olympiades internationales de mathématiques 1976-2005

Paul Bourgade

CASSINI

PAUL BOURGADE

Olympiades internationales de mathématiques

1976-2005

CASSINI

PAUL BOURGADE est élève de l'École polytechnique. Deuxième prix du Concours général de mathématiques en 2000, il a participé aux Olympiades internationales de mathématiques la même année.

ISBN 2-84225-087-7

Préface

L'écrivain et mathématicien Guillermo Martinez fait dire au héros de son roman *Mathématique du crime* que ce qui l'a séduit dans les Mathématiques c'est le genre de vérités que renferment les théorèmes : atemporelles, immortelles, se suffisant à elles-mêmes, et tout à la fois absolument démocratiques. De nombreux professeurs et chercheurs en Mathématiques se reconnaîtront dans ce sentiment et je suis convaincu que beaucoup de jeunes lycéens peuvent trouver en cela de quoi susciter une réelle passion. Elle nécessite, il est vrai, une exigeante concentration de l'esprit et une pratique régulière. Mais n'en est-il pas de même pour le travail d'un sportif ou l'apprentissage d'un instrument de musique quand on veut obtenir des résultats ? Et qu'on se le dise, cette passion n'a rien de rébarbatif, elle est une occupation de l'esprit à la fois éclairante, ludique et jouissive. La persévérance à résoudre un problème est largement récompensée par le plaisir d'avoir trouvé, d'avoir compris, d'avoir démontré et donc d'avoir acquis une vérité.

Si ces mots rencontrent en vous un écho, je suis convaincu que le livre de Paul Bourgade sera l'occasion de découvrir (ou redécouvrir) pleinement ce plaisir de faire des Mathématiques. Son projet fait partager sa propre passion qui naquit sur les bancs de l'école, et contribue à faire découvrir cette science avec ambition dans une époque où son enseignement est attaqué, et parfois sacrifié, à tel point qu'on assiste aujourd'hui à une crise des vocations qui menace à terme l'excellence scientifique française.

Cette compilation exhaustive de tous les énoncés des Olympiades internationales de 1976 à 2005 constituera un ouvrage de référence qui séduira les amoureux des Mathématiques par ses solutions soigneusement rédigées et largement illustrées. Les différents niveaux des corrigés permettent aux étudiants du supérieur d'appréhender les solutions avec leurs propres connaissances et sont l'occasion pour les élèves du secondaire de lever le voile sur des théories plus puissantes, tout en disposant par ailleurs d'une réponse élémentaire qui s'inscrit dans le cadre des programmes du lycée. Enfin, c'est un outil sans pareil pour s'exercer à des problèmes exigeants, maîtriser des techniques, acquérir des réflexes, et pourquoi pas, participer honorablement à cette noble compétition ouverte aux élèves des classes de Terminales.

Paul Bourgade fut mon élève en première année de classe préparatoire aux Grandes écoles. Son excellence lui a valu l'admission à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique. Mais celle-ci est doublée d'un réel souci pédagogique qu'il fait vivre dans la préparation de jeunes lycéens au Concours général et qui garantira, j'en suis convaincu, le succès de cet ouvrage.

SERGE FRANCINOU
Ancien élève de l'École normale supérieure,
Professeur de mathématiques supérieures
au lycée Henri IV

Avant-propos

Stagiaire dans la Marine nationale, j'ai eu la chance de traverser les océans. Au milieu de l'Atlantique, les loisirs sont rares et je me suis lancé dans la lecture d'un des rares documents que j'avais emportés à bord : les sujets des Olympiades internationales de mathématiques. Ce qui aurait pu demeurer une simple source de distraction s'est révélé être un formidable jeu de l'esprit, qui a abouti au présent livre.

Les Olympiades internationales de mathématiques, compétition fondée en 1959 et initialement réservée aux pays de l'ex-bloc soviétique, rassemblent désormais une centaine de nations chaque année. Divers concours mathématiques nationaux, comme le Concours général en France, permettent de sélectionner six candidats dans chaque pays, qui doit présenter ses meilleurs élèves de niveau baccalauréat (même si cette règle est difficilement applicable, en témoigne le niveau de connaissances exceptionnel des concurrents de certains pays). Les candidats composent deux fois sur trois problèmes (quatre heures et demie chaque fois), en deux journées distinctes. Ces exercices sont normalement chaque jour de difficulté croissante (nous avons numéroté ici les problèmes 1, 2 et 3 pour le premier jour d'épreuve, 4, 5 et 6 pour le second). Chaque exercice est noté sur sept points. Une solution particulièrement élégante peut aussi être récompensée par un prix spécial du jury.

Alors que les candidats français pouvaient concourir jusqu'à la fin de la classe de mathématiques supérieure dans les années quatre-vingts, ils ne sont désormais autorisés à le faire que jusqu'à la fin de la Terminale. Ceci explique au moins partiellement les résultats en baisse de l'équipe française depuis quelques années : autrefois classée dans les dix premières (classement non officiel), elle se positionne désormais généralement autour de la trentième place.

Ce livre propose tous les énoncés corrigés des Olympiades internationales de mathématiques entre les années 1976 et 2005. Je remercie les concepteurs d'exercices pour avoir imaginé de si beaux problèmes.

Ceux-ci sont principalement de quatre types distincts :

- arithmétique : il s'agit souvent de la résolution d'une équation diophantienne (c'est-à-dire de la recherche des entiers qui sont les zéros d'un polynôme à plusieurs variables donné) ;

- géométrie : celle-ci est généralement « pure » et ne nécessite théoriquement que peu de connaissances (angles inscrits et transformations classiques) ; dans la pratique une bonne culture en géométrie du triangle et la maîtrise d'outils analytiques permettent de mieux appréhender les problèmes ;
- combinatoire : les exercices sont avant tout des problèmes de logique (principe des tiroirs), mais des notions de fonction génératrice et de théorie des graphes sont souvent précieuses ;
- équations fonctionnelles : il s'agit, à partir de la donnée d'une équation vérifiée par une fonction, de retrouver celle-ci. Les raisonnements font souvent appel à une quête de points fixes, à une recherche de solutions sur l'ensemble des entiers (et donc à des raisonnements arithmétiques) puis à l'extension des résultats aux nombres rationnels et enfin réels.

L'ouvrage s'adresse aux bons élèves du lycée, désireux d'appréhender des exercices de réflexion difficiles, et pourra constituer un entraînement pour tous les candidats à différentes olympiades. Cependant la finesse des énoncés intéressera plus généralement, je l'espère, tous les passionnés de mathématiques, qu'ils soient universitaires ou candidats aux grandes écoles scientifiques.

Plusieurs méthodes de résolution sont souvent proposées, dans le but de mettre en relief l'intrinsèque intérêt de chaque problème : celui-ci est parfois inséré dans un contexte plus général au moyen de remarques et d'annexes où sont abordées des notions mathématiques plus difficiles.

Cependant, les connaissances requises dans cette compétition ne sont jamais très poussées et l'élève qui s'y entraîne a surtout besoin de méthodes de résolution, acquises uniquement par la pratique. Les exercices posés sont souvent très difficiles et je tiens à insister sur le point suivant : il est parfaitement inutile de regarder les solutions après seulement quelques minutes de réflexion. La pertinence ou l'originalité de la méthode proposée échappera au lecteur s'il n'a pas préalablement réfléchi deux heures au problème.

Le travail ici présenté doit beaucoup aux relectures minutieuses et pertinentes d'Omid Amini, Grégoire Deyirmendjian, Tristan Landot, Thomas Pillot, Alborz Rafie Elizei, Victor Reutenauer, Philippe Sourlas et Jérôme Ternat. Les erreurs sont miennes.

Je remercie André et Catherine Bellaiche pour la confiance et les excellents conseils qu'ils m'ont réservés au sein des éditions Cassini.

Enfin, cet ouvrage ne serait jamais paru sans la bienveillance de Serge Francinou et le soutien de ma famille, spécialement mes frères Henri et Vincent. Je les remercie donc tout particulièrement.

Paris, le 19 octobre 2005.

Notations

π	aire d'un disque de rayon 1 ($\pi \approx 3.14$)
e	$e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ ($e \approx 2.72$)

Ensembles

$\varnothing$	ensemble vide
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$[x, y]$	ensemble des nombres réels z vérifiant $x \leqslant z \leqslant y$
$[\![a, b]\!]$	ensemble des nombres entiers n vérifiant $a \leqslant n \leqslant b$
$\mathcal{S}_n$	ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$
Id	l'identité d'un espace spécifié par le contexte
$\operatorname{Im} f$	image d'une application f définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ spécifié par le contexte : $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathcal{E}\}$
$\lvert\mathcal{E}\rvert$	cardinal d'un ensemble $\mathcal{E}$
$\complement \mathcal{E}$	ensemble complémentaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble spécifié par le contexte
$\mathscr{S}$	ensemble des solutions d'une équation

Arithmétique

$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$a \mid b$	a divise b
$a \nmid b$	a ne divise pas b
$a \equiv b\ [n]$	a est congru à b modulo n : n divise $b - a$
$a \not\equiv b\ [n]$	a n'est pas congru à b modulo n : n ne divise pas $b - a$
$a \wedge b$	plus grand diviseur commun à a et b
$a \vee b$	plus petit multiple commun à a et b
$\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$	écriture d'un entier dans une base spécifiée par le contexte

$v_p(n)$	valuation p-adique d'un entier n : exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers
$\varphi(n)$	indicateur d'Euler de n : nombre d'éléments de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n
$n!$	factorielle de n
C_n^k	nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments : $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Nombres complexes et géométrie

$\overline{z}$	conjugué du nombre complexe z
$\lvert z \rvert$	module du nombre complexe z
$\mathrm{Arg}(z)$	argument d'un nombre complexe z
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$\vec{u}.\vec{v}$	produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$\lvert \vec{u} \rvert$	norme de $\vec{u}$
$\widehat{\mathrm{BAC}}$	angle non orienté, appartenant à $[0, \pi[$
$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$	angle orienté, appartenant à $[0, 2\pi[$
$\overline{\mathrm{AB}}$	mesure algébrique du couple (A, B)
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	vecteur d'origine A et d'extrémité B
(AB)	droite passant par deux points distincts A et B
[AB)	demi-droite d'origine A et passant par B $(\mathrm{A} \neq \mathrm{B})$
[AB]	segment d'extrémités A et B
AB	longueur du segment [AB]
$d_1 \mathbin{/\!/} d_2$	les droites d_1 et d_2 sont parallèles
$d_1 \perp d_2$	les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires
$\mathscr{A}(\mathrm{P})$	aire d'un polygone P
$\mathscr{P}(\mathrm{P})$	périmètre d'un polygone P

Symboles divers

$\square$	symbole dû à Paul Richard Halmos[1], signalant la fin de la démonstration d'un lemme ou d'un théorème
	symbole dû à Philippe Espéret[2], indiquant une idée originale, voire peu naturelle ou « parachutée »

1. PAUL RICHARD HALMOS, mathématicien américain.
2. PHILIPPE ESPÉRET, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Table des matières

Pékin, 1990 **145**

Sigtuna, 1991 **157**

Moscou, 1992 **173**

Istanbul, 1993 **183**

Hong-Kong, 1994 **199**

Linz (Autriche)

1976

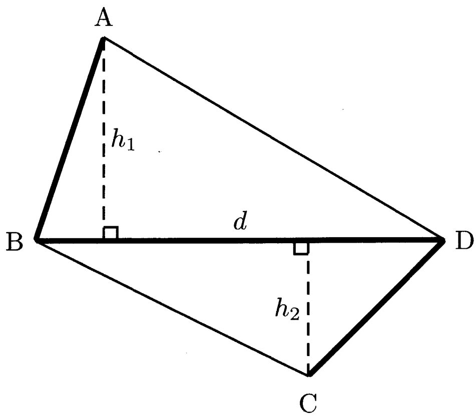
1. Géométrie et inégalités

Dans un quadrilatère convexe plan d'aire 32 cm^2, la somme des longueurs d'une diagonale et de deux côtés opposés est de 16 cm.

Déterminer toutes les valeurs possibles de la longueur de l'autre diagonale.

Solution

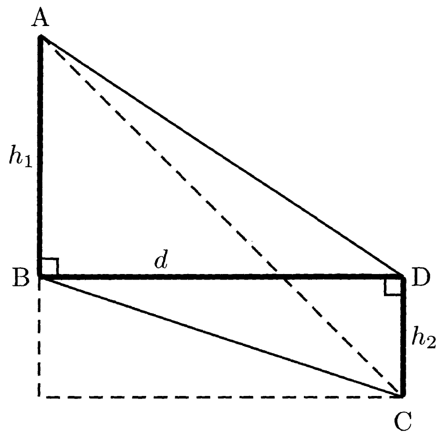
Soit ABCD un quadrilatère vérifiant les conditions de l'énoncé. On peut supposer que l'on cherche la valeur de AC. Notons $d = \mathrm{BD}$, puis h_1 et h_2 la longueur des hauteurs abaissées respectivement de A et C sur (BD).



Par hypothèse, $d(h_1 + h_2)/2 = 32$ et $d + \mathrm{AB} + \mathrm{CD} = 16$. L'inégalité de la moyenne permet ainsi d'écrire

$$8 = \sqrt{d(h_1 + h_2)} \leqslant \frac{d + h_1 + h_2}{2} \leqslant \frac{d + \mathrm{AB} + \mathrm{CD}}{2} = 8.$$

On a donc dans ce qui précède partout le cas d'égalité : $d = h_1 + h_2$, $\mathrm{AB} = h_1$ et $\mathrm{CD} = h_2$.



Ainsi $d = 8$ et $\mathrm{AC}^2 = d^2 + (h_1 + h_2)^2 = 8^2 + 8^2$, d'où

$$\mathrm{AC} = 8\sqrt{2}.$$

2. Polynôme scindé à racines simples

Soit $\mathrm{P}_1(x) = x^2 - 2$ et $\mathrm{P}_j(x) = \mathrm{P}_1(\mathrm{P}_{j-1}(x))$, pour $j = 2, 3, \ldots$

Démontrer que pour tout entier strictement positif n les racines de l'équation $\mathrm{P}_n(x) = x$ sont toutes réelles et distinctes.

Solution

On « remarque » (mais mieux vaut l'avoir déjà vu avant...) que si $x = 2\cos\theta$ (en supposant $x \in [-2, 2]$) alors

$$\mathrm{P}_1(x) = 2(2\cos^2\theta - 1) = 2\cos 2\theta.$$

On a ainsi par une récurrence immédiate $\mathrm{P}_i(x) = 2\cos(2^i\theta)$. Le lecteur vérifiera donc facilement que pour

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^i \pm 1}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{P}_i(x) = x$. Or les x distincts ainsi formés sont au nombre de 2^i : 2^{i-1} éléments distincts pour θ de la forme $(2k\pi)/(2^i+1)$ et 2^{i-1} également si θ est de la forme $(2k\pi)/(2^i-1)$. Comme $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_i(\mathrm{X}) - \mathrm{X}$ est de degré 2^i, les éléments ainsi formés sont en réalité toutes les racines de Q, qui est donc scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples.

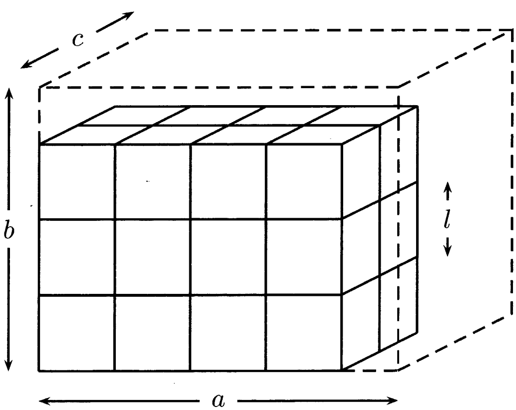
3. Un maximum de cubes dans un pavé

Une boîte rectangulaire peut être remplie complètement par des cubes unités. On essaie de remplir la boîte avec le plus grand nombre possible de cubes de volume 2, en plaçant les arêtes parallèlement à celles de la boîte. Ainsi on occupe exactement 40% du volume de la boîte.

Déterminer les dimensions intérieures de toutes les boîtes pour lesquelles ceci est possible ($\sqrt[3]{2} \approx 1.2599\ldots$).

Solution

L'énoncé sous-entend que l'on peut admettre le fait suivant : le moyen le plus compact pour inclure des cubes est de les disposer comme ci-dessous, en formant le plus grand pavé inclus dans le pavé initial.



Posons $l = \sqrt[3]{2}$ pour plus de concision dans la suite. Le nombre maximal de cubes de volume 2 inclus dans notre rectangle est ainsi $\lfloor \frac{a}{l} \rfloor \lfloor \frac{b}{l} \rfloor \lfloor \frac{c}{l} \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x (cf. table des notations, page XI).

Il faut donc résoudre l'équation

$$\frac{\left\lfloor \frac{a}{l} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{l} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{l} \right\rfloor}{abc} = \frac{1}{5}.$$

Nécessairement les trois entiers a, b et c sont supérieurs ou égaux à deux : sinon le membre de gauche est nul. Supposons de plus, quitte à permuter les variables, que c est le plus petit entier des trois.

Si on pose $f(x) = \lfloor x/l \rfloor /x$, on doit résoudre $f(a)f(b)f(c) = 1/5$. Cherchons donc à minorer $f(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lfloor x/l \rfloor + 1 > x/l$, si bien que

$$f(x) > \frac{1}{l} - \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Ceci permet de vérifier que pour $x \geqslant 3$, $f(x) > 1/\sqrt[3]{5}$: c'est vrai pour $x = 3$, $x = 4$ et pour $x \geqslant 5$, d'après (1), $f(x) > 1/l - 1/5 > 1/\sqrt[3]{5}$. Nous avons donc $c = 2$: sinon $f(a)f(b)f(c) > (1/\sqrt[3]{5})^3 = 1/5$. Notre équation initiale se simplifie désormais en

$$\frac{\left\lfloor \frac{a}{l} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{l} \right\rfloor}{ab} = \frac{2}{5}.$$

Cette équation impose, par le théorème de Gauss[1] : $5 \mid a$ ou $5 \mid b$. Si $a \geqslant 10$ ou $b \geqslant 10$, alors d'après (1) $f(a)f(b) > (1/l - 1/10)(1/l - 1/2) > 2/5$, c'est donc impossible. On a donc $a = 5$ ou $b = 5$. Or $f(5) = 3/5$, donc notre équation s'écrit désormais, pour $x = a$ ou b,

$$f(x) = \frac{2}{3}.$$

Or pour $x \geqslant 8$, $f(x) > 1/l - 1/8 > 2/3$, donc $x = 2, 3, 4, 5, 6$, ou 7. Or x doit être un multiple de 3, donc $x = 3$ ou 6. Pour ces deux valeurs, on a bien $f(x) = 2/3$.

En résumé, à permutation près, nous avons l'ensemble des solutions

$$\mathscr{S} = \{(6,5,2), (3,5,2)\}.$$

4. Produit maximal d'entiers de somme constante

Déterminer le plus grand nombre qui est le produit d'entiers positifs dont la somme est 1976.

1. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand.

Solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le nombre de k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de ${\mathbb{N}^*}^k$ tels que $\sum_{i=1}^k x_i = 1976$ est fini, donc il existe un k-uplet $(x_1^k, \ldots, x_k^k)$ maximisant $\prod_{i=1}^k x_i^k$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^k x_i = 1976$. Comme k ne prend qu'un nombre fini de valeurs ($1 \leqslant k \leqslant 1976$), il existe un m tel que le m-uplet $(x_1^m, \ldots, x_m^m)$ maximise $\prod_{i=1}^k x_i^k$ pour tout k ; appelons ce m-uplet $(x_1, \ldots, x_m)$ pour alléger les notations.

- S'il existe i avec $x_i \geqslant 5$ (par exemple $i = m$), alors $2(x_i - 2) > x_i$. Un $(m+1)$-uplet où l'on remplacerait x_m par 2 et $x_m - 2$ donnerait donc un plus grand produit de ses éléments, ce qui est absurde.
- Si un x_i est égal à 1, alors pour tout $j \in [\![1, m]\!]$ distinct de i, $x_i x_j < (x_i + x_j)$. On obtient donc une absurdité en remplaçant x_i et x_j par $x_i + x_j$.
- On peut si on veut supposer qu'il n'y a pas de x_i égal à 4 dans le m-uplet, en mettant éventuellement des 2 à la place : $4 = 2 \times 2 = 2 + 2$.

On peut donc supposer les x_i égaux à 2 ou 3. Le nombre de 2 ne peut être supérieur ou égal à trois car $2^3 < 3^2$.

Comme $1976 \equiv 2[3]$, la seule solution possible est donc d'avoir un 2 et six-cent-cinquante-huit 3. Le maximum cherché est donc

$$2 \times 3^{658}.$$

5. Calcul matriciel et combinatoire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m = 2n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on a $a_{ij} = 0, 1$ ou -1. Les m inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_m$ satisfont les n équations

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = 0,$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

Prouver que ce système admet pour solution un m-uplet d'entiers non tous nuls et de valeur absolue inférieure ou égale à m.

Solution

Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathbb{R}^m$ donné, notons $\mathrm{A}(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ ayant pour pour i^{e} coordonnée $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m$ (ceux qui connaissent les matrices ne seront pas dépaysés).

Posons alors

$$\mathcal{E} = \{\mathrm{A}(x) \mid x \in [\![-n, n]\!]^m\}.$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ a $(2n+1)^m = (2n+1)^{2n}$ éléments (éventuellement répétés). Or chaque élément de $\mathcal{E}$ a ses coordonnées comprises entre $-mn$ et mn, donc $\mathcal{E}$ a au plus $(2mn+1)^n = (4n^2+1)^n$ éléments distincts.

Comme $(2n+1)^{2n} > (4n^2+1)^n$, les éléments de $\mathcal{E}$ ne sont pas tous distincts, donc il existe deux vecteurs distincts x et y dans $[\![-n, n]\!]^m$ avec $\mathrm{A}(x) = \mathrm{A}(y)$. Alors le vecteur $x - y$, non nul, est dans $[\![-m, m]\!]^m$ et vérifie $\mathrm{A}(x-y) = 0$, ce qui est le résultat souhaité.

6. Partie entière d'une suite

La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5/2$ et $u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Montrer que, pour $n \geqslant 1$,

$$\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}},$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Solution

En l'absence totale d'idée, comparons les premières valeurs obtenues pour u_n et $v_n = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$.

Apologie des mathématiques expérimentales

n	0	1	2	3	4
v_n	1	2	2	8	32
u_n	2	2.5	2.5	8.125	32.03125

En regardant ces valeurs attentivement, nous pouvons intuiter la relation

$$u_n = v_n + \frac{1}{v_n}. \tag{1}$$

Si ce résultat est vérifié, comme pour tout $n \geqslant 1$ $v_n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n > 1$, nous aurons $\lfloor u_n \rfloor = v_n + \lfloor 1/v_n \rfloor = v_n$, ce qui est le résultat voulu.

