sim \ln u.$$

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, on a $-t = \mathrm{F}(u(t)) \sim \ln u(t)$. Pour t assez grand, on a $\ln u(t) \leqslant -\dfrac{t}{2}$ et donc $u(t) \leqslant e^{-\frac{t}{2}}$ et $u(t)^2 \leqslant e^{-t}$, ce qui montre l'intégrabilité de u^2 sur $\mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}_-$ par parité. Comme $\lim_0 u = 0$, on a au voisinage de $+\infty$, $u'(t) \sim -u(t)$ et $u'(t)^2 \sim u(t)^2$, ce qui montre l'intégrabilité de u'^2 sur $\mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}_-$ par imparité.

Conclusion. Le problème posé possède une unique solution. ◁

3.49. Équation $u'' + au' + b\sin u = 0$

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' soit bornée. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

2. Soit a et b deux constantes positives. Soit θ une solution maximale de l'équation différentielle $u'' + au' + b\sin u = 0$ définie sur un intervalle I contenant 0. Montrer que $\sup \mathrm{I} = +\infty$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta'(t) = 0$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit $\mathrm{K} > 0$ un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $(u,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(t) - f(u)| \leqslant \mathrm{K}|t-u|$. Soit $\alpha > 0$. Intégrons l'inégalité précédente par rapport à u sur $[t, t+\alpha]$. On obtient :

$$\left|\int_t^{t+\alpha} (f(u) - f(t))\mathrm{d}u\right| \leqslant \mathrm{K}\int_t^{t+\alpha} |t-u|\mathrm{d}u,$$

$$\left|\int_t^{t+\alpha} f(u)\mathrm{d}u - \alpha f(t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{K}\alpha^2}{2}.$$

Donc, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\alpha > 0$,

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{\mathrm{K}\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}\int_t^{t+\alpha} f(u)\mathrm{d}u.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$; le premier terme de la somme devient $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Par hypothèse, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\int_{[t_0,+\infty[} f(u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon\alpha}{2}.$$

Pour $t \geqslant t_0$, on a $\frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t_0+\alpha} f(u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ et donc $0 \leqslant f(t) \leqslant \epsilon$. On a démontré que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Classiquement, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge et si f est uniformément continue, alors f tend vers 0 en $+\infty$ (voir le lemme de l'exercice 4.6 du tome analyse 3).

2. Soit θ est solution maximale définie sur un intervalle I contenant 0. L'équation différentielle peut s'écrire $u'' = \mathrm{F}(u, u')$ où F est la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto -a\sin x - by$. La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$, nous sommes dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. En particulier les solutions maximales sont définies sur des intervalle ouverts. Posons $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ = [0, \alpha[$ où $\alpha = \sup \mathrm{I} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

• Montrons, pour commencer, que θ' et θ'' sont bornées sur $[0, \alpha[$. On a, par hypothèse $\theta'' + a\theta' + b\sin\theta = 0$ et donc

$$\theta''\theta' + a\theta'^2 + b\sin\theta\,\theta' = 0.$$

En intégrant cette relation sur $[0, t]$, pour $t \in [0, \alpha[$, on obtient

$$\frac{1}{2}(\theta'^2(t) - \theta'^2(0)) + a\int_0^t \theta'^2 + b(\cos\theta(0) - \cos\theta(t)) = 0,$$
$$\theta'^2(t) = \theta'^2(0) - 2a\int_0^t \theta'^2 + 2b(\cos\theta(t) - \cos\theta(0).$$

On a donc, pour tout $t \in [0, \alpha[$, $\theta'^2(t) \leqslant \theta'^2(0) + 4b$, puisque a et b sont positifs. Ainsi θ' est bornée sur $[0, \alpha[$ et on a

$$\sup_{[0,\alpha[} |\theta'| \leqslant \sqrt{\theta'^2(0) + 4b} = \mathrm{K}.$$

On a alors, pour tout $t \in [0, \alpha[$,

$$|\theta''(t)| = |a\theta'(t) + b\sin\theta(t)| \leqslant a\mathrm{K} + b.$$

La fonction θ'' est également bornée sur $[0, \alpha[$ par $\mathrm{K}' = a\mathrm{K} + b$.

• Montrons que dans ces conditions, on a nécessairement $\alpha = +\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme θ' est bornée sur $[0, \alpha[$, elle y est intégrable et θ admet donc une limite finie en α. On peut donc prolonger θ par continuité en α. Comme θ'' est également bornée, θ' admet aussi une limite finie en α.D'après le théorème de la limite de la dérivée, ce prolongement que nous notons $\tilde{\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$. Enfin, on a

$$\lim_{t\to\alpha} \theta''(t) = -a\tilde{\theta}'(\alpha) - b\sin\tilde{\theta}(\alpha).$$

Le même théorème assure que $\tilde{\theta}'$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$, autrement dit, $\tilde{\theta}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \alpha]$ et l'équation est également vérifiée en α. On a donc une solution

ce qui contredit le caractère maximal de θ. Ainsi $\alpha = +\infty$ et θ nie sur $\mathbb{R}_+$.

• Maintenant, nous allons appliquer le résultat de la première ques- fonction θ'^2. D'après ce qui précède, sa dérivée $2\theta'\theta''$ est bornée ıl a été démontré de plus que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{2}(\theta'^2(t) - \theta'^2(0)) + a\int_0^t \theta'^2 + b(\cos\theta(0) - \cos\theta(t)) = 0.$$

déduit

$$\int_0^t \theta'^2 = \frac{b}{a}(\cos\theta(t) - \cos\theta(0)) - \frac{1}{2a}(\theta'^2(t) - \theta'^2(0) \leqslant \frac{2b}{a} + \frac{\theta'^2(0)}{2a}.$$

$t \longmapsto \int_0^t \theta'^2$ est donc majorée sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction positive θ'^2 est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On déduit de la première question que $\lim_{+\infty} \theta'^2 = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{+\infty} \theta' = 0$. ◁

3.50. Équation du pendule simple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $\theta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\theta'' + \sin\theta = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = \alpha$.

2. Si $\alpha > 2$, montrer que θ est strictement croissante, puis qu'il existe t_0 tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \theta(t + t_0) = \theta(t) + 2\pi.$$

3. Traiter le cas $\alpha = 2$.

4. Étudier le cas $0 \leqslant \alpha < 2$. Montrer en particulier que dans ce cas, θ est périodique et donner une expression intégrale de sa période.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. La fonction $(t, \theta) \longmapsto -\sin\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz l'équation $\theta'' + \sin\theta = 0$ possède une unique solution maximale vérifiant $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = \alpha$. Celle-ci est de classe $\mathcal{C}^2$ car $\theta'' = -\sin\theta$ est continue. Soit I l'intervalle ouvert de définition de θ. Montrons que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ en raisonnant par l'absurde. Supposons par exemple que I est majoré et posons $a = \sup \mathrm{I}$. On a, pour tout $t \in [0, a[$, $|\theta''(t)| \leqslant 1$. On en déduit que θ'' est intégrable sur $[0, a[$ et

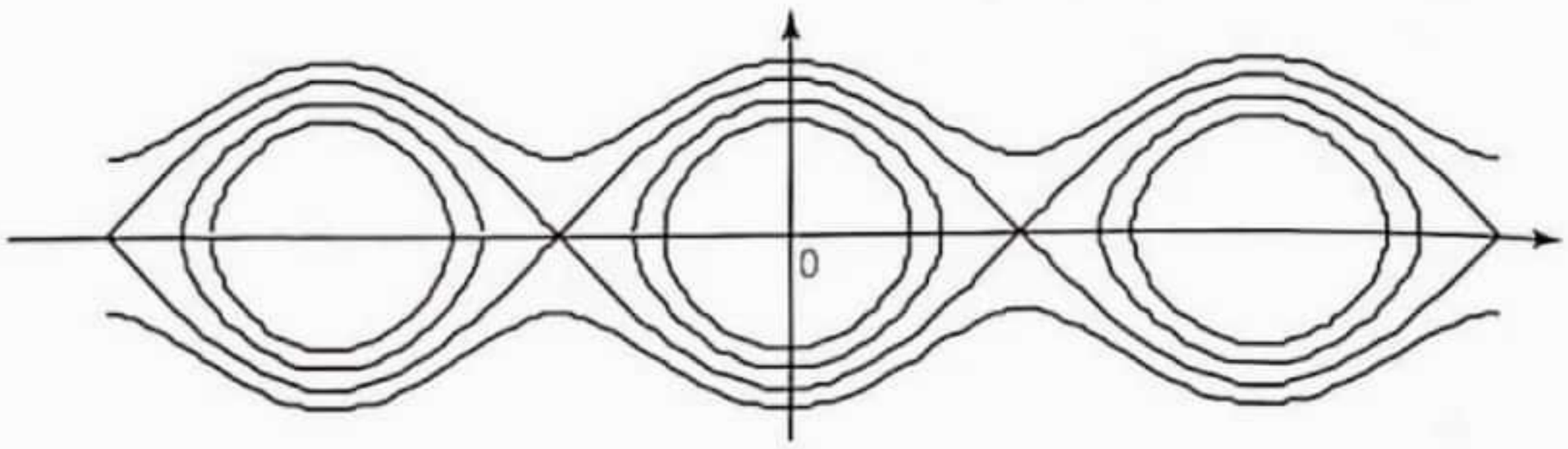
donc que θ' a une limite finie ℓ en a. Ainsi la fonction θ' est bornée sur $[0, a[$. On en déduit de même que θ a une limite finie L en a. On peut prolonger par continuité la fonction θ en a. Par application du théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$. On a de plus $\lim\limits_{t\to a} \theta''(t) = -\lim\limits_{t\to a} \sin\theta(t) = -\sin \mathrm{L}$. En appliquant de nouveau le théorème de la limite de la dérivée, on en en déduit que $\theta''(a)$ existe et vaut $-\sin \mathrm{L}$. Ainsi la solution de l'équation différentielle se prolonge en a en une solution sur $\mathrm{I} \cup \{a\}$, ce qui contredit le fait que la solution maximale est définie sur I. On conclut que I n'est pas majoré. On montre de la même manière que I n'est pas minoré et finalement $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Quelle que soit la valeur de α, la solution θ vérifie

$$2\theta'\theta'' + 2\theta' \sin\theta = 0.$$

Ainsi, il existe une constante C *telle que* $\theta'^2 - 2\cos\theta = \mathrm{C}$. *En considérant la valeur en* 0, *on obtient* $\mathrm{C} = \alpha^2 - 2$ *et donc* $\theta'^2 = 2\cos\theta + \alpha^2 - 2$.

On a donc $\alpha^2 - 4 \leqslant \theta'^2 \leqslant \alpha^2$. *Il en résulte que si* $\alpha^2 > 4$, θ'^2 *ne s'annule pas donc* θ' *garde un signe constant, que si* $\alpha^2 \leqslant 4$, *elle s'annule. En se limitant à* $\alpha > 0$, *les trois cas proposés par l'énoncé apparaissent donc naturellement. Voici pour différentes valeurs de* α *les courbes d'équation* $\theta'^2 = 2\cos\theta + \alpha^2 - 2$ *dans la plan des phases* (θ, θ').



2. Si $\alpha > 2$, on a, pour tout réel t, $\theta'^2(t) \geqslant \alpha^2 - 4 > 0$. La fonction θ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et comme elle est continue, elle garde un signe constant. De plus $\theta'(0) = \alpha > 0$ donc θ' est strictement positive et θ strictement croissante.

On a, pour tout réel t, $\theta'(t) \geqslant \sqrt{\alpha^2 - 4}$ et donc, pour $t > 0$,

$$\theta(t) = \int_0^t \theta'(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \int_0^t \sqrt{\alpha^2 - 4}\,\mathrm{d}u \geqslant t\sqrt{\alpha^2 - 4}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} \theta = +\infty$. En particulier, il existe un unique réel t_0 tel que $\theta(t_0) = 2\pi$. Considérons alors la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$\theta(t+t_0)-2\pi$. Elle est solution de l'équation différentielle car, pour tout réel t,

$$\varphi''(t)=\theta''(t+t_0)=-\sin(\theta(t+t_0))=-\sin(\varphi(t)).$$

De plus

$$\varphi(0)=\theta(t_0)-2\pi=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0)=\theta'(t_0)=\sqrt{2\cos\theta(t_0)+\alpha^2-2}=\alpha.$$

Par unicité du problème de Cauchy, on a $\varphi=\theta$ et donc, pour tout réel t,

$$\theta(t+t_0)=\theta(t)+2\pi.$$

3. On suppose $\alpha=2$. Dans ce cas, on peut déterminer explicitement la solution. On montre, pour commencer, que, pour tout réel t, $\theta(t)$ appartient à $]-\pi,\pi[$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $\delta\in\mathbb{R}$ tel que $\theta(\delta)=\pi$. On a alors $\theta'^2(\delta)=2\cos\pi+\alpha^2-2=0$. La solution du problème de Cauchy $x''+\sin x=0$, $x(\delta)=\pi$ et $x'(\delta)=0$ est la fonction constante $t\longmapsto\pi$. On a donc, pour tout réel t, $\theta(t)=\pi$, ce qui est contradictoire avec $\theta(0)=0$. Ainsi la fonction θ ne prend pas la valeur π. On démontre qu'elle ne prend pas non plus la valeur $-\pi$. On a donc, pour tout réel t, $\theta(t)\in]-\pi,\pi[$. Puisque $\dfrac{\theta(t)}{2}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\theta'^2(t)=2\cos\theta(t)+2=4\cos^2\frac{\theta(t)}{2}>0.$$

La fonction θ' ne s'annule pas; elle est positive puisque $\theta'(0)>0$. On a donc

$$\theta'(t)=2\cos\frac{\theta(t)}{2}\cdot$$

Une primitive de $x\longmapsto\dfrac{1}{2\cos\frac{x}{2}}$ est $x\longmapsto\ln\tan\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. On en déduit, pour tout réel t, $\ln\tan\left(\dfrac{\theta(t)}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=t$ et donc $\theta(t)=4\arctan(e^t)-\pi$. La fonction θ est encore strictement croissante. Elle tend vers π en $+\infty$ et vers $-\pi$ en $-\infty$.

4. Traitons le cas $\alpha\in]0,2[$. On a alors $2-\alpha^2\in]-2,2[$ donc il existe $\theta_0\in]0,\pi[$ tel que $2\cos\theta_0=2-\alpha^2$. On a, pour tout réel t,

$$\theta'(t)^2=2(\cos\theta(t)-\cos\theta_0).$$

Notons que la fonction φ définie par $\varphi(t)=-\theta(-t)$ est encore solution de l'équation différentielle. En effet, pour tout réel t, on a

$$\varphi''(t)=-\theta''(-t)=\sin(\theta(-t))=-\sin(\varphi(t)).$$

Comme $\varphi(0) = -\theta(0) = 0 = \theta(0)$ et $\varphi'(0) = \theta'(0)$, on a $\varphi = \theta$ et θ est impaire.

Si θ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, elle reste strictement positive. Comme $\theta'(t)^2 = 2(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)$, $\theta(t)$ ne prend pas les valeurs θ_0 et $-\theta_0$. De $\theta(0) = 0$, on déduit $\theta(t) \in]-\theta_0, \theta_0[$ pour tout $t \geqslant 0$. La fonction θ a donc une limite finie $\ell \in]0, \theta_0]$ en $+\infty$. On a alors $\lim\limits_{+\infty} \theta'' = -\sin(\ell) < 0$. Mais cela implique $\lim\limits_{+\infty} \theta' = -\infty$, ce qui est impossible car pour tout t, $\theta'(t)^2 \leqslant 4$.

Ainsi θ' s'annule sur $\mathbb{R}_+$. Soit $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+, \theta'(t) = 0\}$. Comme $\theta'(0) > 0$, θ' est positive dans un voisinage de 0 donc $t_0 > 0$ et par continuité $\theta'(t_0) = 0$. On en déduit que $\cos(\theta(t_0)) = \cos(\theta_0)$. D'autre part, comme θ est strictement croissante sur $[0, t_0]$, on a $\theta(t_0) > 0$. Enfin, pour tout $t \in [0, t_0[$, on a $\theta'(t) \neq 0$, donc $\cos(\theta(t)) \neq \cos(\theta_0)$. On en déduit que $\theta(t_0) = \theta_0$. Comme θ est impaire, on en déduit $\theta(-t_0) = -\theta_0$ et $\theta'(-t_0) = 0$.

Considérons la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = -\theta(t + 2t_0)$. La fonction ψ est encore solution de l'équation différentielle car pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi''(t) = -\theta''(t + 2t_0) = \sin(\theta(t + 2t_0)) = -\sin(\psi(t)).$$

On a de plus $\psi(-t_0) = -\theta(t_0) = \theta(-t_0)$ et $\psi'(-t_0) = -\theta'(t_0) = 0 = \theta'(-t_0)$. Par unicité du problème de Cauchy, on obtient $\psi = \theta$. On en déduit que, pour tout réel t, on a $\theta(t + 2t_0) = -\theta(t)$, et donc, pour tout réel t, $\theta(t + 4t_0) = -\theta(t + 2t_0) = \theta(t)$. La fonction θ est périodique de période $4t_0$.

On peut donner une expression de t_0. Sur l'intervalle $]-t_0, t_0[$, $\theta' > 0$ et donc $\dfrac{\theta'(t)}{\sqrt{2(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))}} = 1$. On en déduit que

$$\int_0^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta_0)}} = t$$

puis en faisant tendre t vers t_0,

$$\boxed{t_0 = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta_0)}}}.$$

Enfin, pour $\alpha = 0$, θ est la fonction nulle. ◁

Le lecteur aura reconnu l'étude classique du pendule pesant sans frottement. Selon la vitesse angulaire initiale α on rencontre successivement les cas suivants : le pendule tourne indéfiniment autour de son

axe ($\alpha > 2$), il atteint la position verticale en un temps infini ($\alpha = 2$), il oscille périodiquement ($0 < \alpha < 2$).

Pour ce dernier exercice sur les équations d'ordre 2, on s'intéresse aux questions de stabilité qui ont été développées à l'exercice 3.42. On utilise explicitement la correspondance avec les systèmes différentiels d'ordre 1.

3.51. Équation de Van der Pol

Soit $\varepsilon \in [-1, 1]$. Existe-t-il un voisinage de $(0, 0)$ tel que pour toute condition initiale (x_0, x_1) dans ce voisinage, la solution de l'équation différentielle

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0 \text{ avec } x(0) = x_0 \text{ et } x'(0) = x_1$$

converge vers 0 en $+\infty$?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

La question se reformule aussi comme suit : la solution identiquement nulle est-elle asymptotiquement stable ?

On se ramène à un système d'ordre 1 en posant $x' = y$. On a alors $y' = x'' = -x + \varepsilon(1 - x^2)x' = -x + \varepsilon y - \varepsilon x^2 y$. On obtient, en mettant en valeur la partie linéaire, le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon x^2 y \end{pmatrix}.$$

Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$. La matrice A a pour polynôme caractéristique $\mathrm{X}^2 - \varepsilon \mathrm{X} + 1$ dont le discriminant est $\varepsilon^2 - 4 < 0$.

• Si $\operatorname{Tr} \mathrm{A} = \varepsilon < 0$, on est dans les conditions de l'exercice 3.42 ; en refaisant le même raisonnement, on montre que la solution nulle de l'équation est asymptotiquement stable.

• Si $\varepsilon = 0$ l'équation est linéaire à coefficients constants. Les solutions de l'équation sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x = x_0 \cos t + x_1 \sin t = \sqrt{x_0^2 + {x_1}^2} \cos(t + a)$$

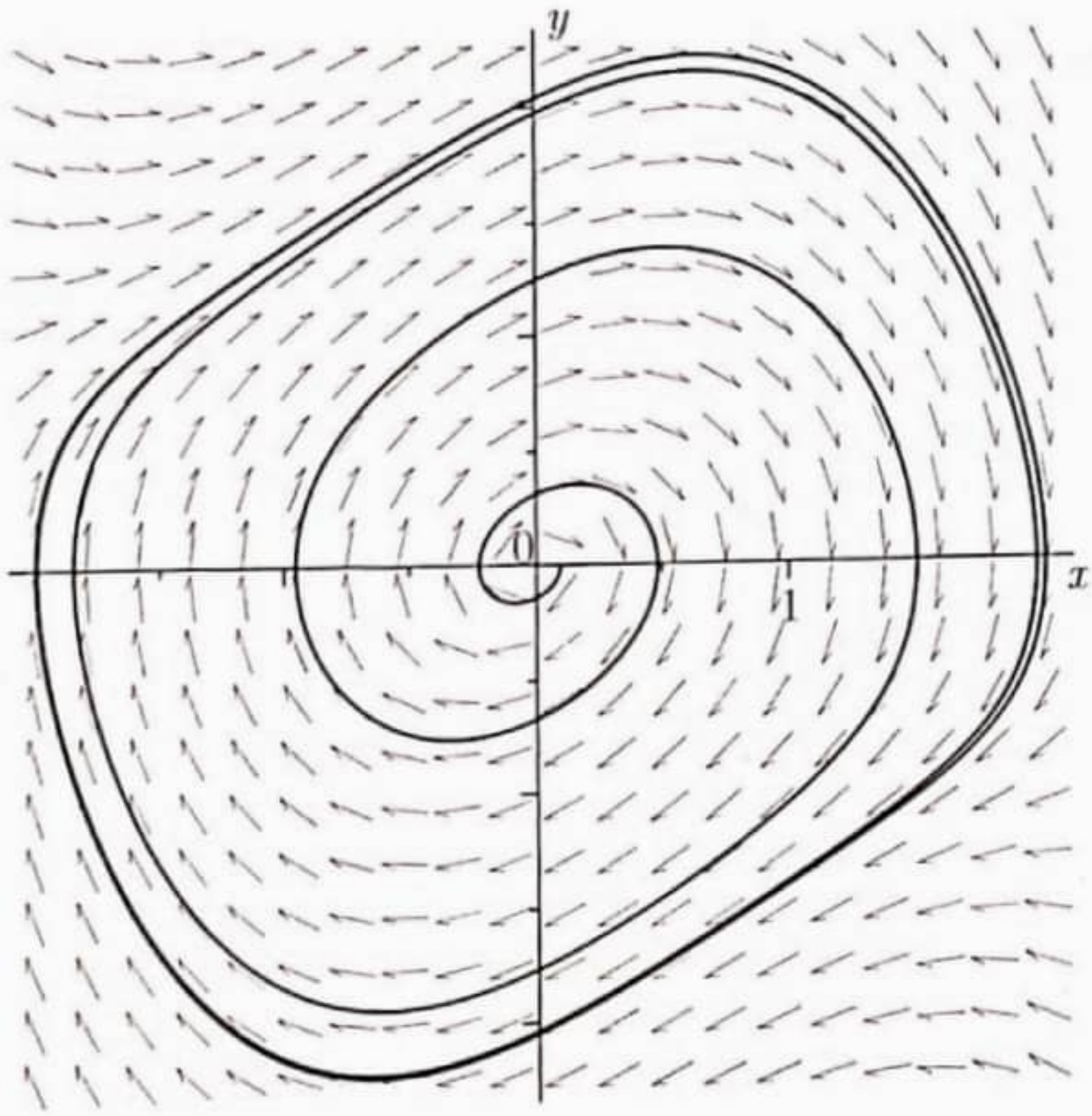
pour une valeur idoine de a. Si x n'est pas la solution nulle, c'est-à-dire si $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$, $x(t)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$: la solution nulle n'est pas asymptotiquement stable.