Reste à démontrer (1), par récurrence évidemment. Le résultat est clairement vrai aux rangs 0 et 1. Supposons-le donc vrai aux rangs n et $n+1$, puis calculons (en remarquant que $v_{n+1} = 2^{(-1)^n} v_n^2$),

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1}\left(u_n^2 - 2\right) - \frac{5}{2} \\
&= \left(v_{n+1} + \frac{1}{v_{n+1}}\right)\left(\left(v_n + \frac{1}{v_n}\right)^2 - 2\right) - \frac{5}{2} \\
&= \left(v_{n+1} + \frac{1}{v_{n+1}}\right)\left(v_n^2 + \frac{1}{{v_n}^2}\right) - \frac{5}{2} \\
&= \left(v_{n+1} + \frac{1}{v_{n+1}}\right)\left(2^{(-1)^{n+1}} v_{n+1} + \frac{1}{2^{(-1)^{n+1}} v_{n+1}}\right) - \frac{5}{2} \\
&= 2^{(-1)^{n+1}} v_{n+1}^2 + \frac{1}{2^{(-1)^{n+1}} v_{n+1}^2} + \left(2^{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{2^{(-1)^{n+1}}} - \frac{5}{2}\right) \\
u_{n+2} &= v_{n+2} + \frac{1}{v_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence, donc notre problème.

Belgrade (Serbie)

1977

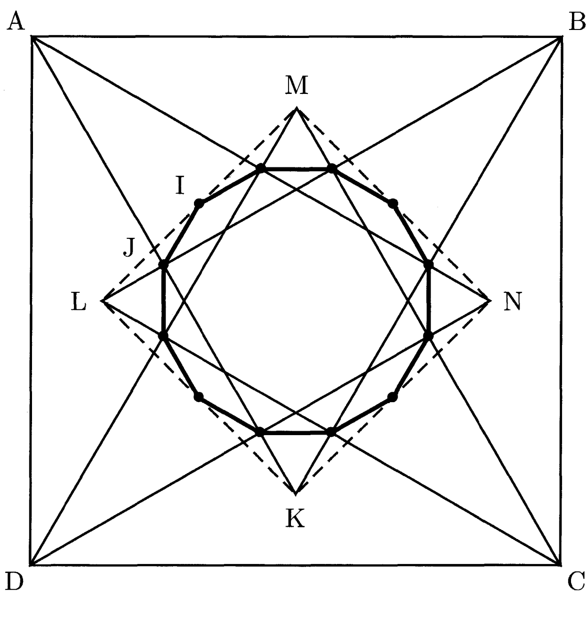
1. Une construction du dodécagone régulier

On construit intérieurement à un carré ABCD donné les triangles équilatéraux ABK, BCL, CDM et DAN.

Démontrer que les milieux des quatre segments [KL], [LM], [MN], [NK] et les milieux des huit segments [AK], [BK], [BL], [CL], [CM], [DM], [DN], [AN] sont les sommets d'un polygone régulier (dodécagone).

Solution

Cet exercice a pour principal intérêt le joli dessin obtenu.



La situation semble parfaitement indiquée pour choisir un repère et y faire les calculs. Prenons donc le repère $(\mathrm{D}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DA}})$.

Notons O le centre du carré, I le milieu de [LM] et J celui de [AK]. On calcule alors facilement les coordonnées de I et de J,

$$(x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{I}}) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right), \quad (x_{\mathrm{J}}, y_{\mathrm{J}}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{4-\sqrt{3}}{4}\right).$$

On peut donc calculer :

- $\mathrm{OI}^2 = \mathrm{OJ}^2$ ($= (2-\sqrt{3})/4$) donc OI = OJ. Nos 12 sommets sont sur un cercle de centre O.
- $\sin \widehat{\mathrm{IOJ}} = |\overrightarrow{\mathrm{OI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OJ}}|/(\overrightarrow{\mathrm{OI}}.\overrightarrow{\mathrm{OJ}}) = 1/2$, donc $\widehat{\mathrm{IOJ}} = 30^\circ$. Nous pouvons en déduire que tous les angles entre deux sommets consécutifs valent 30°(c'est vrai pour ceux faisant intervenir les milieux des segments en pointillés, puis pour les 4 autres par soustraction).

Ces 12 points forment donc un dodécagone régulier.

2. Suite finie de réels de longueur maximale

Dans une suite finie de nombres réels, la somme de sept termes consécutifs quelconques est strictement négative et la somme de onze termes consécutifs quelconques est strictement positive.

Déterminer le nombre maximal de termes de cette suite.

Solution

La valeur maximale de n, longueur d'une suite vérifiant les conditions de l'énoncé, est 16.

Pour démontrer ce résultat, raisonnons tout d'abord par l'absurde en supposant construite une suite $(x_n)_{n\in[\![1,17]\!]}$ de longueur 17 satisfaisant les conditions de l'énoncé. Soient x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3} et x_{i+4} quatre termes consécutifs de la suite ($i \in [\![0,13]\!]$). On a soit $i+11 \leqslant 17$ (cas (1)), soit $i-6 \geqslant 1$ (cas (2)) ; ceci montre que cette suite de 4 termes consécutifs est à l'extrémité d'une suite de termes consécutifs de longueur 11. Dans le cas (1), $x_{i+1}, \ldots, x_{i+11}$ est une suite de 11 termes consécutifs de notre suite initiale. Or $x_{i+5} + \cdots + x_{i+11} < 0$ et $x_{i+1} + \cdots + x_{i+11} > 0$, si bien que $x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4} > 0$. Ce résultat se démontre de la même manière dans le cas (2).

Ainsi dans la suite initiale, la somme de quatre termes consécutifs est strictement positive, le résultat de l'énoncé est donc vrai si on remplace $(7,11)$ par $(7,4)$.

Le même raisonnement permet de même de remplacer ce doublet par $(3,4)$ et enfin par $(3,1)$, ce qui est clairement absurde : si tous les termes sont strictement positifs, la somme de 3 consécutifs ne peut pas être strictement négative.

De plus, une suite de longueur 16 satisfaisant les conditions de l'énoncé existe, en voici une :

$$5 \quad 5 \quad -13 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad -13 \quad 5 \quad 5 \quad -13 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad -13 \quad 5 \quad 5$$

Une méthode pour fabriquer cette suite est de la choisir invariante par « translation de vecteur 7 » et symétrique, pour limiter le nombre d'inéquations que doivent vérifier les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$.

1re remarque. On conjecture que si on remplace $(7,11)$ dans l'énoncé par (a,b), alors la longueur maximale cherchée dans le nouvel exercice est $a+b-a \wedge b-1$.

L'impossibilité d'une suite de longueur $a+b-a \wedge b$ satisfaisant les conditions de l'énoncé se démontre de la même façon que précédemment : on écrit $a = a'd$, $b = b'd$ avec $d = a \wedge b$. Si une suite de longueur $a+b-a \wedge b$ vérifie l'énoncé pour le couple (a,b), en regardant les sommes successives de d termes consécutifs de la suite on obtient une suite de longueur $a'+b'-1$ vérifiant l'énoncé pour le couple (a',b'), où l'on peut supposer $a' > b'$. En distinguant deux cas comme dans la démonstration précédente, on démontre que notre suite vérifie le résultat pour le couple $(a', a'-b')$. On renouvelle la procédure en suivant l'algorithme d'Euclide[1] et on aboutit à un couple du type $(1,x)$ ou $(x,1)$ (car $a' \wedge b' = 1$), signifiant que tous les éléments de la suite sont strictement du même signe, ce qui est clairement absurde.

Hélas, l'existence d'une suite de longueur $a+b-a \wedge b-1$ vérifiant les conditions de l'énoncé pose problème et demeure pour l'instant de l'ordre de la supposition.

2e remarque. Regardons le problème analogue (mais beaucoup plus facile) en le considérant posé modulo un entier n. Plus précisément donnons-nous $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et deux entiers a et b tels que pour tout

1. Euclide d'Alexandrie (env. 325-265 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

k, $\sum_{i=k+1}^{k+a} x_i > 0$ et $\sum_{i=k+1}^{k+b} < 0$, où les indices sont pris modulo n. Alors

$$0 < \sum_{s=0}^{b-1} \underbrace{\sum_{t=as+1}^{as+a} x_t}_{>0} = \sum_{i=1}^{ab} x_i = \sum_{s=0}^{a-1} \underbrace{\sum_{t=bs+1}^{bs+b} x_t}_{<0} < 0.$$

Ce résultat absurde montre qu'une telle suite n'existe pas.

3. Non-factorialité de $n\mathbb{N}^* + 1$ pour $n > 2$

Soit n un entier strictement supérieur à 2. On considère l'ensemble $\mathcal{V}_n$ des entiers de la forme $1 + kn$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Un nombre m appartenant à $\mathcal{V}_n$ est dit indécomposable dans $\mathcal{V}_n$ si et seulement si il n'existe pas dans $\mathcal{V}_n$ deux nombres p et q tels que $m = pq$.

Démontrer qu'il existe au moins un nombre r appartenant à $\mathcal{V}_n$ qui peut s'écrire de plus d'une façon comme produit de nombres indécomposables dans $\mathcal{V}_n$ (deux décompositions dans $\mathcal{V}_n$ qui diffèrent seulement par l'ordre de leurs facteurs sont considérées comme égales).

Solution

Soient deux entiers de $\mathbb{N}^*$ x et y tels que $x, y \equiv -1\ [n]$. Alors $xy \equiv 1\ [n]$ et $xy \geqslant (n-1)^2 = n(n-2)+1$, donc $xy \in \mathcal{V}_n$. Ainsi, si on se donne quatre éléments de $\mathbb{N}^*$, $x, y, z, t \equiv -1\ [n]$, alors

$$r = \underbrace{(xy)}_{v_1}\underbrace{(zt)}_{v_2} = \underbrace{(xz)}_{u_1}\underbrace{(yt)}_{u_2}$$

donne deux décompositions de r en éléments de $\mathcal{V}_n$. Si on parvient à obtenir v_1, v_2, u_1, u_2 indécomposables et $\{v_1, v_2\} \neq \{u_1, u_2\}$, on aura répondu à la question.

1re méthode

Prenons donc pour x, y, z et t les valeurs les plus simples possibles : $x = y = n - 1$, $z = t = 2n - 1$. Voyons à quelles conditions sur n les entiers v_1, v_2 et $u_1 = u_2$ sont indécomposables.

Si $kn+1 = (k_1n+1)(k_2n+1)$, alors $k = k_1k_2n + k_1 + k_2$; ceci permet d'examiner le caractère indécomposable de nos trois éléments de $\mathcal{V}_n$:

- si $(n-1)^2 = n(n-2)+1$ est décomposable, on peut écrire $n-2 = k_1k_2n + k_1 + k_2$, clairement impossible pour $k_1, k_2 \geqslant 1$;
- $(2n-1)^2 = n(4n-4)+1$ est décomposable si et seulement si $4n-4 = k_1k_2n + k_1 + k_2$, donc $\{k_1, k_2\} = \{1,3\}$, $\{1,2\}$ ou $\{1,1\}$. Dans le premier cas on obtient $n = 8$, dans le deuxième $n = 7/2$, impossible, et dans le troisième $n = 2$, également exclu.
- $(n-1)(2n-1) = n(2n-3)+1$ est décomposable si et seulement si $2n-3 = k_1k_2n + k_1 + k_2$, ce qui impose $\{k_1, k_2\} = \{1,1\}$, d'où $n = 5$.

De plus, les deux décompositions ainsi formées sont bien distinctes car $n-1 \neq 2n-1$. Ainsi, pour n distinct de 5 et 8, l'égalité suivante fournit la réponse à la question :

$$r = (2n-1)^2(n-1)^2 = \left[(2n-1)(n-1)\right]^2 .$$

Restent à traiter les cas $n = 5$ et $n = 8$. L'énoncé ne nous impose pas de considérer des produits de deux éléments indécomposables ; il nous suffit donc d'écrire dans l'égalité ci-dessus les nombres décomposables en produit d'indécomposables. Nous obtenons ainsi pour $n = 5$, à partir de $81 \times 16 = 36^2$,

$$81 \times 16 = 6^4.$$

De même pour $n = 8$, en partant de $225 \times 49 = 105^2$,

$$25 \times 9 \times 49 = 105^2.$$

2^e méthode

Nous nous fondons ici sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet[2], résultat difficile auquel une olympiade de mathématiques ne devrait pas faire appel. Nous ne donnons évidemment pas de démonstration de ce grand théorème, en renvoyant le lecteur intéressé à l'excellent livre de Melvyn B. Nathanson[3].

Théorème de Dirichlet. *Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme*

2. Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), mathématicien allemand.
3. Melvyn B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*, Springer-Verlag, 2000.

$ak + b$ $(k \in \mathbb{N})$.

Forts de ce théorème, prenons pour x, y, z et t quatre nombres premiers distincts de la forme $kn - 1$. Comme $n > 2$, x, y, z et t ne sont pas dans $\mathcal{V}_n$, si bien que xy, zt, xz et yt sont indécomposables dans $\mathcal{V}_n$. Ainsi

$$r = (xy)(zt) = (xz)(yt)$$

représente bien deux décompositions distinctes en éléments indécomposables de $\mathcal{V}_n$.

4. Trigonométrie

Soient $a, b, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ des nombres réels. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - \mathrm{A}\cos 2x - \mathrm{B}\sin 2x.$$

Démontrer que si, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, alors

$$a^2 + b^2 \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \leqslant 1.$$

Solution

On pose $l = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\mathrm{L} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$, puis α et β tels que

$$\begin{cases} \cos\alpha = a/l \\ \sin\alpha = b/l \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos 2\beta = \mathrm{A}/\mathrm{L} \\ \sin 2\beta = \mathrm{B}/\mathrm{L} \end{cases}.$$

Un simple calcul de trigonométrie montre alors que

$$f(x) = 1 - l\cos(x - \alpha) - \mathrm{L}\cos 2(x - \beta).$$

On a ainsi :

- $f(\beta) + f(\pi + \beta) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{L} \leqslant 1$;
- $f(\alpha + \pi/4) + f(\alpha - \pi/4) \geqslant 0 \Rightarrow l \leqslant \sqrt{2}$.

Ces deux inégalités sont les résultats cherchés.

5. Autour de la division euclidienne

Soient a et b des entiers naturels tels que $a+b \neq 0$; q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division de a^2+b^2 par $a+b$.

Trouver tous les couples (a, b) pour lesquels

$$q^2 + r = 1977.$$

Solution

Les deux méthodes suivantes sont assez semblables, mais la seconde montre que l'on peut résoudre l'exercice à la force du poignet, en omettant toute notion d'élégance.

1^re^ méthode

On a $q+1 > \frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2} > \frac{r}{2}$, où la seconde inégalité provient de $(a-b)^2 \geqslant 0$ et les deux autres des définitions du reste et du quotient dans une division euclidienne. Ainsi $r < 2(q+1)$, d'où

$$q^2 \leqslant \underbrace{q^2 + r}_{=1977} \leqslant q^2 + 2(q+1).$$

Ceci impose $q = 44$, puis $r = 41$. On a donc $a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$, c'est-à-dire

$$(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009.$$

Or, par une énumération de cas assez rébarbative, on voit que 1009 s'écrit d'une unique façon comme somme de deux carrés ($1009 = 28^2 + 15^2$), d'où les possibles couples solution, à transposition près de a et b :

$$\mathscr{S} = \{(50, 37), (50, 7)\}.$$

Ces deux couples sont effectivement des solutions du problème : le reste ($r = 41$), est bien inférieur à la somme $a + b$ dans les deux cas.

2^e^ méthode

Supposons par symétrie $a \geqslant b$. Par étude de la fonction $x \mapsto \frac{a^2+x^2}{a+x}$ sur $[0, a]$, on montre que

$$2(\sqrt{2}-1)a \leqslant \frac{a^2+b^2}{a+b} \leqslant a.$$

Or $q = \lfloor (a^2+b^2)/(a+b) \rfloor$, donc $2(\sqrt{2}-1)a < q+1$. De plus, comme $a \geqslant b$, on a $(a^2+b^2)/(a+b) \geqslant b$, donc $b < q+1$. Ainsi

$$q^2 \leqslant \underbrace{q^2+r}_{=1977} < q^2+a+b \leqslant q^2+(q+1)\left(\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}+1\right).$$

On en déduit $q = 44$, puis $r = 41$. Comme $q \leqslant a \leqslant (q+1)/[2(\sqrt{2}-1)]$, on a $a \in [\![44, 54]\!]$. On peut alors résoudre pour chacune de ces valeurs l'équation $b^2 - 44b + a^2 - 44a - 41 = 0$ et on retrouve les mêmes résultats que précédemment.

6. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité

$$f(n+1) > f(f(n)).$$

Montrer que $f = \mathrm{Id}$.

Solution

Montrons que

$$\begin{cases} (\forall n \geqslant 1)(f(n) \geqslant 1) \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Raisonnons par l'absurde pour démontrer le premier point : supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ avec $f(n) = 0$. Alors $0 = f(n) > f(f(n-1)) \geqslant 0$: contradiction.

Supposons, pour démontrer le second point, encore par l'absurde, que $f(0) > 0$. On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n - 1)$.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 1$, comme le montre une récurrence facile : c'est vrai pour $n = 0$ et si la propriété est vérifiée au rang n, $x_{n+1} = f(x_n - 1) = f(k)$ avec $k \geqslant 0$. Si $k \geqslant 1$ le point précédent montre que $f(k) \geqslant 1$. Sinon $f(k) = f(0) \geqslant 1$.

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$. Alors $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante :

$$y_{n+1} = f(x_{n+1}) = f \circ f(x_n - 1) < f(x_n) = y_n.$$

Cette suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels est positive, d'où l'absurdité. On a ainsi démontré le second point.

Pour conclure, nous n'avons plus qu'à démontrer par récurrence sur k la propriété suivante : $f(i) = i$ pour tout i de $[\![0, k]\!]$ et $f(n) \geqslant k+1$ pour $n \geqslant k+1$.

Le cas où $k = 0$ vient d'être traité. Supposons notre propriété vraie au rang $k-1$ et vérifions-la au rang k. Définissons la fonction $g : n \mapsto f(n+k) - k$. Il est alors aisé de vérifier que g, de même que f, vérifie les conditions de l'énoncé (g est à valeurs dans $\mathbb{N}$ par hypothèse de récurrence). Ainsi d'après le cas où $k = 0$ précédemment démontré, $g(0) = 0$ et $g(n) \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Ceci signifie exactement que f vérifie notre propriété au rang k et achève notre récurrence.

Bucarest (Roumanie)

1978

1. Période d'une suite de puissances dans $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$

Soient m et n des entiers tels que $n > m \geqslant 1$. Dans la représentation décimale, les trois derniers chiffres de 1978^m sont, dans le même ordre, respectivement égaux aux trois derniers chiffres de 1978^n.

Trouver m et n tels que la somme $m + n$ soit minimale.

Solution

En utilisant la décomposition en facteurs premiers $1000 = 2^3 5^3$, nous pouvons écrire

$$1978^n \equiv 1978^m \; [1000] \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 1978^n \equiv 1978^m \; [2^3] \\ 1978^n \equiv 1978^m \; [5^3] \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 2^n \equiv 2^m \; [2^3] \\ 103^n \equiv 103^m \; [5^3] \end{array} \right. .$$

La première équation de ce dernier système est vérifiée si et seulement si $n > m \geqslant 3$.

La seconde équation peut aussi s'écrire $103^{n-m} \equiv 1 \; [125]$: $103 \wedge 125 = 1$ donc $103 \in (\mathbb{Z}/125\mathbb{Z})^*$. Il faut donc calculer l'ordre δ de 103 dans $(\mathbb{Z}/125\mathbb{Z})^*$.

D'après le théorème d'Euler[1] $103^{\varphi(125)} \equiv 1 \; [125]$, donc $\delta \mid \varphi(125) = 125(1-1/5) = 100$. Ainsi, si δ était distinct de 100, on aurait $103^{100/2} \equiv 1 \; [125]$ ou $103^{100/5} \equiv 1 \; [125]$. Or :

- $103^{50} \equiv 3^{50} \equiv (-1)^{25} \equiv -1 \; [5]$, donc $103^{50} \not\equiv 1 \; [125]$;
- $103^{20} \equiv (103^4)^5 \equiv 6^5 \equiv 26 \not\equiv 1 \; [125]$.

1. Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse.

L'ordre de 103 est donc 100, d'où $n - m \geqslant 100$. Comme de plus $n > m \geqslant 3$, la valeur minimale de $n + m$ est obtenue pour $m = 3$ et $n = 103$.

2. Géométrie dans l'espace

Soit P un point fixe à l'intérieur d'une sphère $\mathcal{S}$ donnée. Trois segments [PA], [PB], [PC], ayant leurs extrémités A, B, C sur $\mathcal{S}$, sont deux à deux perpendiculaires. On considère le parallélépipède rectangle ayant [PA], [PB], [PC] pour arêtes. Soit Q l'extrémité de la diagonale [PQ] de ce parallélépipède.

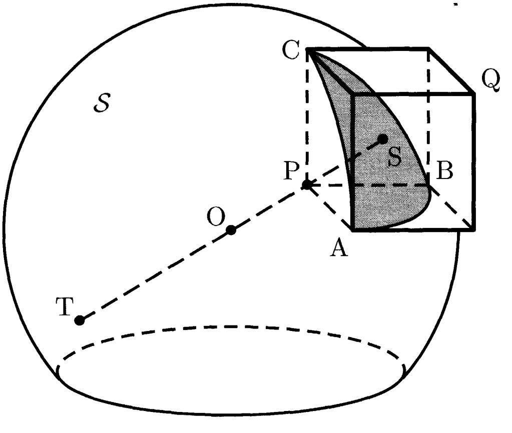
Trouver l'ensemble des points Q lorsque les points A, B, C varient.

Solution

La position de notre point Q semble dépendre de trois paramètres : deux pour la position de A sur la sphère par exemple et un troisième pour la rotation de $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$ autour de (PA). Tout ceci suggère donc que le lieu cherché est un volume entourant notre sphère.

Pourtant, le calcul de OQ, mené un peu plus loin, montre qu'il s'agit en réalité d'une surface.

Soient S et T les points formant un diamètre de la sphère tels que P $\in$ [OS]. Pour plus de concision, utilisons les notations suivantes :



$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} = \vec{a} \\ \overrightarrow{PB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{PC} = \vec{c} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PO} = \vec{u} \\ \overrightarrow{PS} = \vec{v} \end{cases}.$$

L'appartenance de A à $\mathcal{S}$ se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{AT} = 0$: $(\vec{v} - \vec{a}).(2\vec{u} - \vec{v} - \vec{a}) = 0$, c'est-à-dire $(\vec{a} - 2\vec{u}).\vec{a} = (\vec{v} - 2\vec{u}).\vec{v}$. Nous avons des conditions analogues pour $\vec{b}$ et $\vec{c}$. À l'aide des relations supplémentaires $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0$, nous pouvons ainsi calculer OQ^2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}.\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{u}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{u})\\ &= \vec{a}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}-2\vec{u}.\vec{a}-2\vec{u}.\vec{b}-2\vec{u}.\vec{c}+\vec{u}.\vec{u}\\ &= 3(\vec{v}-2\vec{u}).\vec{v}+\vec{u}.\vec{u}\\ \mathrm{OQ}^2 &= 3\,\mathrm{SP}^2+\mathrm{OP}^2+6\,\mathrm{SP}\cdot\mathrm{OP}.\end{aligned}$$

Cette dernier quantité est indépendante des choix pour A, B et C, donc Q décrit une sphère de centre O, dont le rayon au carré est donné ci-dessus (une étude de la position de Q lorsque $\vec{a}$ par exemple est fixé permet de se convaincre que la totalité de la sphère est atteinte, sauf dans le cas dégénéré où P = S : alors Q est constamment confondu avec T).

3. Suites partitionnant $\mathbb{N}^*$

L'ensemble des entiers naturels strictement positifs est la réunion de deux sous-ensembles disjoints, $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ et $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \dots$;
- $g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \dots$;
- $g(n) = f(f(n)) + 1$ **pour tout entier** $n \geqslant 1$.