• Supposons que $\varepsilon \in]0,1]$. Posons avec les notations précédentes, pour toute solution x, $z = x^2 + y^2$. On a alors

$$z' = 2xx' + 2yy' = 2xy + 2y(-x + \varepsilon(1 - x^2)y) = 2\varepsilon(1 - x^2)y^2.$$

Considérons une solution non nulle et montrons qu'alors $z(t)$ ne tend pas vers 0 en raisonnant par l'absurde. Si $z(t)$ tend vers 0, on a, pour t assez grand, $x^2(t) \leqslant z(t) < 1$ donc $z'(t) \geqslant 0$. La fonction positive z croît et tend vers 0. On a donc $z(t) = 0$, c'est-à-dire $x(t) = y(t) = 0$ pour t assez grand. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, x est la solution nulle. Une solution non nulle de l'équation n'est donc pas asymptotiquement stable. ◁

Dans ce dernier cas, on peut démontrer (mais ça n'a rien d'évident) l'existence d'un « cycle limite », courbe simple fermée vers laquelle la trajectoire converge. Comme ce cycle est indépendant des conditions initiales, la solution nulle n'est pas stable. Voici par exemple le portrait de phase dans le cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *La trajectoire dessinée part du point* (0,1; 0) *au temps* $t = 0$:



Les trois exercices suivants abordent le thème du calcul des variations qui se révèle riche en applications : principes variationnels en Physique, recherche de courbes ou surfaces minimales (géodésie, théorèmes isopérimétriques...). De manière générale on se donne une fonction

$L : (X, Y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longmapsto L(X, Y, t) \in \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *et il s'agit de trouver les fonctions* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *qui rendent extrémale la fonctionnelle :*

$$W(f) = \int_a^b L(f(t), f'(t), t)dt.$$

Lorsque $n = 1$, *traduire que* f *est un point critique de* W *donne une équation différentielle du second ordre en* f *appelée équation d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = 0.$$

Les exemples traités sont en dimension 2 *et le premier est relié à la recherche des géodésiques dans le demi-plan de Poincaré (ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive) qui est muni de la métrique :*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Pour alléger les notations, on omettra souvent dans les exercices suivants la variable dans l'expression des intégrales.

3.52. Calcul des variations (1)

Soit A et B dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soit V l'ensemble des applications $u = (u_1, u_2)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ telles que $u(0) = A$ et $u(1) = B$. Pour $u \in V$, on pose

$$E(u) = \int_0^1 \frac{u_1'(s)^2 + u_2'(s)^2}{u_2(s)^2}\, ds.$$

Soit $v = (v_1, v_2) \in V$ tel que $E(v)$ soit minimal.

1. Trouver un système différentiel vérifié par v_1 et v_2.

2. Étudier ce système. Quelle est la nature de l'arc géométrique défini par v ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Soit F l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 et 1. On va faire subir à v de petites variations à l'aide d'éléments de F. Soit $w = (w_1, w_2) \in F^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $v + \lambda w$ appartient à V si λ est assez petit. Il suffit de vérifier que $v_2 + \lambda w_2 > 0$. La fonction v_2 est continue sur $[0, 1]$; elle y possède donc un minimum $\alpha > 0$. En notant $\|w_2\|$ la norme uniforme de w_2 sur $[0, 1]$, on a, pour tout réel λ,

et tout $s \in [0,1]$,

$$v_2(s) + \lambda w_2(s) \geqslant \alpha - |\lambda| \, \|w_2\| > 0$$

si $|\lambda| < \beta$, où $\beta = \dfrac{\alpha}{\|w_2\|}$. Pour tout $\lambda \in]-\beta, \beta[$, $v + \lambda w \in \mathrm{V}$ et donc $\mathrm{E}(v + \lambda w) \geqslant \mathrm{E}(v)$. Considérons la fonction Φ définie sur $]-\beta, \beta[$ par $\Phi(\lambda) = \mathrm{E}(v + \lambda w)$. Montrons que Φ est dérivable. On a

$$\Phi(\lambda) = \int_0^1 \frac{(v_1' + \lambda w_1')^2 + (v_2' + \lambda w_2')^2}{(v_2 + \lambda w_2)^2}.$$

La fonction $\psi : (s, \lambda) \longmapsto \dfrac{(v_1'(s) + \lambda w_1'(s))^2 + (v_2'(s) + \lambda w_2'(s))^2}{(v_2(s) + \lambda w_2(s))^2}$ est continue sur $[0,1] \times]-\beta, \beta[$. Elle est dérivable par rapport à λ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ est continue sur $[0,1] \times]-\beta, \beta[$. En particulier, elle est continue sur le compact $[0,1] \times [-b, b]$ avec $0 < b < \beta$. Comme les constantes sont intégrables sur le segment $[0,1]$, on a donc une domination de la dérivée particlle qui garantit que Φ est dérivable sur $]-b, b[$ et finalement sur $]-\beta, \beta[$ avec

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(s, \lambda) \, \mathrm{d}s.$$

En particulier comme Φ possède un extremum en 0, on a

$$\Phi'(0) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(s, 0) \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \left(\frac{2v_1' w_1' + 2v_2' w_2'}{v_2^2} - \frac{2w_2({v_1'}^2 + {v_2'}^2)}{v_2^3} \right) = 0.$$

Cela est vrai pour toutes les fonctions w_1 et w_2 de F. En prenant $w_2 = 0$, puis $w_1 = 0$, on obtient

$$\forall (w_1, w_2) \in \mathrm{F}^2, \ \int_0^1 \frac{v_1' w_1'}{v_2^2} = \int_0^1 \left(\frac{v_2' w_2'}{v_2^2} - \frac{w_2({v_1'}^2 + {v_2'}^2)}{v_2^3} \right) = 0.$$

Nous nous intéressons d'abord à la première égalité et démontrons le lemme suivant.

Lemme. *Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que*

$$\int_0^1 f g' = 0$$

pour tout $g \in \mathrm{F}$, alors f est constante.

Démonstration.

On veut démontrer que f est constante. Si c'est le cas, cette constante est égale à $c = \int_0^1 f$. On pose $h = f - c$. La fonction h est continue sur

$[0,1]$ et $\int_0^1 h = 0$. On en déduit que h est la dérivée d'une fonction de F. En effet, la fonction g définie par $g(x) = \int_0^x h$ appartient à F et $g' = h$. On a par hypothèse $\int_0^1 fh = \int_0^1 fg' = 0$. On en déduit

$$\int_0^1 h^2 = \int_0^1 h(f-c) = \int_0^1 fh - c\int_0^1 h = 0,$$

puis $h^2 = 0$ et donc $h = 0$, c'est-à-dire $f = c$. Donc f est constante. ◊

Du lemme, on déduit que la fonction $\frac{v_1'}{v_2^2}$ est constante. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v_1' = \alpha v_2^2$.

Notons f la fonction $\frac{v_1'^2 + v_2'^2}{v_2^3} = \alpha^2 v_2 + \frac{v_2'^2}{v_2^3}$ et G une primitive de f. En intégrant par parties, la deuxième égalité devient

$$\int_0^1 \frac{v_2'w_2'}{v_2^2} - \int_0^1 fw_2 = \int_0^1 \frac{v_2'w_2'}{v_2^2} - \underbrace{[Gw_2]_0^1}_{=0} + \int_0^1 Gw_2'$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{v_2'}{v_2^2} + G\right) w_2' = 0.$$

Comme cela est vrai pour tout w_2 de F, on obtient en appliquant le lemme que l'application $\frac{v_2'}{v_2^2} + G$ est constante. Comme G est dérivable, il en est de même de $\frac{v_2'}{v_2^2}$ et donc de v_2'. En dérivant, la condition devient

$$\frac{v_2''}{v_2^2} - \frac{2v_2'^2}{v_2^3} + f = \frac{v_2''}{v_2^2} - \frac{v_2'^2}{v_2^3} + \alpha^2 v_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$v_2''v_2 - v_2'^2 + \alpha^2 v_2^4 = 0.$$

2. Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} v_1' = \alpha v_2^2 \\ v_2''v_2 - v_2'^2 + \alpha^2 v_2^4 = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, on a $v_1' = 0$, donc v_1 est constante, ce qui nécessite que A et B aient même abscisse. La trajectoire est un segment perpendiculaire à l'axe des abscisses. Réciproquement, si A et B ont même abscisse, comme v_1' a le signe de α, v_1 est monotone et donc constante. On a donc $\alpha = 0$.

On suppose désormais que A et B n'ont pas même abscisse, c'est-à-dire que $\alpha \neq 0$.

Comme $v_2 > 0$ la deuxième équation peut s'écrire

$$\frac{v_2'' v_2 - v_2'^2}{v_2^2} + \alpha^2 v_2^2 = \left(\frac{v_2'}{v_2}\right)' + \alpha v_1' = 0$$

Il existe donc une constante K telle que $\frac{v_2'}{v_2} + \alpha v_1 = \mathrm{K}$. En multipliant par $v_1' = \alpha v_2^2$, on obtient

$$\alpha v_2' v_2 + \alpha v_1 v_1' = \mathrm{K} v_1'$$

et il existe une constante K′ telle que

$$v_2^2 + v_1^2 - 2\frac{\mathrm{K}}{\alpha} v_1 = \mathrm{K}'.$$

La trajectoire est un arc de cercle centré sur l'axe des abscisses. ◁

Les géodésiques du demi-plan de Poincaré sont donc les arcs de cercles centrés en un point de l'axe réel et les droites perpendiculaires à cet axe.

L'exemple suivant est issu de l'optique. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ *comme un milieu optique d'indice variable* $n(x, y) \geqslant 1$. *Si la vitesse de la lumière est égale à c dans le vide, elle vaut* $\frac{c}{n}$ *dans un milieu d'indice n. Ainsi pour effectuer un trajet entre deux points* A *et* B, *selon un chemin* γ, *la durée du trajet est donnée par l'intégrale curviligne de* $\frac{n}{c} ds$ *sur le chemin. On appelle chemin optique l'intégrale de* nds *(c'est simplement la distance parcourue dans le vide pendant le même temps de parcours ; cela revient à prendre la vitesse de la lumière égale à* 1*). Le principe de Fermat énonce que le trajet réellement parcouru par la lumière rend stationnaire le chemin optique.*

On peut se donner tous les chemins C^1 *allant de* A *à* B *par des fonctions* $u : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *de classe* C^1 *vérifiant* $u(0) = \mathrm{A}$ *et* $u(1) = \mathrm{B}$. *Plutôt que d'étudier la fonctionnelle* $\mathrm{L}(u) = \int_0^1 n(u(t))\|u'(t)\| dt$ *qui correspond au chemin optique, l'énoncé considère* $\mathrm{F}(u) = \int_0^1 n^2(u(t))\|u'(t)\|^2 dt$ *(en rebaptisant la fonction n pour ôter le carré). Il est facile de voir à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'une fonction u qui rend* F *minimale, minimise également le chemin optique* L. *Mais en plus le paramétrage du chemin donne alors exactement la vitesse de la lumière.*

3.53. Calcul des variations (2)

Soit A et B dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, et $\mathrm{E} = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2), u(0) = \mathrm{A}, u(1) = \mathrm{B}\}$. Soit $n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $u \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int_0^1 n(u(t))\|u'(t)\|^2 dt$.

On suppose qu'il existe $u_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{F}(u_0) = \min_{u \in \mathrm{E}} \mathrm{F}(u)$. Montrer que u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et trouver une équation différentielle vérifiée par u_0.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

On remarque que E est un espace affine dont la direction est l'espace vectoriel $\mathrm{F} = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2), v(0) = v(1) = (0,0)\}$. Soit $v \in \mathrm{F}$. Considérons l'application $\varphi : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{F}(u_0 + \lambda v) \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 + \lambda v$ est dans E, donc φ est définie sur $\mathbb{R}$. Par définition de u_0, elle possède un minimum en 0. Montrons que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\Phi : (t, \lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R} \longmapsto n(u_0(t) + \lambda v(t))\|u_0'(t) + \lambda v'(t)\|^2$ est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$, car u_0, v, n et la norme euclidienne sont des fonctions continues. La fonction n étant de classe $\mathcal{C}^2$, elle est différentiable et Φ est dérivable par rapport à λ. On obtient, pour tout réel λ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(t,\lambda) = \langle \operatorname{grad} n(u_0(t) + \lambda v(t)), v(t)\rangle \|u_0'(t) + \lambda v'(t)\|^2 + n(u_0(t) + \lambda v(t))\Big(2\lambda\|v'(t)\|^2 + 2\langle u_0'(t), v'(t)\rangle\Big).$$

La fonction $(t,\lambda) \longmapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$. En particulier, elle est bornée sur le compact $[0,1] \times [-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ pour tout $\mathrm{A} > 0$. Comme les constantes sont intégrables sur le segment $[0,1]$, on en déduit que φ est dérivable sur $]-\mathrm{A}, \mathrm{A}[$ et finalement sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel λ,

$$\varphi'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(t,\lambda)dt$$

En particulier, on a

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(t,0)dt = \int_0^1 \Big[\langle \operatorname{grad} n(u_0(t)), v(t)\rangle \|u_0'(t)\|^2 + 2n(u_0(t))\langle u_0'(t), v'(t)\rangle\Big]dt = 0,$$

puisque φ possède un minimum en 0, ce que nous écrirons plus simplement

$$\int_0^1 \left[\langle \operatorname{grad} n(u_0), v\rangle \|u_0'\|^2 + 2n(u_0)\langle u_0', v'\rangle\right] = 0.$$

Pour transformer cette intégrale, posons $\mathrm{I} = \int_0^1 \langle \operatorname{grad} n(u_0), v\rangle \|u_0'\|^2$ et notons h la fonction : $t \in [0,1] \longmapsto \|u_0'(t)\|^2 \operatorname{grad} n(u_0(t)) \in \mathbb{R}^2$. D'après les hypothèses sur n et u_0, elle est continue sur $[0,1]$. Elle possède donc une primitive $\mathrm{H} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Transformons l'expression de I en intégrant par parties :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \langle h, v\rangle = [\langle \mathrm{H}, v\rangle]_0^1 - \int_0^1 \langle \mathrm{H}, v'\rangle \mathrm{d}t = -\int_0^1 \langle \mathrm{H}, v'\rangle \mathrm{d}t,$$

car $v(0) = v(1) = 0$. On en déduit que

$$\int_0^1 -\langle \mathrm{H}, v'\rangle + 2n(u_0)\langle u_0', v'\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 \langle -\mathrm{H} + 2n(u_0)u_0', v'\rangle = 0.$$

En considérant la fonction $f = -\mathrm{H} + 2n(u_0)u_0'$, qui est continue sur $[0,1]$, il vient

$$\forall v \in \mathrm{F}, \quad \int_0^1 \langle f, v'\rangle = 0.$$

Pour tirer partie de cette dernière relation, on utilise un lemme qui est l'équivalent pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ du lemme démontré dans l'exercice 3.52.

Lemme. *Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que*

$$\int_0^1 \langle f, v'\rangle = 0$$

pour tout $v \in \mathrm{F}$, alors f est constante.

Démonstration.

On veut démontrer que f est constante. Si c'est le cas, cette constante est égale à $c = \int_0^1 f$. On pose $h = f - c$. La fonction h est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 h = 0$. On en déduit que h est la dérivée d'une fonction de F. En effet, la fonction v définie par $v(x) = \int_0^x h$ appartient à F et $v' = h$. On a par hypothèse $\int_0^1 \langle f, h\rangle = \int_0^1 \langle f, v'\rangle = 0$. On en déduit

$$\int_0^1 \|h\|^2 = \int_0^1 \langle h, f - c\rangle = \int_0^1 \langle f, h\rangle - \langle c, \int_0^1 h\rangle = 0,$$

puis $\|h\|^2 = 0$ et donc $h = 0$, c'est-à-dire $f = c$. Donc f est constante. $\diamondsuit$

D'après le lemme, il existe $c \in \mathbb{R}^2$, pour tout $t \in [0,1]$.

$$-\mathrm{H}(t) + 2n(u_0(t))u_0'(t) = c \qquad (*)$$

et, puisque n ne s'annule pas, $u_0'(t) = \dfrac{\mathrm{H}(t)+c}{2n(u_0(t))}$. Par hypothèse, n et u_0 sont de classe C^1, ainsi que H, par construction. On en déduit que u_0' est de classe C^1 et donc u_0 est de classe C^2. En dérivant la relation $(*)$, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} 0 &= -h(t) + 2n(u_0(t))u_0''(t) + 2\langle \operatorname{grad} n(u_0(t)), u_0'(t)\rangle u_0'(t) \\ &= -\|u_0'(t)\|^2 \operatorname{grad} n(u_0(t)) + 2n(u_0(t))u_0''(t) \\ &\qquad + 2\langle \operatorname{grad} n(u_0(t)), u_0'(t)\rangle u_0'(t) = 0. \end{aligned}$$

La fonction u_0 vérifie l'équation différentielle :

$$2n(u)u' - \|u'\|^2 \operatorname{grad} n(u) + 2\langle \operatorname{grad} n(u), u'\rangle u' = 0. \ \triangleleft$$

Dans l'exercice suivant il s'agit de minimiser l'aire d'une surface de révolution s'appuyant sur des cercles de même axe.

3.54. Surface d'aire minimale

Soit $a > 0$, $b > 0$ et $\mathrm{E} = \{g \in C^2([0,1], \mathbb{R}_+^*),\ g(0) = a,\ g(1) = b\}$.

1. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $g \in \mathrm{E}$ on pose

$$\Phi(g) = \int_0^1 f(g(t), g'(t))\mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe une fonction $g_0 \in \mathrm{E}$ minimisant Φ. Donner une équation différentielle vérifiée par g_0.

2. Pour $g \in \mathrm{E}$, on considère la surface S d'équation $r = g(z)$ en coordonnées cylindriques et on note $\mathrm{A}(g)$ l'aire de S. Soit $g_0 \in \mathrm{E}$ qui minimise A. Déterminer g_0.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Soit $\mathrm{F} = \{u \in C^2([0,1], \mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}$ et $m = \min g_0 > 0$. Soit $u \in \mathrm{F}$, non nul. Pour tout réel λ tel que $|\lambda| < \dfrac{m}{\|u\|_\infty}$, $g_0 + \lambda u \in \mathrm{E}$ et $\Phi(g_0 + \lambda u) \geqslant \Phi(g_0)$. La fonction Ψ définie sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{m}{\|u\|_\infty}, \dfrac{m}{\|u\|_\infty}\right[$ par

$\Psi(\lambda) = \Phi(g_0 + \lambda u)$ présente donc un minimum en 0. On a, pour $\lambda \in \mathrm{I}$,

$$\Psi(\lambda) = \int_0^1 f(g_0(t) + \lambda u(t), g_0'(t) + \lambda u'(t))\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\varphi : (t, \lambda) \longmapsto f(g_0(t) + \lambda u(t), g_0'(t) + \lambda u'(t))$ est continue sur $[0, 1] \times \mathrm{I}$. Elle possède une dérivée partielle par rapport à λ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} : (t, \lambda) \longmapsto u(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}(g_0(t) + \lambda u(t), g_0'(t) + \lambda u'(t)) + u'(t)\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t) + \lambda u(t), g_0'(t) + \lambda u'(t)),$$

elle-même continue sur $[0, 1] \times \mathrm{I}$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que Ψ est dérivable sur I de dérivée définie par

$$\Psi'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t, \lambda)\,\mathrm{d}t.$$

Comme Ψ possède un minimum en 0, sa dérivée en 0 est nulle, c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t, 0)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[u(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}(g_0(t), g_0'(t)) + u'(t)\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t))\right]\mathrm{d}t = 0.$$

Les fonctions f, g et u sont de classe $\mathcal{C}^2$ donc $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(t)\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t))\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[u(t)\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t))\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 u(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t))\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$\int_0^1 u(t)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(g_0(t), g_0'(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t))\right]\mathrm{d}t = 0,$$

cela pour tout $u \in \mathrm{F}$. Considérons la fonction

$$h : t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(g_0(t), g_0'(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_0(t), g_0'(t)).$$

Elle est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $\int_0^1 hu = 0$ pour tout $u \in \mathrm{F}$ (pour la fonction nulle c'est évident). Nous allons montrer que h est nulle. Soit H une primitive de h. En intégrant par parties, on obtient, pour tout $u \in \mathrm{F}$,

$$0 = \int_0^1 hu = [\mathrm{H}u]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{H}u'$$

et donc $\int_0^1 Hu' = 0$.

En appliquant le lemme de l'exercice 3.52, page 292, on en déduit que H est constante et que sa dérivée h est nulle. Ainsi g_0 vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y, y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x_2}(y, y') = 0.$$

2. La surface S d'équations $r = g(z)$ en coordonnées cylindriques est une surface de révolution d'axe $(0z)$ s'appuyant sur des cercles de rayon a et b dans les plans d'équation $z = 0$ et $z = 1$ respectivement. Si une surface admet une représentation paramétrique $(u, v) \longmapsto \mathrm{M}(u, v)$, où (u, v) décrit Δ, alors l'aire de S est

$$\mathcal{A} = \iint_{(u,v)\in\Delta} \left\| \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Ici, on a

$$\mathrm{M}(z, \theta) = (x, y, z) = (g(z)\cos\theta, g(z)\sin\theta, z),$$

où $(z, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. On en déduit

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta} = (-g(z)\sin\theta, g(z)\cos\theta, 0), \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = (g'(z)\cos\theta, g'(z)\sin\theta, 1)$$

et donc $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = (g(z)\cos\theta, g(z)\sin\theta, -g(z)g'(z))$ et

$$\left\| \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} \wedge \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta} \right\| = g(z)\sqrt{1 + (g'(z))^2}.$$

On obtient

$$\mathrm{A}(g) = \int_0^1 g(z)\sqrt{1 + (g'(z))^2}\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^1 g(z)\sqrt{1 + (g'(z))^2}\,\mathrm{d}z.$$

On pose $f(x_1, x_2) = x_1\sqrt{1 + x_2^2}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On est ramené à la situation de la première question. Si g_0 minimalise A, g_0 vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y, y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x_2}(y, y') = 0.$$

Ici, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_2^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{1 + x_2^2}}$. On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x_2}(y, y') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{yy'' + y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{yy'^2y''}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}.$$

On obtient l'équation différentielle

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{yy'' + y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yy'^2y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}$$

et après simplification

$$1 + y'^2 = yy''.$$

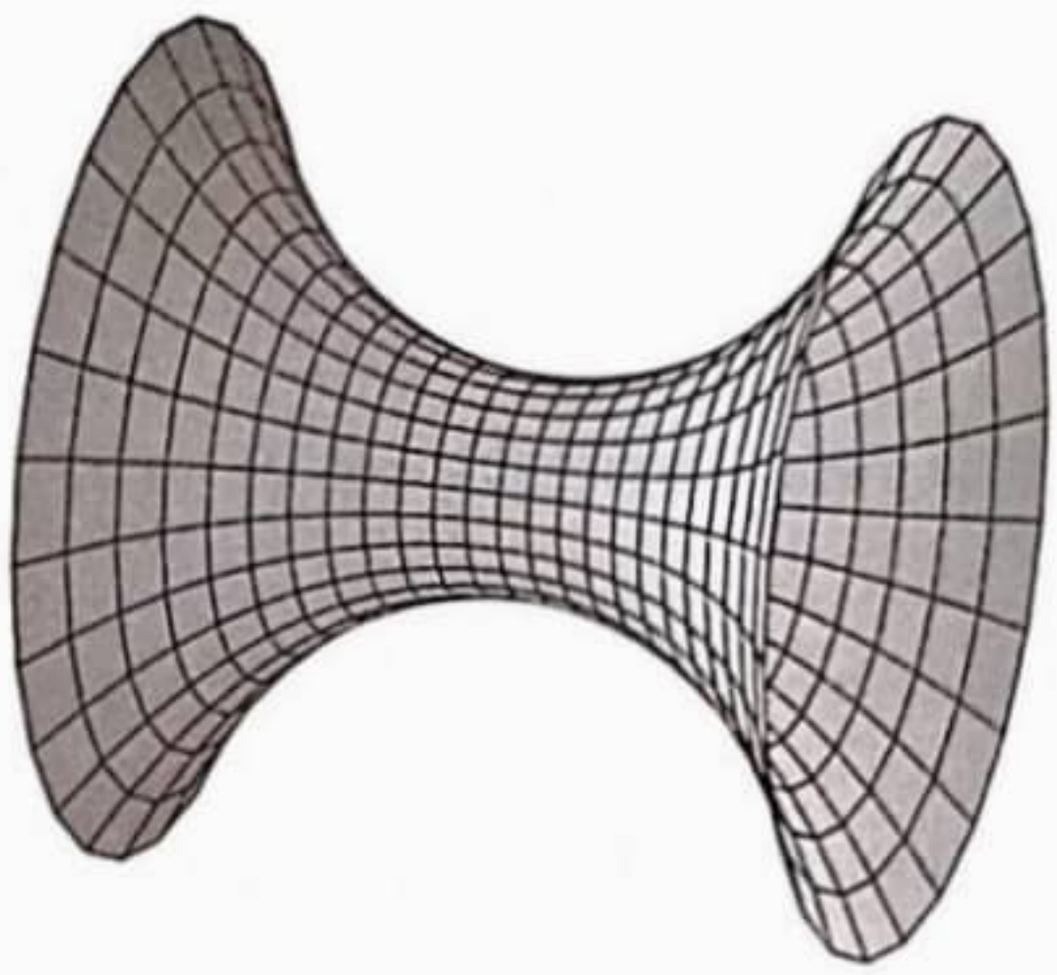
Cela s'écrit $\dfrac{2y'y''}{1+y'^2} = \dfrac{2y'}{y}$, ce qui s'intègre en $\ln(1+y'^2) = \ln c^2y^2$ et donc $1+y'^2 = c^2y^2$, où c est une constante arbitraire strictement positive. Sur un intervalle où y' ne s'annule pas, on obtient $y' = \varepsilon\sqrt{c^2y^2-1}$, où $\varepsilon = \pm 1$. On cherche les solutions positives. Il existe une constante c' telle que $\dfrac{1}{c}\operatorname{Argch} cy(z) = \varepsilon z + c'$. On donc $y(z) = \dfrac{1}{c}\operatorname{ch}(cz+d)$, où $d = \varepsilon c'$. Cette expression est valable pour $y'(z) \neq 0$, *i.e.* $z \neq \dfrac{-d}{c}$. Deux telles solutions ne peuvent se raccorder qu'en un point où y' s'annule et comme le coefficient c ne dépend pas de l'intervalle considéré, il en est de même de d. Il existe donc $c > 0$ et d réel tels que, pour tout $z \in [0,1]$,

$$g_0(z) = \frac{1}{c}\operatorname{ch}(cz+d).$$

Les conditions sur g_0 donnent $a = \dfrac{\operatorname{ch}(d)}{c}$ et $b = \dfrac{\operatorname{ch}(c+d)}{c}$. La recherche des couples (c,d) vérifiant ces égalités et des conditions sur a et b pour qu'ils existent donne lieu dans le cas général à des calculs inextricables. Nous nous limiterons dans la suite à traiter le cas classique $a = b$. On a alors $\operatorname{ch}(d) = \operatorname{ch}(c+d)$ et comme $c > 0$, $c + d = -d$ et donc $c = -2d$. On cherche donc $c > 0$ tel que $\operatorname{ch}\dfrac{c}{2} = ac$. Considérons la fonction $\varphi : c \longmapsto \operatorname{ch}\dfrac{c}{2} - ac$. On obtient $\varphi' : c \longmapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}\dfrac{c}{2} - a$ et $\varphi'' > 0$. Comme $\varphi'(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{+\infty}\varphi' = +\infty$, φ' s'annule une fois. La fonction φ possède un minimum, qui doit être négatif. Il est obtenu en $c_0 = 2\operatorname{Argsh}(2a)$ et vaut $\varphi(c_0) = \operatorname{ch}\dfrac{c_0}{2} - \dfrac{c_0}{2}\operatorname{sh}\dfrac{c_0}{2}$. On veut $\varphi(c_0) \leqslant 0$, *i.e.* $\dfrac{c_0}{2}\operatorname{th}\dfrac{c_0}{2} \geqslant 1$. Considérons sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\psi : t \longmapsto t\operatorname{th} t$. Elle est strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier ψ prend une seule fois en α la valeur 1 et est $\geqslant 1$ sur $[\alpha, +\infty[$. Il faut $c_0 \geqslant 2\alpha$ et donc $a \geqslant \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{2}$. Si $a < \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{2}$, il n'y pas de fonction $g_0 \in \mathrm{E}$ minimalisant A. Pour $a = \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{2}$, l'équation $\varphi(c) = 0$ a une seule solution c_0. Pour $a = b > \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{2}$, l'équation $\varphi(c)$ possède deux solutions c_1 et c_2, avec $c_1 < c_0 < c_2$.

La surface obtenue est appelée caténoïde. Elle fut découverte par Euler, qui étudia en 1744 ce problème de minimalisation. C'est une surface

de révolution dont la méridienne a pour équation $y = \frac{1}{c}\operatorname{ch}(cx+d)$. *Cette courbe est une chaînette, qui correspond à la forme que prend une chaîne lorsqu'elle est suspendue par ses extrémités et soumis à une force gravitationnelle uniforme (son poids). Son équation a été déterminée quasi simultanément par Leibniz, Jean Bernoulli, et Huygens, sous l'impulsion d'un défi lancé par Jacques Bernoulli.*



Il faut remarquer que nous avons seulement déterminé la fonction g_0 *dans le cas où il existe une surface minimale. Il resterait à montrer réciproquement que lorsque l'équation différentielle possède une solution, celle-ci définit bien une surface minimale.*

Pour $a = b < \frac{\operatorname{ch}\alpha}{2}$, *il n'y a pas de fonction* $g_0 \in \mathrm{E}$ *qui minimalise* A. *La surface d'aire minimale s'appuyant sur les deux cercles est la réunion des deux disques limités par ces cercles. Elle est appelée* solution de Goldschmidt. *Lorsque* $a > \frac{\operatorname{ch}\alpha}{2}$, *on peut montrer que* c_1 *correspond à un minimum relatif de* A, *alors que* c_2 *correspond à un maximum relatif. Mais la caténoïde obtenue pour* $c = c_1$ *ne correspond à un minimum absolu que si* $\mathrm{A}(g_0) < 2\pi a^2$ *($2\pi a^2$ est l'aire des deux disques). Un calcul simple donne pour* $g_0(z) = \frac{1}{c}\operatorname{ch}(cz - \frac{c}{2})$, $\mathrm{A}(g_0) = \frac{\pi(\operatorname{sh}(c)+c)}{c^2}$. *Il faut donc* $\frac{\pi(\operatorname{sh}(c_1)+c_1)}{c_1^2} < 2\pi a^2$. *On a* $2(ac_1)^2 = 2\operatorname{ch}^2\frac{c_1}{2} = \operatorname{ch}(c_1)+1$. *On obtient donc* $c_1 \leqslant 1 + e^{-c_1}$. *On trouve approximativement* $c_1 < 1{,}28$ *et* $a = \frac{\operatorname{ch}\frac{c_1}{2}}{c_1} < 0{,}95$. *Si* $a > 0{,}95$ *la surface minimale correspond à la solution de Goldschmidt.*

Pour en obtenir une représentation de la caténoïde, il suffit de tremper deux cercles parallèles assez proches dans de l'eau savonneuse, puis de percer la bulle centrale avant d'écarter lentement les deux cercles. Le film de savon qui se forme sur cette armature est une caténoïde. On écarte progressivement les deux anneaux. Au départ la surface s'allonge,

puis inéluctablement le film éclate pour ne plus former que deux disques. Pour un rayon des disques $a = 0,95$, *le film éclate quand la distance* h *entre les disques devient* > 1. *Par homogénéité, pour* a *quelconque, la bulle éclate pour* $h \approx 1,05a$ *(*$1,05$ *est l'inverse de* $0,95$*). Pour* $h > 1,05a$ *et* $h < \dfrac{2a}{\operatorname{ch} a} \approx 1,20h$, *il n'est pas exclu de créer un film de savon ayant la forme d'une caténoïde, mais celle-ci est instable ; une faible perturbation risque de conduire à la solution de Goldschmidt.*

Pour terminer, voici un exemple d'équation fonctionnelle liant une fonction et sa dérivée.

3.55. Fonctions telles que $f' = f^{-1}$

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectives de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ telles $f' = f^{-1}$.

1. Trouver un élément de E du type $x \longmapsto cx^m$, où c et m sont réels.

2. Soit $f \in$ E. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Montrer que f admet un unique point fixe.

3. Soit g un deuxième élément de E. Montrer que g admet le même point fixe que f.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On pose $f_0(x) = cx^m$. La fonction f_0 doit être une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ donc il faut $c > 0$ et $m \neq 0$. De plus $f_0' = f_0^{-1} > 0$ donc $m > 0$. On a pour tout $x > 0$, $f_0'(x) = cmx^{m-1}$ et $f_0^{-1}(x) = \left(\dfrac{x}{c}\right)^{\frac{1}{m}}$ donc on a $f' = f^{-1}$ si, et seulement si, $cm = c^{-\frac{1}{m}}$ et $m - 1 = \dfrac{1}{m}$. La deuxième équation $m^2 - m - 1 = 0$ possède une seule racine positive $m_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On obtient alors $c = m_0^{-\frac{m_0}{m_0+1}} = m_0^{-\frac{1}{m_0}}$.

La fonction $x \longmapsto m_0^{-\frac{1}{m_0}} x^{m_0}$, où $m_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, appartient à E.

2. On a $f' = f^{-1} > 0$ donc f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est continue donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Considérons la fonction $h : x \longmapsto f(x) - x$. Comme f est croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, on a $\lim\limits_{0} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. On en déduit $\lim\limits_{0} f' = \lim\limits_{0} f^{-1} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = \lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. On a donc

$\lim_0 h = 0$. De $\lim_0 f' = 0$, on déduit l'existence de $\alpha > 0$ tel que sur $]0, \alpha[$, on ait $f'(x) < 1$ et donc $h'(x) < 0$. La fonction h décroît donc est strictement négative sur $]0, \alpha[$.

De même, de $\lim_{+\infty} f' = +\infty$, on déduit l'existence de $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$, on ait $f'(x) \geqslant 2$. On obtient $f(x) \geqslant f(A) + 2(x - A)$ et $h(x) \geqslant x + f(A) - 2A$ pour $x \geqslant A$. On en déduit $\lim_{+\infty} h = +\infty$. La fonction h prend des valeurs positives et négatives sur $]0, +\infty[$ donc s'annule au moins une fois. La fonction f possède un point fixe.

Montrons que celui-ci est unique en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $0 < a < b$, $h(a) = h(b) = 0$. On prolonge h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$. La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, a[$ et $d \in]a, b[$ tels que $h'(c) = h'(d) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = f'(d) = 1$. La fonction $f' = f^{-1}$ étant bijective, c'est impossible et f possède un point fixe unique. Si on note a ce point fixe, il résulte de ce qui précède que $f(x) < x$ si $x \in]0, a[$ et $f(x) > x$ si $x > a$.

3. On note a le point fixe de f et b celui de g. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que $a < b$. On a, pour $x \in [a, b[$, $f(x) \geqslant x > g(x)$. Soit $c = \inf\{t \in [0, b[,\ \forall x \in]t, b[,\ f(x) > g(x)\}$. D'après ce qui précède, on a $c \leqslant a$. On prolonge f et g par continuité en 0 par $f(0) = g(0) = 0$ (au cas où on aurait $c = 0$). Par définition de la borne inférieure, il y une suite (t_n) qui converge vers c telle que $f(t_n) > g(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $f(c) \geqslant g(c)$. Si $f(c) > g(c)$, on a $c > 0$ et $f(x) > g(x)$ dans un voisinage de c, ce qui contredit la définition de c. On conclut que $f(c) = g(c)$. Si $c = a$ on a $g(a) = a$ ce qui contredit le fait que le point fixe de g est $b > a$. On a donc $c < a$, d'où l'on déduit $f(c) = g(c) < c$.

Comme f est croissante, on a $f(]c, a]) =]f(c), a]$ et donc, puisque $f(c) < c$, $]c, a] \subset f(]c, a]$. Soit $x \in]c, a]$ et $y = f^{-1}(x) \in]c, a]$. Comme $y \in]c, a]$, on a $f(y) > g(y)$, c'est-à-dire $x > g(f^{-1}(x))$ et comme g est strictement croissante $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$, c'est-à-dire $g'(x) > f'(x)$. Ainsi la fonction $g - f$ est croissante sur $[c, a]$, ce qui est impossible car $(g - f)(c) = 0$ et $g - f$ est négative sur $]c, a]$.

Tous les éléments de E ont donc le même point fixe. Pour le trouver il suffit d'utiliser la fonction de la question 1 : il vérifie $x = m_0^{-\frac{1}{m_0}} x^{m_0}$, soit $x = m_0^{-\frac{1}{m_0(1-m_0)}} = m_0$. Le point fixe de tous les éléments de E est $m_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ◁

Chapitre 4

Courbes

L'histoire des courbes planes est liée à celle du calcul infinitésimal et de la géométrie analytique d'une part, à celle de l'astronomie, de la mécanique et de la physique d'autre part.

Au XVII^e siècle, Descartes et Fermat ont créé la méthode des coordonnées, tandis qu'à la génération suivante Leibniz et Newton développaient les algorithmes du calcul infinitésimal qui allaient permettre l'étude des courbes et surfaces du point de vue de leurs propriétés différentielles. Les courbes sont étudiées de ce point de vue (tangentes, inflexion, courbure) par Kepler, Descartes, Fermat, Pascal. Le problème du pendule conduit Huygens à introduire les notions de développée et développante. La théorie des enveloppes de droites est développée à la fin du XVII^e siècle par Leibniz et Bernoulli : il s'agit de définir une courbe par l'ensemble de ses tangentes. Les courbes dans l'espace à trois dimensions (dites à « double courbure ») ont été étudiées par Clairaut (1731). C'est Monge qui, dans un mémoire présenté en 1771, introduisit la notion de rayon de courbure. En 1826, Cauchy, utilisant comme paramètre la longueur de l'arc, définit la normale principale et donna des expressions de la courbure et de la torsion. Enfin, Frénet (1847) et Serret (1850) démontrèrent l'équivalent des formules qui portent leur nom. Ces formules prennent une allure plus simple avec l'introduction par Darboux d'un « repère mobile ».

Au XVIII^e et au début XIX^e siècle l'étude des surfaces de l'espace de dimension trois est marquée par les travaux d'Euler et Monge qui admettent implicitement l'existence du plan tangent. Dupin (1813) puis Cauchy (1826) démontrent explicitement que les tangentes à toutes les courbes tracées sur une surface passant par un point donné sont dans un même plan, appelé plan tangent. L'étude de la courbure entreprise par Euler (1760), qui introduisit les directions principales, a été approfondie par Meusnier (1776), Monge (1784) qui introduisit les lignes de courbure et Dupin (1813) qui introduisit les directions conjuguées et l'indicatrice qui porte son nom. Lagrange généralise la théorie des enveloppes aux enveloppes de surfaces. Monge en entreprend l'étude systématique, introduisant la notion de surface réglée développable engendrée par les tangentes à une courbe gauche. Par ailleurs, il inaugure des travaux qui se poursuivront tout au long du XIX^e siècle sur les surfaces satisfaisant à certaines conditions géométriques.

Les premiers exercices établissent les équations de quelques courbes.

4.1. Intersection d'un plan et d'un cylindre

On prend l'intersection d'un plan et d'un cylindre puis on déroule le cylindre pour obtenir une courbe plane. Quelle est la courbe obtenue ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

On suppose que le plan n'est pas parallèle à l'axe du cylindre, auquel cas l'intersection du plan et du cylindre est la réunion de deux droites parallèles. On rapporte $\mathbb{R}^3$ à un repère orthonormal (O, i, j, k), où (O, k) est l'axe du cylindre et O appartient au plan. Le cylindre a alors pour équation $x^2 + y^2 = r^2$ et le plan possède une équation de la forme $z = ax + by$. Un point quelconque de l'intersection s'écrit

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, ar\cos\theta + br\sin\theta),$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$. Une fois le cylindre déroulé, on obtient un point d'abscisse $X = r\theta$ et d'ordonnée $Y = z = ar\cos\theta + br\sin\theta$. Ainsi X décrit $[0, 2\pi r]$ et $Y = ar\cos\dfrac{X}{r} + br\sin\dfrac{X}{r}$.

Si $a = b = 0$, on obtient un segment, sinon il s'agit d'une sinusoïde. ◁

On appelle courbe de poursuite la trajectoire d'un mobile P *(le chien ou l'avion chasseur) dont le mouvement est dirigé à chaque instant vers un autre mobile* M *(le maître ou l'avion chassé). On suppose en général que les mouvements de* P *et* M *sont uniformes, de vitesses v et kv.*

Comme l'on peut s'y attendre, le chien rattrape le maître à coup sûr si et seulement s'il court plus vite que lui ($k < 1$). L'exercice qui suit étudie le cas le plus simple où la trajectoire du maître est rectiligne.

4.2. Courbe de poursuite ou courbe du chien

Soit xOy un repère orthonormé du plan. Un point M se déplace sur Ox à la vitesse kv ($k > 0$, $v > 0$). Un point P, en dehors de Ox, se déplace de telle sorte qu'à chaque instant sa vitesse soit dirigée vers M et ait pour norme v. Déterminer la trajectoire de P (appelée « courbe du chien »).

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le point M est en O et P a pour coordonnées (a, b) avec $b > 0$, et que M se déplace dans le sens des x positifs. Les coordonnées de M sont $(vkt, 0)$; on note (x, y) celles de P. On étudie la courbe décrite par P tant que $y > 0$, t décrivant l'intervalle I. On suppose que x et y sont des fonctions de classe C^1. La vitesse de P est égale à $\frac{v}{\mathrm{PM}}\overrightarrow{\mathrm{PM}}$. On a donc, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v(-x + vkt)}{\sqrt{(x - vkt)^2 + y^2}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{-vy}{\sqrt{(x - vkt)^2 + y^2}}.$$

Par hypothèse y ne s'annule pas sur I donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ non plus. L'application $t \longmapsto y$ est donc un C^1-difféomorphisme, ce qui permet d'exprimer x en fonction de y. On a, en notant x' la dérivée de x par rapport à y. $x' = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{x - kvt}{y}$. Cela montre que x' est dérivable par rapport à y. En dérivant on obtient

$$x'' = -\frac{x - kvt}{y^2} + \frac{1}{y}\left(x' - kv\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right) = -\frac{x'}{y} + \frac{x'}{y} - \frac{kv}{y}\,\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{k\sqrt{(x - kvt)^2 + y^2}}{y^2} = \frac{k}{y}\sqrt{\frac{(x - kvt)^2}{y^2} + 1} = \frac{k}{y}\sqrt{1 + x'^2}.$$

D'où l'on déduit

$$\frac{x''}{\sqrt{1 + x'^2}} = \frac{k}{y}.$$

Il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $\ln(x' + \sqrt{1 + x'^2}) = \ln \mathrm{C}y^k$ et donc $x' + \sqrt{1 + x'^2} = \mathrm{C}y^k$. On obtient $\mathrm{C} = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b^{k+1}}$ avec les conditions initiales. On en déduit $1 + x'^2 = (\mathrm{C}y^k - x')^2 = \mathrm{C}^2 y^{2k} + x'^2 - 2\mathrm{C}y^k x'$ et donc $x' = \dfrac{\mathrm{C}}{2}y^k - \dfrac{1}{2\mathrm{C}}y^{-k}$.

Si $k \neq 1$, il existe une constante D telle que

$$x = \frac{\mathrm{C}}{2(k+1)}y^{k+1} - \frac{1}{2\mathrm{C}(-k+1)}y^{-k+1} + \mathrm{D}.$$

Avec les conditions initiales, on trouve $\mathrm{D} = \dfrac{k}{1 - k^2}(\sqrt{a^2 + b^2} - ak)$.