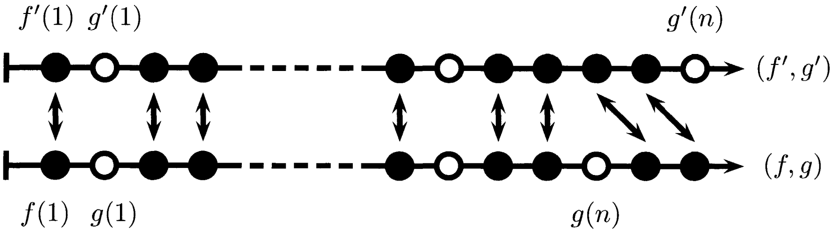
Déterminer $f(240)$.

Solution

1^re méthode

Montrons alors qu'il existe un seul couple de fonctions (f, g) satisfaisant les conditions de l'énoncé. Supposons donc par l'absurde qu'il en existe un autre, (f', g'), distinct de (f, g). La donnée de l'une des deux fonctions impose celle de l'autre, car elles doivent être croissantes et les images doivent former une partition de $\mathbb{N}$. Ainsi $g \neq g'$. Appelons donc n le plus petit entier où g et g' diffèrent et supposons (quitte à permuter g et g') : $g(n) < g'(n)$.

Le schéma suivant montre alors que si $f(k) < g(n)$, alors $f(k) = f'(k)$ $(*)$: $f(k)$ est la k^{e} case noire (où l'on a blanchi les éléments de $\operatorname{Im} g$ et noirci ceux de $\operatorname{Im} f$).



La fonction f est croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc par une récurrence immédiate, pour tout p, $f(p) \geqslant p$. Ainsi $g(n) = f(f(n))+1 \geqslant f(n)+1 > f(n)$, donc d'après $(*)$ $f(n) = f'(n)$.

Comme $f(f(n)) < g(n)$, nous avons de même par $(*)$ $f(f(n)) = f'(f(n))$. En utilisant ce qui précède, on a donc $f(f(n)) = f'(f'(n))$, c'est-à-dire $g(n) = g'(n)$, d'où la contradiction.

Ayant prouvé l'unicité de notre couple (f, g), il nous suffit d'en exhiber un pour calculer avec certitude la valeur de $f(240)$. C'est ce que nous faisons au moyen du théorème suivant.

Théorème de Beatty[2]**.** *Soient a et b des irrationnels positifs tels que $1/a + 1/b = 1$. Si on définit les fonctions $f : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \lfloor na \rfloor$ et $g : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \lfloor nb \rfloor$, alors $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.*

Démonstration. Les images sont disjointes : sinon, on pourrait écrire $\lfloor na \rfloor = \lfloor mb \rfloor = k$ avec n et m entiers. Alors, comme a et b sont irrationnels, ceci s'écrit aussi $k < na < k+1$ et $k < nb < k+1$. En divisant la première par a et la seconde par b, puis en sommant les deux on obtient (en utilisant $1/a + 1/b = 1$) : $k < n+m < k+1$, ce qui est clairement absurde : il n'existe pas d'entier entre deux entiers consécutifs.

Les images recouvrent $\mathbb{N}$: dans le cas contraire on pourrait écrire, pour un certain k qui ne se trouverait pas dans les images, $na < k < k+1 < (n+1)a$ et $mb < k < k+1 < (m+1)b$. Alors, en divisant de même que précédemment la première inégalité par a et la seconde par b, puis en sommant, on obtient : $n+m < k < k+1 < n+m+2$. Ceci est de nouveau clairement absurde. $\square$

Forts de ce théorème, il nous reste à trouver les valeurs adéquates de a et b. Notre équation fonctionnelle initiale doit être vérifiée : $\lfloor nb \rfloor = \lfloor \lfloor na \rfloor a \rfloor + 1$, donc $b = a^2$, par passage aux équivalents en $+\infty$. Comme $1/a + 1/b = 1$, l'irrationnel a, supérieur à 1, vérifie $a^2 - a - 1 = 0$, donc $a = \varphi = (1+\sqrt{5})/2$, le nombre d'or. Montrons que pour cette valeur

2. Samuel Beatty (1881-1970), mathématicien canadien.

de a notre équation fonctionnelle est bien vérifiée : on a

$$\begin{aligned} f(f(n))+1=g(n) &\Leftrightarrow \lfloor\lfloor n\varphi\rfloor\varphi\rfloor+1=\lfloor n(\varphi+1)\rfloor \\ &\Leftrightarrow \lfloor\lfloor n\varphi\rfloor\varphi\rfloor=\lfloor n\varphi\rfloor+n-1 \\ &\Leftrightarrow \lfloor n\varphi\rfloor+n-1\leqslant\lfloor n\varphi\rfloor\varphi<\lfloor n\varphi\rfloor+n \\ f(f(n))+1=g(n) &\Leftrightarrow n\varphi-\varphi\leqslant\lfloor n\varphi\rfloor<n\varphi, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé, pour cette dernière équivalence, $\varphi-1=1/\varphi$. Ce dernier résultat est bien vérifié, nous avons donc

$$f(n)=\lfloor n\varphi\rfloor.$$

Partant de l'approximation bien connue $1.618<\varphi<1.619$, nous pouvons affirmer : $f(240)=388$.

2^e méthode

Cette méthode montre que l'exercice peut être résolu en tâtonnant. C'était sans doute la solution attendue par les correcteurs, qui demandent ici seulement la valeur de $f(240)$ et non pas la fonction f.

Remarquons tout d'abord que $f(f(1))\in \operatorname{Im} f$, donc $f(f(1))\geqslant 1$: $g(1)\geqslant 2$. Ainsi $1\notin \operatorname{Im} g$, donc $1\in\operatorname{Im} f$, si bien que $f(1)=1$, puis $g(1)=2$. De plus $\operatorname{Im} g$ ne peut pas contenir deux entiers consécutifs : si $n+1\in\operatorname{Im} g$, il existe un entier naturel k tel que $g(k)=n+1$, c'est-à-dire $f(f(k))=n$, d'où $n\in\operatorname{Im} f$: $n\notin\operatorname{Im} g$. Ceci impose d'avoir $3\in\operatorname{Im} f$, donc $f(2)=3$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $f(n)=k$ et calculons $f(k)$, puis $f(k+1)$, en nous inspirant de ce qui précède. D'après l'énoncé, $g(n)=f(k)+1$, donc $|\operatorname{Im} g\cap[\![1,f(k)+1]\!]|=n$. Mais nous avons aussi $|\operatorname{Im} f\cap[\![1,f(k)+1]\!]|=k$, donc $n+k=|[\![1,f(k)+1]\!]|=f(k)+1$, c'est-à-dire $f(k)=n+k-1$. Cette dernière relation s'écrit aussi $g(n)=n+k$, donc $n+k+1\notin\operatorname{Im} g$, si bien que $f(k+1)=n+k+1$.

Connaissant $f(n)=k$, nous connaissons donc $f(k)$ et $f(k+1)$. Il ne nous reste qu'à trouver un chemin menant à 240. Après quelques allées et venues, un bon enchaînement apparaît : $f(2)=3$, $f(4)=6$, $f(6)=9$, $f(9)=14$, $f(14)=22$, $f(22)=35$, $f(35)=56$, $f(56)=90$, $f(91)=147$, $f(148)=239$ et enfin $f(240)=388$.

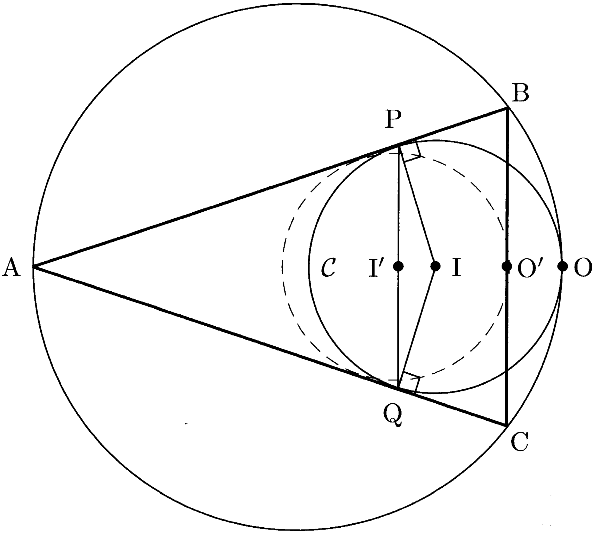
4. Géométrie du triangle

Dans un triangle ABC, les côtés AB et AC sont égaux. Un cercle est tangent intérieurement au cercle circonscrit au triangle ABC et il est, de plus, respectivement tangent en P et Q aux côtés [AB] et [AC].

Démontrer que le milieu du segment [PQ] est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Solution

Notons $\mathcal{C}$ le cercle tangent à [AB] et [AC] en P et Q, I le centre de $\mathcal{C}$, I′ le milieu de [PQ], O le point commun aux deux cercles de l'énoncé et enfin O′ le milieu de [BC].



Soit h l'homothétie de centre A qui transforme I en I′ (A, I et I′ sont clairement alignés). L'homothétie h transforme alors O en O′ : A, O et O′ sont clairement alignés et $AO'/AO = AI'/AI$: $AO'/AO = AO'/AB \cdot AB/AO = \cos^2 \widehat{BAO} = AI'/AP \cdot AP/AI = AI'/AI$.

Le cercle $h(\mathcal{C})$ est donc un cercle de centre I′, passant par O′ et tangent à [AB] et [AC] : c'est le cercle inscrit à ABC. Le point I′ est donc le centre du cercle inscrit à ABC.

5. Une inégalité

Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'entiers strictement positifs, deux à deux distincts. Démontrer, pour chaque entier $n \geqslant 1$, l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Solution

Rappelons tout d'abord l'inégalité du réordonnement. Elle fait partie des quelques inégalités classiques à retenir.

Inégalité du réordonnement. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux suites finies de n nombres réels, avec $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Notons de plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\mathrm{N}_\sigma = \sum_{i=1}^n a_{\sigma(i)} b_i$.*

Alors N_σ est maximale lorsque les $(a_{\sigma(i)})_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont rangés par ordre croissant (même ordre que les b_i) et minimale lorsqu'ils sont rangés par ordre décroissant (ordre opposé à celui des b_i).

Démonstration. Le nombre de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est fini (il en existe $n!$), donc il existe un, σ, réalisant le maximum de N_σ. Raisonnons par l'absurde en supposant les $(a_{\sigma(i)})_{i\in[\![1,n]\!]}$ non croissants : il existe deux indices i et j de $\in [\![1,n]\!]$ avec $i < j$ et $a_{\sigma(i)} > a_{\sigma(j)}$. Si on note alors $[i,j] \in \mathcal{S}_n$ la transposition de i et j, $\mathrm{N}_{\sigma\circ[i,j]} - \mathrm{N}_\sigma = (a_{\sigma(j)}b_i + a_{\sigma(i)}b_j) - (a_{\sigma(i)}b_i + a_{\sigma(j)}b_j) = (a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)})(b_j - b_i) > 0$, ce qui contredit la maximalité de N_σ.

Le lecteur démontrera de même que si N_σ est minimale, alors les $a_{\sigma(i)}$ sont en ordre décroissant. $\square$

Il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que les $a_{\sigma(i)}$ soient rangés par ordre croissant. Nous pouvons alors écrire grâce à l'inégalité du réordonnement : $\sum_{i=1}^n a_k/k^2 \geqslant \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}/k^2$.

Comme les a_i sont tous des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$, une récurrence immédiate montre que nécessairement $a_{\sigma(k)} \geqslant k$, d'où le résultat,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Remarque. Le lecteur pourra résoudre l'exercice sans l'inégalité du réordonnement, par une simple récurrence sur n : d'après le principe des tiroirs, au moins un des a_i $(i \leqslant i \leqslant n)$, appelé a_{i_0}, est supérieur ou égal à n. Après avoir échangé a_{i_0} et a_n pour obtenir une nouvelle suite, notée $(a'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, le lecteur appliquera l'hypothèse de récurrence à $(a'_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ et pourra facilement conclure.

6. Problème de type Ramsey

Une société internationale a ses membres dans 6 pays différents. La liste des membres contient 1978 noms numérotés $1, 2, \ldots, 1978$.

Montrer qu'il y a au moins un membre dont le numéro est égal à la somme des numéros de deux membres de son pays, ou égal au double du numéro de l'un des membres de son pays.

Solution

L'ensemble $[\![1, 1978]\!]$ est partitionné en 6 ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_6$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tous les entiers i et j dans $\mathcal{E}_k$, $i-j \notin \mathcal{E}_k$.

D'après le principe des tiroirs, parmi les 1978 nombres, on peut supposer que $\mathcal{E}_1$ en comporte au moins $\lceil 1978/6 \rceil = 330$, que nous nommons $x_1 < x_2 < \cdots < x_{330}$. D'après notre hypothèse absurde, les 329 nombres distincts suivants ne sont pas dans $\mathcal{E}_1$:

$$x_{330} - x_1 > \cdots > x_{330} - x_{229}.$$

Ils sont donc dans $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$, ou $\mathcal{E}_6$ et on peut supposer que $\lceil 329/5 \rceil = 66$ d'entre eux sont dans $\mathcal{E}_2$. Nommons-les $y_1 < \cdots < y_{66}$ et considérons les 65 éléments suivants, qui ne peuvent pas être dans $\mathcal{E}_2$:

$$y_{66} - y_1 > \cdots > y_{66} - y_{65}.$$

Ces éléments ne peuvent pas non plus être dans $\mathcal{E}_1$, car ils peuvent s'écrire sous la forme $y_{66} - y_k = (x_{330} - x_l) - (x_{330} - x_m) = x_m - x_l$. Ils sont donc dans $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$ ou $\mathcal{E}_6$. On peut donc supposer que $\mathcal{E}_3$ en possède $\lceil 65/4 \rceil = 17$, que nous notons $z_1 < \cdots < z_{17}$. Aucun des 16 nombres

$$z_{17} - z_1 > \cdots > z_{17} - z_{16}$$

n'est alors ni dans $\mathcal{E}_3$, ni dans $\mathcal{E}_2$ ni dans $\mathcal{E}_1$ (car ils s'écrivent sous la forme $(y_{66} - y_l) - (y_{66} - y_m) = y_m - y_l = (x_{330} - x_p) - (x_{330} - x_q) = x_q - x_p$). Ils sont donc dans $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$ ou $\mathcal{E}_6$ et on peut supposer que $\lceil 16/3 \rceil = 6$

d'entre eux sont dans $\mathcal{E}_4$. On les nomme $s_1 < \cdots < s_6$ et on considère les 5 éléments

$$s_6 - s_1 > \cdots > s_6 - s_5$$

qui ne peuvent pas être dans $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$, par le même argument que précédemment. On peut donc supposer que $\lceil 5/2 \rceil = 3$ d'entre eux sont dans $\mathcal{E}_5$, nommons-les $t_1 < t_2 < t_3$. Alors les trois nombres suivants ne peuvent pas être dans $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$:

$$u_1 = t_3 - t_1,\ u_2 = t_3 - t_2,\ u_3 = t_2 - t_1.$$

Ils sont donc tous les trois dans $\mathcal{E}_6$ et vérifient

$$u_1 = u_2 + u_3.$$

Ceci est clairement contradictoire.

Annexe : les nombres de Ramsey

Notre problème est étroitement lié au résultat suivant : il existe un nombre minimal r_k pour lequel tout graphe complet, d'au moins r_k sommets, dont chaque arête est marquée par une des k couleurs, comporte un triangle monochromatique. Une estimation de r_k (et au passage une démonstration de son existence) est donnée dans le théorème ci-après.

Théorème. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_k \leqslant \lfloor k!\, e \rfloor + 1$.*

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord la relation suivante, pour tout $k \geqslant 1$:

$$r_{k+1} \leqslant (k+1)(r_k - 1) + 2. \tag{1}$$

En effet, soit un graphe complet $\mathcal{G}$ de $(k+1)(r_k - 1) + 2$ sommets, où on utilise $k+1$ couleurs. Soit X un de ses sommets : il est à l'extrémité de $(k+1)(r_k - 1) + 1$ arêtes et d'après le principe des tiroirs au moins r_k d'entre elles sont de la même couleur, disons rouge ; soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des r_k sommets, autres que X, à leur extrémité. Si le graphe complet défini par $\mathcal{E}$ comporte une arête rouge entre deux points Y et Z, alors XYZ est monochromatique. Sinon, les arêtes de $\mathcal{E}$ sont marquées par seulement k couleurs, donc par définition de r_k on peut trouver un triangle monochromatique avec les arêtes de $\mathcal{E}$. On a dans tous les cas démontré que $\mathcal{G}$ comporte un triangle monochromatique, d'où (1).

Notre égalité (1) peut aussi s'écrire

$$\frac{r_{k+1} - 1}{(k+1)!} \leqslant \frac{r_k - 1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!},$$

donc par sommation (en constatant $r_1 = 3$), on obtient

$$\frac{r_k - 1}{k!} \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \leqslant e,$$

d'où le résultat. $\square$

Le lien entre r_k et notre exercice est le suivant : si $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_k\}$ est une partition quelconque de $[\![1, n]\!]$ où $n \geqslant r_k - 1$, alors il existe $i \in [\![1, k]\!]$ et x, y, z dans $\mathcal{E}_i$ tels que $x = y + z$.

En effet, considérons le graphe complet de r_k sommets, numérotés de 1 à r_k, et étiquetons une arête entre a et b par l'ensemble auquel appartient $|a - b|$. Par définition de r_k, il existe un triangle dont les trois côtés ont la même étiquette. Si $u < v < w$ sont ses sommets, alors on a

$$w - u = (w - v) + (v - u),$$

ce qui démontre le résultat voulu.

Ainsi, dans notre problème initial, 1978 pouvait être remplacé par tout entier supérieur ou égal à $r_6 - 1 \leqslant \lfloor 6!\, e \rfloor = 1957$.

Le nombre r_k est appelé nombre de Ramsey[3] et intervient souvent en théorie des graphes. Les valeurs de r actuellement connues sont $r_1 = 3$, $r_2 = 6$, $r_3 = 17$ et c'est tout ! Le lecteur intéressé par ce sujet passionnant pourra consulter l'excellent livre de Diestel[4].

3. Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), mathématicien anglais.
4. Reinhard Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, 2000.

Londres (Angleterre)

1979

1. Manipulation de sommes

Soient p et q des entiers strictement positifs vérifiant

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Montrer que 1979 divise p.

Solution

Décomposons notre somme comme ceci :

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{1319} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{1319} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{659} \frac{1}{2k} &= \sum_{k=660}^{1319} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=660}^{989} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{1979-k}\right) = \sum_{k=660}^{989} \frac{1979}{k(1979-k)}.\end{aligned}$$

Si on note $a_k = k(1979 - k)$, on obtient

$$p \prod_{k=660}^{989} a_k = 1979\, q \sum_{k=660}^{989} \prod_{\substack{660 \leqslant i \leqslant 989 \\ i \neq k}} a_i.$$

Ainsi $1979 \mid p \prod_{k=660}^{989} a_k$. En outre, 1979 est un nombre premier : il suffit pour s'en convaincre de vérifier que 1979 n'admet aucun diviseur premier inférieur à $\lfloor\sqrt{1979}\rfloor = 44$. La vérification de ce très basique critère de primalité est laissée aux bons soins du lecteur. Tous nos a_k sont donc premiers avec 1979, donc d'après le théorème de Gauss[1] $1979 \mid p$.

1. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand.

2. Graphe bicolore sans triangle monochromatique

On se donne un prisme dont les deux bases $A_1A_2A_3A_4A_5$ et $B_1B_2B_3B_4B_5$ sont des pentagones. Chaque côté de ces deux bases ainsi que chaque segment A_iB_j, pour $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $1 \leqslant j \leqslant 5$, est colorié soit en rouge soit en vert. On suppose que tous les triangles dont les trois sommets sont des sommets du prisme et dont les trois côtés sont colorés ont deux côtés de couleurs différentes.

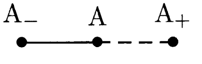
Montrer que les dix côtés formés par les deux bases de ce prisme sont de la même couleur.

Solution

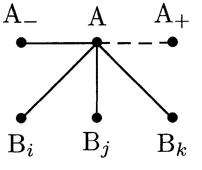
On représente dans ce qui suit la couleur rouge en trait plein et le vert en pointillés.

1re étape : chaque pentagone est monochrome

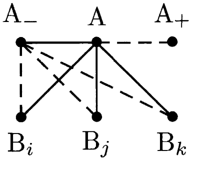
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un pentagone, par exemple $A_1A_2A_3A_4A_5$, possède deux arêtes consécutives de couleurs distinctes.



De A partent 5 arêtes vers l'autre pentagone, 3 d'entre elles sont donc de la même couleur, que nous pouvons supposer rouge.



Les triangles A_-AB_i, A_-AB_j et A_-AB_k doivent être bicolores, donc les trois arêtes A_-B_i, A_-B_j et A_-B_k sont vertes.

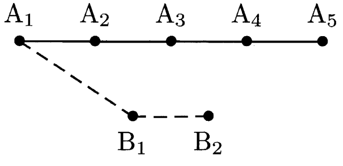


Les points B_i, B_j et B_k sont trois sommets distincts du pentagone $B_1B_2B_3B_4B_5$, deux d'entre eux sont donc adjacents, par exemple B_i et B_j. Le caractère bicolore du triangle AB_iB_j impose que l'arête B_iB_j soit verte, alors que le triangle $A_-B_iB_j$ impose qu'elle soit rouge, d'où la contradiction.

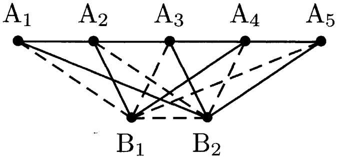
Le pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ est donc monochrome et de même pour le pentagone $B_1B_2B_3B_4B_5$.

2^e étape : les deux pentagones sont de la même couleur

De nouveau par l'absurde, supposons par exemple que le pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ est rouge et que $B_1B_2B_3B_4B_5$ est vert. Un des segments B_1A_1 ou B_1A_2 est vert, car sinon $A_1A_2B_1$ serait monochrome rouge. Quitte à renuméroter les A_i, on peut supposer que B_1A_1 est vert.



Le caractère bicolore de $A_1B_1B_2$ impose A_1B_2 rouge, puis $A_1A_2B_2$ impose A_2B_2 vert, puis $A_2B_1B_2$ impose A_2B_1 rouge, ... On arrive ainsi nécessairement à la configuration suivante.



Mais alors ici le triangle $A_1A_5B_2$ est monochrome rouge, ce qui apporte la contradiction souhaitée. Tous les côtés des pentagones sont donc de la même couleur (réciproquement, il existe bien un coloriage vérifiant les conditions de l'énoncé : il suffit de colorier tous les côtés des pentagones en rouge et les arêtes du type A_iB_j en vert).

3. Point fixe équidistant de deux objets en rotation

Dans un plan on se donne deux cercles sécants $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$; A est un de leurs points communs. Les points M_1 et M_2 parcourent respectivement, dans le même sens, les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, chacun avec une vitesse constante. À chaque tour les points M_1 et M_2 passent simultanément au point A.

Montrer qu'il existe un point fixe du plan qui est constamment équidistant de M_1 et M_2.

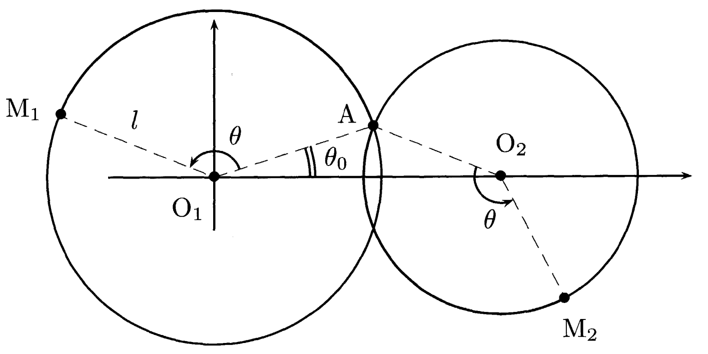
Solution

Nous opposons dans ce qui suit deux méthodes, l'une analytique et l'autre purement géométrique. La première nécessite de bien poser les calculs pour ne pas s'y perdre, alors que la deuxième présuppose la connaissance du point cherché.

1re méthode : brutale

Commençons par la méthode brutale : la géométrie analytique va nous éviter d'attendre désespérément une étincelle.

Le plus raisonnable est ici d'utiliser les nombres complexes : nous allons caractériser M_1 et M_2 par leur affixe, qui dépend uniquement de la variable θ, l'« angle d'avancement ». Nous pourrons chercher l'éventuelle présence d'un point M équidistant de M_1 et M_2 pour tout θ.



Avec les notations de la figure, où l'on peut supposer $O_1O_2 = 1$, on obtient les affixes suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} z_{\mathrm{O}_1} &= 0\\ z_{\mathrm{O}_2} &= 1\\ z_{\mathrm{A}} &= l\,e^{i\theta_0}\\ z_{\mathrm{M}_1} &= e^{i\theta} z_{\mathrm{A}} = l\,e^{i(\theta+\theta_0)}\\ z_{\mathrm{M}_2} &= z_{\mathrm{O}_2} + e^{i\theta}(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{O}_2}) = l\,e^{i(\theta+\theta_0)} - e^{i\theta} + 1 \end{aligned}\right. .$$

Soit M d'affixe z un point quelconque du plan et O le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$. Alors M est équidistant de M_1 et M_2 si et seulement si le complexe

$$\mathrm{Z} = \frac{z - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{M}_2} - z_{\mathrm{M}_1}} = \frac{z - l\,e^{i(\theta+\theta_0)}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{1}{2}$$

est un imaginaire pur, c'est-à-dire si $\mathrm{Z} + \overline{\mathrm{Z}} = 0$. Cette dernière condition est équivalente, une fois développée, à la nullité de la « sympathique » expression

$$\underbrace{\left(1 - l\,e^{i\theta_0} - \overline{z}\right)}_{a} e^{i\theta} + \underbrace{\left(1 - l\,e^{-i\theta_0} - z\right)}_{b} e^{-i\theta} + \underbrace{\left(-2 + l\,e^{i\theta_0} + l\,e^{-i\theta_0} + z + \overline{z}\right)}_{c}$$

pour tout angle θ. Si on pose $x = e^{i\theta}$, le polynôme $ax^2 + cx + b$ doit ainsi être nul sur le cercle unité, donc possède une infinité de racines. Il s'agit donc du polynôme nul, donc par exemple $b = 0$, c'est-à-dire

$$z = 1 - l\,e^{-i\theta_0}. \qquad .$$

Par chance, pour cette valeur de z, les deux autres coefficients de notre polynôme sont également nuls. Nous avons donc bien trouvé un point fixe constamment équidistant de M_1 et M_2.

2e méthode : plus fine

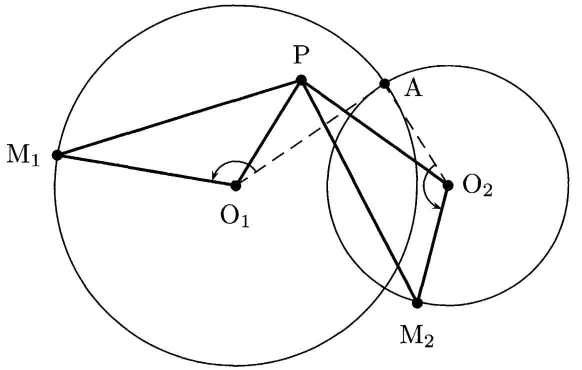
Nous notons ici aussi O_1 et O_2 les centres respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et θ l'« angle d'avancement » de nos deux points.

Le réel problème est ici d'intuiter la position du point cherché, que nous appellerons P. Regardons pour cela deux cas particuliers.

- Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont le même rayon, $\mathrm{P} = \mathrm{A}$ convient.

- Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en A (intérieurement ou extérieurement), notre situation est symétrique par rapport à $(\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2)$ donc nécessairement $\mathrm{P} \in (\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2)$. Plus précisément, P si situe sur la médiatrice de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ pour des angles d'avancement égaux à θ et $-\theta$. Ces deux médiatrices sont symétriques par rapport à $(\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2)$, donc P doit appartenir à (O_1O_2). Le cas où $\theta = 180^\circ$ permet de conclure que P est le milieu de $[A_1A_2]$, où A_1 et A_2 sont les symétriques de A par rapport à O_1 et O_2.

Ces deux cas permettent d'intuiter le fait suivant : P est le symétrique de A par rapport à la médiatrice de $[O_1O_2]$. Montrons qu'un tel point vérifie bien la propriété de l'énoncé.



Le point P est ici le symétrique de A par rapport à la médiatrice de $[O_1O_2]$, d'où :

- $PO_1 = AO_2 = M_2O_2$;
- $PO_2 = AO_1 = M_1O_1$;
- $(\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{O_1M_1}) = (\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1M_1}) - (\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1P}) = (\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2M_2}) - (\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2P}) = (\overrightarrow{O_2P}, \overrightarrow{O_2M_2})$.

Ainsi les triangles PO_1M_1 et PO_2M_2 sont isométriques, donc $PM_1 = PM_2$.

4. Géométrie du bon, de la brute et du truand

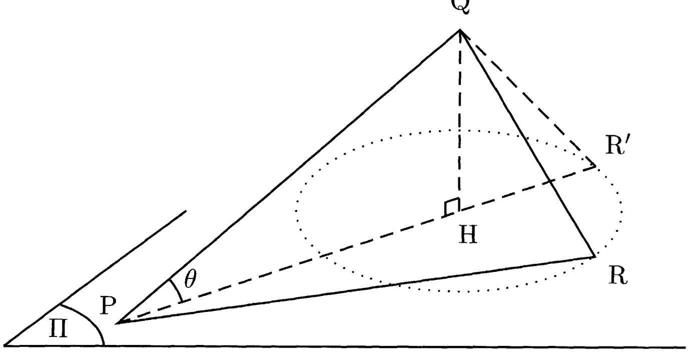
On se donne un plan Π, un point P appartenant à Π et un point Q n'appartenant pas à Π.

Trouver l'ensemble des points R du plan Π tels que le quotient $(QP + PR)/QR$ soit maximum.

Solution

Soit H le projeté orthogonal de Q sur Π et R un point quelconque de Π. Si $\mathrm{H} = \mathrm{P}$, en notant $\varphi = \widehat{\mathrm{PQR}}$, nous pouvons calculer directement $(\mathrm{QP} + \mathrm{PR})/\mathrm{QR} = (\mathrm{QR}\cos\varphi + \mathrm{QR}\sin\varphi)/\mathrm{QR} = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \varphi)$, maximum pour $\varphi = 45^\circ$: l'ensemble cherché est le cercle de Π de centre P et de rayon PQ.

Si $\mathrm{P} \neq \mathrm{H}$, notons R′ le point le plus éloigné de P sur le cercle de centre H et de rayon HR.



Nous pouvons alors facilement écrire

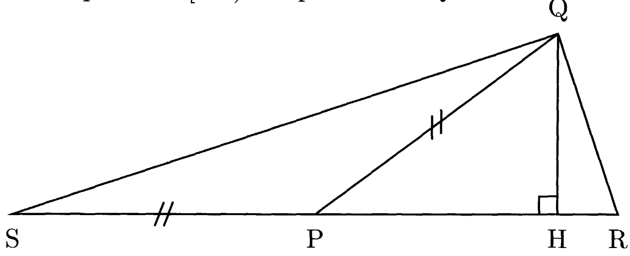
$$\frac{\mathrm{QP} + \mathrm{PR}'}{\mathrm{QR}'} = \frac{\mathrm{QP} + \mathrm{PR}'}{\mathrm{QR}} \geqslant \frac{\mathrm{QP} + \mathrm{PR}}{\mathrm{QR}},$$

avec égalité si et seulement si $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$. Le lieu des points R maximisant notre quotient est donc contenu dans la demi-droite [PH).

Nous proposons désormais trois méthodes pour conclure.

1re méthode : celle du bon

Notons S le point de [HP) tel que $\mathrm{PS} = \mathrm{PQ}$.



Pour tout R de [PH), on peut calculer, d'après la loi des sinus,

$$\frac{\mathrm{QP}+\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{QR}}=\frac{\sin\widehat{\mathrm{RQS}}}{\sin\widehat{\mathrm{RSQ}}}.$$

L'angle $\widehat{\mathrm{RSQ}}$ ne varie pas, donc notre quotient est maximum pour $\sin\widehat{\mathrm{RQS}}=1$, c'est-à-dire en R_0 tel que $\widehat{\mathrm{R}_0\mathrm{QS}}=90^\circ$. Ceci signifie aussi que PQR_0 est isocèle en P : il s'agit de la caractérisation de R_0 dans la solution suivante.

2e méthode : celle de la brute

Cette façon de procéder n'est certes pas élégante, mais elle est particulièrement efficace dans les conditions d'un concours.

On pose HR $= x$. Alors, en prenant PQ $=1$, un simple calcul donne

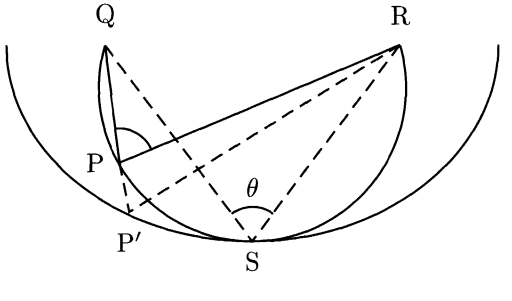
$$f(x)=\frac{\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=\frac{1+\cos\theta+x}{\sqrt{\sin^2\theta+x^2}}.$$

Cette fonction est maximale, après dérivation et étude de ses variations, en l'unique point $x=1-\cos\theta$, c'est-à-dire lorsque PQR' est isocèle en P. L'unicité dans les divers cas d'égalité rencontrés jusqu'à présent permet alors de conclure : il existe un unique point R de Π maximisant $(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})/\mathrm{QR}$: le point R_0 de [PH) avec PQR_0 isocèle en P.

3e méthode : celle du truand

Nous travaillons dans le plan de PQH. Soit S tel que QRS soit isocèle, d'angle au sommet $\theta=\widehat{\mathrm{QPR}}$.

Alors l'arc de cercle QSR est contenu dans l'ellipse de foyers Q et R passant par S (ce résultat, évident visuellement, n'admet apparemment pas de preuve élémentaire : nous l'admettons en feignant de ne pas avoir remarqué cette difficulté masquée).



En utilisant les notations du dessin, on a donc

$$\mathrm{QP} + \mathrm{PR} \leqslant \mathrm{QP} + \mathrm{PP}' + \mathrm{P}'\mathrm{R} = \mathrm{QP}' + \mathrm{P}'\mathrm{R} = \mathrm{QS} + \mathrm{SR}$$

avec égalité si et seulement si P = S.

Si on note R_0 le point de [PH) tel que PQR_0 est isocèle, alors

$$(\mathrm{QP} + \mathrm{PR})/\mathrm{QR} \leqslant (\mathrm{QS} + \mathrm{SR})/\mathrm{QR} = (\mathrm{QP} + \mathrm{PR}_0)/\mathrm{QR}_0.$$

Cette dernière identité provient de la similitude entre les triangles QPR_0 et QSR', tous deux isocèles de même angle au sommet θ. On retrouve ainsi la même condition d'optimalité que dans les deux premières solutions.

Remarque. Les correcteurs sont régulièrement confrontés à des solutions grossièrement erronées, il y a donc fort à parier qu'ils ne remarquent pas ici l'entourloupe. Ceci n'est bien sûr pas un exemple à suivre, mais plutôt un conseil stratégique : si on ne possède pas d'autre méthode, autant exposer celle-ci. Rien ne sert de signaler au correcteur une erreur dans notre propre solution, nous n'avons rien à y gagner. L'expérience montre régulièrement que des étudiants obtiennent de très bons scores (voire le score maximum) pour une solution parfois légèrement nébuleuse.

5. Manipulation de sommes

Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles il existe cinq réels positifs ou nuls x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vérifiant les relations

$$\sum_{k=1}^{5} k x_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

Solution

1^{re} méthode

Si le nombre a et les réels positifs x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vérifient l'énoncé, alors

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{5} k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5 x_k\right).$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz[2] permet d'écrire, puisque les x_i sont positifs,

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{5} k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5 x_k\right).$$

Nous sommes donc ici dans le cas d'égalité : les vecteurs $(\sqrt{kx_k})_{k\in[\![1,5]\!]}$ et $(\sqrt{k^5x_k})_{k\in[\![1,5]\!]}$ sont proportionnels.

Si un x_k est non nul, ce coefficient de proportionnalité doit être $\sqrt{k^5x_k}/\sqrt{kx_k} = k^2$, donc tous les autres x_i doivent être nuls. Réciproquement, le quintuplé suivant convient alors :

$$\begin{cases} x_i = k \text{ pour } i = k \\ x_i = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Si tous les x_i sont nuls, alors $a = 0$. L'ensemble des solutions est donc finalement

$$\mathscr{S} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}.$$

2^e méthode

L'énoncé nous permet d'écrire

$$a^2 \sum_{k=1}^{5} kx_k - 2a \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k + \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{5} k(k^2 - a)^2 x_k = 0.$$

Nous pouvons alors conclure comme dans la solution précédente : s'il existe un x_k non nul, alors $a = k^2$ et sinon $a = 0$.

2. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.
Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.

6. Combinatoire et suites

Soient A et E deux sommets diamétralement opposés d'un octogone régulier convexe. Un pion qui peut occuper tous les huit sommets de cet octogone se déplace, à chaque coup, d'un sommet à l'un des deux sommets voisins; le pion part de A et le jeu se termine lorsqu'il atteint pour la première fois le point E.

On désigne par a_n le nombre de « parties » distinctes en exactement n coups se terminant en E. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2k-1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}),$$

avec $x = 2 + \sqrt{2}$ et $y = 2 - \sqrt{2}$.

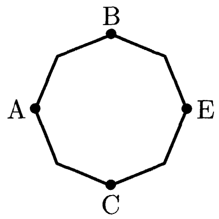
Remarque : une « partie » de n coups est une suite de sommets $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ vérifiant les conditions suivantes :

- **$\mathrm{P}_0 = \mathrm{A}$, $\mathrm{P}_n = \mathrm{E}$;**
- **pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, P_i est distinct de E;**
- **pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, P_i et P_{i+1} sont des sommets voisins.**

Solution

Remarquons d'abord immédiatement que $a_{2k-1} = 0$ car il faut un nombre pair de coups pour rejoindre E : par une récurrence immédiate sur k, lorsqu'on a joué k coups on est séparé de A par n arêtes ($n = 1$, 2, 3 ou 4) avec $n \equiv k$ [2].

Notons b_n (respectivement c_n) le nombre de parties aboutissant en E, en n coups au départ de B (respectivement C). Par symétrie, $b_n = c_n$ pour tout n.



Si nous arrivons en E au départ de A en $2n+2$ coups, ceci signifie qu'après 2 coups nous étions dans un des deux cas suivants :

- soit nous étions revenus en A (après 2 chemins possibles), puis nous avons suivi un des a_{2n} chemins menant en E ;
- soit nous étions en B (ou C) et nous avons effectué une des b_{2n} (c_{2n}) parties permettant d'arriver en E.

Ceci permet donc d'écrire la relation de récurrence

$$a_{2n+2} = 2a_{2n} + b_{2n} + c_{2n} = 2a_{2n} + 2b_{2n} \Leftrightarrow b_{2n} = \frac{a_{2n+2}}{2} - a_{2n}. \quad (1)$$

Le lecteur vérifiera de même cette seconde relation de récurrence, en dénombrant les parties de $2n+2$ coups menant de B à E :

$$b_{2n+2} = a_{2n} + 2b_{2n}. \quad (2)$$

Éliminons les b_i dans cette dernière relation grâce à (1). Nous obtenons

$$a_{2n+4} - 4a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre deux est $X^2 - 4X + 2$, dont les racines sont les x et y de l'énoncé. Il existe donc deux constantes λ_1 et λ_2 telles que, pour tout n, $a_{2n} = \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 y^{n-1}$. Or $a_2 = 0$ donc $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$. De plus $a_4 = 2$, donc $\lambda = 1/\sqrt{2}$. On a donc bien finalement

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}).$$

Remarque. Le candidat initié à l'algèbre linéaire pouvait conclure dès les égalités (1) et (2). En effet, si nous posons $X_n = \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{bmatrix}$, (1) et (2) se traduisent par la relation de récurrence linéaire

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X_n.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 4X + 2$, dont les racines sont x et y. La matrice est donc diagonalisable, il existe ainsi deux constantes λ_1 et λ_2 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 y^{n-1}$. Nous pouvons ensuite conclure comme dans la précédente démonstration.

Washington, D.C. (États-Unis)

1981

1. Géométrie et inégalités

Pour tout point P intérieur à un triangle ABC donné on appelle respectivement D, E et F les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur (BC), (CA) et (AB).

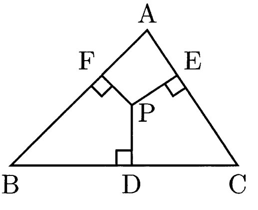
Trouver tous les points P tels que

$$\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{PD}}+\frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{PE}}+\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{PF}}$$

soit minimum.

Solution

Posons, pour plus de clarté,



$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{PD} \\ x_2 = \mathrm{PE} \\ x_3 = \mathrm{PF} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \mathrm{BC} \\ \lambda_2 = \mathrm{CA} \\ \lambda_3 = \mathrm{AB} \end{cases}.$$

Pour que l'énoncé ait un sens, tous ces nombres sont implicitement supposés strictement positifs. L'inégalité de Cauchy-Schwarz[1] nous permet d'écrire

$$\left(\frac{\lambda_1}{x_1}+\frac{\lambda_2}{x_2}+\frac{\lambda_3}{x_3}\right)(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3) \geqslant (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2.$$

On n'a égalité que si les deux vecteurs $(\lambda_1/x_1, \lambda_2/x_2, \lambda_3/x_3)$ et $(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si tous les x_i sont égaux. De plus, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \mathscr{P}(\mathrm{ABC})$ (le périmètre de ABC) et, comme P est

1. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.
Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.

intérieur à ABC, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i = 2\mathscr{A}(\mathrm{ABC})$ (l'aire de ABC). On a donc en résumé

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{PD}} + \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{PE}} + \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PF}} \geqslant \frac{\mathscr{P}(\mathrm{ABC})^2}{2\mathscr{A}(\mathrm{ABC})}$$

avec égalité si et seulement si P est centre du cercle inscrit à ABC.

2. Diversité des méthodes en combinatoire

Soient n et r deux entiers ($1 \leqslant r \leqslant n$). On forme tous les sous-ensembles à r éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on considère pour chacun de ces sous-ensembles son plus petit élément. On appelle $f(n, r)$ la moyenne arithmétique de tous les nombres ainsi obtenus.

Prouver que

$$f(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

Solution

L'entier 1 est clairement le plus petit élément de C_{n-1}^{r-1} sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ à r éléments et de façon générale i est le plus petit élément de C_{n-i}^{r-1} sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ à r éléments : un tel ensemble est donné par $r - 1$ éléments distincts de $[\![i + 1, n]\!]$. Nous en déduisons que

$$f(n, r) = \frac{\sum_{i=1}^{n-r+1} i\, \mathrm{C}_{n-i}^{r-1}}{\mathrm{C}_n^r}.$$

À ce stade, l'énoncé nous aide beaucoup : si son résultat est juste, nous devons trouver comme valeur du numérateur C_{n+1}^{r+1}. Pour le prouver, il existe de multiples méthodes. La première est la plus courte, mais les plus systématiques sont les deux suivantes. La quatrième méthode, directe, est la plus élégante.

1re méthode : par récurrence

Nous voulons démontrer la relation $\sum_{i=1}^{n-r+1} i\, \mathrm{C}_{n-i}^{r-1} = \mathrm{C}_{n+1}^{r+1}$. Cette relation est clairement vérifiée pour $n = r$. Si nous la supposons vraie au rang $n \geqslant r$, alors un simple calcul donne à l'aide de la formule du triangle de Pascal[2] ($\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$),

2. Blaise Pascal (1623-1662), mathématicien et philosophe français.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-r+2} i\,\mathrm{C}_{n+1-i}^{r-1} &= \sum_{i=1}^{n-r+2} i\left(\mathrm{C}_{n-i}^{r-1}+\mathrm{C}_{n-i}^{r-2}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n-r+1} i\,\mathrm{C}_{n-i}^{r-1} + \sum_{i=1}^{n-(r-1)+1} i\,\mathrm{C}_{n-i}^{r-2}\\ &= \mathrm{C}_{n+1}^{r+1}+\mathrm{C}_{n+1}^{r}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n-r+2} i\,\mathrm{C}_{n+1-i}^{r-1} = \mathrm{C}_{n+2}^{r+2}.$$

Le résultat est donc vrai au rang $n+1$, ceci achève la récurrence.

2^e méthode : démonstration combinatoire

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $[\![1, n+1]\!]$ à $r+1$ éléments, parties dont nous rangeons les éléments par ordre croissant. L'ensemble $\mathcal{A}$ est clairement de cardinal C_{n+1}^{r+1}.

Or $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i=1}^{n+r-1} \mathcal{A}_i$ où $\mathcal{A}_i$ est l'ensemble des parties de $[\![1, n+1]\!]$ dont le deuxième élément est $i+1$. De plus $|\mathcal{A}_i| = i\,\mathrm{C}_{n-i}^{r-1}$: on choisit le premier élément dans $[\![1, i]\!]$, le deuxième élément est donné et les $r-1$ suivants sont à choisir dans $[\![i+1, n+1]\!]$: C_{n-i+1}^{r-1} choix possibles. Ainsi

$$\mathrm{C}_{n+1}^{r+1} = |\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^{n+r-1} |\mathcal{A}_i| = \sum_{i=1}^{n+r-1} i\,\mathrm{C}_{n-i}^{r-1}.$$

3^e méthode : fonction génératrice

Nous connaissons le développement en série entière

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}_{n-1+i}^{n-1}\, x^i,$$

valable pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Sur ce même domaine, l'égalité évidente $1/(1-x)^2 \times 1/(1-x)^r = 1/(1-x)^{r+2}$ s'écrit donc, sous forme de développements en série entière, $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}_{r-1+i}^{r-1}\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}_{r+1+i}^{r+1} x^i$. En identifiant les coefficients de x^{n-r} dans les deux membres de cette égalité nous obtenons le résultat voulu,

$$\sum_{i=1}^{n-r+1} i\,\mathrm{C}_{n-i}^{r-1} = \mathrm{C}_{n+1}^{r+1}.$$

4e méthode : théorie des graphes

Considérons un graphe dont les sommets sont de deux types :

- blancs, ils sont alors étiquetés d'un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$ à r éléments ; tous ces sous-ensembles sont représentés une fois et une seule, il en existe donc C_n^r ;
- noirs, ils sont alors étiquetés d'un sous-ensemble de $[\![0,n]\!]$ à $r+1$ éléments ; tous ces sous-ensembles sont représentés une fois et une seule, il en existe donc C_{n+1}^{r+1}.