Si $k = 1$, on obtient $x = \dfrac{\mathrm{C}}{4}y^2 - \dfrac{1}{2\mathrm{C}}\ln y + \mathrm{D}$ où D peut s'exprimer de même en fonction de a et b.

Décrivons maintenant l'allure de la trajectoire selon les valeurs de k.

Si $k \geqslant 1$, c'est-à-dire si la vitesse du maître est supérieure à celle du chien, on a $\lim\limits_{y \to 0^+} x = +\infty$: le chien ne rattrape pas le maître.

Si $k = 1$, on a de plus $x - vt = x'y = \dfrac{\mathrm{C}}{2} y^2 - \dfrac{1}{2\mathrm{C}}$. La distance entre le maître et le chien est $\sqrt{(x-vt)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{C}}{2} y^2 - \dfrac{1}{2\mathrm{C}}\right)^2 + y^2}$. Quand y tend vers 0, cette distance tend vers $\dfrac{1}{2\mathrm{C}} = \dfrac{b}{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}$.

Si $k < 1$, on obtient $\lim\limits_{y \to 0^+} x = \mathrm{D}$. Le chien rattrape le maître au point d'abscisse D. Cela arrive au bout d'un temps

$$t_0 = \frac{\mathrm{D}}{kv} = \frac{1}{v(1-k^2)} (\sqrt{a^2 + b^2} - ak) \cdot \quad \triangleleft$$

Les deux exercices suivants s'intéressent à l'existence de points alignés sur une courbe.

4.3. Points coplanaires ou alignés sur une courbe

On considère l'arc paramétré $t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ défini par

$$x(t) = \frac{2t}{1+4t^4},\ y(t) = \frac{t^3}{1+4t^4},\ z(t) = \frac{1-4t^4}{1+4t^4}.$$

1. Montrer que l'application $t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ est injective.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 pour que les quatre points $\mathrm{M}(t_1), \mathrm{M}(t_2), \mathrm{M}(t_3), \mathrm{M}(t_4)$ soient coplanaires.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres t_1, t_2, t_3 pour que les trois points $\mathrm{M}(t_1), \mathrm{M}(t_2), \mathrm{M}(t_3)$ soient alignés.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Si $x(t) = 0$, $t = 0$ donc $\mathrm{M}(t)$ a un seul antécédent 0. Sinon, on a $\dfrac{2y(t)}{x(t)} = t^2$, d'où l'on déduit

$$t = \frac{1}{2} x(t)(1+4t^4) = \frac{1}{2} x(t) \left(1 + \frac{16y(t)^2}{x(t)^2}\right)$$

ce qui prouve que $\mathrm{M}(t)$ a un antécédent unique.

2. On suppose les quatre paramètres distincts sinon les quatre points sont coplanaires.

Les quatre points sont coplanaires s'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$,

$$ax(t_i) + by(t_i) + cz(t_i) + d = 0,$$

i.e. $2at_i + bt_i^3 + c(1-4t_i^4) + d(1+4t_i^4) = 0$. Ainsi t_1, t_2, t_3, t_4 doivent être racines du polynômes $4(d-c)X^4 + bX^3 + 2aX + c + d$. Ce polynôme non nul est nécessairement de degré 4 et

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} t_i t_j = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est réalisée, considérons le polynôme $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{4} (\mathrm{X} - t_i)$. Il existe un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 + \alpha \mathrm{X}^3 + \beta \mathrm{X} + \gamma$ puisque le coefficient de X^2 est $\sigma_2 = 0$. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $4(d-c) = 1, b = \alpha, 2a = \beta, c + d = \gamma$. *i.e.* $a = \dfrac{\beta}{2}, b = \alpha, c = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{\gamma}{2}, d = \dfrac{1}{8} + \dfrac{\gamma}{2}$. On ne peut pas avoir $a = b = c = 0$, sinon $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = \dfrac{1}{4}$ et le polynôme $\mathrm{X}^4 + \dfrac{1}{4}$ n'a pas de racine réelle. Les quatre points $\mathrm{M}(t_i)$ appartiennent donc au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Conclusion. La condition nécessaire et suffisante pour que les points $\mathrm{M}(t_i)$ soient coplanaires est $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} t_i t_j = 0$.

3. Là-aussi, on suppose les trois paramètres distincts sinon les points
és.

rois points sont alignés, les points de paramètre t_1, t_2, t_3, t sont
pour tout t donc on a, d'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} t_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} t_i t_j = 0,$$

quivaut à $\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} t_i = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} t_i t_j = 0.$

3
le polynôme $\prod_{i=1} (\mathrm{X} - t_i)$ est alors de la forme $\mathrm{X}^3 + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
ynôme ne peut avoir plus d'une racine réelle.
on. Les points $\mathrm{M}(t_1), \mathrm{M}(t_2), \mathrm{M}(t_3)$ ne peuvent être alignés
deux des points soient confondus. ◁

4.4. Points alignés sur une courbe

On note Γ_λ la courbe d'équation cartésienne

$$y = x^4 + \lambda x^3 + 6x^2 + \lambda x + 1.$$

1. Trouver les valeurs de λ pour lesquelles Γ_λ possède cinq points distincts alignés.

2. Trouver les valeurs de λ pour lesquelles Γ_λ possède quatre points distincts alignés. Montrer qu'alors il existe une et une seule droite bitangente à Γ_λ.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Il s'agit de trouver une droite qui coupe Γ_λ en cinq points distincts. Un telle droite ne peut pas avoir une équation de la forme $x = c$ et les abscisses des points d'intersection de Γ_λ et de la droite d'équation $y = ax + b$ vérifient une équation polynomiale de degré 4 qui ne peut pas avoir cinq solutions. La courbe Γ_λ ne possède jamais cinq points alignés.

2. On cherche à quelle condition il existe une droite d'équation $y = ax + b$ qui coupe Γ_λ en quatre points distincts. Cela revient à chercher $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'équation $x^4 + \lambda x^3 + 6x^2 + cx + d = 0$ ait quatre solutions distinctes. En posant $\mathrm{X} = x + \dfrac{\lambda}{4}$, cela équivaut encore à l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'équation $\mathrm{X}^4 + \left(6 - \dfrac{3\lambda^2}{8}\right)\mathrm{X}^2 + \alpha\mathrm{X} + \beta = 0$ ait quatre solutions distinctes. Les valeurs de λ qui conviennent résultent du lemme suivant.

Lemme. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. *Il existe un couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que l'équation* $x^4 + \mathrm{A}x^2 + \alpha x + \beta = 0$ *ait quatre solutions réelles distinctes si, et seulement si,* $\mathrm{A} < 0$.

Démonstration.

La condition est nécessaire. En effet, si $\mathrm{A} \geqslant 0$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^4 + \mathrm{A}\mathrm{X}^2 + \alpha\mathrm{X} + \beta$ admet pour dérivée seconde $\mathrm{P}''(\mathrm{X}) = 12\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{A}$. La fonction polynôme P' est alors strictement croissante et la fonction polynôme P s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$ (on invoque au choix le caractère strictement convexe de P ou le théorème de Rolle).

La condition est suffisante. En effet, supposons $\mathrm{A} < 0$. On prend simplement $\alpha = 0$ pour se ramener à une équation bicarrée. Le discriminant du trinôme $\mathrm{Y}^2 + \mathrm{A}\mathrm{Y} + \beta$ vaut $\Delta = \mathrm{A}^2 - 4\beta$. On choisit $\beta > 0$ mais assez petit pour que $\Delta > 0$. Pour un tel choix les deux racines

$y_1 = \dfrac{-A+\sqrt{A^2-4\beta}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-A-\sqrt{A^2-4\beta}}{2}$ sont strictement positives et distinctes et le polynôme $X^4 + AX^2 + \beta$ a quatre racines réelles distinctes à savoir $\pm\sqrt{y_i}$ pour $i = 1, 2$. $\Diamond$

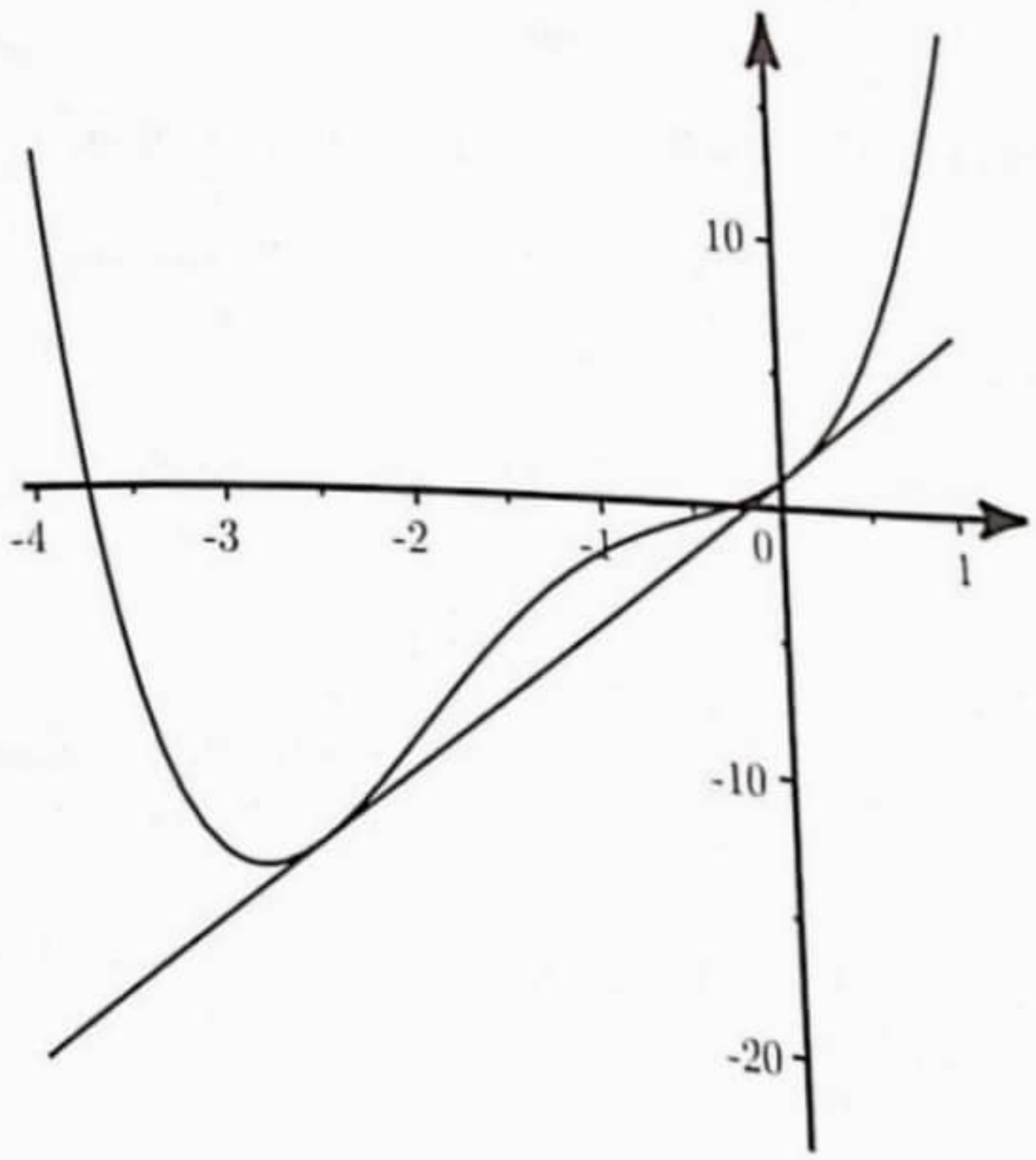
Il résulte donc de ce lemme que Γ_λ possède quatre points distincts alignés si, et seulement si, $6 - \dfrac{3\lambda^2}{8} < 0$, *i.e.* $\lambda^2 > 16$ ou encore $|\lambda| > 4$.

On suppose désormais que $\lambda^2 > 16$. La droite d'équation $y = ax + b$ est tangente à Γ_λ au point d'abscisse t si, et seulement si, t est racine double de $x^4 + \lambda x^3 + 6x^2 + \lambda x + 1 - ax - b$. Si elle est bitangente, ce polynôme possède deux racines doubles donc est un carré. Il existe alors $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x^4 + \lambda x^3 + 6x^2 + \lambda x + 1 - ax - b = (x^2 + cx + d)^2.$$

On a clairement $c = \dfrac{\lambda}{2}$, puis avec les termes de degré 2, $d = 3 - \dfrac{\lambda^2}{8}$. On trouve ensuite $\lambda - a = \lambda d = 3\lambda - \dfrac{\lambda^3}{8}$, soit $a = \dfrac{\lambda^3}{8} - 2\lambda$, puis $1 - b = d^2$ et $b = 1 - \left(3 - \dfrac{\lambda^2}{8}\right)^2$. On a alors $x^2 + cx + d = x^2 + \dfrac{\lambda}{2}x + 3 - \dfrac{\lambda^2}{8}$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = \dfrac{3\lambda^2}{4} - 48 > 0$ car $\lambda^2 > 16$. Le trinôme possède deux racines réelles distinctes y_1 et y_2. La droite d'équation $y = \left(\dfrac{\lambda^3}{8} - 2\lambda\right)x + 1 - \left(3 - \dfrac{\lambda^2}{8}\right)^2$ est bitangente à Γ_λ aux points d'abscisses y_1 et y_2. C'est la seule droite bitangente à la courbe.



La figure ci-dessus représente la quadrique et sa bitangente dans le cas $\lambda = 5$. ◁

4.5. Points multiples

Soit $\mathcal{C}$ la courbe $t \in [0, 2\pi[\longmapsto e^{it} + ae^{int}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ pour que $\mathcal{C}$ n'ait pas de point multiple.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On pose $f(t) = e^{it} + ae^{int}$. Si $n = 0$, $f(t) = e^{it} + a$ et la courbe n'a point de point multiple (l'image est le cercle de centre a et de rayon 1). Si $n = 1$, $f(t) = (a + 1)e^{it}$ et la courbe n'a pas de point multiple si, et seulement si, $a \neq -1$. On suppose dorénavant $n \geqslant 2$.

• Supposons que la courbe $\mathcal{C}$ ait des points multiples et considérons deux réels t et u tels que $0 \leqslant t < u < 2\pi$ et $f(t) = f(u)$. On a alors $e^{it} - e^{iu} = a(e^{inu} - e^{int})$, c'est-à-dire

$$e^{i\frac{t+u}{2}} 2i \sin \frac{t-u}{2} = ae^{i\frac{n(t+u)}{2}} 2i \sin \frac{n(u-t)}{2}$$

et, comme $\sin \dfrac{t-u}{2} \neq 0$, $e^{i(1-n)\frac{t+u}{2}} = a \dfrac{\sin \dfrac{n(u-t)}{2}}{\sin \dfrac{t-u}{2}}$. On en déduit en prenant le module que $1 = |a| \dfrac{\left|\sin \dfrac{n(u-t)}{2}\right|}{\left|\sin \dfrac{u-t}{2}\right|}$. On montre facilement que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x tel que $\sin x \neq 0$, on a $\dfrac{|\sin nx|}{|\sin x|} < n$.

En effet, pour $n = 2$, $\dfrac{|\sin nx|}{|\sin x|} = 2|\cos x| < 2$, car $\sin x \neq 0$ et si la propriété est vraie au rang n, alors

$$\frac{|\sin(n+1)x|}{|\sin x|} = \frac{|\sin nx \cos x + \sin x \cos nx|}{|\sin x|} \leqslant \frac{|\sin nx|}{|\sin x|} + |\cos nx| < n+1.$$

On en déduit que $1 < |a|n$ soit $|a| > \dfrac{1}{n}$.

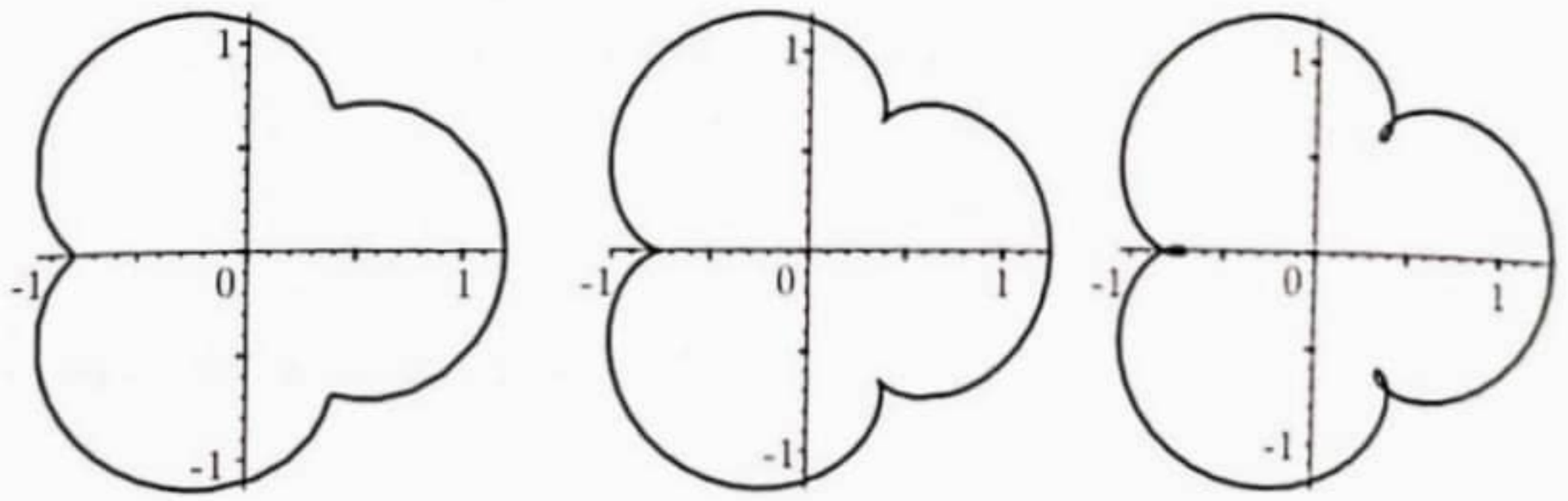
• Supposons réciproquement que cette condition est réalisée et montrons qu'il existe t et u tels que $0 \leqslant t < u < 2\pi$ et $f(t) = f(u)$, *i.e.* $e^{i(1-n)\frac{t+u}{2}} = a \dfrac{\sin \dfrac{n(u-t)}{2}}{\sin \dfrac{t-u}{2}}$. Pour que $e^{i(1-n)\frac{t+u}{2}}$ soit réel, il faut qu'il

existe un entier k tel que $(1-n)\dfrac{t+u}{2} = -k\pi$, soit $\dfrac{t+u}{2} = \dfrac{k\pi}{n-1}$ avec $0 < k < 2(n-1)$. La condition devient $(-1)^{k+1} = a\dfrac{\sin\dfrac{n(u-t)}{2}}{\sin\dfrac{u-t}{2}}$.

Si $n = 2$, alors $k = 1$ et $1 = a\dfrac{\sin(u-t)}{\sin\dfrac{u-t}{2}} = 2a\cos\dfrac{u-t}{2}$. Comme $\dfrac{1}{2|a|} < 1$, il existe $x \in]0,\pi[$ tel que $\cos x = \dfrac{1}{2a}$. On définie t et u par $\dfrac{t+u}{2} = \pi$ et $\dfrac{u-t}{2} = x$, i.e. $t = \pi - x$ et $u = \pi + x$.

Si $n \geqslant 3$, on prend $k = 1$ ou 2 selon le signe de a, de telle manière que l'égalité cherchée devienne $1 = |a|\dfrac{\sin\dfrac{n(u-t)}{2}}{\sin\dfrac{u-t}{2}}$. On cherche $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{n}\right[$ tel que $1 = |a|\dfrac{\sin nx}{\sin x}$. L'existence de x résulte du théorème des valeurs intermédiaires car $\lim\limits_{x\to 0} |a|\dfrac{\sin nx}{\sin x} = n|a| > 1$ et $|a|\dfrac{\sin\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n}} = 0$. On définit t et u par $\dfrac{t+u}{2} = \dfrac{k\pi}{n-1}$ et $\dfrac{u-t}{2} = x$, *i.e.* $t = \dfrac{k\pi}{n-1} - x$ et $u = \dfrac{k\pi}{n-1} + x$ (on vérifie que $u \leqslant \dfrac{2\pi}{n-1} + \dfrac{\pi}{n} < 2\pi$ et $t \geqslant \dfrac{\pi}{n-1} - \dfrac{\pi}{n} > 0$).

Pour $n \geqslant 2$, la courbe possède des points multiples si, et seulement si, $|a| > \dfrac{1}{n}$. Voici par exemple pour $n = 4$ l'allure de la courbe pour différentes valeurs de a (à gauche $a = 0.2$, au centre la valeur critique $a = \dfrac{1}{4} = 0.25$ et à droite $a = 0.3$).



On observe la présence de points de rebroussement pour la valeur critique $a = \dfrac{1}{4}$ avant l'apparition des points multiples.

Conclusion. La courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de point multiple si $n = 0$ ou $n = 1$ et $a \neq -1$ ou $n \geqslant 2$ et $|a| \leqslant \dfrac{1}{n}$. ◁

L'exercice suivant démontre que si l'arc continu $t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ *est tel*

que la distance $\mathrm{M}(t_1)\mathrm{M}(t_2)$ *ne dépende que de* $|t_1 - t_2|$, *alors* $\mathrm{M}(t)$ *décrit une droite ou un cercle à une vitesse uniforme.*

4.6. Courbes telles que $d(\mathrm{M}(t_1), \mathrm{M}(t_2))$ ne dépende que de $|t_1 - t_2|$

Déterminer les courbes $(\mathrm{M}(t))_{t\in\mathrm{I}}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) du plan, continues, telles que $\|\overrightarrow{\mathrm{M}(t_1)\mathrm{M}(t_2)}\|$ ne dépende que de $|t_1 - t_2|$.
(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Un repère orthonormal étant fixé, on note $z(t)$ l'affixe du point $\mathrm{M}(t)$. Pour tout réel positif u inférieur à la longueur de I, la distance entre $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(t+u)$ est indépendante de t tel que $t \in \mathrm{I}$ et $t+u \in \mathrm{I}$. On la note $\varphi(u)$. Par inégalité triangulaire, on a pour tous u et v assez petits, $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$. Nous supposerons que φ n'est pas nulle, c'est-à-dire que l'application $t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ n'est pas constante. Soit $h > 0$ tel que $\varphi(2h) \neq 0$ (alors h est inférieur à la moitié de la longueur de I). On a alors $\varphi(h) \geqslant \frac{1}{2}\varphi(2h) \neq 0$. Notons J l'ensemble (non vide) des t tels que $t-h$ et $t+h$ soient dans I. C'est un intervalle.