Les arêtes sont définies entre les sommets blancs et noirs de la façon suivante : B est relié à N si et seulement si l'ensemble associé à B est celui associé à N mais privé de son plus petit élément. On a alors autant d'arêtes que de sommets noirs, c'est-à-dire C_{n+1}^{r+1}.

De plus le degré d'un sommet blanc est aussi égal à son plus petit élément, donc $f(n,r)$ est aussi le degré moyen des sommets blancs dans ce graphe, c'est-à-dire le nombre total d'arêtes sur le nombre de sommets blancs :

$$f(n,r) = \frac{\mathrm{C}_{n+1}^{r+1}}{\mathrm{C}_n^r} = \frac{n+1}{r+1}.$$

Remarque. Les 2e et 3e méthodes s'adaptent facilement pour démontrer l'identité combinatoire suivante, plus générale : $\sum_{p+q=n} \mathrm{C}_p^s \mathrm{C}_q^t = \mathrm{C}_{n+1}^{s+t+1}$. Cette dernière est un cas particulier de

$$\sum_{p_1+\cdots+p_k=n} \mathrm{C}_{p_1}^{l_1} \ldots \mathrm{C}_{p_k}^{l_k} = \mathrm{C}_{n+k-1}^{l_1+\cdots+l_k+k-1}.$$

Pour prouver ceci on peut procéder comme dans la 2e méthode en discutant selon la position du $(l_1+1)^{\mathrm{e}}$, du $(l_1+l_2+2)^{\mathrm{e}}$ $(\ldots)$ et du $(l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}+k-1)^{\mathrm{e}}$ des $l_1+\cdots+l_k+k-1$ éléments.

On peut aussi s'inspirer de la troisième méthode en utilisant l'unicité du développement en série entière de

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{l_1+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{l_2+1}\cdots\left(\frac{1}{1-x}\right)^{l_k+1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{l_1+\cdots+l_k+k}.$$

3. Équation diophantienne $n^2 - mn - m^2 = \pm 1$

> **Soient m et n deux entiers ($1 \leqslant m \leqslant 1981$ et $1 \leqslant n \leqslant 1981$) vérifiant**
> $$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$
> **Déterminer le maximum de $m^2 + n^2$.**

Solution

Soit (m, n) un couple vérifiant l'équation de l'énoncé. Si $m = n$, alors clairement $m = n = 1$. Sinon, $n > m$: dans le cas contraire nous aurions $n^2 - mn - m^2 \leqslant (m-1)^2 - mn - m^2 = 1 - m(2+n) < -1$, ce qui contredit l'énoncé.

Il faut alors avoir la bonne intuition : construire par récurrence descendante d'autres couples solution, atteindre un couple particulier et utiliser la réversibilité du processus.

Plus précisément, si (m, n) satisfait l'énoncé , avec $m \neq n$, $(n-m, m)$ est aussi solution. En effet ces deux termes sont bien strictement positifs d'après ce qui précède et

$$m^2 - m(n-m) - (n-m)^2 = -(n^2 - mn - m^2) = \pm 1.$$

De plus nous avons alors $m > n - m \geqslant 1$, par le même raisonnement que précédemment.

Ainsi, si on pose $n = f_0$, $m = f_1$ et qu'on définit par récurrence $f_{i+2} = f_i - f_{i+1}$, la suite des f_i est strictement décroissante tant qu'elle demeure supérieure stricte à 1. On peut donc la restreindre à $k+2$ termes avec $f_0 > f_1 > \cdots > f_k > 1 \geqslant f_{k+1}$. On a de plus $f_{k+1} = f_{k-1} - f_k > 0$, donc $f_{k+1} = 1$. Ainsi $(f_k^2 - f_k - 1)^2 = 1$ et une simple étude de cette équation montre qu'alors $f_k = 2$.

On en déduit $f_{k-1} = f_k + f_{k+1} = 3$, puis $f_{k-2} = 5$ ... Les termes f_0 et f_1 sont donc deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci[3], inférieurs à 1981.

Nous pouvons calculer les éléments de la suite inférieurs à 1981 :

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597

La valeur maximale possible de $m^2 + n^2$ est donc $987^2 + 1597^2$.

---

3. Leonardo Pisano Fibonacci (env. 1170-1250), mathématicien italien.

Réciproquement on voit bien par une récurrence immédiate que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci vérifient l'égalité de l'énoncé, la valeur ci-dessus est donc la valeur maximale effective.

Remarque. Borner m et n par 1981 est ici en réalité un simple prétexte pour avoir un résultat numérique : nous avons finalement déterminé tous les couples $(m,n) \in \mathbb{N}_*^2$ vérifiant l'équation.

Une tradition vise à introduire dans un exercice des Olympiades internationales le millésime de l'année en cours. Si celle-ci possède des propriétés arithmétiques remarquables, rendant l'exercice intéressant (comme 1990 n°6), tout ceci est plutôt sympathique. Mais dans le cas contraire (comme ici), cette tradition est plutôt de nature à embrouiller les candidats.

4. Arithmétique

Trouver toutes les valeurs de l'entier n ($n \geqslant 3$) pour lesquelles il existe un ensemble de n entiers strictement positifs et consécutifs ayant la propriété suivante : le plus grand de ces entiers divise le plus petit multiple commun des $n-1$ entiers restants.

Pour quelles valeurs de n cet ensemble est-il unique ?

Solution

Entiers n vérifiant cette propriété

Comme $n \geqslant 3$, on peut trouver $m \in [\![2,n]\!]$ tel que $m \wedge n = 1$ (par exemple $m = n-1$). Alors :

- $m \mid (mn-n) \vee \cdots \vee (mn-1)$, car l'un de ces n entiers consécutifs est un multiple de m ($n \geqslant m$) ;
- $n \mid (mn-n) \vee \cdots \vee (mn-1)$, car $n \mid mn-n$.

Ainsi, comme m et n sont premiers entre eux, mn est un diviseur de $(mn-n) \vee \cdots \vee (mn-1)$: on a trouvé $n+1$ entiers consécutifs vérifiant la propriété de l'énoncé. Celle-ci est donc vérifiée pour $n \geqslant 4$.

Reste donc à traiter le cas $n = 3$, qui ne peut pas vérifier la propriété voulue. En effet, si $x+2 \mid x \vee (x+1)$, alors $x+2 \mid x(x+1)-(x-1)(x+2) = 2$, donc $x = 0$, ce qui contredit l'énoncé : tous les entiers doivent être strictement positifs.

Les éléments vérifiant l'énoncé sont donc tous les entiers $n \geqslant 4$.

Cas d'unicité

Si, pour n donné, un ensemble vérifiant l'énoncé est unique, nous n'avons qu'un choix possible pour l'entier m de l'ensemble $[\![2, n-1]\!]$ premier avec $n-1$: $\varphi(n-1) = 2$, où φ est l'indicateur d'Euler[4]. On a donc nécessairement $n-1 = 3$, 4 ou 6, car $\varphi(5) = 4$ et $\varphi(k) \geqslant 3$ pour $k \geqslant 7$:

- si l'entier k s'écrit sous la forme $2^i 3^j$, il est premier avec 1, 5 et 7 donc $\varphi(k) \geqslant 3$;
- sinon il admet un diviseur premier $p_{i_0} \geqslant 5$. Le lecteur doit connaître la formule de l'indicateur d'Euler, qui permet de calculer : $\varphi(k) = k \prod_{p_i | k}(1 - 1/p_i) \geqslant \prod_{p_i | k}(p_i - 1) \geqslant p_{i_0} - 1 \geqslant 3$.

Il nous faut donc désormais considérer les cas particuliers $n = 4$, 5 ou 7 :

- $n = 5$: nous n'avons pas d'unicité comme le montrent les ensembles $[\![2, 6]\!]$ et $[\![8, 12]\!]$;
- $n = 7$: nous n'avons pas d'unicité : $[\![4, 10]\!]$ et $[\![6, 12]\!]$ satisfont l'énoncé ;
- $n = 4$: nous avons unicité. Si $x + 3 \mid x \vee (x+1) \vee (x+2)$, alors $x + 3 \mid -x(x+1)(x+2) + (x+3)(x^2+2) = 6$. Comme $x > 0$, ceci impose l'unique solution $x = 3$.

En résumé, un tel ensemble n'est unique que pour $n = 4$.

5. Géométrie pure

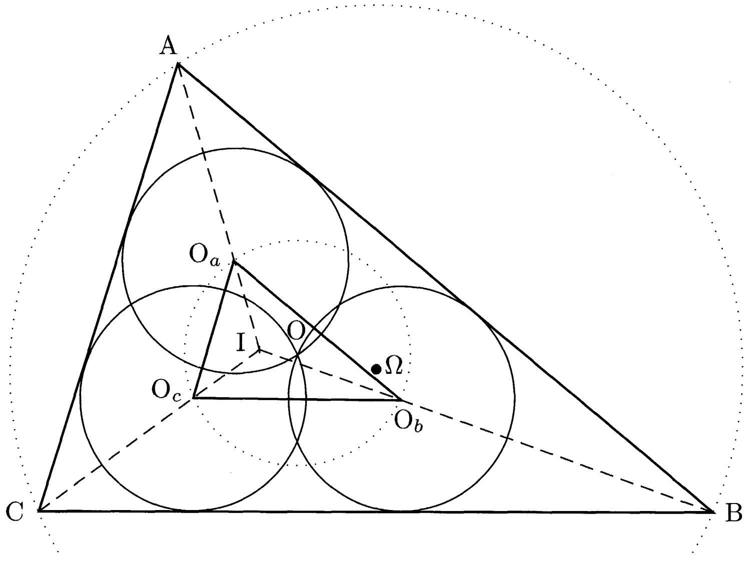
Soient trois cercles de même rayon ayant un point commun O et qui sont tous trois intérieurs à un triangle ABC. On suppose que chaque cercle est tangent à deux des côtés du triangle.

Démontrer que les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC et le point O sont colinéaires.

Solution

Nommons O_a, O_b et O_c les centres des trois cercles de l'énoncé, Ω le centre du cercle circonscrit à ABC et I le centre de son cercle inscrit. Admirons alors la grande figure ci-après.

4. LEONHARD EULER (1707-1783), mathématicien suisse.



Comme nos trois cercles ont le même rayon, (O_aO_b) est parallèle à (AB) et de même pour les autres côtés. On en déduit qu'il existe une homothétie de centre I, centre du cercle inscrit à ABC, qui transforme $O_aO_bO_c$ en ABC.

Par cette homothétie l'image du centre du cercle circonscrit au triangle $O_aO_bO_c$, c'est-à-dire O, est le centre du cercle circonscrit à ABC, ce qui prouve l'alignement des trois points de l'énoncé.

6. Équation fonctionnelle à deux variables

La fonction f est définie pour tous les couples d'entiers (x, y) ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$) et vérifie les conditions :

- **pour tout y, $f(0, y) = y + 1$;**
- **pour tout x, $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$;**
- **pour tout (x, y), $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.**

Déterminer $f(4, 1981)$.

Solution

Nous pouvons nous demander pourquoi les Olympiades internationales, d'ordinaire si fines, proposent ici un problème de si peu d'intérêt. Il suffit en effet de calculer $f(1,n)$ pour tout n, puis $f(2,n)$, $f(3,n)$ et enfin $f(4,n)$.

Commençons par $f(1,n)$: $f(1,n+1) = f(0,f(1,n)) = f(1,n)+1$. Ainsi $f(1,n) = f(1,0)+n$. Or $f(1,0) = f(0,1) = 2$, donc $f(1,n) = n+2$.

Ceci nous permet donc de calculer $f(2,n)$, selon la même méthode : $f(2,n+1) = f(1,f(2,n)) = f(2,n)+2$. Nous avons donc $f(2,n) = f(2,0)+2n = f(1,1)+2n = 2n+3$.

Passons à $f(3,n)$: $f(3,n+1) = f(2,f(3,n)) = 2f(3,n)+3$. Ainsi $f(3,n+1)+3 = 2(f(3,n)+3)$ donc $f(3,n)+3 = 2^n(f(3,0)+3)$. Or $f(3,0) = f(2,1) = 5$, donc $f(3,n) = 2^{n+3}-3$.

Enfin, nous pouvons écrire : $f(4,n+1) = f(3,f(4,n)) = 2^{f(4,n)+3}-3$. Donc $f(4,n+1)+3 = 2^{f(4,n)+3}$, si bien que $f(4,n)+3 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{f(4,0)+3}}}}}}-3$, où on a écrit n « 2 ». Or $f(4,0) = f(3,1) = 2^4-3 = 2^{2^2}-3$, d'où

$$f(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^2}}}}}}_{n+3 \text{ « } 2 \text{ »}} -3.$$

Nous connaissons donc en particulier $f(4,1981)$, nombre plus qu'astronomique.

Budapest (Hongrie)

1982

1. Équation fonctionnelle avec conditions aux limites

Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- **pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $f(m+n) - f(m) - f(n)$ prend l'une des valeurs 0 ou 1 ;**
- **$f(2) = 0$, $f(3) > 0$ et $f(9999) = 3333$.**

Déterminer $f(1982)$.

Solution

Notre fonction f vérifie tout d'abord l'inégalité

$$f(na+b) \geqslant nf(a) + f(b), \tag{1}$$

pour tous les entiers a, n dans $\mathbb{N}^*$, b dans $\mathbb{N}$ (avec la convention $f(0) = 0$). Démontrons ce résultat par récurrence. L'inégalité est acquise pour $n = 1$: $f(a+b) - f(a) - f(b) = 0$ ou 1. Supposons-la vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$: $f((n+1)a+b) = f(na+b)+f(a)+(0 \text{ ou } 1) \geqslant f(na+b) + f(a) \geqslant (n+1)f(a) + f(b)$.

Regardons de plus les premières valeurs de f : $f(2) - 2f(1) = -2f(1) = 0$ ou 1, donc $f(1) = 0$. Nous en déduisons $f(3) - f(2) - f(1) = f(3) = 0$ ou 1. La condition $f(3) > 0$ impose alors $f(3) = 1$. De plus $f(4) \geqslant f(3) = 1$; si $f(4) \geqslant 2$, alors $3333 = f(9999) \geqslant f(9996) = f(2499 \times 4) \geqslant 2499 \times 2$, résultat absurde. Ainsi $f(4) = 1$ et le même raisonnement permet de démontrer que $f(5) = 1$. Tout ceci nous permet d'intuiter

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

Plus précisément, nous allons démontrer cette égalité par récurrence sur n, pour $n \leqslant 3333$. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $3k$.

Alors

$$\begin{cases} f(3k+1) = f(3k) + f(1) + (0 \text{ ou } 1) = k \text{ ou } k+1 \\ f(3k+1) = f(3k-1) + f(2) + (0 \text{ ou } 1) = k-1 \text{ ou } k \end{cases}.$$

Ainsi $f(3k+1) = k$. Nous pouvons désormais démontrer le résultat au rang $3k+3$:

$$\begin{cases} f(3k+3) = f(3k) + f(3) + (0 \text{ ou } 1) = k+1 \text{ ou } k+2 \\ f(3k+3) = f(3k+1) + f(2) + (0 \text{ ou } 1) = k \text{ ou } k+1 \end{cases}.$$

Nous avons donc $f(3k+3) = k+1$. Reste à démontrer le résultat pour $3k+2$, ce qui est le plus difficile. Comme f est croissante, on a $f(3k+2) = k$ ou $k+1$. Supposons, par l'absurde, que $f(3k+2) = k+1$. On utilise ici enfin l'hypothèse $f(9999) = 3333$. Effectuons la division euclidienne de 9999 par $3k+2$: $9999 = a(3k+2) + b$ avec $b < 3k+2$. Alors, d'après (1),

$$3333 = f(9999) = f(a(3k+2)+b) \geqslant af(3k+2) + f(b),$$

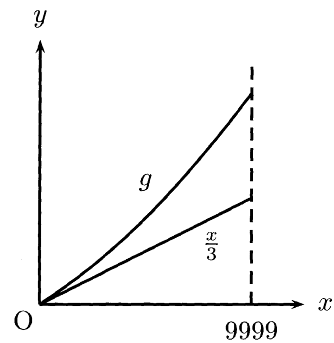
c'est-à-dire, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $f(b)$ et l'hypothèse absurde pour $f(3k+2)$,

$$\frac{a(3k+2)+b}{3} \geqslant a(k+1) + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor.$$

Tout ceci s'écrit aussi plus synthétiquement $a \leqslant b - 3\lfloor b/3 \rfloor < 3$, donc $9999 < (a+1)(3k+2) \leqslant 3(3k+2)$, c'est-à-dire $3k+2 > 3333$, clairement absurde. Ainsi $f(3k+2) = k$. Nous pouvons conclure que

$$f(1982) = \left\lfloor \frac{1982}{3} \right\rfloor = 660.$$

Remarque. L'idée de la démonstration est la suivante. Dans le cas d'une fonction g dérivable, l'inégalité (1) est une inégalité de type convexité. Or la condition $f(3) > 0$ est ici équivalente à $g'(0) \geqslant 1/3$. Comme g est convexe, elle est donc constamment au dessus de la droite $y = x/3$. De la condition aux limites $g(9999) = 3333$ nous déduisons que g est constamment égale à $x/3$.



Bien sûr la démonstration que nous avons faite, dans le cas discret, est plus complexe, mais la démarche suivie est la même.

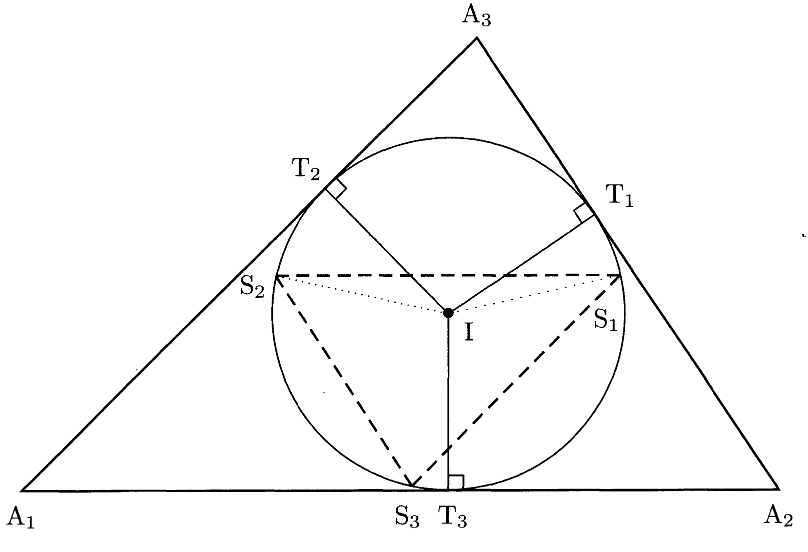
2. Géométrie du triangle

Soit $A_1A_2A_3$ un triangle non isocèle de côtés a_1, a_2, a_3 (a_i est le côté opposé de A_i). Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, on désigne par M_i le milieu du côté a_i, par T_i le point de contact du cercle inscrit avec le côté a_i et par S_i le symétrique de T_i par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle de sommet A_i.

Montrer que les droites (M_1S_1), (M_2S_2) et (M_3S_3) sont concourantes.

Solution

Comme $A_1A_2A_3$ n'est pas isocèle, $S_1 \neq T_1$ donc S_1 n'appartient pas à $[A_2A_3]$: (M_1S_1) définit bien une droite et de même en changeant les indices. Nommons I le centre du cercle inscrit à $A_1A_2A_3$.



On a $\widehat{S_2IT_3} = \widehat{S_2IA_2} - \widehat{A_2IT_3} = \widehat{T_2IA_2} - \widehat{A_2IT_1} = \widehat{T_2IT_1}$. On trouve de même ce résultat pour $\widehat{S_1IT_3}$, si bien que $\widehat{S_1IT_3} = \widehat{S_2IT_3}$. De plus $IS_2 = IS_1$ et $(IT_3) \perp (A_1A_2)$, donc $(S_1S_2) \parallel (A_1A_2)$.

Nous avons le même résultat pour les autre côtés, donc les triangles $A_1A_2A_3$ et $S_1S_2S_3$ sont homothétiques : il existe une homothétie h_1 telle que $h_1(A_i) = S_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

De plus $A_1A_2A_3$ et $M_1M_2M_3$ sont également classiquement homothétiques (considérer l'homothétie h_2 de centre le centre de gravité de ABC et de rapport $-2/3$). On a donc $h_1 \circ h_2^{-1}(M_i) = S_i$.

Si h_1 et h_2 sont de rapports distincts, alors $h_1 \circ h_2^{-1}$ est bien une homothétie et non une translation, si bien que nos trois droites (M_1S_1), (M_2S_2) et (M_3S_3) seront concourantes et non pas parallèles.

Si h_1 et h_2 sont de même rapport, alors $h_1 \circ h_2^{-1}$ est une translation, donc $M_1M_2M_3$ et $S_1S_2S_3$ sont isométriques. Leurs cercles circonscrits ont donc le même rayon : $R/2 = r$, où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC et r celui du cercle inscrit à ABC. D'après la relation ci-dessous (dont la démonstration figure dans tout bon manuel de géométrie au lycée des années 60), ceci n'est possible que pour $O = I$, c'est-à-dire ABC équilatéral, cas exclu ici.

Relation d'Euler[1]**.** *Soit* ABC *un triangle,* O *le centre de son cercle circonscrit (de rayon* R*) et* I *le centre de son cercle inscrit (de rayon r). Alors* $OI^2 = R^2 - 2Rr$. *En particulier* $R \geqslant 2r$.

1[re] **remarque.** Donnons une démonstration « directe » de l'inégalité $R \geqslant 2r$. Notons p le demi-périmètre de ABC (de côtés a, b et c) et $\mathscr{A}$ son aire. Il faut alors retenir les trois façons majeures d'exprimer $\mathscr{A}$, en fonction de r, de R (loi des sinus) puis seulement de a, b et c (formule de Héron[2]) :

$$\mathscr{A} = rp = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ainsi la formule $R \geqslant 2r$ équivaut, après quelques substitutions, à

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leqslant abc.$$

Cette inégalité, classique, se montre au moyen d'une transformation de Ravi (définie dans l'exercice 1983 n°6). La démonstration de cette inégalité est détaillée dans l'exercice 2000 n°2 (2[e] solution).

2[e] **remarque.** Pour le lecteur ne possédant pas de culture en géométrie pure, nous conseillons la lecture de l'incontournable manuel de géométrie du triangle, par Yvonne et René Sortais[3].

1. LEONHARD EULER (1707-1783), mathématicien suisse.
2. HÉRON D'ALEXANDRIE (env. 10-75), géomètre et physicien grec.
3. YVONNE ET RENÉ SORTAIS, *La géométrie du triangle*, Hermann, 1987.

3. Série définie à partir d'une suite décroissante minorée

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant $x_0 = 1$ et, pour tout $i \geqslant 0$, $x_{i+1} \leqslant x_i$.

1. **Démontrer que pour chacune de ces suites, il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que**

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3.999.$$

2. **Trouver une telle suite vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$,**

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \leqslant 4.$$

Solution

1^re^ méthode

1. Dans cette question le « 3.999 » n'est évidemment qu'un prétexte pour démontrer que cette somme dépasse ou s'approche aussi près qu'on veut de 4.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée (par 0), donc convergente. Distinguons alors deux cas.

- Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l > 0$, alors $\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} l > 0$, donc $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui répond largement à la question.

- Si au contraire $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < x_n < \varepsilon$. Mais nous avons aussi pour tout entier i, $x_i^2/x_{i+1} \geqslant 4(x_i - x_{i+1})$ car $(2x_{i+1} - x_i)^2 \geqslant 0$. Nous pouvons ainsi calculer en cascades

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} 4(x_i - x_{i+1}) = 4 - 4x_n \geqslant 4 - 4\varepsilon,$$

ce qui est le résultat voulu avec $\varepsilon = 1/4000$.

2. La question précédente donne la construction d'une telle suite et prouve même que c'est la seule : s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $2x_{i+1} \neq x_i$, alors on voit facilement que la somme de l'énoncé finit par dépasser 4.

Prenons donc, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $2x_{i+1} = x_i$, c'est-à-dire par récurrence immédiate $x_i = 1/2^i$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} < 4.$$

2^e méthode

Notons $m = \inf\limits_{x_0=1 \geqslant x_1 \geqslant \ldots} \sum_{k=0}^{+\infty} {x_k}^2/x_{k+1}$. Clairement $m \geqslant 1$ (car $x_0^2/x_1 \geqslant 1$) et $m < +\infty$ (prendre pour s'en rendre compte $x_i = e^{-i}$). Soient $\varepsilon > 0$ et $(x_i)_{i \geqslant 0}$ une suite telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} {x_k}^2/x_{k+1} < m+\varepsilon$. Alors

$$m + \varepsilon > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{{x_k}^2}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_1} + x_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x_k/x_1)^2}{x_{k+1}/x_1} \geqslant \frac{1}{x_1} + x_1 m \geqslant 2\sqrt{m},$$

d'après l'inégalité de la moyenne. Le résultat ci-dessus étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a $m \geqslant 4$.

Ci-dessus, le cas d'égalité n'intervient que pour $1/x_1 = x_1 m$ et $x_{k+1}/x_1 = x_k$, ce qui donne $x_k = 1/2^k$. On peut conclure comme dans la première méthode.

4. Équation diophantienne $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$

Soit n un entier strictement positif.

1. **Démontrer que si l'équation $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ admet une solution entière (c'est-à-dire un couple (x, y) solution, appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), alors elle admet au moins trois solutions entières.**

2. **Démontrer que pour $n = 2891$, l'équation précédente n'admet aucune solution entière.**

Solution

1. Si (x, y) est solution, les couples $(-y, x-y)$ et $(y-x, -x)$ le sont également, car

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 + y^3 &= (-y)^3 - 3(-y)(x-y)^2 + (x-y)^3 \\ &= (y-x)^3 - 3(y-x)(-x) + (-x)^3. \end{aligned}$$

De plus ces trois couples sont nécessairement deux à deux distincts (vérification facile à la main), donc s'il existe une solution il en existe au moins trois.

2. Raisonnons ici par l'absurde en supposant $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$, avec x et y entiers relatifs. Nous avons, pour tout entier x, $x \equiv x^3$ [3], donc $x + y \equiv x^3 + y^3 \equiv 2$ [3]. Nous sommes ainsi dans l'un des trois cas suivants :

- $x \equiv y \equiv 1$ [3]. Alors $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 1 - 3 + 1 \equiv -1$ [9], ce qui contredit $2891 \equiv 2$ [9].
- $x \equiv 0$ [3] et $y \equiv 2$ [3]. Ainsi $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 0 - 0 - 1 \equiv -1$ [9], ceci est encore absurde.
- $x \equiv 2$ [3] et $y \equiv 0$ [3], donc $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv -1 - 0 + 0 \equiv -1$ [9], de nouveau absurde.

Il n'existe donc pas de solution entière de l'équation pour $n = 2891$.

5. Points alignés dans un hexagone

Les diagonales [AC] et [CE] d'un hexagone régulier ABCDEF sont divisées respectivement par des points intérieurs M et N de telle sorte que

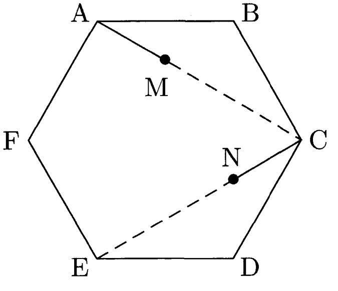
$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{CE}} = \lambda.$$

Déterminer λ lorsque B, M et N sont alignés.

Solution

D'après l'énoncé on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{CN}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{CE}} \\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{cases}.$$



Notre hexagone est régulier, le lecteur vérifiera donc facilement les relations suivantes :

- $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{CE}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{0}$;

- $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{CE}} = -3\,\overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Ceci permet de calculer

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BN}} &= (\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \wedge (\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{CE}}) \\ &= \lambda^2(\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{CE}}) + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ \overrightarrow{\mathrm{BM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BN}} &= (-3\lambda^2 + 1)\,\overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}}.\end{aligned}$$

Les points B, M et N sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{BM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BN}} = \overrightarrow{0}$, donc pour $\lambda = \pm 1/\sqrt{3}$. Comme les point M et N doivent être intérieurs à l'hexagone, ils sont alignés avec B si et seulement si

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remarque. De nombreuses autres méthodes permettent d'effectuer les calculs de cet exercice : le lecteur pourra le résoudre en utilisant le théorème de Ménélaüs[4], ou réussira même de façon purement analytique. Cependant, la solution la plus expéditive est celle utilisant le produit vectoriel : trop souvent oublié dans les exercices d'olympiades, il permet régulièrement de montrer des questions d'alignement.

6. Topologie

Soit $\mathcal{C}$ un carré dont la longueur de chaque côté est 100; $\mathcal{L} = A_0A_1 \ldots A_n$ est une ligne polygonale non fermée ($A_0 \neq A_n$), sans point double, contenue dans $\mathcal{C}$, telle que pour tout point P du bord de $\mathcal{C}$ il existe un point de $\mathcal{L}$ dont la distance à P ne dépasse pas $1/2$.

Montrer qu'il existe deux point X et Y de $\mathcal{L}$ tels que la distance de X à Y soit inférieure ou égale à 1 et tels que la partie de la ligne polygonale $\mathcal{L}$ comprise entre X et Y ait une longueur supérieure ou égale à 198.

Solution

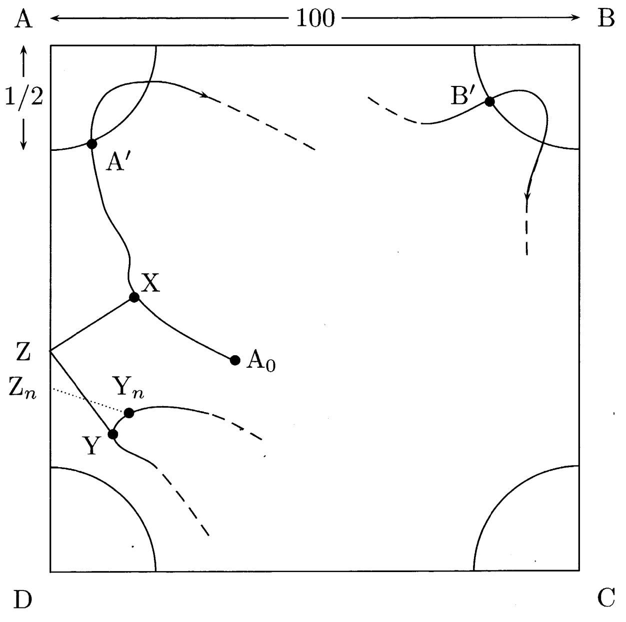
Ce qui suit est en réalité valable pour toute courbe $\mathcal{L}$ continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux ayant deux extrémités distinctes.

4. Ménélaüs d'Alexandrie (env. 70-130), mathématicien grec.

Nous dirons de deux points M et N qu'ils vérifient « $M \leqslant N$ » si la distance de M à A_0 le long de $\mathcal{L}$ est inférieure ou égale à celle de N à A_0, c'est-à-dire plus intuitivement si la ligne polygonale $\mathcal{L}$ orientée depuis A_0 passe par M avant de passer par N.

Comme notre courbe doit s'approcher à une distance inférieure à $1/2$ des sommets de notre carré, nommés A, B, C et D, elle passe sur chacun des quarts de disque fermés ci-dessous (nommés $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$ et $\mathcal{D}_D$). Supposons sans perte de généralité qu'elle pénètre d'abord dans $\mathcal{D}_A$ et qu'elle atteint $\mathcal{D}_B$ avant $\mathcal{D}_D$.

Nommons alors A' et B' les plus petits points de $\mathcal{L}$ respectivement dans $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$. Nommons alors $\mathcal{L}_1$ la portion de $\mathcal{L}$ comprise entre A_0 et B' et $\mathcal{L}_2$ celle comprise entre B' et A_n. Soit Z le point de [AD] le plus proche de D tel que $d(Z, \mathcal{L}_1) \leqslant 1/2$ et X un point correspondant sur $\mathcal{L}_1$: $ZX \leqslant 1/2$.



Comme $d(A', [AD]) \leqslant A'A \leqslant 1/2$, on a $A' \geqslant X$, donc X est extérieur à $\mathcal{D}_D$ ($\mathcal{L}$ pénètre dans $\mathcal{D}_A$ avant $\mathcal{D}_D$). Le point Z est donc sur [DA] et distinct de D. On peut donc prendre une suite de points $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ de [DZ[avec $Z_n \to Z$.

À chacun de ces points Z_n on peut faire correspondre un point Y_n de $\mathcal{L}$ avec $Z_nY_n \leqslant 1/2$. Pour ne pas contredire la définition de Z, on a en fait $Y_n \in \mathcal{L}_2$. La courbe $\mathcal{L}_2$ étant compacte, on peut extraire de $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite convergente vers $Y \in \mathcal{L}_2$. On a alors par passage à la limite $ZY \leqslant 1/2$.

Montrons que les points X et Y ainsi construits conviennent :

- $XY \leqslant XZ + YZ \leqslant 1/2 + 1/2 = 1$;
- On note $l(U, V)$ la distance le long de $\mathcal{L}$ entre deux points U et V. Comme $X \in \mathcal{L}_1$ et $Y \in \mathcal{L}_2$, on a $X \leqslant B' \leqslant Y$ donc $l(X, Y) = l(X, B') + l(B', Y) \geqslant l(A', B') + [d(B', Z) - d(Z, Y)] \geqslant 99 + 99 = 198$.

Remarque. Tout ce qui précède paraît très élémentaire, mais c'est en réalité fortement parachuté. Nous pouvons notamment nous demander « pourquoi 198 ? » : il semble en effet que l'énoncé posé en remplaçant 198 par $198 + \varepsilon$ demeure vrai (pour $\varepsilon > 0$ assez petit), mais ce nouveau problème semble alors ouvert.

Paris (France)

1983

1. Équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions de l'ensemble des nombres réels strictement positifs dans lui-même qui vérifient les conditions suivantes :

(1) pour tous réels strictement positifs x et y, $f(xf(y)) = yf(x)$;

(2) $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution

Pour $x = y$ nous obtenons $f(xf(x)) = xf(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xf(x)$ est donc point fixe de f.

Considérons donc a un point fixe de f. Alors d'après la condition (1), pour $x = 1$ et $y = a$, $a = af(1)$; comme $a > 0$, on a $f(1) = 1$. De plus, par une récurrence immédiate, $f(a^n) = a^n$.

Si $a > 1$ alors $f(a^n) = a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredit la limite nulle de f en $+\infty$.

Si $a < 1$, montrons que $1/a$ est également point fixe, ce qui sera absurde d'après ce qui précède. Pour $x = 1/a$ et $y = a$ dans (1) nous obtenons $1 = f(1) = f(1/af(a)) = af(1/a)$, donc $f(1/a) = 1/a$.

L'unique point fixe possible est donc 1 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xf(x) = 1$, c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Réciproquement, cette fonction vérifie bien les conditions de l'énoncé.

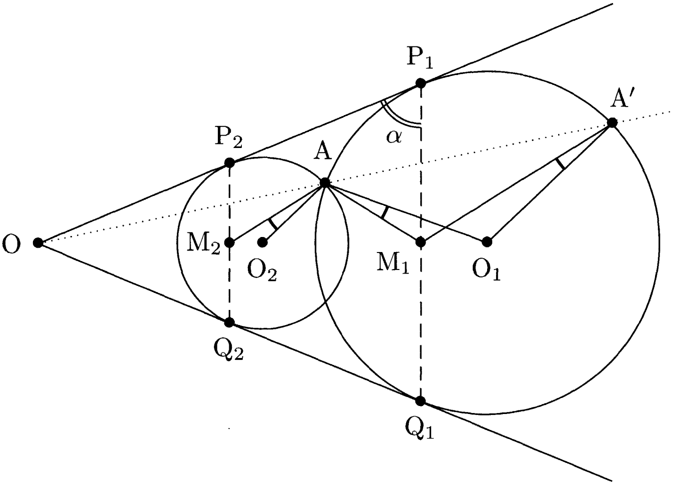
2. Géométrie : une égalité d'angles

Dans un plan, on se donne deux cercles sécants $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, de rayons inégaux et de centres respectifs O_1 et O_2. Soit A un de leurs points communs. Les points de contact des tangentes communes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont P_1 (sur $\mathcal{C}_1$) et P_2 (sur $\mathcal{C}_2$) sur l'une des tangentes, Q_1 (sur $\mathcal{C}_1$) et Q_2 (sur $\mathcal{C}_2$) sur l'autre. Soient M_1 et M_2 les milieux respectifs de $[P_1Q_1]$ et $[P_2Q_2]$.

Montrer que les angles $\widehat{O_1AO_2}$ et $\widehat{M_1AM_2}$ sont égaux.

Solution

Introduisons le point O, intersection de (P_1P_2) et (Q_1Q_2) et surtout le point A′, autre point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et (OA).



Pour démontrer le résultat voulu, il suffit de prouver que $\widehat{O_2AM_2} = \widehat{O_1AM_1}$.

En considérant l'homothétie de centre O transformant $\mathcal{C}_2$ en $\mathcal{C}_1$, on constate que $\widehat{O_2AM_2} = \widehat{O_1A'M_1}$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\widehat{O_1A'M_1} = \widehat{O_1AM_1}$, c'est-à-dire que O_1, M_1, A et A′ sont cocycliques.

Ceci se démontre rapidement en utilisant la puissance d'un point par rapport à un cercle (cf. exercice 1985 n°5) : si on note $\alpha = \widehat{OP_1M_1}$, alors

$$OA \cdot OA' = (OP_1)^2 = (OM_1/\sin\alpha)\cdot(OO_1\sin\alpha) = OM_1 \cdot OO_1,$$

donc O_1, M_1, A et A′ sont cocycliques. Ceci achève notre problème.

3. Structure de $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$

Soient a, b, c des entiers strictement positifs et premiers entre eux deux à deux. Démontrer que $2abc - ab - bc - ac$ est le plus grand entier qui ne peut pas s'écrire sous la forme

$$xbc + yca + zab$$

avec x, y, z entiers positifs ou nuls.

Solution

Commençons par regarder ce qui se passe si l'on n'a que deux nombres : montrons que, pour a et b strictement positifs et premiers entre eux, $ab - a - b$ est le plus grand nombre ne pouvant pas s'écrire sous la forme $xa + yb$ ($(x, y) \in \mathbb{N}^2$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n > ab - a - b$. On peut écrire $n \equiv xa\ [b]$, avec $0 \leqslant x \leqslant b - 1$, car $a \wedge b = 1$ (ceci est une conséquence du théorème de Bézout[1]). Il existe donc $y \in \mathbb{Z}$ avec $n = xa+yb$. Montrons que $y \geqslant 0$ pour avoir la décomposition voulue : $yb = n - xa > ab - a - b - (b-1)a = -b$, donc $(y+1)b > 0$, d'où $y + 1 > 0$ et $y \geqslant 0$.

Montrons par l'absurde que $ab - a - b$ ne s'écrit pas sous la forme voulue : si $ab - a - b = xa + yb$, alors $a \mid (y+1)$, donc $y \geqslant a - 1$. De même $x \geqslant b - 1$. Ainsi $xa + yb \geqslant (b-1)a + (a-1)b = 2ab - a - b > ab - a - b$, d'où la contradiction.

Passons désormais au problème qui nous intéresse, en calquant la démonstration précédente.

Soit $n > 2abc - bc - ac - ab$. Alors on peut trouver $x \in [\![0, a-1]\!]$ avec $n \equiv xbc\ [a]$: $n = xbc + y'a$ avec $y' \in \mathbb{Z}$. Or $y'a = n - xbc > 2abc - bc - ac - ab - (a-1)bc = (bc - b - c)a$, donc $y' > bc - b - c$. On peut donc écrire $y' = zb + yc$ ($(y, z) \in \mathbb{N}^2$) d'après ce qui précède. On a alors $n = xbc + yac + zab$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

Montrons enfin par l'absurde que $2abc - bc - ac - ab$ ne s'écrit pas sous la forme $xbc + yac + zab$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Si tel était le cas, on aurait $a \mid (x+1)bc$, donc $a \mid (x+1)$ (a est premier avec bc donc on peut appliquer le théorème de Gauss[2]), d'où $x \geqslant a - 1$. De même $y \geqslant b - 1$ et $z \geqslant c - 1$, si bien que $xbc + yac + zbc \geqslant 3abc - bc - ac - ab > 2abc - bc - ac - ab$,

1. Etienne Bézout (1730-1783), mathématicien français.
2. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand.

d'où la contradiction. On peut alors conclure.

Remarque. Généralisons les résultats précédents en montrant la propriété suivante par récurrence sur n : si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n entiers strictement positifs premiers entre eux deux à deux, alors

$$a_1 a_2 \dots a_n \left(n - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$$

est le plus grand entier qu'il est impossible d'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j \neq i} a_j$, où les x_i sont des entiers naturels. Nous avons déjà démontré cette propriété pour $n = 2$ et $n = 3$, supposons-la vraie au rang $n - 1$ et démontrons-la au rang n.

Soit $k > a_1 a_2 \dots a_n \left(n - 1 - \sum_{i=1}^{n} 1/a_i\right)$. Comme a_n est premier avec $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$, on peut écrire $k \equiv x_n \, a_1 a_2 \dots a_{n-1} \; [a_n]$ avec $0 \leqslant x_n \leqslant a_n - 1$. Soit $\mathrm{N} = (k - x_n \, a_1 a_2 \dots a_{n-1})/a_n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &> \frac{a_1 \dots a_n \left(n - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) - (a_n - 1) a_1 \dots a_{n-1}}{a_n} \\ &= a_1 \dots a_{n-1} \left(n - 2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, N s'écrit $\sum_{i=1}^{n-1} x_i \prod_{j \neq i} a_j$, avec les x_i entiers naturels et où seuls les indices de $[\![1, n-1]\!]$ sont ici considérés. Alors $k = \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j \neq i} a_j$, ce qui est le résultat souhaité.

Montrons désormais par l'absurde qu'il est impossible d'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n-1} x_i \prod_{j \neq i} a_j$ le nombre $k = a_1 a_2 \dots a_n \left(n - 1 - \sum_{i=1}^{n} 1/a_i\right)$: si $a_1 a_2 \dots a_n \left(n - 1 - \sum_{i=1}^{n} 1/a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j \neq i} a_j$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \mid (x_i + 1) \prod_{j \neq i} a_j$. Ainsi, d'après le théorème de Gauss, $a_i \mid (x_i + 1)$, donc $x_i \geqslant a_i - 1$. On obtient le résultat absurde suivant :

$$k \geqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i - 1) \prod_{j \neq i} a_j > a_1 a_2 \dots a_n \left(n - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) = k.$$

4. Combinatoire sur un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points des segments fermés [AB], [BC], [CA].

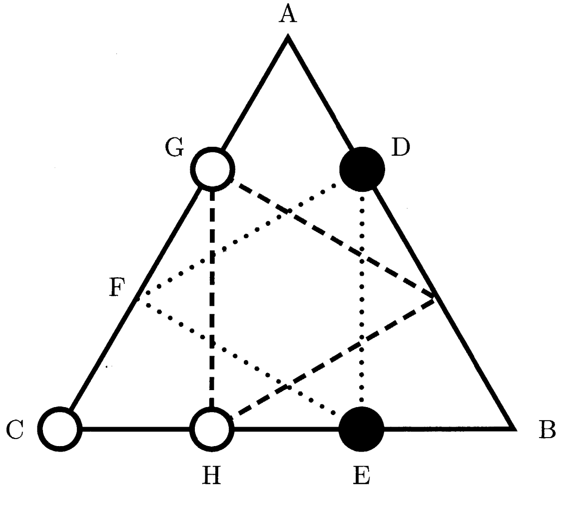
Est-ce que, pour toute partition de $\mathcal{E}$ en deux sous-ensembles disjoints, il existe au moins un triangle rectangle dont les trois sommets appartiennent au même sous-ensemble ?

Solution

Regardons attentivement la figure ci-dessous (obtenue en divisant chaque côté du triangle en trois longueurs égales) et supposons que les points du triangle sont coloriés en noir et en blanc de façon à n'avoir aucun triangle rectangle dont les trois sommets sont de la même couleur.

Dans le triangle DEF, d'après le principe des tiroirs, deux sommets sont de la même couleur. Supposons donc sans perte de généralité que D et E sont coloriés en noir.

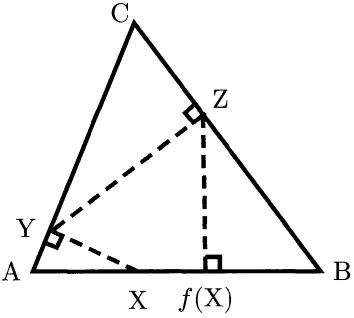
Comme DEH, DEC et DEG sont rectangles, H, C et G doivent être coloriés en blanc. Le triangle HCG, rectangle, est alors monochrome, ce qui est absurde.



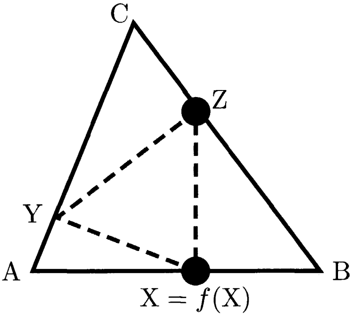
Pour toute partition en deux ensembles disjoints d'un triangle équilatéral, il existe donc un triangle rectangle ayant ses sommets dans le même ensemble.

Remarque. Notre résultat tombe en défaut pour tout triangle possédant un angle obtus (il suffit de colorier de la même couleur les deux côtés fermés adjacents à l'angle obtus et de l'autre le dernier côté, ouvert).

Il demeure en revanche vrai pour tout triangle ayant ses trois angles inférieurs strictement à 90°. En effet, pour X appartenant au côté [AB], on peut alors définir son projeté orthogonal sur (AC), Y, puis Z le projeté orthogonal de Y sur (BC) et enfin $f(\mathrm{X})$ le projeté orthogonal de Z sur (AB).



La fonction qui à X associe $f(\mathrm{X})$ est continue (car linéaire : composée de projections, donc d'applications linéaires). La fonction φ : $\mathrm{X} \mapsto \overline{\mathrm{X}f(\mathrm{X})}$ (mesure algébrique orientée selon $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$) est donc continue. Or $\varphi(\mathrm{A}) > 0$ et $\varphi(\mathrm{B}) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule : on a ainsi trouvé un point X tel que $\mathrm{X} = f(\mathrm{X})$.