Pour $t \in \mathrm{J}$, le triangle $\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)$ a des côtés de longueur indépendante de t. Or l'aire d'un triangle s'exprime en fonction des longueurs de côtés : en notant a, b, c les côtés du triangle et p le demi-périmètre, l'aire S est donnée par la formule de Héron $\mathrm{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Ainsi l'aire du triangle $\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)$ et donc $a_h = \left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)}, \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)}\right)\right|$ (qui est égal au double de cette aire) sont indépendants de $t \in \mathrm{J}$.

- Supposons $a_h \neq 0$. Comme la fonction

$$t \longmapsto \det\left(\overrightarrow{\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)}, \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)}\right)$$

est continue, elle est constante. Soit θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)}, \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)})$. On a

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)}, \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)} \rangle}{\varphi(h)^2} = \frac{\varphi(2h)^2 - 2\varphi(h)^2}{2\varphi(h)^2}$$

et

$$\sin\theta = \frac{\det(\overrightarrow{\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)}, \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)})}{2\varphi(h)^2},$$

donc θ est indépendant de t et ne dépend que de h. On note θ_h une telle mesure. Comme les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t)}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)}$ ont même

Scanné avec CamScanner

norme, on en déduit pour tout $t\in \mathrm{J}$, $z(t+h)-z(t)=e^{i\theta_h}(z(t)-z(t-h))$. Choisissons $c\in \mathrm{J}$ et posons pour $j\in\mathbb{Z}$ assez petit, $z_{h,j}=z(c+jh)$ (il est défini au moins pour $|j|\leqslant 1$). On a, pour tout j,

$$z_{h,j+1}-z_{h,j}=e^{i\theta_h}(z_{h,j}-z_{h,j-1}).$$

La suite $(z_{h,j})$ vérifie une relation de récurrence linéaire sur deux termes d'équation caractéristique $x^2-(e^{i\theta_h}+1)x+e^{i\theta_h}=0$, de racines 1 et $e^{i\theta_h}$ distinctes (les points $\mathrm{M}(t-h)$, $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(t+h)$ ne sont pas alignés donc $e^{i\theta_h}\notin\mathbb{R}$). On en déduit qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que

$$z_{h,j}=a+b\left(e^{i\theta_h}\right)^j=a+be^{ij\theta_h}.$$

On a donc $|z_{h,j}-a|=|b|$: les points d'affixe $z_{h,j}$ sont tous sur un même cercle $\mathcal{C}$.

Montrons qu'alors $a_{\frac{h}{2}}\neq 0$. Si ce n'est pas le cas, pour tout $t\in \mathrm{J}$, $\mathrm{M}\left(t+\frac{h}{2}\right)$ $\left(\text{resp. } \mathrm{M}\left(t-\frac{h}{2}\right)\right)$ est le milieu du segment $[\mathrm{M}(t+h),\mathrm{M}(t)]$ (resp. $[\mathrm{M}(t-h),\mathrm{M}(t)]$). On en déduit que

$$\begin{aligned} d(\mathrm{M}(t-h),\mathrm{M}(t+h)) &= 2d\left(\mathrm{M}\left(t-\frac{h}{2}\right),\mathrm{M}\left(t+\frac{h}{2}\right)\right)=2\varphi(h)\\ &= d(\mathrm{M}(t-h),\mathrm{M}(t))+d(\mathrm{M}(t),\mathrm{M}(t+h)), \end{aligned}$$

ce qui est impossible car les points $\mathrm{M}(t-h)$, $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(t+h)$ ne sont pas alignés. Le raisonnement précédent montre que les points $z_{\frac{h}{2},j}$ sont sur un même cercle, qui est le cercle $\mathcal{C}$ car $z_{\frac{h}{2},2j}=z_{h,j}$. En réitérant le raisonnement, on montre que les points d'affixe $z_{\frac{h}{2^n},j}=z\left(c+\frac{jh}{2^n}\right)$ sont sur $\mathcal{C}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{Z}$ assez petit. Comme les réels $c+\frac{jh}{2^n}$ sont denses dans I et l'application $t\longmapsto \mathrm{M}(t)$ continue, la courbe est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$.

On peut préciser ce résultat. De

$$\begin{aligned} z(t+h)-z(t) &= z(t+h)-z\left(t+\frac{h}{2}\right)+z\left(t+\frac{h}{2}\right)-z(t)\\ &= (e^{i\theta_{h/2}})^2\left(z(t)-z\left(t-\frac{h}{2}\right)\right)+(e^{i\theta_{h/2}})^2\left(z\left(t-\frac{h}{2}\right)-z(t-h)\right)\\ &= e^{2i\theta_{h/2}}\left(z(t)-z(t-h)\right), \end{aligned}$$

on déduit $e^{i\theta_h}=e^{2i\theta_{h/2}}$ et pour tout j,

$$z_{\frac{h}{2},2j}=z_{h,j}=a+be^{ij\theta_h}=a+be^{i(2j)\theta_{h/2}},$$

ce qui montre que les constantes a et b sont les mêmes pour h et $\frac{h}{2}$ (et donc pour $\frac{h}{2^n}$). Ainsi, on obtient pour tous n et j,

$$z\left(c+\frac{jh}{2^n}\right) = z_{\frac{h}{2^n},j} = a + be^{j\theta_{h/2^n}} = a + be^{j\frac{1}{2^n}\theta_h}.$$

Par continuité, on en déduit, pour tout réel t tel que $t + c \in \mathrm{I}$,

$$z(c+t) = a + be^{i\frac{\theta_h}{h}t}.$$

Le cercle $\mathcal{C}$ est donc parcouru par le point $\mathrm{M}(t)$ à une vitesse uniforme.

• Si $a_h = 0$, les points $\mathrm{M}(t-h), \mathrm{M}(t), \mathrm{M}(t+h)$ sont alignés pour tout t et comme $\mathrm{M}(t-h)\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+h)$, $\mathrm{M}(t)$ est le milieu du segment $[\mathrm{M}(t-h), \mathrm{M}(t+h)]$ (car $\mathrm{M}(t-h) \neq \mathrm{M}(t+h)$). On a, pour tout t,

$$z(t+h) - z(t) = z(t) - z(t-h).$$

En gardant les notations précédentes, la suite $z_{h,j}$ est arithmétique. Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_{h,j} = z(c) + aj$. Si $a_{\frac{h}{2}} \neq 0$, les points $z_{\frac{h}{2},j}$ sont sur un même cercle qui contient en particulier les points $z_{\frac{h}{2},2j} = z_{h,j}$, pour $|j| \leqslant 1$, qui sont alignés et distincts. C'est impossible. On a donc $a_{\frac{h}{2}} = 0$ et il existe $a' \in \mathbb{C}$ tel que $z_{\frac{h}{2},j} = z(c) + a'j$. En considérant $z_{\frac{h}{2},2j} = z_{h,j}$, on voit que $a' = \frac{a}{2}$. En réitérant le procédé, on arrive à $z(c + \frac{jh}{2^n}) = z_{\frac{h}{2^n},j} = z(c) + \frac{aj}{2^n}$ et par continuité, $z(c+t) = z(c) + at$ pour tout t tel que $t + c \in \mathrm{I}$.

La courbe est donc incluse dans une droite, qui est parcourue par le point $\mathrm{M}(t)$ à une vitesse uniforme. ◁

Nous commençons une série d'exercices sur la notion de longueur d'une courbe. Rappelons que la longueur d'un arc paramétré Γ est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans Γ si celle-ci est finie (on dit alors que l'arc est rectifiable). Si Γ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ (voire même continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) défini par le paramétrage $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, alors Γ est rectifiable, de longueur $\int_a^b \|f'(t)\|\, dt$. La notion de rectifiabilité est actuellement hors programme en classe préparatoire et la longueur n'y est définie que dans le cas des arcs de classe $\mathcal{C}^1$. Cela est suffisant pour les premiers exercices.

4.7. Minimisation d'une aire

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue croissante et C^1 sur $]0,1[$. On note L la longueur du graphe de f et on suppose que $f(1) = \mathrm{L}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{4}$ et étudier le cas d'égalité.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Pour faire intervenir la valeur $f(1)$ qui est égale à la longueur du graphe de f on va faire une intégration par parties. La fonction f étant de classe C^1 sur $]0,1[$, on peut intégrer par parties sur $[a,b]$ pour $0 < a < b < 1$. On obtient

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = bf(b) - af(a) - \int_a^b tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, on voit en faisant tendre a vers 0 et b vers 1 que la fonction positive $t \longmapsto tf'(t)$ est intégrable sur $]0,1[$ et que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - \int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{L} - \int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+f'(t)^2} - tf'(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Soit $t \in [0,1]$. Étudions la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi(x) = \sqrt{1+x^2} - tx.$$

Sa dérivée est $\varphi' : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - t$ qui s'annule en $x_0 = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$. Le signe de φ' montre que φ admet en x_0 un minimum qui vaut $\sqrt{1-t^2}$. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$, $\sqrt{1+f'(t)^2} - tf'(t) \geqslant \sqrt{1-t^2}$. On en déduit que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Les fonctions $t \longmapsto \sqrt{1+f'(t)^2} - tf'(t)$ et $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$ étant continues sur $[0,1]$, on a égalité si, et seulement si, pour tout $t \in]0,1[$, $\sqrt{1+f'(t)^2} - tf'(t) = \sqrt{1-t^2}$, *i.e.* $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$. On a alors

$$\mathrm{L} = \int_0^1 \sqrt{1+f'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

et, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - t^2}.$$

La courbe représentative de f est alors un quart de cercle. ◁

Les deux exercices suivants concernent la notion de plus court chemin. Il s'agit de courbes de longueur minimale entre deux points donnés vérifiant certaines conditions.

4.8. Chemin le plus court (1)

1. Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$, A et B deux points situés du même côté de D. Quel est le chemin allant de A à B et passant par D dont la longueur est minimale ?

On considère dans la suite une courbe Γ fermée, régulière, de classe $\mathcal{C}^1$ et deux points A et B tels que le segment [AB] ne rencontre pas Γ.

2. Montrer qu'il existe un plus court chemin de A à B passant par Γ.

3. Montrer que pour un tel chemin l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

4. On suppose de plus que Γ délimite un convexe et que A et B sont à l'extérieur de ce convexe. Prouver dans ce cas l'unicité du plus court chemin.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. L'argumentation suivante (principe de Fermat) est très classique. Soit A' le symétrique de A par rapport à D. On a, pour tout point M de D,

$$AM + MB = A'M + MB \geqslant A'B,$$

avec égalité si M appartient au segment [A'B]. Les points A' et B sont de part et d'autre de D donc la droite (A'B) coupe D en un point M_0 qui appartient au segment [A'B]. C'est en M_0 que $M \longmapsto AM + MB$ atteint son minimum.

2. Soit $\mathrm{F} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1)$ un paramétrage régulier de la courbe. On cherche à minimiser la fonction

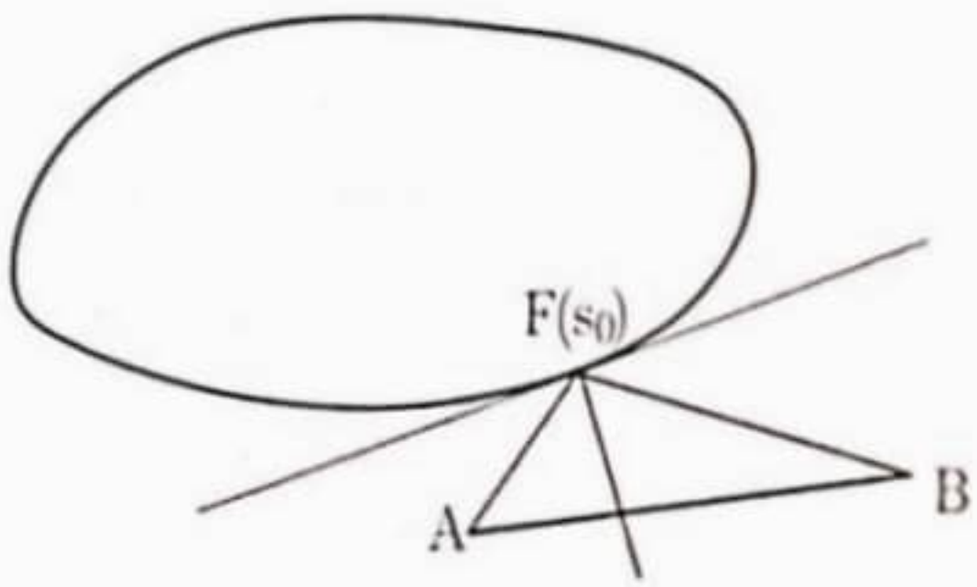
$$\varphi : s \longmapsto \|\mathrm{F}(s) - \mathrm{A}\| + \|\mathrm{F}(s) - \mathrm{B}\|.$$

La fonction φ est continue sur le compact $[0,1]$ donc possède un minimum atteint en un certain $s_0 \in [0,1]$. Le chemin qui va de A à B en passant par $\mathrm{F}(s_0)$ est un plus court chemin.

3. Comme A et B ne sont pas sur Γ, on a, pour tout $s \in [0,1]$, $\mathrm{F}(s) \neq \mathrm{A}$ et $\mathrm{F}(s) \neq \mathrm{B}$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. En effet F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \longmapsto \|u\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De $\varphi(s) = \sqrt{\langle \mathrm{F}(s) - \mathrm{A}, \mathrm{F}(s) - \mathrm{A}\rangle} + \sqrt{\langle \mathrm{F}(s) - \mathrm{B}, \mathrm{F}(s) - \mathrm{B}\rangle}$, on déduit, pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{\langle \mathrm{F}'(s), \mathrm{F}(s) - \mathrm{A}\rangle}{\|\mathrm{F}(s) - \mathrm{A}\|} + \frac{\langle \mathrm{F}'(s), \mathrm{F}(s) - \mathrm{B}\rangle}{\|\mathrm{F}(s) - \mathrm{B}\|} \\ &= \langle \mathrm{F}'(s), u\rangle + \langle \mathrm{F}'(s), v\rangle = \langle \mathrm{F}'(s), u + v\rangle,\end{aligned}$$

où u (resp. v) est un vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{\mathrm{AF}(s)}$ (resp. $\overrightarrow{\mathrm{BF}(s)}$). Comme $\mathrm{F}(s)$ n'appartient pas à [AB], le vecteur $u+v$ n'est pas nul. C'est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AF}(s)}, \overrightarrow{\mathrm{BF}(s)})$. En un point s_0 tel que $\varphi(s_0)$ est minimal on a $\varphi'(s_0) = 0$.



La tangente à Γ qui est dirigée par $\mathrm{F}'(s_0)$ est donc orthogonale à la bissectrice ce qui établit l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

4. Soit toujours $s_0 \in [0,1]$ tel que $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}(s_0)$ corresponde à un plus court chemin. D'après la propriété classique des tangentes des ellipses (la tangente en M est la bissectrice extérieure des droites joignant M aux deux foyers, voir par exemple l'exercice 4.18 du tome algèbre 3), la tangente à Γ est aussi la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers A et B définie par $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \mathrm{F}_0\mathrm{A} + \mathrm{F}_0\mathrm{B}$. Comme Γ délimite un convexe, la tangente en F_0 définit deux demi-plans qui contiennent pour l'un Γ et pour l'autre l'ellipse $\mathcal{E}$. Il s'ensuit qu'en dehors de F_0, tous les points $\mathrm{F}(s)$ de Γ sont en dehors de l'ellipse et vérifient $\mathrm{FA} + \mathrm{FB} > \mathrm{F}_0\mathrm{A} + \mathrm{F}_0\mathrm{B}$: le plus court chemin est donc unique. ◁

4.9. Chemin le plus court (2)

Quel est le chemin le plus court pour aller du pôle Sud au pôle Nord ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Nous allons démontrer que les chemins les plus courts pour aller du pôle Sud au pôle Nord sont tracés sur les méridiens. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, la Terre est la sphère S de centre 0 de rayon R. Les pôles Sud et Nord sont $(0,0,-\mathrm{R})$ et $(0,0,\mathrm{R})$. On considère les chemins de classe $\mathcal{C}^1$ $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathrm{S}$, tels que $\varphi(0) = (0,0,-\mathrm{R})$ et $\varphi(1) = (0,0,\mathrm{R})$ et on note, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La longueur du chemin est

$$\mathrm{L} = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons raisonner en coordonnées cylindriques (z,θ). On a, pour tout $t \in [0,1]$, $x(t)^2 + y(t)^2 = \mathrm{R}^2 - z(t)^2$. Pour pouvoir définir l'angle polaire θ, il faut se placer sur un intervalle où $\mathrm{R}^2 - z^2$ ne s'annule pas. Soit

$$a = \sup\{t \in [0,1], \varphi(t) = (0,0,-\mathrm{R})\} \text{ et } b = \inf\{t \in [a,1], \varphi(t) = (0,0,\mathrm{R})\}.$$

On a, par continuité de φ, $\varphi(a) = (0,0,-\mathrm{R})$ et $\varphi(b) = (0,0,\mathrm{R})$ et donc $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Par construction, pour tout $t \in]a,b[$, $\mathrm{R}^2 - z(t)^2 > 0$, donc on peut écrire $\left|\dfrac{x(t)+iy(t)}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}}\right| = 1$. D'après le théorème de relèvement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $\theta :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in]a,b[$, $\dfrac{x(t)+iy(t)}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}} = e^{i\theta(t)}$ et donc

$$(x(t), y(t)) = \left(\sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}\cos\theta(t), \sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}\sin\theta(t)\right).$$

On a alors, pour tout $t \in]a,b[$,

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{z(t)z'(t)\cos\theta(t)}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}\,\theta'(t)\sin\theta(t) \\ y'(t) = -\dfrac{z(t)z'(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}} + \sqrt{\mathrm{R}^2 - z(t)^2}\,\theta'(t)\cos\theta(t). \end{cases}$$

On en déduit, pour tout $t \in]a,b[$,

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\sqrt{\frac{z(t)^2z'(t)^2}{\mathrm{R}^2-z(t)^2}+(\mathrm{R}^2-z(t)^2)\theta'(t)^2+z'(t)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{\mathrm{R}^2z'(t)^2}{\mathrm{R}^2-z(t)^2}+(\mathrm{R}^2-z(t)^2)\theta'(t)^2}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{L}\geqslant\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_a^b\frac{\mathrm{R}|z'(t)|}{\sqrt{\mathrm{R}^2-z(t)^2}}\mathrm{d}t$$
$$\geqslant\int_a^b\frac{\mathrm{R}z'(t)}{\sqrt{\mathrm{R}^2-z(t)^2}}\mathrm{d}t\geqslant\left[\mathrm{R}\arcsin\frac{z(t)}{\mathrm{R}}\right]_a^b=\mathrm{R}\pi.$$

On a l'égalité $\mathrm{L}=\mathrm{R}\pi$ si $x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2=0$ pour $t\in[0.a]\cup[b,1]$, ce qui signifie que φ est constante, égale à $(0,0,-\mathrm{R})$ sur $[0,a]$ et constante égale à $(0,0,\mathrm{R})$ sur $[b,1]$ et si d'autre part, pour tout $t\in]a.b[$, $\theta'(t)=0$ et $|z'(t)|=z'(t)$: la fonction θ est donc constante et la fonction z est croissante. Les points de S correspondant à θ constant sont les points d'un grand cercle passant par les pôles Nord et Sud c'est-à-dire d'un méridien.

Conclusion. Les chemins les plus courts pour aller du pôle Sud au pôle Nord sont ceux qui sont tracés sur un méridien parcouru dans le sens des z croissant. ◁

On aurait également pu travailler en coordonnées sphériques : on définit a et b comme précédemment, puis pour $t\in]a.b[$, on pose $\varphi(t)=\arcsin\dfrac{z(t)}{\mathrm{R}}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et on utilise encore le théorème de relèvement pour écrire*

$$x(t)+iy(t)=\mathrm{R}\cos\varphi(t)e^{i\theta(t)}$$

avec θ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. On obtient alors

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\mathrm{R}\sqrt{\varphi'(t)^2+\theta'(t)^2\cos^2\varphi(t)}\geqslant\mathrm{R}|\varphi'(t)|.$$

On en déduit que $\mathrm{L}\geqslant\int_a^b\mathrm{R}|\varphi'|\geqslant\mathrm{R}\int_a^b\varphi'=\pi\mathrm{R}$ *avec les mêmes cas d'égalité que précédemment.*

L'exercice qui suit, démontre qu'un chemin au-dessus d'une courbe concave et ayant mêmes extrémités que celle-ci a une longueur supérieure à celle de la courbe. On pourra y utiliser la définition géométrique de la longueur d'un arc comme la borne supérieure des longueurs des courbes polygonales inscrites dans l'arc.

4.10. Chemin au-dessus d'une courbe concave

Soient a et b des réels ($a < b$) et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave, continue et de classe C^1 par morceaux. On note Γ_1 la courbe paramétrée par $x \longmapsto (x, f(x))$. Soit Γ_2 un chemin continu de classe C^1 par morceaux, joignant les extrémités de Γ_1 et situé au-dessus de Γ_1. Montrer que la longueur de Γ_2 est supérieure ou égale à la longueur de Γ_1.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

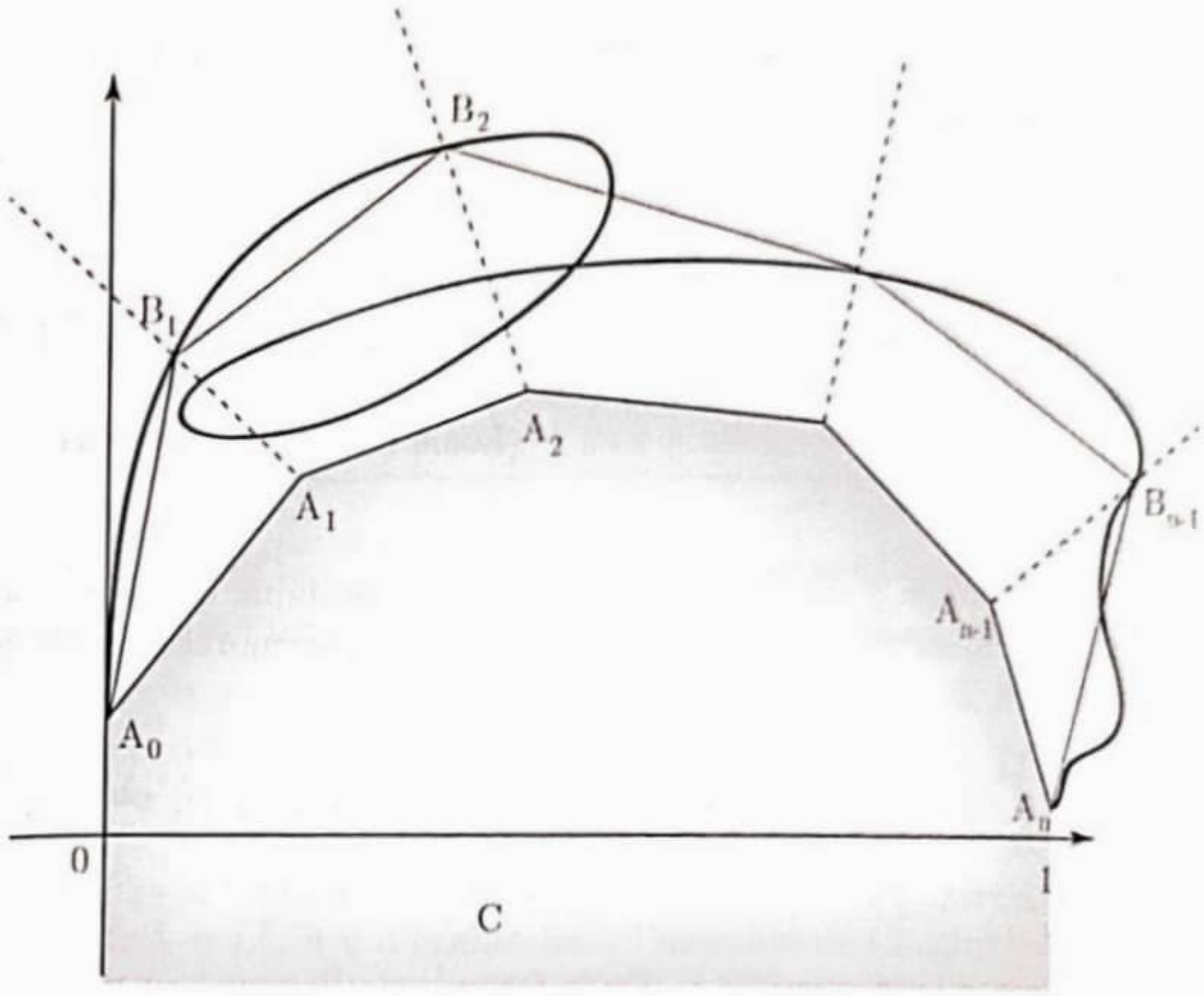
• Nous noterons $\ell(\Gamma)$ la longueur d'une courbe Γ. Remarquons pour commencer qu'on peut se ramener au cas où f est affine par morceaux. Soit en effet S une subdivision quelconque $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a.b]$ et g_S la fonction affine par morceaux telle que $g_S(x_i) = f(x_i)$ pour tout i et g_S affine sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. La fonction g_S est encore concave. En effet, en notant $a_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ la pente de g_S sur $[x_i, x_{i+1}]$ on a, d'après le théorème des pentes décroissantes,

$$a_{i-1} \geqslant f'_g(x_i) \geqslant f'_d(x_i) \geqslant a_i.$$

Si Γ_S est la courbe paramétrée $x \longmapsto (x, g_S(x))$, on a $\ell(\Gamma_S) \leqslant \ell(\Gamma_1)$ d'après la définition géométrique de la longueur d'un arc et de plus $\ell(\Gamma_1)$ est la borne supérieure des longueurs $\ell(\Gamma_S)$ lorsque S décrit toutes les subdivisions de $[a,b]$. Si Γ_2 est un arc au-dessus de Γ_1 il est au-dessus de Γ_S pour tout S. Il suffit donc de prouver le résultat pour les courbes Γ_S, le résultat pour Γ_1 étant alors obtenu par un passage à la borne supérieure. Dorénavant, nous supposerons donc que la fonction f est affine par morceaux.

• Soit $S = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ une subdivision minimale de $[a,b]$ telle que f soit affine sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Notons A_i le point $(x_i, f(x_i))$ pour tout i. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \leqslant f(x)\}$ l'ensemble des points qui sont sous le graphe de f : il s'agit d'une partie convexe du plan. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ on considère la demi-droite Δ_i issue de A_i, orthogonale à $(A_{i-1}A_i)$ et qui ne rencontre C qu'en A_i. Comme Γ_1 est concave, les demi-droites Δ_i ne se coupent pas et délimitent n composantes connexes (polygonales) du domaine $C^+ = \{x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant f(x)\}$ situé au-dessus de Γ_1 (voir figure ci-après). Notons $t \in [0,1] \mapsto \gamma(t)$ un paramétrage de l'arc Γ_2. Il est clair par un argument de connexité que l'arc Γ_2 coupe chacune des demi-droites Δ_i. Plus précisément on peut construire une suite strictement croissante $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}$ telle que $\gamma(t_i) \in \Delta_i$ pour tout i. Il suffit de prendre $t_1 = \min\{t \in [0,1], \gamma(t) \in \Delta_1\}$ (le minimum existe car il s'agit

d'un ensemble fermé non vide) puis $t_2 = \min\{t \in [t_1, 1], \gamma(t) \in \Delta_2\}$ et ainsi de suite.



Notons B_i le point $\gamma(t_i)$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n$. Il est clair que A_i est le projeté de B_i sur le convexe fermé C. Comme la projection sur C est 1-lipschitzienne on a $A_iA_{i+1} \leqslant B_iB_{i+1}$ pour tout i. En sommant on en déduit que

$$\ell(\Gamma_1) = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} B_iB_{i+1} \leqslant \ell(\Gamma_2).$$

C'est le résultat souhaité [1]. ◁

Si Γ est une courbe fermée simple du plan disons de classe C^1, de longueur L, limitant un domaine d'aire A, on $L^2 \geqslant 4\pi A$, avec égalité si et seulement si Γ est un cercle. Autrement dit, l'aire d'un domaine plan limité par une courbe de longueur donnée est maximale si le domaine est un disque. L'exercice propose une démonstration qui repose sur les séries de Fourier et qui remonte à Hurwitz (1902). Elle repose sur l'inégalité de Wirtinger (question 1) que le lecteur trouvera aussi dans l'exercice 4.20 du tome analyse 2.

1. Nous remercions Thomas Lafforgue qui nous a donné l'idée de la fin de la solution : une alternative plus longue et moins jolie consiste à raisonner par récurrence sur n.

4.11. Inégalité isopérimétrique

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$ et $f(0) = f(1)$.
Montrer que

$$\int_0^1 |f|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'|^2.$$

2. Soit Γ une courbe du plan, régulière, de classe $\mathcal{C}^1$, fermée, sans point multiple. On note L la longueur de Γ et A l'aire qu'elle délimite. Montrer que $4\pi A \leqslant L^2$ et étudier le cas d'égalité.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On prolonge f sur $\mathbb{R}$ en une fonction 1-périodique que l'on note encore f. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \int_0^1 f'(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = [f(t)e^{-2i\pi nt}]_0^1 + 2i\pi n\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t \\ &= 2i\pi n c_n(f), \end{aligned}$$

puisque f' est continue sur $[0,1]$. De la formule de Parseval on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |2n\pi c_n(f)|^2 \geqslant 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \\ &= 4\pi^2\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

car $c_0(f) = 0$.

Notons que l'inégalité est une égalité si, et seulement si, $c_n(f) = 0$ pour $|n| \geqslant 2$, c'est-à-dire s'il existe deux constantes a et b telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = ae^{-2i\pi t} + be^{2i\pi t}$.

2. On suppose que la courbe admet la représentation paramétrique $t \in [0,1] \longmapsto g(t)$, où g est de classe $\mathcal{C}^1$, $g(0) = g(1)$ et g injective sur $[0,1[$. On change de paramètre en prenant un multiple de l'abscisse curviligne. On pose, pour $t \in [0,1]$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^t |g'(s)|\mathrm{d}s.$$

La dérivée de φ est $\frac{1}{\mathrm{L}}|g'| > 0$ et $\varphi(1) = 1$. Donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,1]$ sur $[0,1]$. On pose $f = g \circ \varphi^{-1}$. La fonction f est un paramétrage de Γ, de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est injective sur $[0,1[$ et

vérifie $f(0) = f(1)$. De plus, $f' = \dfrac{g' \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \mathrm{L}\dfrac{g' \circ \varphi^{-1}}{|g' \circ \varphi^{-1}|}$ donc $|f'| = \mathrm{L}$. En faisant éventuellement une translation de la courbe, ce qui ne change ni la longueur ni l'aire, on peut supposer que $\int_0^1 f = 0$. On pose, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = x(t) + iy(t)$. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x'y - xy').$$

On remarque que

$$\int_0^1 f\bar{f}' = \int_0^1 (xx' + yy') + i(x'y - xy') = 2i\mathrm{A},$$

car $\int_0^1 (xx' + yy') = \dfrac{1}{2}[x^2 + y^2]_0^1 = 0$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité démontrée dans la première question, on obtient

$$2\mathrm{A} = \left|\int_0^1 f\bar{f}'\right| \leqslant \int_0^1 |f|\,|f'| \leqslant \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \int_0^1 |f'|^2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 |f'|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\mathrm{L}^2,$$

car $|f'|^2 = \mathrm{L}^2$. On a donc $4\pi\mathrm{A} \leqslant \mathrm{L}^2$.

Si $4\pi\mathrm{A} = \mathrm{L}^2$, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc $|f|$ et $|f'|$ sont proportionnelles. Comme $|f'| = \mathrm{L}$, $|f|$ est constante et Γ est incluse dans un cercle ; la courbe Γ est fermée donc c'est un cercle. La réciproque est évidente : si Γ est un cercle de rayon R, $\mathrm{A} = \pi\mathrm{R}^2$ et $\mathrm{L} = 2\pi\mathrm{R}$ donc $4\pi\mathrm{A} = \mathrm{L}^2$. ◁

Ce résultat se généralise à des dimensions supérieures. En dimension trois on obtient ainsi, si V *est le volume d'un compact* K *dont la frontière est une surface d'aire* S, *l'inégalité* $\mathrm{S}^3 \geqslant 36\pi\mathrm{V}^2$, *avec égalité si* K *est une boule. De manière générale, dans un espace euclidien les compacts ayant la plus grande mesure possible pour une mesure de leur frontière fixée sont les boules. Tous ces résultats sont qualifiés d'inégalités isopérimétriques. Le lecteur pourra trouver un problème qui fait démontrer l'inégalité isopérimétrique pour les polygones dans le livre suivant :* H. GIANELLA, R. KRUST, F. TAIEB, N. TOSEL, Problèmes clés pour mathématiques supérieures, *Calvage&Mounet 2009 (problème 32, page 236).*

Dans l'exercice suivant on s'intéresse à la distance d'un point à une courbe plane fermée. On y démontre, que si le point est assez proche de la courbe, la distance est atteinte en un point unique.

4.12. Distance d'un point du plan à une courbe

Soit Γ une courbe fermée de $\mathbb{R}^2$, paramétrée par une application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1, L-périodique et injective sur $[0, \mathrm{L}[$ (où $\mathrm{L} \in \mathbb{R}_+^*$). On suppose que, pour tout réel s, on a $\|g'(s)\| = 1$.

Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$, on pose $d(\mathrm{X}) = \inf_{\mathrm{Z} \in \Gamma} d(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

1. Montrer que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$, il existe $\mathrm{Y} \in \Gamma$ tel que $d(\mathrm{X}) = d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

2. Montrer que si $d(\mathrm{X}) = d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, alors $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ est orthogonal à la tangente à Γ en Y.

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $d(\mathrm{X}) \leqslant \alpha$, il existe un unique $\mathrm{Y} \in \Gamma$ tel que $d(\mathrm{X}) = d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Γ qui est l'image du compact $[0, \mathrm{L}]$ par l'application continue g est un compact du plan $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$, l'application $\mathrm{Z} \longmapsto d(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$ est continue car 1-lipschitzienne. Elle atteint donc son minimum sur le compact Γ. D'où l'existence de Y.

Il n'y a pas unicité de Y *en général : pensez au cas où* Γ *est un cercle et* X *son centre.*

2. Soit $\mathrm{Y} \in \Gamma$ tel que $d(\mathrm{X}) = d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(s_0) = \mathrm{Y}$. La fonction $h : s \longmapsto d(\mathrm{X}, g(s))^2 = \langle g(s) - \mathrm{X}, g(s) - \mathrm{X} \rangle$ présente donc un minimum en s_0. Comme elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $h'(s_0) = 0$, c'est-à-dire $2\langle g'(s_0), g(s_0) - \mathrm{X} \rangle = 2\langle g'(s_0), \overrightarrow{\mathrm{XY}} \rangle = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ est donc orthogonal à la tangente à Γ en Y.

3. On raisonne par l'absurde. Si un tel α n'existe pas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $\mathrm{X}_n \in \mathbb{R}^2$ tel que $d(\mathrm{X}_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et un couple $(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Z}_n)$ de points distincts de Γ tel que $d(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n) = d(\mathrm{X}_n, \mathrm{Z}_n) = d(\mathrm{X}_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(s_n, t_n) \in [0, \mathrm{L}[^2$ tel que $s_n \neq t_n$, $\mathrm{Y}_n = g(s_n)$ et $\mathrm{Z}_n = g(t_n)$. Les suites (s_n) et (t_n) sont à valeurs dans le compact $[0, \mathrm{L}]$. On peut en extraire des sous-suites convergentes. En extrayant deux fois, on trouve une application $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $(s_{\varphi(n)})$ et $(t_{\varphi(n)})$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Comme $d(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Z}_n) \leqslant \dfrac{2}{n}$ pour $n \geqslant 1$, on a $g(\ell) = g(\ell')$ donc $\ell \equiv \ell' \pmod{\mathrm{L}}$. De plus $(\ell, \ell') \in [0, \mathrm{L}]^2$ donc $\ell = \ell'$ ou $\ell = 0$ et $\ell' = \mathrm{L}$ (ou le contraire) ; dans ce dernier cas, on remplace t_n par $t_n - \mathrm{L}$ et on se ramène à $\ell = \ell'$.

D'après la question 2, le point $\mathrm{X}_{\varphi(n)}$ appartient aux normales à Γ en $\mathrm{Y}_{\varphi(n)}$ et $\mathrm{Z}_{\varphi(n)}$. Notons, pour tout réel s, $\nu(s)$ le vecteur image de $g'(s)$ par la rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$. C'est un vecteur unitaire normal à Γ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X_{\varphi(n)} = g(s_{\varphi(n)}) + u_n \nu(s_{\varphi(n)}) = g(t_{\varphi(n)}) + v_n \nu(t_{\varphi(n)}).$$

Comme $d(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$ et $d(X_{\varphi(n)}, Z_{\varphi(n)})$ tendent vers 0, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Nous allons montrer que, pour n assez grand, on a $s_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)}$ et donc $Y_{\varphi(n)} = Z_{\varphi(n)}$, ce qui fournira la contradiction cherchée. Pour cela, considérons l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(s, u) = g(s) + u\nu(s).$$

Elle est de classe C^1 et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}(\ell, 0) = g'(\ell)$ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(\ell, 0) = \nu(\ell)$. Comme la famille $(g'(\ell), \nu(\ell))$ est libre, la différentielle de Φ en $(\ell, 0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème d'inversion locale (on peut également utiliser un résultat plus simple : une fonction C^1 est localement injective en tout point où la différentielle est un isomorphisme [2]), il existe un voisinage V de $(\ell, 0)$ sur lequel Φ est injective. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi(s_{\varphi(n)}, u_n) = \Phi(t_{\varphi(n)}, v_n)$.Comme les suites $(s_{\varphi(n)})$ et $(t_{\varphi(n)})$ convergent vers ℓ et que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0, pour n assez grand $(s_{\varphi(n)}, u_n)$ et $(t_{\varphi(n)}, v_n)$ sont dans V. De l'injectivité de Φ sur V, on déduit $s_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)}$, ce qui conduit à la contradiction voulue. ◁

Les exercices suivants concernent la courbure et le centre de courbure. Les deux premiers sont de simples applications pratiques des formules. Rappelons rapidement les résultats principaux. Soit $s \longmapsto \mathrm{M}(s)$ un arc normal (i.e. paramétré par longueur d'arc) de classe C^2. Alors $\mathrm{T} = \dfrac{d\mathrm{M}}{ds}$ est un vecteur unitaire qui dirige la tangente. On note N le vecteur image de T par la rotation d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. On a alors $\dfrac{d\mathrm{T}}{ds} = \gamma \mathrm{N}$, où γ est la courbure algébrique, et $\dfrac{d\mathrm{N}}{ds} = -\gamma \mathrm{T}$ (ce sont les formules de Frénet). Le rayon de courbure (algébrique) vaut $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\gamma}$ et le centre de courbure en M est le point C défini par $\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \mathrm{RN}$.

4.13. Aire d'un triangle

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Calculer l'aire d'un triangle dont les trois sommets sont les centres de courbures relatifs à trois points de la parabole.

(École polytechnique)

2. Se reporter à 1.17.

▷ **Solution.**

On paramètre la parabole par $x(t) = \dfrac{t^2}{2p}, y(t) = t$. On a $x'(t) = \dfrac{t}{p}$ et $y'(t) = 1$. On choisit un paramétrage normal s tel que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{t^2+p^2}}{p}$.

On pose

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}, \frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \left(-\frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}\right).$$

On en déduit $\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} = (p^2(t^2+p^2)^{-\frac{3}{2}}, -pt(t^2+p^2)^{-\frac{3}{2}})$ et donc

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}s} = (p^3(t^2+p^2)^{-2}, -p^2t(t^2+p^2)^{-2}) = -p^2(t^2+p^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{N}.$$

Ainsi la courbure est $\gamma = -p^2(t^2+p^2)^{-\frac{3}{2}}$ et le centre de courbure au point de paramètre t est définie par

$$\mathrm{C}(t) = \mathrm{M}(t) + \frac{1}{\gamma}\mathrm{N} = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right) - \frac{t^2+p^2}{p^2}(-p, t) = \left(\frac{3t^2}{2p} + p, -\frac{t^3}{p^2}\right).$$

On considère trois points de paramètres t_1, t_2, t_3. On note C_i le point $\mathrm{C}(t_i)$. L'aire du triangle $\mathrm{C_1C_2C_3}$ est égale à $\dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{\mathrm{C_1C_2}}, \overrightarrow{\mathrm{C_1C_3}})|$. On obtient

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{\mathrm{C_1C_2}}, \overrightarrow{\mathrm{C_1C_3}}) &= \frac{1}{2p^3}\begin{vmatrix} 3(t_2^2-t_1^2) & 3(t_3^2-t_1^2) \\ -(t_2^3-t_1^3) & -(t_3^3-t_1^3) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{3(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{2p^3}\begin{vmatrix} (t_2+t_1) & (t_3+t_1) \\ (t_2^2+t_2t_1+t_1^2) & (t_3^2+t_3t_1+t_1^2) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{3(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{2p^3}\begin{vmatrix} (t_2+t_1) & (t_3+t_1) \\ t_2^2 & t_3^2 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{3(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)}{2p^3}.
\end{aligned}$$

L'aire du triangle vaut $\dfrac{3|(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)|}{4p^3}$. ◁

4.14. Centre de courbure sur une hyperbole équilatère

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère, M un point de $\mathcal{H}$, C le centre de courbure de $\mathcal{H}$ en M, et M′ le point d'intersection de la normale à $\mathcal{H}$ en M avec l'autre branche de $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{MC}} = k\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il existe $a > 0$ tel que $\mathcal{H}$ ait pour équation $xy = a$ dans un repère orthonormal bien choisi. On paramètre $\mathcal{H}$ par $\mathrm{M}(t) = \left(t, \frac{a}{t}\right)$. On a $\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t} = \left(1, -\frac{a}{t^2}\right)$. On choisit un paramètre normal s tel que

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{t^4}} = \frac{\sqrt{t^4 + a^2}}{t^2}\cdot$$

On pose $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{t^2}{\sqrt{t^4 + a^2}}, -\frac{a}{\sqrt{t^4 + a^2}}\right)$ la tangente unitaire ainsi que $\mathrm{N} = \left(\frac{a}{\sqrt{t^4 + a^2}}, \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + a^2}}\right)$ le vecteur normal. En dérivant T on obtient $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} = (2ta^2(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}}, 2t^3a(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}})$ et donc

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}s} = (2t^3a^2(t^4 + a^2)^{-2}, 2t^5a(t^4 + a^2)^{-2}) = 2at^3(t^4 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{N}.$$

On en déduit que la courbure est $\gamma = 2at^3(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}}$ et

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \frac{1}{\gamma}\mathrm{N} = \frac{t^4 + a^2}{2at^3}(a, t^2).$$

La normale à $\mathcal{H}$ en M a pour équation $(x - t) - \frac{a}{t^2}\left(y - \frac{a}{t}\right) = 0$. Le point M′ a pour coordonnées $\left(u, \frac{a}{u}\right)$. Il appartient à la normale donc $(u - t) - \frac{a}{t^2}\left(\frac{a}{u} - \frac{a}{t}\right) = 0$ et comme $u \neq t$, on en déduit $1 = -\frac{a^2}{t^3u}$ et donc $u = -\frac{a^2}{t^3}\cdot$ On en déduit que $\mathrm{M}' = \left(-\frac{a^2}{t^3}, -\frac{t^3}{a}\right)$. On obtient enfin

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \left(-\frac{a^2}{t^3}, -\frac{t^3}{a}\right) - \left(t, \frac{a}{t}\right) = \left(-\frac{a^2}{t^3} - t, -\frac{t^3}{a} - \frac{a}{t}\right) = -\frac{t^4 + a^2}{at^3}(a, t^2)$$

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{MC}} = -2\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$. ◁

Bien entendu il est aussi possible de calculer la courbure directement en fonction du paramètre t à l'aide de la formule $\gamma = \frac{[\mathrm{M}'(t), \mathrm{M}''(t)]}{\|\mathrm{M}'(t)\|^3}$. *Toutefois le calcul de* N *est nécessaire pour obtenir le centre de courbure.*

L'exercice suivant présente une manière importante de paramétrer une courbe qui consiste en substance à voir la courbe comme l'enveloppe d'une famille de droites, celles-ci étant données par l'équation d'Euler $x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$.