D'après le principe des tiroirs, parmi X, Y et Z, deux sommets sont alors de la même couleur, disons X et Z en noir.

Si on suppose que l'on n'a aucun triangle rectangle dont les trois sommets sont de la même couleur, tous les éléments de [AB] autres que X doivent être coloriés en blanc. Ceci implique que tous les éléments de [AC] et [BC] autres que A et B doivent être coloriés en noir. Alors par exemple le triangle CYZ a ses trois sommets coloriés en noir, ce qui est contradictoire.

Le cas où le triangle est rectangle, en A par exemple, peut se traiter à part. Si on avait une coloration empêchant une telle partition, alors, si par exemple A est colorié en noir, nécessairement un des deux segments]AB] et]AC] est exclusivement colorié en blanc. L'hypoténuse]BC[est donc coloriée en noir, mais on peut alors former un triangle rectangle noir avec A, son projeté orthogonal sur]BC[et un autre point de]BC[.

5. Ensemble d'entiers naturels sans progression arithmétique

Peut-on trouver 1983 nombres entiers strictement positifs et distincts, inférieurs ou égaux à 10^5 et tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas les termes consécutifs d'une progression arithmétique ? Justifier votre réponse.

Solution

Le véritable danger de cet exercice est d'être tenté de démontrer le résultat opposé : la réponse est oui, il faut donc ici construire cet ensemble.

1^re^ méthode : construction récursive

Si on suppose construit un tel ensemble $\mathcal{A}$ à n éléments ($x_1 < \cdots < x_n$), alors on en a facilement $2n$ en unissant à $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathcal{B} = \mathcal{A} + 2x_n - 1 = \{x_1 + 2x_n - 1, \ldots, x_n + 2x_n - 1\}$. En effet, si on considère deux éléments a et b de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\frac{a+b}{2}$ ne peut pas être un élément de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$:

- si a et b appartiennent tous deux à $\mathcal{A}$, $\frac{a+b}{2}$ n'est pas dans $\mathcal{A}$ car ce dernier ensemble vérifie la propriété souhaitée et il n'est pas dans $\mathcal{B}$ car inférieur ou égal à x_n. De même s'ils sont tous deux dans $\mathcal{B}$.
- si l'un est dans $\mathcal{A}$ et l'autre dans $\mathcal{B}$, alors $\frac{a+b}{2}$ est compris entre $x_1 + x_n - 1/2$ et $2x_n - 1/2$, donc n'est pas dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Utilisons ce procédé récursivement. Si on note a_n le plus grand entier de l'ensemble obtenu après la n^{e} étape, on a $a_{n+1} = 3a_n - 1$. Ainsi $a_n = 3^{n-1}(a_1 - 1/2) + 1/2$ et on a alors construit $\mathrm{N}_n = 2^{n-1}\mathrm{N}_1$ éléments.

Partant de l'ensemble $\{1, 2, 4, 5\}$, on construit $\mathrm{N}_{10} = 2048$ éléments n'excédant pas $a_{10} = 88574$. La réponse est donc « oui ».

2^e^ méthode : écriture en base trois

Les éléments que nous avons précédemment construits sont, à une unité près, les entiers dont l'écriture en base trois ne comporte que des « 0 » et des « 1 ».

Vérifions directement que cet ensemble convient. Soient x, y et z des entiers naturels n'admettant pas de « 2 » dans leur écriture en base trois. Alors $2z$ ne s'écrit qu'avec des « 0 » et des « 2 », mais $x + y$ s'écrit sans « 1 » si et seulement si $x = y$: si $x \neq y$, on peut supposer l'existence d'un entier k tel que le k^{e} chiffre de x soit « 1 » et le k^{e} de y soit « 0 » ; alors le k^{e} de $x+y$ est 1. Ainsi $x+y \neq 2z$, ce qui est le résultat voulu.

On a $2^{11} = 2048$ tels entiers entre 1 et $\overline{11111111111} = 88573$, nous pouvons donc répondre par l'affirmative.

Remarque. Nous pouvons sans crainte poser cet exercice en réactualisant la date jusqu'en 2048. Cependant, si on note $a(n)$ le nombre maximum d'éléments de $[\![1,n]\!]$ tels que trois éléments distincts parmi eux ne soient pas en progression arithmétique, le problème plus général du calcul de $a(n)$ ne semble pas connaître de réponse élémentaire.

6. Une inégalité sur les côtés d'un triangle

Soient a, b, c les longueurs des trois côtés d'un triangle. Démontrer que

$$\boldsymbol{a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0.}$$

Solution

Nous présentons trois solutions de ce problème : les deux premières utilisent préalablement une transformation de Ravi (justifiée par le schéma en annexe), alors que la dernière est directe.

1re méthode

Effectuons une transformation de Ravi : nous pouvons poser

$$\begin{cases} a = x+y \\ b = y+z \\ c = x+z \end{cases}$$

avec x, y et z des réels positifs. L'inégalité cherchée est alors équivalente, après substitution, à

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Quitte à permuter x, y et z, on est nécessairement dans un des deux cas suivants :

- si $x \leqslant y \leqslant z$, alors $z^2(yz-xy) = z^2(yz-xz) + z^2(xz-xy) \geqslant x^2(yz-xz)+y^2(xz-xy)$, ce qui est l'inégalité voulue, avec égalité si et seulement si $x=y=z$, c'est-à-dire si le triangle est équilatéral;

- si $x \leqslant z \leqslant y$, alors $xyz^2 - x^3z = xy(z^2 - x^2) + x^2(xy - xz) \leqslant yz(z^2 - x^2) + y^2(xy - xz)$, ce qui est encore l'inégalité voulue, avec égalité dans le même cas.

2e méthode

De même que précédemment, il nous suffit de montrer $xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2$ pour tous les réels positifs x, y et z, c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z.$$

Cette dernière inégalité résulte directement de l'inégalité du réordonnement (cf. l'exercice 1978 n°5).

3e méthode

Nous procédons ici directement. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $a \geqslant b$ et $a \geqslant c$. Alors notre inégalité est évidente si nous l'écrivons sous la forme

$$a(b-c)^2(b+c-a) + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \geqslant 0,$$

où tous les termes sont positifs. De plus l'égalité n'intervient que si notre triangle est équilatéral.

Annexe : comment se débarrasser d'une condition sur les variables ?

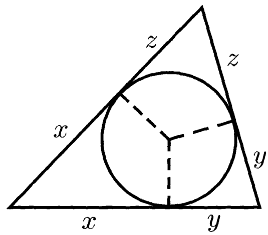
Les inégalités des Olympiades internationales comportent souvent des conditions sur leurs variables. Les principales sont les 4 suivantes :

- les variables sont les côtés d'un triangle ;
- le produit des variables est constant ;
- la somme des variables (ou la somme des variables affectées de certains coefficients) est constante ;
- un polynôme symétrique dépendant des variables est constant.

À chaque condition sa méthode, que nous exposons brièvement ci-après.

Transformation de Ravi. *Si a, b et c sont les côtés d'un triangle, alors il existe trois réels positifs x, y et z tels que*

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = y + z \\ c = x + z \end{cases}.$$



Produit des variables constant. *Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$. Alors il existe des réels strictement positifs $y_1, \dots, y_n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$*

$$x_i = \frac{y_i}{y_{i+1}},$$

où les indices sont pris modulo n.

Exemple : si $abc = 1$, nous écrirons avec profit $a = u/v$, $b = v/w$ et $c = w/u$, comme dans l'exercice 2000 n°2.

Somme des variables constante. *Si les x_i vérifient une relation du type $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \mu$, où les λ_i et μ sont des réels positifs, alors cette condition s'écrit aussi $\vec{x}.\vec{\lambda} = \mu$, ce qui permet d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz*[3] .

Exemple : trouver la valeur minimale de $x^2 + y^2 + z^2$ sachant que $ax + by + cz = 1$ (a, b, $c \in \mathbb{R}$ non tous nuls). L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire $|ax + by + cz| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, d'où la valeur minimale cherchée : $1/(a^2 + b^2 + c^2)$. Un exemple du même type apparaît dans l'exercice 1987 n°3.

Polynôme symétrique constant. *Donnons-nous n réels $x_1, \dots, x_n$ et posons $\mathrm{P(X)} = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$. Soient Q et R deux polynômes symétriques à n variables (c'est-à-dire, intuitivement, invariants par permutation de leurs variables). Alors Q et R peuvent s'exprimer en fonction des polynômes symétriques élémentaires (i.e. les $(-1)^{n-i} a_i$).*

3. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.
Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.

Il est donc conseillé de résoudre l'inégalité $\mathrm{Q}(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ *sous la condition* $\mathrm{R}(x_1, \dots, x_n) = 0$ *en exprimant* Q *et* R *en fonction des polynômes symétriques élémentaires, puis en raisonnant sur les* a_i *plutôt que sur les* x_i.

Nous ne donnons pas de démonstration du résultat précédent, largement hors-programme (le lecteur intéressé pourra consulter le livre d'Éric Leichtnam[4]). Pour bien comprendre ce dont il s'agit, le lecteur est incité à regarder l'exercice 1984 n°1.

4. Éric Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours d'entrée des ENS et de l'École polytechnique, Tome Algèbre et Géométrie*, chapitre 2, exercice 14, Ellipses, 1999.

Prague (République Tchèque)

1984

1. Une inégalité entre polynômes symétriques

Soient x, y et z des réels positifs ou nuls vérifiant $x + y + z = 1$. Prouver les inégalités

$$\mathbf{0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}}.$$

Solution

L'inégalité de gauche ne pose pas trop de soucis. En effet

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geqslant 0,$$

car x, y, z, $1 - z$ et $1 - x$ sont positifs. Passons donc à l'inégalité de droite. Les éléments de notre inégalité sont des polynômes symétriques élémentaires, ce qui donne envie d'introduire le polynôme

$$\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X} - x)(\mathrm{X} - y)(\mathrm{X} - z) = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + (xy + yz + zx)\mathrm{X} - xyz.$$

L'inégalité que l'on cherche à démontrer s'écrit alors $2[\mathrm{P}(1/2)+1/8] \leqslant 7/27$, c'est-à-dire $\mathrm{P}(1/2) \leqslant (1/6)^3$. Or cette dernière relation est vérifiée par l'inégalité de la moyenne (présentée ci-après) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \\
&\leqslant \left(\frac{1 - 2x + 1 - 2y + 1 - 2z}{6}\right)^3 \\
\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right) &\leqslant \left(\frac{1}{6}\right)^3.
\end{aligned}$$

Inégalité de la moyenne. *Soient $x_1, x_2, \ldots$ et x_n des nombres réels positifs. Alors leur moyenne géométrique est inférieure à leur moyenne arithmétique, c'est-à-dire*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

avec égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

DÉMONSTRATION. Si un des x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est nul, le résultat est évident. Sinon, nous pouvons poser, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \log x_i$. Alors notre inégalité s'écrit aussi $e^{\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n e^{y_i}}{n}$, ce qui est une conséquence de la convexité de la fonction exponentielle. □

2. Trouver une solution explicite d'un problème arithmétique

Trouver un couple (a, b) d'entiers strictement positifs vérifiant les conditions :

(1) le produit $ab(a+b)$ n'est pas divisible par 7 ;

(2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ est divisible par 7^7.

Solution

Essayons de factoriser l'expression $(a+b)^7 - a^7 - b^7$. Regardons donc les racines du polynôme $\mathrm{P}(x) = (x+1)^7 - x^7 - 1$. Outre les racines évidentes 0 et -1, on peut « remarquer » (mais ceci n'est pas évident) que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est aussi racine : $(1+j)^7 = (-j^2)^7 = -j^2 = 1 + j = 1 + j^7$. Notre polynôme est donc factorisable par $x(x+1)(x^2+x+1)$. Ceci permet après calcul de le factoriser complètement sous la forme $(x+1)^7 - x^7 - 1 = 7x(x+1)(x^2+x+1)^2$. Nous en déduisons

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

Les conditions (1) et (2) de notre énoncé nous imposent donc d'avoir $7^3 \mid a^2 + ab + b^2$. Il nous faut ainsi résoudre

$$a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \ [7^3].$$

Cherchons la solution la plus simple possible, en résolvant $a^2 + a + 1 = 7^3$. On trouve miraculeusement une solution entière positive, $a = 18$. Le couple $(a,b) = (18,1)$ est donc solution de notre problème (7 ne divise ni 18, ni 1, ni 18+1).

Remarque. L'équation que nous avons ici à résoudre s'écrit aussi (écriture licite car 2, premier avec 7^3, est inversible dans $\mathbb{Z}/7^3\mathbb{Z}$)

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 \equiv -3\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad [7^3].$$

Cette équation a clairement une solution si et seulement si -3 est un carré dans $\mathbb{Z}/7^3\mathbb{Z}$. Or c'est le cas puisqu'on avait une solution pour $b=1$ (on a en fait $-3 \equiv 37^2\ [7^3]$). Ainsi pour tout b notre équation admet une solution entière a.

3. Une courbe polaire sur une partition du plan...

On fait une partition de l'ensemble des points du plan orienté en un nombre fini de parties représentées par autant de couleurs. On fixe deux points distincts O et A de ce plan. À tout point X du plan, distinct de O on fait correspondre :

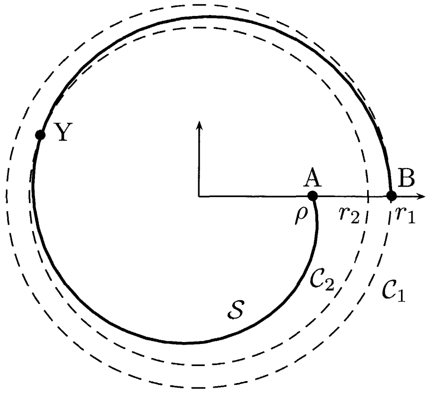
- **la mesure en radians $\alpha(\mathrm{X})$ de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OX}})$ prise dans $[0, 2\pi[$;**
- **le cercle $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ de centre O dont le rayon a pour mesure $\mathrm{OX} + \alpha(\mathrm{X})/\mathrm{OX}$.**

Démontrer qu'il existe un point Y du plan, avec $\alpha(\mathrm{Y}) > 0$, tel qu'il existe un point de $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$ de la même couleur que Y.

Solution

Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon r_1. Le lieu des points $\mathrm{X} = re^{i\theta}$ tels que $\mathcal{C}(\mathrm{X}) = \mathcal{C}_1$ est une spirale $\mathcal{S}$ (d'équation polaire $r + \theta/r = r_1$), commençant en $\mathrm{A} = \rho$ et aboutissant en $\mathrm{B} = r_1$.

Si nous trouvons comme sur le schéma un cercle



$\mathcal{C}_2$ possédant exactement les mêmes couleurs que $\mathcal{C}_1$ de rayon $r_2 \in]\rho, r_1[$, alors nous aurons terminé : $\mathrm{Y} = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}_2$ aura la couleur d'un point de $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\mathrm{Y})$.

Montrons que l'on peut en effet choisir $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de façon à satisfaire la condition $r_2 \in]\rho, r_1[$ $(*)$. Soient $a > 0$ et $\varepsilon > 0$. Le nombre de couleurs étant fini, on peut trouver deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de rayons respectifs r_1 et r_2 $(r_2 < r_1)$ dans $[a, a+\varepsilon]$ possédant exactement les mêmes couleurs. Pour a assez grand, la spirale est bien définie $(a \geqslant \sqrt{2\pi})$ et pour ε assez petit, on est alors assuré d'avoir la relation $(*)$ (ε doit juste vérifier la relation $a + 2\pi/(a+\varepsilon) > a + \varepsilon$).

4. Géométrie

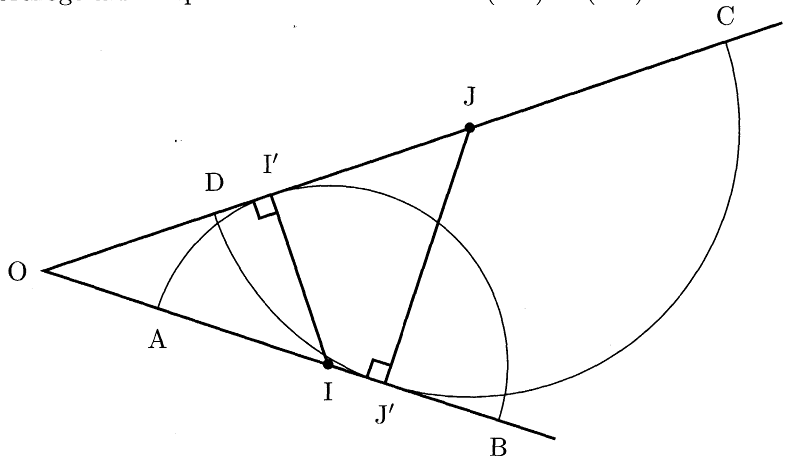
Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que la droite (CD) soit tangente au cercle de diamètre [AB].

Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle de diamètre [CD] si et seulement si les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Solution

Si (AB) // (CD), alors le cercle de diamètre [CD] est tangent à (AB) si et seulement si AB = CD $\Leftrightarrow$ ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow$ (BC) // (AD).

Si (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, notons O leur intersection, I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD], puis I′ et J′ les projetés orthogonaux respectivement de I et J sur (CD) et (AB).



Les triangles OII′ et OJJ′ sont semblables, donc II′/OI = JJ′/OJ, si bien que OA/OB = (OI − II′)/(OI + II′) = (OJ − JJ′)/(OJ + JJ′). Ainsi

$$(\mathrm{AD}) \mathbin{/\!\!/} (\mathrm{BC}) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{OJ}-\mathrm{JJ}'}{\mathrm{OJ}+\mathrm{JJ}'} = \frac{\mathrm{OJ}-\mathrm{JC}}{\mathrm{OJ}+\mathrm{JC}} \Leftrightarrow \mathrm{JJ}' = \mathrm{JC}.$$

Cette dernière égalité signifie aussi que le cercle de diamètre [CD] est tangent à (AB), d'où notre résultat.

5. Longueur moyenne des diagonales dans un polygone convexe

Dans le plan on se donne un polygone convexe à n côtés avec $n \geqslant 4$. On désigne par :

- **p la somme des longueurs de tous ses côtés;**
- **d la somme des longueurs de toutes ses diagonales.**

Prouver les inégalités

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Solution

Notons $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n$ notre polygone. On adoptera pour les sommets des indices modulo n dans ce qui suit.

1re inégalité

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des « croix élémentaires » de notre polygone, c'est-à-dire l'ensemble des croix du type $\mathrm{C}_{ij} = \{[\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j], [\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{j+1}]\}$ où i, $i+1$, j et $j+1$ sont distincts et les indices considérés modulo n. Remarquons qu'un segment $[\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j]$ appartient à 2 croix élémentaires : C_{ij} et $\mathrm{C}_{i-1\,j-1}$. De plus il existe $n-3$ croix élémentaires contenant les points i et $i+1$ (il suffit de choisir j distinct de $i-1$, i et $i+1$).

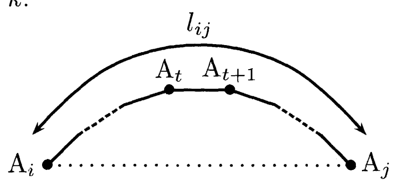
Si, pour une croix C_{ij}, nous notons $\mathrm{P} = [\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j] \cap [\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{j+1}]$ (P existe car notre polygone est convexe), alors $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j + \mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{j+1} = (\mathrm{A}_i\mathrm{P} + \mathrm{PA}_{i+1}) + (\mathrm{A}_j\mathrm{P} + \mathrm{PA}_{j+1}) > \mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1} + \mathrm{A}_j\mathrm{A}_{j+1}$ par l'inégalité triangulaire (inégalité stricte car trois sommets du polygone convexe ne peuvent être alignés).

En sommant la longueur de toutes nos croix élémentaires nous obtenons le résultat voulu :

$$
\begin{aligned}
2d &= \sum_{C_{ij}\in\mathcal{E}} (A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1}) \\
&> \sum_{C_{ij}\in\mathcal{E}} (A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1}) \\
&= (n-3)\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \\
2d &> (n-3)p.
\end{aligned}
$$

2e inégalité

Étudions tout d'abord le cas où n est impair : $n = 2k+1$. Il s'agit désormais de majorer la longueur d'une diagonale A_iA_j par la longueur des côtés ; nous pouvons la majorer par la longueur de l_{ij} côtés consécutifs avec $l_{ij} \leqslant k$.



Nous appelons alors « arc » de la diagonale $[A_iA_j]$ (noté $\mathcal{A}_{ij}$) l'ensemble des l_{ij} côtés consécutifs reliant A_i à A_j.

Dénombrons pour tout t les couples (i,j) tels que $A_tA_{t+1} \in \mathcal{A}_{ij}$:

- si $i = t-k+1$ alors $j = t+1$;
- si $i = t-k+2$, $j = t+1$ ou $t+2$;
- ...
- si $i = t-1$, $j = t+1, t+2, \dots$ ou $t+k-1$;
- si $i = t$, $j = t+2, t+3, \dots$ ou $t+k$.

Ainsi, en considérant symétriquement les cas où $i > t$, on voit que le côté $[A_tA_{t+1}]$ appartient à $2(1+2+\cdots+(k-1)+(k-1)) = k(k+1)-2$ arcs. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
2d &= \sum_{l_{ij}\geqslant 2} \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j \\
&< \sum_{l_{ij}\geqslant 2} \sum_{\mathrm{A}_t\mathrm{A}_{t+1}\in\mathcal{A}_{ij}} \mathrm{A}_t\mathrm{A}_{t+1} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \mathrm{A}_t\mathrm{A}_{t+1} \sum_{\mathcal{A}_{ij}\,|\,\mathrm{A}_t\mathrm{A}_{t+1}\in\mathcal{A}_{ij}} 1 \\
2d &< p\,(k(k+1)-2).
\end{aligned}$$

Dans le cas où n est pair ($n = 2k$), distinguons deux classes de diagonales : les « grandes », de la forme $[\mathrm{A}_t\mathrm{A}_{t+k}]$ et les autres. On majore la longueur des grandes par $p/2$ et celles des autres de même que dans le cas précédent. Alors

$$2d = \sum_{l_{ij}=k} \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j + \sum_{2\leqslant l_{ij}\leqslant k-1} \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j < pk + p[(k-1)k-2] = p(k^2-2).$$

Dans tous les cas, nous avons donc démontré la double inégalité,

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2.$$

1^re^ remarque. La difficulté de l'exercice n'est pas fondamentale (nous n'avons utilisé que des inégalités triangulaires), mais plutôt technique. Il faut ici effectuer les dénombrements avec rigueur, sans confondre les notions de doublets et de paires.

2^e^ remarque. Nous avons exactement $\mathrm{C}_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans notre polygone, si bien que la première inégalité, qui s'écrit aussi $\frac{p}{n} < \frac{d}{n(n-3)/2}$, s'interprète comme suit : « dans un polygone convexe, la longueur moyenne des diagonales est strictement supérieure à celle des côtés » , résultat apparemment évident, mais finalement assez technique à démontrer.

6. Arithmétique

Soient a, b, c, d des entiers positifs impairs vérifiant les conditions :

- $a < b < c < d$;
- $ad = bc$;
- $a + d = 2^k$ **et** $b + c = 2^m$, k **et** m **étant entiers.**

Prouver que $a = 1$.