4.15. Ovale de largeur constante

Soit $\mathrm{F} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto (p(\theta), q(\theta))$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. Soit $(\mathrm{O}, u_\theta, v_\theta)$ le repère tournant du plan d'angle polaire θ et Γ l'arc, supposé régulier, défini par $\overrightarrow{\mathrm{OM}(\theta)} = p(\theta)u_\theta + q(\theta)v_\theta$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que, pour tout θ, la tangente en $\mathrm{M}(\theta)$ à Γ soit dirigée par v_θ. On suppose cela réalisé dans la suite.

2. Interpréter $p(\theta)$.

3. Déterminer le rayon de courbure $\mathrm{R}(\theta)$. Montrer que Γ est un cercle si et seulement si $p(\theta)$ est de la forme $a\cos\theta + b\sin\theta + c$.

4. Un ovale de largeur constante λ est obtenu lorsque $p > 0$ et $p(\theta) + p(\theta + \pi) = \lambda$ pour tout θ. Donner une interprétation géométrique. Montrer que pour un tel ovale on a $\mathrm{R}(\theta)+\mathrm{R}(\theta+\pi) = \lambda$. Déterminer la longueur de l'ovale en fonction de λ.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On a pour tout θ, $\mathrm{M}'(\theta) = (p'(\theta) - q(\theta))u_\theta + (p(\theta) + q'(\theta))v_\theta$. Par hypothèse ce vecteur est toujours non nul et dirige la tangente à Γ au point $\mathrm{M}(\theta)$. Cette tangente est donc dirigée par v_θ si et seulement si $p' = q$. On a alors p de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathrm{M}'(\theta) = (p(\theta) + p''(\theta))v_\theta$.

2. Géométriquement $|p(\theta)|$ est la distance de l'origine à la tangente en $\mathrm{M}(\theta)$.

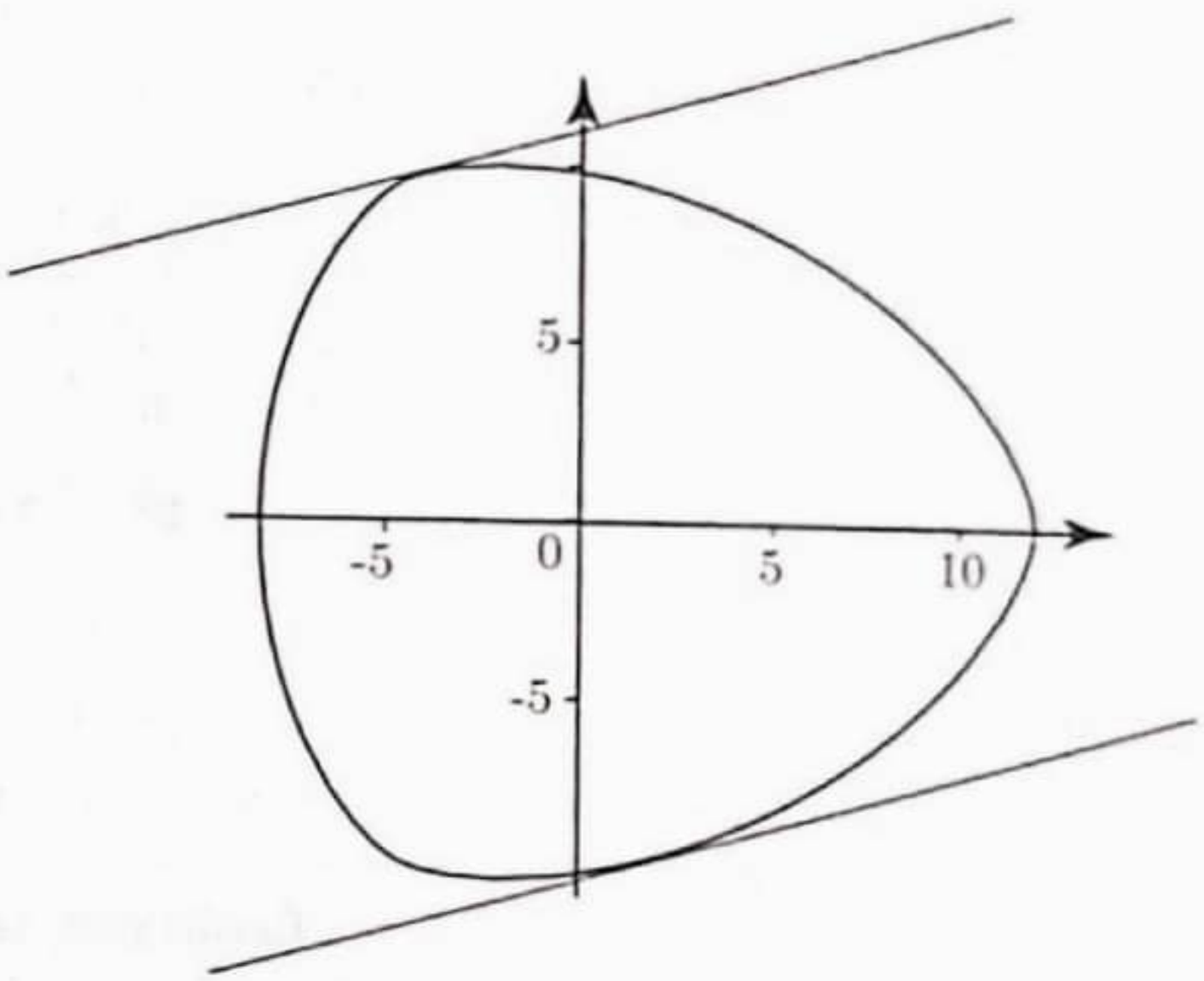
3. Par hypothèse la fonction $p + p''$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et comme elle est continue elle garde un signe constant. On peut supposer, quitte à changer le sens de parcours, qu'elle est strictement positive. La tangente unitaire au point de paramètre θ est alors $\mathrm{T} = v_\theta$ et si s est une abscisse curviligne on a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = p + p''$. On a $\mathrm{N} = -u_\theta$ et, par dérivation des fonctions composées, $\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{p+p''}\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{p+p''}\mathrm{N}$ de sorte que la courbure est $\gamma = \dfrac{1}{p+p''}$. Le rayon de courbure vaut donc $\mathrm{R} = p + p''$. On a le même résultat lorsque $p + p''$ est négative.

Si Γ est un cercle de rayon $r > 0$ le rayon de courbure est constant égal à $c = \pm r$ en tout point (selon le sens de parcours). Comme p vérifie l'équation différentielle $p''+p = c$, elle est de forme $\theta \mapsto a\cos\theta+b\sin\theta+c$. Réciproquement, supposons que p est de de la forme $a\cos\theta + b\sin\theta + c$. Si $c = 0$ la fonction M est constante égale à O et on a un cercle de rayon nul, mais l'arc n'est alors plus régulier. Lorsque c est non nul on a $\mathrm{M}'(\theta) = cv_\theta$ pour tout θ ce qui donne $\mathrm{M}(\theta) = cu_\theta + w$ où w est un point constant : la courbe est bien un cercle de centre w et de rayon $|c|$.

On a en fait $w = (a, b)$: les coordonnées de ce point dans le repère

mobile tournant sont précisément $a\cos\theta + b\sin\theta$ *selon* u_θ *et la dérivée* $-a\sin\theta + b\cos\theta$ *selon* v_θ.

4. On suppose ici $p > 0$ et toujours $p + p'' > 0$ quitte à changer l'orientation. La courbure est strictement positive et la courbe Γ est convexe. Pour θ donné, la courbe admet deux tangentes dirigées par v_θ, à savoir celles aux points de paramètre θ et $\theta + \pi$. La courbe est inscrite dans la bande délimitée par ces deux tangentes et d'après la question 2, la largeur de cette bande est égale à λ et elle ne dépend pas de la valeur de θ. Cela explique le nom d'ovale de largeur constante. Voici par exemple la courbe obtenue avec $p(\theta) = 10 + \cos t + \cos 3t$ et donc $\lambda = 20$.



En dérivant la relation vérifiée par p deux fois on a $p''(\theta)+p''(\theta+\pi) = 0$ pour tout θ et donc $\mathrm{R}(\theta)+\mathrm{R}(\theta+\pi) = \lambda$ d'après la question précédente. Calculons maintenant la longueur de l'ovale :

$$\mathrm{L} = \int_0^{2\pi} \|\mathrm{M}'(\theta)\| \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} p + p'' = \int_0^{2\pi} p$$

car $\int_0^{2\pi} p'' = p'(2\pi) - p'(0) = 0$. Or,

$$2\pi\lambda = \int_0^{2\pi} p(\theta) + p(\theta+\pi) \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{L} + \int_\pi^{3\pi} p(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{L}$$

si bien que $\mathrm{L} = \pi\lambda$. La formule généralise bien entendu celle qui donne le périmètre d'un cercle en fonction de son diamètre. ◁

*L'exercice suivant regroupe des questions posées à deux ou*ux *différents sur le même thème. On y retrouve le paramétrage étudié dans l'exercice précédent.*

4.16. Points associés sur un arc régulier sans point double

Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe C^2 telle que $p > 0$ et $p + p'' > 0$ et l'arc $\Gamma : t \longmapsto \mathrm{M}(t) = p(t)\mathrm{U}(t) + p'(t)\mathrm{V}(t)$, où $\mathrm{U}(t) = (\cos t, \sin t)$, $\mathrm{V}(t) = (-\sin t, \cos t)$. On suppose que Γ n'a pas de point double.

1. Montrer que l'arc est régulier et que la courbure est de signe constant.

2. Montrer qu'il y a au moins deux droites qui coupent orthogonalement l'arc en deux points.

3. Deux points de Γ sont dits associés si les tangentes en ces points sont parallèles et non confondues et si les rayons de courbure en ces points sont égaux.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux points soient associés. Montrer qu'il existe au moins un couple de points associés (on posera $\mathrm{R}(t) = p(t)+p''(t)$, $\mathrm{F}(t) = \mathrm{R}(t)-\mathrm{R}(t+\pi)$).

b. Soit f une application continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^\pi f(u)\sin u\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi f(u)\cos u\,\mathrm{d}u = 0$. Montrer que f s'annule en deux points distincts de $]0, \pi[$.

c. Soit $(\mathrm{M}(t_0).\mathrm{M}(t_0 + \pi))$ un couple de points associés. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(t) = \mathrm{F}(t_0 + t)$. Montrer qu'il existe t_1 et t_2 distincts dans $]0, \pi[$ annulant f. On aura ainsi prouvé l'existence de trois couples distincts de points associés.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. On a, pour tout t, $\mathrm{U}'(t) = \mathrm{V}(t)$, $\mathrm{V}'(t) = -\mathrm{U}(t)$ et donc

$$\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t} = p'(t)\mathrm{U}(t) + p(t)\mathrm{V}(t) + p''(t)\mathrm{V}(t) - p'(t)\mathrm{U}(t) = (p(t) + p''(t))\mathrm{V}(t).$$

Comme $p(t) + p''(t) > 0$ et $\mathrm{V}(t) \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Donc la courbe est régulière.

Une abscisse curviligne est définie par $s = \displaystyle\int_0^t (p + p'')$. On a alors $\dfrac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{V}(t)$. On dérive par rapport à s. On obtient

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{p(t) + p''(t)}(-\mathrm{U}(t)).$$

Comme le vecteur $-\mathrm{U}(t)$ est l'image de $\mathrm{V}(t)$ dans la rotation d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$, la courbure est $\gamma(t) = \dfrac{1}{p(t) + p''(t)} > 0$.

Si p est de classe C^3, on a $\dfrac{d^2M}{dt^2} = -(p+p'')U + (p'+p''')V$ *ce qui donne* $\det\left(\dfrac{dM}{dt}, \dfrac{d^2M}{dt^2}\right) = (p+p'')^2 > 0$, *ce qui garantit que la courbure est de signe constant.*

2. On cherche donc des droites qui sont binormales à la courbe, c'est-à-dire normales en deux points distincts de paramètres t et t'. Un vecteur unitaire de la normale au point de paramètre t est $U(t)$. Si $U(t') = U(t)$, alors $t' \equiv t \mod 2\pi$ et les points de paramètres t' et t sont les mêmes. Il faut donc $U(t') = -U(t)$, c'est-à-dire $t' \equiv t + \pi \mod 2\pi$. On a alors $M(t') = p(t')U(t') + p'(t')V(t') = -p(t+\pi)U(t) - p'(t'+\pi)V(t) \neq M(t)$, car $p(t) > 0$ et $-p(t+\pi) < 0$. Les normales aux points $M(t)$ et $M(t')$ sont confondues si $\overrightarrow{M(t)M(t')}$ est colinéaire à $U(t)$, c'est-à-dire si $p'(t) = -p'(t+\pi)$. Considérons la fonction φ définie par $\varphi(t) = p(t) + p(t+\pi)$.

La fonction φ est π-périodique. On a donc $\int_0^\pi \varphi'(t)\,dt = 0$. La fonction φ' s'annule donc au moins une fois en changeant de signe sur $]0,\pi[$. Comme elle est π-périodique, elle change au moins deux fois de signe sur $[0,\pi[$. On peut donc trouver t_0 et t_1 tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \pi$ et $\varphi'(t_0) = \varphi'(t_1) = 0$. Les normales à la courbe en $M(t_0)$ et $M(t_1)$ répondent à la question.

3.a . Si les points de paramètres t et t' sont associés, on a nécessairement $U(t') = -U(t)$. On peut donc prendre $t' = t + \pi$. Il faut alors qu'on ait de plus $\gamma(t') = \gamma(t)$, c'est-à-dire $p(t')+p''(t') = p(t)+p''(t)$ soit $p(t+\pi) + p''(t+\pi) = p(t) + p''(t)$. On obtient la condition $R(t) = R(t+\pi)$ *i.e.* $F(t) = 0$. On a, pour tout réel t, $F(t+\pi) = R(t+\pi) - R(t+2\pi) = -F(t)$, car R est 2π-périodique, et, en particulier, $F(\pi) = -F(0)$. La fonction F s'annule sur $[0,\pi]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc il existe un couple de points associés.

b. Si f ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, la fonction continue $f \times \sin$ garde un signe constant sur $]0,\pi[$ et $\int_0^\pi f(u)\sin u\,du \neq 0$. Donc f s'annule au moins une fois sur $]0,\pi[$ disons en t_0. On a aussi

$$\int_0^\pi f(u)\sin(u-t_0)\,du = \cos t_0 \int_0^\pi f(u)\sin u\,du - \sin t_0 \int_0^\pi f(u)\cos u\,du$$
$$= 0.$$

Si f ne s'annule qu'en t_0 sur $]0,\pi[$, f change nécessairement de signe en t_0 (car $f \times \sin$ a une intégrale nulle) et la fonction $u \longmapsto f(u)\sin(u-t_0)$ ne change pas de signe sur $[0,\pi]$ et ne s'annule qu'en t_0 (et éventuellement aux extrémités 0 et π). On a donc alors $\int_0^\pi f(u)\sin(u-t_0)du \neq 0$. C'est absurde donc f s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.

c. On calcule $\int_0^\pi f(t)e^{it}dt$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t)e^{it}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \mathrm{F}(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{R}(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \mathrm{R}(t+t_0+\pi)e^{it}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{R}(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{R}(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

puis, par définition de R,

$$\int_0^{\pi} f(t)e^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} p(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} p''(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} p''(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t &= [p'(t+t_0)e^{it}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} ip'(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} ip'(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t \\ &= [-ip(t+t_0)e^{it}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} p(t+t_0)e^{it}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

car p est 2π-périodique. On en déduit $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)e^{it}\mathrm{d}t = 0$ et en séparant partie réelle et partie imaginaire $\displaystyle\int_0^{\pi} f(u)\sin u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} f(u)\cos u\,\mathrm{d}u = 0$. De la question précédente, on déduit que f s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$ en t_1 et t_2. La fonction F s'annule donc en t_0, t_0+t_1, t_0+t_2, c'est-à-dire trois fois sur $[t_0, t_0+\pi[$. On obtient trois couples de points associés : $(\mathrm{M}(t_0), \mathrm{M}(t_0+\pi))$, $(\mathrm{M}(t_0+t_1), \mathrm{M}(t_0+t_1+\pi))$ et $(\mathrm{M}(t_0+t_2), \mathrm{M}(t_0+t_2+\pi))$. ◁

On appelle sommet d'une courbe birégulière un point où la courbure présente un extremum. Donnons un exemple : considérons l'ellipse de paramétrage $t \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$, avec $0 < b < a$. La courbure au point de paramètre t est $\gamma(t) = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$ et $\gamma'(t) = 0$ équivaut à $\cos t \sin t = 0$. On retrouve les sommets au sens usuel de l'ellipse.

L'exercice suivant démontre que toute courbe fermée, simple, régulière et convexe possède au moins quatre sommets.

4.17. Théorème des quatre sommets

On considère un arc paramétré $s \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{M}(s) = (x(s), y(s))$ du plan $\mathbb{R}^2$, T-périodique, de classe $\mathcal{C}^3$, correspondant à une courbe fermée simple. On suppose que le paramétrage est normal *i.e.* que s correspond à une abscisse curviligne et que la courbure γ est positive.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \gamma' = 0$.

2. Montrer que

$$\int_0^{\mathrm{T}} x\gamma' = \int_0^{\mathrm{T}} y\gamma' = 0.$$

3. Montrer que la courbure γ admet au moins quatre points critiques modulo T (on rappelle qu'une courbe simple, fermée, à courbure positive est la frontière d'un convexe compact).

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. La fonction $s \longmapsto \mathrm{M}(s)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ donc la tangente unitaire T et la normale N sont de classe $\mathcal{C}^2$ et la courbure γ de classe $\mathcal{C}^1$. Toutes ces fonctions sont évidemment T-périodiques. On a donc

$$\int_0^{\mathrm{T}} \gamma' = \gamma(\mathrm{T}) - \gamma(0) = 0.$$

2. Il s'agit de montrer que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \gamma'(s)\mathrm{M}(s)\mathrm{d}s = 0$. Pour cela on intègre par parties. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{T}} \gamma'(s)\mathrm{M}(s)\mathrm{d}s &= [\gamma(s)\mathrm{M}(s)]_0^{\mathrm{T}} - \int_0^{\mathrm{T}} \gamma(s)\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \\ &= [\gamma(s)\mathrm{M}(s)]_0^{\mathrm{T}} + \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}s}(s)\mathrm{d}s \\ &= [\gamma(s)\mathrm{M}(s) + \mathrm{N}(s)]_0^{\mathrm{T}} = 0,\end{aligned}$$

car la fonction $s \longmapsto \gamma(s)\mathrm{M}(s) + \mathrm{N}(s)$ prend la même valeur en 0 et T.

3. Comme γ est continue et T-périodique, elle admet un maximum et un minimum et en ces points γ' s'annule. On peut supposer γ non constante, sans quoi le problème est résolu, et on a donc au moins deux points critiques $s_1 < s_2$ avec $s_2 < s_1 + \mathrm{T}$. Supposons que ce sont les seuls points critiques de γ dans l'intervalle $[s_1, s_1 + \mathrm{T}[$. D'après la question 1 on sait que γ' a des signes opposés sur $]s_1, s_2[$ et sur $]s_2, s_1 + \mathrm{T}[$ puisque $\displaystyle\int_{s_1}^{s_1+\mathrm{T}} \gamma' = 0$. Notons $ax + by + c = 0$ l'équation de la droite passant par $\mathrm{M}(s_1)$ et $\mathrm{M}(s_2)$ (les deux points sont distincts car la restriction de M à

$[s_1, s_1 + \mathrm{T}[$ est injective par hypothèse). Comme la courbe délimite un convexe (résultat admis par l'énoncé), les parties de la courbe correspondant à $s \in [s_1, s_2]$ et $s \in [s_2, s_1 + \mathrm{T}]$ sont de part et d'autre de la droite $(\mathrm{M}(s_1)\mathrm{M}(s_2))$. Il en découle que la fonction $s \mapsto (ax(s) + by(s) + c)\gamma'(s)$ est de signe constant sur $[s_1, s_1 + \mathrm{T}]$. Mais d'après les deux questions précédentes son intégrale sur $[s_1, s_1 + \mathrm{T}]$ est nulle. C'est absurde car la trajectoire de l'arc serait incluse dans la droite $(\mathrm{M}(s_1)\mathrm{M}(s_2))$.

On a donc au moins un troisième point critique s_3. Supposons par l'absurde qu'il n'y en a que trois. On peut supposer $s_1 < s_3 < s_2 < s_1 + \mathrm{T}$ quitte à remplacer le couple (s_1, s_2) par le couple $(s_2, s_1 + \mathrm{T})$. Supposons que γ atteint son minimum en s_1 et son maximum en s_2, le raisonnement étant analogue dans l'autre cas. La fonction γ' garde un signe constant sur $]s_1, s_3[$, $]s_3, s_2[$ et $]s_2, s_1 + \mathrm{T}[$. Nécessairement, γ est strictement croissante sur $]s_1, s_3[$ (car minimale en s_1) et sur $]s_3, s_2[$ (car maximale en s_2). On a alors γ' positive sur $]s_1, s_2[$ et négative sur $]s_2, s_1 + \mathrm{T}[$ ce qui amène la même contradiction que ci-dessus. Il en découle que γ admet au moins 4 points critiques (appelés sommets). ◁

Pour une courbe C fermée simple, on peut démontrer (mais ce n'est pas facile) qu'il y a équivalence entre les points suivants :

(i) la courbure algébrique garde un signe constant ;

(ii) la courbe C est le bord d'un convexe ;

(iii) en tout point M *de C, la courbe C est tout entière d'un même côté de la tangente à C en* M.

Quitte à changer le paramètre en son opposé, on peut alors supposer que la courbure algébrique est positive. Le théorème des quatre sommets reste vrai si la courbe n'est pas la frontière d'un convexe, mais la démonstration est alors beaucoup plus difficile.

La longueur et la courbure sont invariants par les déplacements de plan et il s'agit en fait d'invariants complets i.e. qui caractérisent l'arc : si on se donne une fonction continue $s \mapsto \gamma(s)$ il existe une unique courbe de classe $\mathcal{C}^2$ à déplacement près dont γ soit la fonction de courbure et s une abscisse curviligne. Le lecteur montrera ainsi que les courbes de courbure constantes sont les morceaux de droites et les arcs de cercles.

L'exercice suivant introduit une notion de courbure affine qui est invariante par les applications affines de déterminant 1, *un groupe plus gros que le groupe des déplacements.*

4.18. Courbure affine

1. On considère un arc plan birégulier de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer qu'il existe un reparamétrage $u \longmapsto \mathrm{M}(u)$ de classe $\mathcal{C}^2$ de l'arc tel que, pour tout u, $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}''(u)) = 1$.

2. Soit $u \longmapsto \mathrm{M}(u)$ et $u \longmapsto \mathrm{N}(u)$ deux arcs de classe $\mathcal{C}^4$ tels que l'on ait, pour tout u, $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}''(u)) = \det(\mathrm{N}'(u), \mathrm{N}''(u)) = 1$ et $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(4)}(u)) = \det(\mathrm{N}'(u), \mathrm{N}^{(4)}(u))$.

Montrer qu'il existe $a \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{M} = a\mathrm{N} + b$.

3. On suppose que $\det(\mathrm{M}', \mathrm{M}^{(4)})$ est constant. Reconnaître l'arc $u \longmapsto \mathrm{M}(u)$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Puisque l'arc est birégulier, il existe un paramétrage $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^3$, tel que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\det(f'(t), f''(t)) = \psi(t) \neq 0$. Soit $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme, où J est un intervalle. On pose $u = \varphi(t)$ et $g = f \circ \varphi^{-1}$, c'est-à-dire $f = g \circ \varphi$. On a alors, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f'(t) = \varphi'(t)g'(\varphi(t))$ et $f''(t) = \varphi''(t)g'(\varphi(t)) + \varphi'(t)^2 g''(\varphi(t))$, d'où l'on déduit

$$\det(f'(t), f''(t)) = \varphi'(t)^3 \det(g'(\varphi(t)), g''(\varphi(t))).$$

On a alors $\det(g'(u), g''(u)) = 1$ pour tout $u \in \mathrm{J}$ si et seulement si $\varphi'(t)^3 = \psi(t)$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, et donc $\varphi'(t) = \sqrt[3]{\psi(t)}$. Comme l'arc est de classe $\mathcal{C}^3$, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas sur I donc $\sqrt[3]{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En prenant pour φ une primitive quelconque de cette fonction, on obtient un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ de I sur un intervalle J tel que $f \circ \varphi^{-1}$ soit un paramétrage ayant les propriétés voulues.

Le paramètre u est appelé abscisse curviligne affine et le repère $(\mathrm{M}(u), \mathrm{M}'(u), \mathrm{M}''(u))$ repère de Frénet affine de la courbe.

2. En dérivant la relation $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}''(u)) = 1$, on obtient

$$\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(3)}(u)) + \det(\mathrm{M}''(u), \mathrm{M}''(u)) = 0,$$

c'est-à-dire $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(3)}(u)) = 0$. Pour tout $u \in \mathrm{I}$, il existe donc $\alpha(u) \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}^{(3)}(u) = \alpha(u)\mathrm{M}'(u)$. On en déduit

$$\det(\mathrm{M}^{(3)}(u), \mathrm{M}''(u)) = \alpha(u) \det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}''(u)) = \alpha(u)$$

donc α est de classe $\mathcal{C}^1$. En dérivant $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(3)}(u)) = 0$, on obtient $\det(\mathrm{M}''(u), \mathrm{M}^{(3)}(u)) + \det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(4)}(u)) = 0$ et donc

$$\alpha(u) = \det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(4)}(u)).$$

On peut faire le même raisonnement pour N. On obtient $\mathrm{N}^{(3)}(u) = \alpha(u)\mathrm{N}'(u)$ pour la même fonction α car $\det(\mathrm{M}'(u), \mathrm{M}^{(4)}(u)) = \det(\mathrm{N}'(u), \mathrm{N}^{(4)}(u))$. Les coordonnées (x, y) de M' dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont solutions de l'équation différentielle $z'' = \alpha z$. Celles-ci forment un espace vectoriel de dimension deux de base (φ_1, φ_2). Les

fonction x et y sont combinaisons linéaires de φ_1 et φ_2 et finalement il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ tel que $M' = \varphi_1 A + \varphi_2 B$. De même, il existe $(C, D) \in (\mathbb{R}^2)^2$ tel que $N' = \varphi_1 C + \varphi_2 D$.

On a alors $M'' = \varphi_1' A + \varphi_2' B$ et $\det(M', M'') = w \det(A, B) = 1$, où w est le wronskien de (φ_1, φ_2). De même $\det(N', N'') = w \det(C, D) = 1$. On en déduit que la famille (A, B) est libre. Il existe donc $a \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $aA = C$ et $aB = D$. On a $\det(a) = \dfrac{\det(C, D)}{\det(A, B)} = \dfrac{w}{w} = 1$ donc $a \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On a, pour tout u,

$$N'(u) = \varphi_1(u)C + \varphi_2'(u)D = a(\varphi_1(u)A + \varphi_2(u)B) = aM'(u) = (aM)'(u),$$

car a est indépendante de u. On en déduit qu'il existe $b \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout u, $N(u) = aM(u) + b$.

On appelle $\alpha(u)$ la courbure affine de la courbe. Deux courbes ayant même courbure affine (comme fonction de l'abscisse curviligne affine) se déduisent donc l'une de l'autre par une application affine de déterminant 1 *(de même que deux courbes ayant même courbure métrique comme fonction de l'abscisse curviligne sont isométriques).*

3. Avec les notations précédentes, la fonction α est constante. Nous noterons encore α cette constante. On a $M^{(3)} = \alpha M'$.

Si $\alpha > 0$ et $\omega = \sqrt{\alpha}$, on prend $\varphi_1(u) = \mathrm{ch}(\omega u)$ et $\varphi_2(u) = \mathrm{sh}(\omega u)$. Il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ tel que $M'(u) = \mathrm{ch}(\omega u)A + \mathrm{sh}(\omega u)B$, avec (A, B) famille libre. Il existe $C \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M(u) = C + \frac{\mathrm{sh}(\omega u)}{\omega} A + \frac{\mathrm{ch}(\omega u)}{\omega} B.$$

L'arc est inclus dans une hyperbole.

Si $\alpha < 0$ et $\omega = \sqrt{-\alpha}$, on prend $\varphi_1(u) = \cos(\omega u)$ et $\varphi_2(u) = \sin(\omega u)$. Il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ tel que $M'(u) = \cos(\omega u)A + \sin(\omega u)B$, avec (A, B) famille libre. Il existe $C \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M(u) = C + \frac{\sin(\omega u)}{\omega} A - \frac{\cos(\omega u)}{\omega} B.$$

L'arc est inclus dans une ellipse.

Si $\alpha = 0$, M'' est constante. Il existe $(A, B, C) \in (\mathbb{R}^2)^3$ tel que, pour tout u,

$$M(u) = u^2 A + uB + C.$$

On a $1 = \det(M', M'') = 2\det(B, A)$. La famille (A, B) est libre et l'arc est inclus dans une parabole.

Ainsi, les courbes dont la courbure affine est constante sont incluses dans des coniques. La réciproque est vraie. ◁

Le lecteur pourra étudier le problème d'écrit posé en 1993 à l'École Polytechnique qui a sans doute inspiré cet exercice d'oral.

Table des matières

Introduction 1

Chapitre 1. Fonctions de plusieurs variables 5

1.1. Étude de différentiabilité 6
1.2. Différentiabilité du maximum de plusieurs fonctions 7
1.3. Différentiabilité de la distance à un convexe fermé 10
1.4. L'ouvert des matrices cycliques 11
1.5. Rang localement constant 13
1.6. Étude d'une suite récurrente 14
1.7. Contre-exemple de Peano 16
1.8. Fonctions s'écrivant $x \longmapsto \langle h(x)x, x\rangle$ avec $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. 18
1.9. Espace des dérivations en 0 19
1.10. Isométries infinitésimales 21
1.11. Jacobienne antisymétrique 22
1.12. Exemple de difféomorphisme (1) 24
1.13. Exemple de difféomorphisme (2) 25
1.14. Perturbation de l'identité 25
1.15. Dilatations de classe $\mathcal{C}^1$ 27
1.16. Racine carrée sur l'ensemble des matrices définies positives 28
1.17. Injectivité locale d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ 31
1.18. Normales à une hypersurface compacte 32
1.19. Calcul d'un minimum 34
1.20. Existence d'un maximum 38
1.21. Descente de gradient 39
1.22. Gradient bijectif 41
1.23. Fonctions harmoniques (1) 42
1.24. Fonctions harmoniques (2) 43
1.25. Principe du maximum (1) 45
1.26. Principe du maximum (2) 46
1.27. Principe du maximum (3) 47
1.28. Équation de la chaleur sur un anneau 49
1.29. Fonctions harmoniques sur un demi-plan 52
1.30. Une équation aux dérivées partielles (1) 55
1.31. Une équation aux dérivées partielles (2) 57
1.32. Théorème de relèvement 60
1.33. Existence d'un point critique 61
1.34. Intégrale double (1) 63
1.35. Intégrale double (2) 63

1.36. Intégrale double (3) 64
1.37. Intégrale double (4) 65
1.38. Intégrale double (5) 68
1.39. Un opérateur intégral 70
1.40. Comparaison à une intégrale double 72
1.41. Une intégrale multiple 75

Chapitre 2. Équations différentielles linéaires **77**

2.1. Étude d'une équation linéaire singulière (1) 77
2.2. Étude d'une équation linéaire singulière (2) 78
2.3. Étude d'une équation linéaire singulière (3) 80
2.4. Étude d'une équation linéaire singulière (4) 82
2.5. Équations du second ordre avec second membre 85
2.6. Utilisation d'un développement en série de Fourier 85
2.7. Une équation aux dérivées partielles 87
2.8. Un problème de Cauchy 90
2.9. Équation $y'' + |y| = 0$ 91
2.10. Déterminant circulant 93
2.11. Équation intégrale (1) 95
2.12. Équation intégrale (2) 96
2.13. Équation différentielle linéaire d'ordre 4 97
2.14. Équation linéaire d'Euler 98
2.15. Équation de Bessel 101
2.16. Solution développable en série entière de $xy'' + y' + y = 0$. 104
2.17. Équation singulière avec deux solutions de produit 1 106
2.18. Condition d'existence de deux solutions de produit 1 107
2.19. Condition d'existence de deux solutions telles que $y_2 = xy_1$ 108
2.20. Un problème aux limites (1) 110
2.21. Un problème aux limites (2) 111
2.22. Problème de Cauchy asymptotique 112
2.23. Solutions de $y' + ay = b$ de limite nulle en $\pm\infty$ 114
2.24. Solutions périodiques de $y' + ay = b$ 115
2.25. Solutions bornées de $y'' - a^2y = f$ 116
2.26. Limite en $+\infty$ d'une solution de $x'' = qx$ 118
2.27. Équation dépendant d'un paramètre 119
2.28. Application du lemme de Gronwall (1) 121
2.29. Application du lemme de Gronwall (2) 122
2.30. Une variante du lemme de Gronwall 123
2.31. Les solutions de $y'' + ty = 0$ sont bornées 124
2.32. Autour du lemme de Gronwall 125
2.33. Théorème de Bôcher 126
2.34. Équation de Mathieu (1) 128
2.35. Équation de Mathieu (2) 129

2.35. 132
2.36. Inégalité de Liapounov 133
2.37. Théorème de stabilité de Liapounov 135
2.38. Théorème d'entrelacement de Sturm 136
2.39. Équation $y'' + qy = 0$ avec q strictement négative 137
2.40. Solutions non nulles s'annulant au plus une fois 138
2.41. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (1) . . . 140
2.42. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (2) . . . 142
2.43. Théorème de Sturm (1836) 144
2.44. Zéros de $x'' + x = \varepsilon(t)x'$: étude asymptotique 145
2.45. Zéros de $y'' + t^{\alpha-2}y = 0$: étude asymptotique 147
2.46. Équation dépendant d'un paramètre 148
2.47. Nombre de zéros au voisinage d'un point 149
2.48. Résolution approchée d'une équation d'ordre 2 152
2.49. Système différentiel du premier ordre à coefficients constants 153
2.50. Résolution d'un système différentiel 155
2.51. Particule dans un champ magnétique 157
2.52. Équation $X' = AX$, avec A antisymétrique 158
2.53. Existence d'une limite en $+\infty$ 158
2.54. Majoration des solutions d'un système différentiel (1) . . . 159
2.55. Majoration des solutions d'un système différentiel (2) . . . 161
2.56. Distance entre les solutions de deux systèmes différentiels . 164
2.57. Solutions à coordonnées positives 165
2.58. Équation différentielle de Lax (1) 166
2.59. Équation différentielle de Lax (2) 167
2.60. Une identité remarquable 168
2.61. Classification différentielle des flots linéaires 170
2.62. Stabilité d'un système à coefficients constants 172
2.63. Équation singulière d'ordre 1 dans $\mathbb{C}^n$ 178
2.64. Commandabilité 181

Chapitre 3. Équations différentielles non linéaires 185

3.1. Tangentes aux courbes intégrales 186
3.2. Équation différentielle $y' = x + y^2$ 188
3.3. Solution développable en série entière de $xy' = x + y^2$ 191
3.4. Solution approchée de $y' = x^2 + y^2$ 195
3.5. Recherche de solutions développables en série entière 197
3.6. Équation se ramenant à une équation autonome (1) 200
3.7. Équation se ramenant à une équation autonome (2) 202
3.8. Monotonie des solutions d'une équation autonome 203
3.9. Équation autonome $x' = f(x)$, où f est positive 205
3.10. Équation autonome $x' = g(x)$, où g est négative 207
3.11. Comparaison de solutions d'équations autonomes 207
3.12. Équation $y' = y^4 + g(x)$, où g tend vers 0 en $+\infty$ 207

3.13. Étude qualitative d'une solution de $x' = \lambda + \dfrac{x^2}{1+t^2}$ 209
3.14. Étude qualitative des solutions de $y' = a\sqrt{y} - x$ 211
3.15. Équation $x' = f(x,t)$ avec f doublement 1-périodique . . . 214
3.16. Équation $y' = f(y,t)$ où f est périodique par rapport à t . 216
3.17. Existence d'une solution périodique 218
3.18. Théorème de l'entonnoir 221
3.19. Étude de $x' = \cos x + \cos t$ 223
3.20. Étude de $x' = x^2 - t$ (1) 225
3.21. Étude de $x' = x^2 - t$ (2) 226
3.22. Étude de $x' = x^2 - t$ (3) 227
3.23. Étude de $y' = y^2 - t^2$ 231
3.24. Étude de $x' = \sin(tx)$ 233
3.25. Inégalité différentielle (1) 237
3.26. Inégalité différentielle(2) 238
3.27. Équations différentielles dépendant d'un paramètre 239
3.28. Système différentiel (1) 242
3.29. Système différentiel (2) 244
3.30. Système différentiel (3) 246
3.31. Surjectivité d'une application propre, localement inversible 248
3.32. Système proie-prédateur de Lotka-Volterra 250
3.33. Intervalle de définition d'une solution 253
3.34. Équation différentielle dans $\mathbb{R}^3$ euclidien (1) 254
3.35. Équation différentielle dans $\mathbb{R}^3$ euclidien (2) 257
3.36. Équation différentielle $\dfrac{dM}{dt} = M^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 260
3.37. Gradient d'une fonction minorée 261
3.38. Étude des solutions de $x' = \operatorname{grad} f(x)$ 262
3.39. Dynamique du gradient (1) 264
3.40. Dynamique du gradient (2) 265
3.41. Théorème de stabilité de Liapounov 267
3.42. Stabilité de la solution nulle d'un système différentiel (1) . 269
3.43. Stabilité de la solution nulle d'un système différentiel (2) . 274
3.44. Une équation autonome d'ordre 2 276
3.45. Une équation du second ordre 277
3.46. Équation différentielle $\varphi'' = \dfrac{k}{\sqrt{\varphi}}$ 278
3.47. Solution de $u'' + f(u) = 0$ avec $u(-1) = u(1) = 0$ 280
3.48. Équation $u'' + u^{2n+1} = u$ 280
3.49. Équation $u'' + au' + b\sin u = 0$ 283
3.50. Équation du pendule simple 285
3.51. Équation de Van der Pol 289
3.52. Calcul des variations (1) 291
3.53. Calcul des variations (2) 295

3.54. Surface d'aire minimale 297
3.55. Fonctions telles que $f' = f^{-1}$ 302

Chapitre 4. Courbes **305**

4.1. Intersection d'un plan et d'un cylindre 306
4.2. Courbe de poursuite ou courbe du chien 306
4.3. Points coplanaires ou alignés sur une courbe 308
4.4. Points alignés sur une courbe 310
4.5. Points multiples 312
4.6. Courbes telles que $d(\mathrm{M}(t_1), \mathrm{M}(t_2))$ ne dépende que de $|t_1 - t_2|$ 314
4.7. Minimisation d'une aire 317
4.8. Chemin le plus court (1) 318
4.9. Chemin le plus court (2) 320
4.10. Chemin au-dessus d'une courbe concave 322
4.11. Inégalité isopérimétrique 324
4.12. Distance d'un point du plan à une courbe 326
4.13. Aire d'un triangle 327
4.14. Centre de courbure sur une hyperbole équilatère 328
4.15. Ovale de largeur constante 330
4.16. Points associés sur un arc régulier sans point double 332
4.17. Théorème des quatre sommets 335
4.18. Courbure affine 336

Table des matières **339**

Index **345**

Index

abscisse curviligne, 337
anti-entonnoir, 230
  resserré, 230
application de Gauss, 32

barrière, 220, 223–225, 230–234, 236
  non poreuse, 220, 224
Bessel
  équation différentielle de, 101, 102
  fonction de, 102–104
Bôcher (théorème de), 126
Bolzano-Weierstrass (théorème de), 26

caténoïde, 300, 302
Cauchy-Lipschitz (théorème de), 58, 92, 112, 120, 128, 147, 160, 172, 181, 183, 184, 189, 191, 192, 194, 197, 199–201, 203, 205, 210, 211, 213, 216, 218, 219, 222, 240, 242–245, 248, 251, 255, 260, 264, 266, 267, 276, 280, 284, 285, 290
Cauchy-Peano-Arzela (théorème de), 182
Cauchy-Schwarz (inégalité de), 29, 55, 66, 160, 258, 325
Cayley-Hamilton (théorème de), 12, 179
Cesàro (théorème de), 143
chemin optique, 294
commandable (système), 178
commande, 177
courbe
  de poursuite, 306
  du chien, 306
courbure affine, 338

dérivation, 19, 21
Dirichlet (problème de), 45, 46
Dunford (décomposition de), 170, 175

entonnoir, 221, 223
entonnoir (théorème de l'), 221, 224
équation
  d'Euler, 98, 329
  d'Euler-Lagrande, 291
  de Bessel, 101
  de la chaleur, 5, 49
  de Laplace, 5
  de Lax, 165, 166
  de Mathieu, 128
  de Van der Pol, 289
  des ondes, 5
  du pendule simple, 285
extrema, 5, 34–38

Fermat (principe de), 294, 318
fonction lipshitzienne, 19, 26, 93, 194, 323
fonctions implicites (théorème des), 31
formule de Taylor
  -Young, 36
  avec reste intégral, 18, 93, 95
Fourier
  coefficients de, 51–53, 56, 89
  série de, 50, 53, 56, 85, 86, 127, 323
Frénet
  formules de, 327
  repère de, 337
Fubini (théorème de), 44, 63, 65, 70, 72, 74–76

Gauss (intégrale de), 76
Gram (matrice de), 76
Gronwall (lemme de), 120–127, 158, 162, 217, 254

Hadamard (théorème d'), 248
harmonique (fonction), 42
hessienne
  forme quadratique, 18, 37, 41, 46
  matrice, 18, 37, 41, 46
Hurwitz (polynôme de), 171
hypersurface, 32

inégalité isopérimétrique, 324, 325
isocline, 224, 231, 232, 234, 236

jacobienne (matrice), 13, 21, 25, 169
Joukowski (transformation de), 23

Kalman (critère de), 180

Laplace (équation de), 5
laplacien, 42, 45, 46
Lax
  équation différentielle de, 165–167
  paire de, 165, 167
Leibniz (formule de), 50, 53
Liapounov
  inégalité de, 132, 134
  théorème de stabilité de, 133, 267

ligne de champ, 263
Lotka-Volterra (système de), 250

Mathieu (équation de), 128–131
Monge (notations de), 17

Parseval (théorème de), 51, 54, 63, 324
Peano (contre-exemple de), 16
Poincaré (théorème de), 23, 60
point
  d'équilibre, 269, 271
  singulier, 77
principe du maximum, 45, 47
problème
  aux limites, 110
  de Cauchy, 90, 96, 112, 128, 161, 191
  de Dirichlet, 46

rectifiable (arc), 316
résolvante, 161
Riccati (équation de), 182
Rolle (théorème de), 25, 149, 303, 310
Routh-Hurwitz (critère de), 172

Schrödinger (équation de), 55
Schwarz (théorème de), 17, 22, 23, 45, 48, 61
singularité, 183
solution de Goldschmidt, 301, 302
sommet (d'une courbe), 334, 336
Sturm (théorème de), 135, 138, 140, 142, 143, 148
système
  proies-prédateurs, 153, 250
  stable, 171

tangent
  hyperplan, 32, 33
  plan, 305
  vecteur, 33

Van der Pol (équation de), 289
Vandermonde (déterminant de), 97
variations (calcul des), 291–297

Wallis (intégrales de), 103
Wirtinger (inégalité de), 323
wronskien, 6, 103, 128, 135, 338

Ce livre est le septième volume du recueil d'exercices résolus des oraux des Écoles normales supérieures et de l'École polytechnique, et la conclusion de la série.

Le premier chapitre est consacré au calcul différentel (fonctions de plusieurs variables et applications différentiables, problèmes d'extremum, équations aux dérivées partielles, intégrales multiples), les suivants aux équations différentielles linéaires et non linéaires. Un dernier chapitre porte essentiellement sur les courbes.

L'ouvrage comporte 178 exercices, dont la solution est rédigée avec le soin et le souci d'exposer les idées et les démarches de raisonnement qui sont maintenant bien connus des lecteurs de la série. Comme dans les volumes précédents, la grande culture mathématique des auteurs leur permet de situer dans le contexte qui leur a donné naissance la plupart des énoncés, qui, à ce niveau, sont presque toujours des résultats scientifiques dignes d'intérêt, et dont quelques-uns sont issus de recherches récentes.

Collection enseignement des mathématiques

Graphisme : Massin