Solution

Notons $\mathrm{N} = ad = bc$. Comme la fonction $x \mapsto x + \mathrm{N}/x$ est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{\mathrm{N}}]$, nous avons $a + \mathrm{N}/a > b + \mathrm{N}/b$, donc $2^k > 2^m$, c'est-à-dire $k > m$.

Nous pouvons de plus écrire

$$ad = bc \Leftrightarrow a(2^k - a) = b(2^m - b) \Leftrightarrow (b+a)(b-a) = 2^m(b - 2^{k-m}a). \quad (1)$$

Comme $k > m$, $b - 2^{k-m}a$ est impair, nous pouvons donc déduire de (1) que $b+a = 2^{m_1}i_1$ et $b-a = 2^{m_2}i_2$ avec $m_1+m_2 = m$ et i_1, i_2 impairs. Ainsi $b = 2^{m_1-1}i_1 + 2^{m_2-1}i_2$. Comme b est impair, nécessairement $m_1 = 1$ ou $m_2 = 1$:

- si $m_1 = 1$, $m_2 = m - 1$ donc $b - a = 2^{m-1}i_2$, donc $b > 2^{m-1}$ et $b + c > 2^m$: contradiction ;
- si $m_2 = 1$, $m_1 = m - 1$ d'où $b + a = 2^{m-1}i_1$. Si $i_1 \geqslant 2$, alors $b > 2^{m-1}$ et on a encore $b + c > 2^m$: contradiction. Donc $i_1 = 1$.

Nous avons donc $b+a = 2^{m-1}$, si bien que (1) s'écrit désormais après substitution,

$$2^k a = 2^{2m-2}.$$

Comme a est impair, nous avons ainsi bien $a = 1$.

Joutsa (Finlande)

1985

1. Une condition de cocyclicité

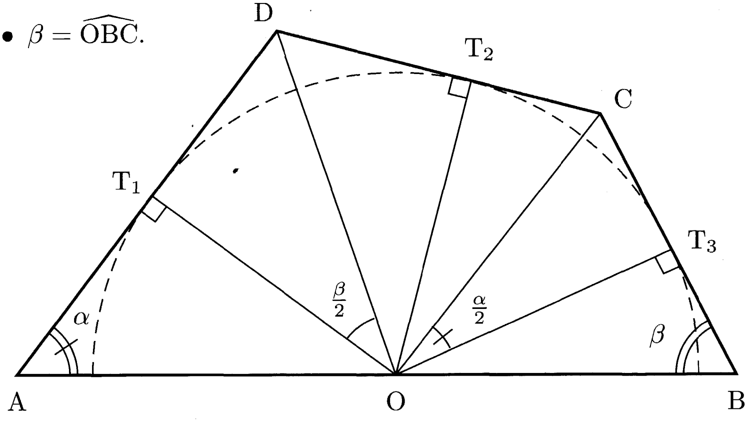
Un cercle, dont le centre est situé sur le côté [AB] d'un quadrilatère convexe ABCD, est tangent aux trois autres côtés.
Prouver que si A, B, C et D sont cocycliques on a

$$\mathbf{AD + BC = AB.}$$

Solution

Notons :

- $\mathcal{C}$ le cercle de l'énoncé, de rayon r ;
- T_1, T_2 et T_3 les points de contact de $\mathcal{C}$ avec [AD], [CD] et [BC] respectivement ;
- O le centre de $\mathcal{C}$;
- $\alpha = \widehat{OAD}$;
- $\beta = \widehat{OBC}$.



Si A, B, C et D sont cocycliques alors $\widehat{T_2OT_3} = \pi - \widehat{T_2CT_3} = \widehat{BAD} = \alpha$, d'où $\widehat{COT_3} = \alpha/2$. De même nous avons $\widehat{DOT_1} = \beta/2$. Ainsi nous pouvons calculer directement, en utilisant la formule de trigonométrie $(1/\tan\theta) + \tan(\theta/2) = 1/\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{AD} + \mathrm{BC} &= \mathrm{AOT_1} + \mathrm{T_1D} + \mathrm{BT_3} + \mathrm{T_3C} \\
&= \frac{r}{\tan\alpha} + r\tan\frac{\beta}{2} + \frac{r}{\tan\beta} + r\tan\frac{\alpha}{2} \\
&= r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\tan\alpha}\right) + r\left(\tan\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\tan\beta}\right) \\
&= \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r}{\sin\beta} \\
&= \mathrm{AO} + \mathrm{BO} \\
\mathrm{AD} + \mathrm{BC} &= \mathrm{AB}.
\end{aligned}$$

2. Arithmétique

Soit n un entier naturel, k un entier premier avec n ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) et $\mathcal{M}$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Chaque élément de $\mathcal{M}$ est coloré en blanc ou en bleu. On suppose que :

- **pour tout i de $\mathcal{M}$, i et $n-i$ ont la même couleur ;**
- **pour tout i de $\mathcal{M}$, $i \neq k$, i et $|i-k|$ ont la même couleur.**

Montrer que tous les éléments de $\mathcal{M}$ ont la même couleur.

Solution

Comme le lecteur peut légitimement s'y attendre, nous allons raisonner dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous appelons couleur d'un entier m, $m \in \mathbb{Z}$, la couleur de l'entier de $[\![1, n-1]\!]$ ayant la même classe que m dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Montrons que quel que soit l'entier i, si i et $i+k$ ne sont pas des multiples de n, i et $i+k$ ont la même couleur. Comme i a la même couleur que $i+n$, nous pouvons supposer que $i \in [\![1, n-1]\!]$. Distinguons alors deux cas :

- si $i + k \leqslant n-1$, alors $|(i+k)-k|$ et $i+k$ ont la même couleur, ce qui est le résultat voulu ;

- sinon, on a $1 \leqslant i+k-n \leqslant n-1$, donc $i+k-n$ a la même couleur que $|(i+k-n)-k| = n-i$, qui a lui aussi la même couleur que i d'après l'énoncé, d'où le résultat.

Soient i et j des éléments distincts de $[\![1, n-1]\!]$. Comme k et n sont premiers entre eux, nous pouvons écrire (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) : $i \equiv p_i k$ et $j \equiv p_j k$ avec $(p_i, p_j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ et $p_i < p_j < n$ si on veut (quitte à intervertir i et j).

Alors $p_i k$ a la même couleur que $(p_i+1)k$ et de même pour $(p_i+1)k$ et $(p_i+2)k, \ldots$ et enfin $(p_j-1)k$ et $p_j k$ (ces $p_l k$ ne sont jamais multiples de n ici car k et n sont premiers entre eux et $p_l < n$).

Nous avons donc obtenu : le résultat voulu : i et j ont la même couleur.

Remarque. Notre résultat demeure valable pour plus de 2 couleurs dans l'énoncé (le nombre de couleurs n'intervient pas dans la démonstration).

3. Nombre de coefficients impairs d'un polynôme

Si $\mathbf{P} = a_0 + a_1\mathbf{X} + a_2\mathbf{X}^2 + \cdots + a_k\mathbf{X}^k$ est un polynôme à coefficients entiers, on note $w(\mathbf{P})$ la nombre de coefficients a_j qui sont impairs. Pour tout i entier positif ou nul, on note $\mathbf{Q}_i = (1+x)^i$.

Montrer que pour toute famille finie d'entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tels que $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ on a

$$w(\mathbf{Q}_{i_1} + \mathbf{Q}_{i_2} + \cdots + \mathbf{Q}_{i_n}) \geqslant w(\mathbf{Q}_{i_1}).$$

Solution

Commençons par trois petites remarques qui nous seront bien utiles dans la suite :

- on a l'inégalité triangulaire : $w(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant w(\mathrm{P}) + w(\mathrm{Q})$;
- si $n > \deg(\mathrm{P})$, alors $w(\mathrm{P} + x^n\mathrm{Q}) = w(\mathrm{P}) + w(\mathrm{Q})$;
- $(1+x)^{2^k} = 1 + x^{2^k}$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\mathrm{X}]$. Ceci est démontré en annexe.

Nous pouvons maintenant résoudre l'exercice par récurrence sur i_n. Laissons de côté le cas $i_n = 0$, qui est immédiat.

Supposons le résultat vrai pour tout $i_n < \mathrm{N}$ ($\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$) et montrons-le dans le cas $i_n = \mathrm{N}$. On se donne k tel que $2^k \leqslant \mathrm{N} < 2^{k+1}$. Distinguons dans notre récurrence les deux cas suivants :

- si $i_1 \geqslant 2^k$, posons alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $i_j = 2^k + i'_j$. Alors

$$\begin{aligned} w(\mathrm{Q}_{i_1}) &= w\left((1+x)^{2^k}\mathrm{Q}_{i'_1}\right) \\ &= w\left((1+x^{2^k})\mathrm{Q}_{i'_1}\right) \\ &= w\left(\mathrm{Q}_{i'_1}\right) + w\left(\mathrm{Q}_{i'_1}\right) \\ w(\mathrm{Q}_{i_1}) &= 2w\left(\mathrm{Q}_{i'_1}\right) \end{aligned}$$

  et de même $w(\mathrm{Q}_{i_1} + \mathrm{Q}_{i_2} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_n}) = 2w(\mathrm{Q}_{i'_1} + \mathrm{Q}_{i'_2} + \cdots + \mathrm{Q}_{i'_n})$. Or, par hypothèse de récurrence, $w(\mathrm{Q}_{i'_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i'_n}) \geqslant w(\mathrm{Q}_{i'_1})$, donc $w(\mathrm{Q}_{i_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_n}) \geqslant w(\mathrm{Q}_{i_1})$.

- si $i_1 < 2^k$, alors on choisit r tel que $i_r < 2^k \leqslant i_{r+1}$. Alors on a avec les mêmes notations que précédemment, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour la dernière inégalité,

$$\begin{aligned} w(\mathrm{Q}_{i_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_n}) &= w\Big(\mathrm{Q}_{i_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_r} \\ &\qquad + (1+x^{2^k})(\mathrm{Q}_{i'_{r+1}} + \cdots + \mathrm{Q}_{i'_n})\Big) \\ &= w(\mathrm{Q}_{i_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_r} + \mathrm{Q}_{i'_{r+1}} + \cdots + \mathrm{Q}_{i'_n}) \\ &\qquad + w(\mathrm{Q}_{i'_{r+1}} + \cdots + \mathrm{Q}_{i'_n}) \\ &= w(\mathrm{Q}_{i_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_r} + \mathrm{Q}_{i'_{r+1}} + \cdots + \mathrm{Q}_{i'_n}) \\ &\qquad + w(-\mathrm{Q}_{i'_{r+1}} - \cdots - \mathrm{Q}_{i'_n}) \\ &\geqslant w(\mathrm{Q}_{i_1} + \cdots + \mathrm{Q}_{i_r}) \\ &\geqslant w(\mathrm{Q}_{i_1}). \end{aligned}$$

Annexe : formule de Legendre et valuation des binômes

La formule ci-après est utile dans de nombreux problèmes. En l'utilisant, le lecteur pourra par exemple démontrer de manière arithmétique que $\mathrm{C}_n^k = n!/[k!(n-k)!]$ est un entier.

Formule de Legendre[1]. *Soit p un nombre premier. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$v_p(n!) = \sum_{s \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor,$$

où $v_p(m)$ désigne l'exposant de p premier dans la décomposition de m en facteurs premiers.

DÉMONSTRATION. Soit $s \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $[\![1, n]\!]$ contient $\lfloor n/p^s \rfloor$ éléments multiples de p^s et $\lfloor n/p^{s+1} \rfloor$ éléments multiples de p^{s+1}. Ainsi nous avons dans $[\![1, n]\!]$ exactement $\lfloor n/p^s \rfloor - \lfloor n/p^{s+1} \rfloor$ éléments i tels que $v_p(i) = s$. Ainsi

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i) = \sum_{s=1}^{\infty} s \left(\left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{s+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor,$$

ce qui est exactement le résultat que nous attendions. □

Montrons, grâce à la formule de Legendre, que pour n puissance de deux on a $(x+1)^n = x^n + 1$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\mathrm{X}]$. Par développement par le binôme de Newton[2], il suffit de constater que C_n^k est pair pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. En utilisant l'inégalité $\lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ on a, pour $n = 2^p$,

$$\begin{aligned} v_2(\mathrm{C}_n^k) &= v_2(n!) - (v_2(k!) + v_2((n-k)!)) \\ &= \sum_{s \geqslant 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^s} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{k}{2^s} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{2^s} \right\rfloor \right) \right) \\ &\geqslant \left\lfloor \frac{n}{2^p} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{k}{2^p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{2^p} \right\rfloor \right) \\ v_2(\mathrm{C}_n^k) &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{C}_{2^p}^k$ est bien pair pour k distinct de 0 et n.

Avec la formule de Legendre, le lecteur pourra même vérifier le résultat suivant, qui généralise le précédent : si on écrit l'une au dessus de l'autre les écritures binaires de a et b, la valuation de 2 dans C_{a+b}^b est aussi le nombre de fois où deux « 1 » apparaissent sur la même colonne.

1. ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833), mathématicien français.
2. SIR ISAAC NEWTON (1643-1727), mathématicien et physicien anglais.

4. Théorie additive des nombres

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de 1985 entiers distincts strictement positifs, ayant tous leurs diviseurs premiers inférieurs ou égaux à 26.

Montrer que l'on peut trouver 4 éléments distincts de $\mathcal{M}$ dont le produit est la puissance quatrième d'un entier.

Solution

Tout élément de $\mathcal{M}$ s'écrit sous la forme $2^{n_1}3^{n_2}5^{n_3}\dots 23^{n_9}$ de façon unique. Si on fait correspondre à cette écriture le vecteur $(n_1, \dots, n_9)$, l'énoncé demande alors de démontrer que l'on peut trouver 4 tels vecteurs dont la somme est dans $(4\mathbb{Z})^9$.

Montrons un énoncé plus général : déterminons une fonction f telle que, étant donnés $f(n)$ vecteurs de $\mathbb{Z}^n$, nous puissions en trouver 4 dont la somme est dans $(4\mathbb{Z})^n$.

Regardons d'abord le même problème dans $(2\mathbb{Z})^n$: étant donnés 2^n+1 vecteurs de $\mathbb{Z}^n$, nous pouvons en trouver 2 dont la somme est dans $(2\mathbb{Z})^n$. En effet, modulo 2, il n'existe que 2^n vecteurs, donc ici d'après le principe des tiroirs deux des 2^n+1 vecteurs sont égaux et leur somme est alors bien dans $(2\mathbb{Z})^n$.

Il nous suffit donc désormais de pouvoir former un ensemble de 2^n+1 éléments $\{s_1, \dots, s_{2^n+1}\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- chaque s_k est la somme de deux éléments de $\mathcal{M}$, a_k et b_k ;
- $s_k \in (2\mathbb{Z})^n$;
- tous les a_k et les b_k sont deux à deux distincts $(1 \leqslant k \leqslant 2^n+1)$.

En effet, si ces propriétés sont vérifiées, parmi les 2^n+1 éléments $s_k/2$, nous pouvons en trouver deux ($s_i/2$ et $s_j/2$) dont la somme est dans $(2\mathbb{Z})^n$; alors $a_i + b_i + a_j + b_j = 2(s_i/2 + s_j/2) \in (4\mathbb{Z})^n$.

Il suffit pour vérifier les propriétés précédentes d'avoir au départ $(2^n+1) + 2 \times 2^n = 3 \times 2^n + 1 = f(n)$ vecteurs : 2^n+1 dont on extrait une paire $\{a_1, b_1\}$ telle que $a_1 + b_1 \in (2\mathbb{Z})^n$, puis on rajoute 2 vecteurs et on peut ainsi extraire une nouvelle paire $\{a_2, b_2\}$ et ceci 2^n fois pour avoir 2^n+1 telles paires.

Pour $n = 9$, on a $f(n) = 1537 < 1985$, d'où le résultat : nous pouvons trouver 4 éléments distincts de $\mathcal{M}$ dont le produit est la puissance quatrième d'un entier.

Remarque. Cet exercice est énoncé de manière étrange : pourquoi les diviseurs premiers des éléments de $\mathcal{M}$ seraient-ils inférieurs ou égaux à 26 et non pas 23 ? Ceci est-il un « piège » destiné à embrouiller les candidats ?

Annexe : le théorèmes EGZ et le théorème de Reiher

Ce type de problème, dit de « théorie additive des nombre », est souvent très complexe et ne connaît généralement pas de solution exacte. Ainsi, si nous essayons de généraliser notre exercice, nous pouvons nous poser la question suivante : pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la fonction minimale $f_k : n \in \mathbb{N}^* \mapsto f_k(n)$ telle que de $f_k(n)$ éléments de $\mathbb{Z}^k$ on puisse toujours extraire n éléments dont la somme appartienne à $(n\mathbb{Z})^k$?

On ne connaît aujourd'hui les fonctions f_k que pour $k = 1$ ou 2, comme le montrent les théorèmes suivants. Au delà, comme c'est le cas dans notre exercice, il n'existe que des encadrements de f_k.

Théorème EGZ[3] (Erdös-Ginzburg-Ziv). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De tout ensemble de $2n-1$ entiers on peut extraire n entiers dont la somme est divisible par n.*

DÉMONSTRATION. Le lecteur remarquera d'abord que si le théorème est vrai pour m et pour n, alors il est aussi vrai pour mn. Ainsi il nous suffit de le démontrer pour $n = p$, nombre premier.

Notons nos $2p-1$ entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{2p-1}$. Pour $\mathcal{J} \subset [\![1, 2p-1]\!]$, notons $\mathrm{S}_{\mathcal{J}} = \sum_{i \in \mathcal{J}} x_i$. L'idée est alors de calculer de deux manières différentes la quantité $\Sigma = \sum_{\mathcal{J} \subset [\![1,2p-1]\!],\, |\mathcal{J}|=p} \mathrm{S}_{\mathcal{J}}^{p-1}$.

Remarquons tout d'abord que $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}^{p-1}$ est la somme de divers monômes de degré $p-1$ faisant intervenir k facteurs $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$, que l'on peut écrire sous la forme $\lambda x_{i_1}^{a_{i_1}} \ldots x_{i_k}^{a_{i_k}}$. Ce type de monôme se retrouve, avec le même coefficient, dans le développement de $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ pour $\mathrm{C}_{2p-1-k}^{p-k}$ ensembles $\mathcal{J}$ distincts : il suffit d'avoir pour $\mathcal{J}$ un ensemble contenant $i_1, \ldots, i_k$, puis de choisir les $p-k$ indices restants dans les $2p-1-k$ indices disponibles. Ainsi, après le développement complet de Σ, le coefficient de tout monôme est un multiple de $\mathrm{C}_{2p-1-k}^{p-k}$, donc divisible par p. L'entier Σ est donc nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Si aucun $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ n'était divisible par p, on aurait, pour tout $\mathcal{J}$, $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}^{p-1} \equiv$

3. P. ERDÖS, A. GINZBURG AND A. ZIV, *Theorem in the additive number theory*, Bull. Res. Council Israel, Sect. F, Math. Phys. 10 (1961-1962), 41-43.

$1\ [p]$, donc $\Sigma \equiv C_{2p-1}^{p} \not\equiv 0\ [p]$. Ceci constitue une contradiction avec le résultat du paragraphe précédent, donc il existe bien un $\mathcal{J}$ avec $S_{\mathcal{J}} \equiv 0\ [p]$. $\square$

Remarquons que la quantité $2n-1$ est ici incompressible, comme le montre l'ensemble constitué de $n-1$ « 0 » et de $n-1$ « 1 ». Ainsi $f_1(n) = 2n-1$.

Le théorème suivant affirme quant à lui que $f_2(n) = 4n-3$, résultat conjecturé par Kemnitz[4] en 1983 et démontré par Christian Reiher[5] en 2003. À titre indicatif, Christian Reiher a obtenu 4 médailles d'or aux Olympiades internationales de mathématiques entre 2000 et 2003.

Conjecture de Kemnitz-Théorème de Reiher. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De tout ensemble de $4n-3$ éléments de $\mathbb{Z}^2$ on peut extraire n éléments dont la somme appartient à $(n\mathbb{Z})^2$.*

Le nombre $4n-3$ est incompressible, comme le montre l'ensemble à $4n-4$ éléments constitué de $n-1$ « (0,0) », $n-1$ « (0,1) », $n-1$ « (1,0) » et $n-1$ « (1,1) » : le lecteur démontrera qu'on ne peut pas en extraire n éléments distincts dont la somme est dans $(n\mathbb{Z})^2$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de Christian Reiher, trop longue, mais qui ne fait appel qu'à des connaissances combinatoires simples : cette conjecture a survécu 20 ans alors qu'il en existait une démonstration « élémentaire ».

Les autres valeurs de $f_k(n)$ $(k \geqslant 3)$ ne sont pas encore connues. Les lecteurs intéressés par ce sujet passionnant qu'est la théorie additive des nombres pourront consulter l'excellent livre de Melvyn B. Nathanson[6].

5. Autour du quadrilatère complet

Soit ABC un triangle. Un cercle de centre O passe par les points A et C et recoupe les segments [AB] et [BC] en deux points distincts K et N. On suppose que les cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN se coupent en exactement deux points distincts B et M. Montrer que l'angle $\widehat{\mathrm{OMB}}$ est droit.

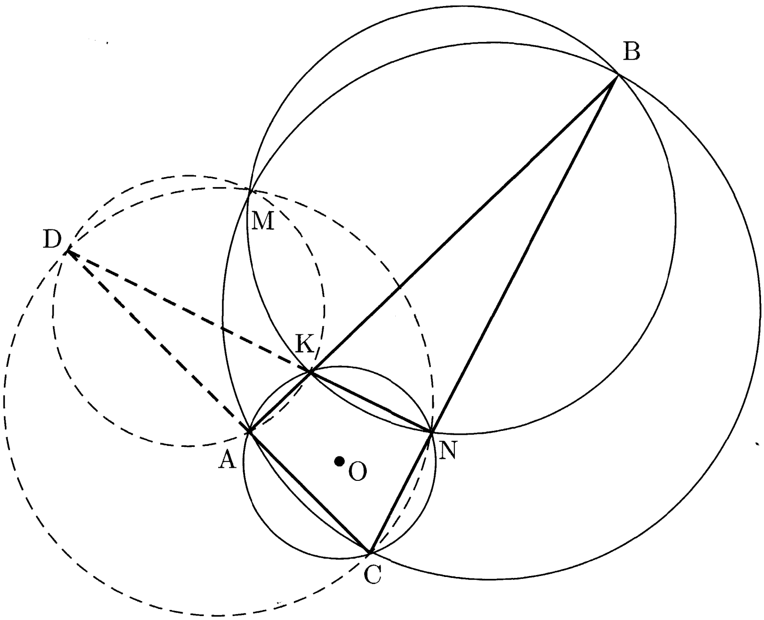
4. Arnfried Kemnitz, *On a lattice-point problem*, Ars. Combin. 16 (1983), 151-160.
5. Christian Reiher, *Kemnit'z conjecture concerning lattice-points in the plane*, manuscript, 2003.
6. Melvyn B. Nathanson, *Additive Number Theory : The Classical Bases*, Springer-Verlag, 1996.

Solution

Notons $\mathcal{C}_{\mathrm{XYZ}}$ le cercle circonscrit à un triangle XYZ. Cet exercice se fait en deux étapes.

1re étape : compléter le dessin

Tout d'abord, il nous faut rendre la situation symétrique en créant un nouveau point : soit D l'intersection de (KN) et (AC). Cette intersection existe car sinon B et M seraient clairement confondus.



Alors B, M et D sont alignés. Ceci peut se démontrer classiquement avec des angles inscrits, mais il y a beaucoup plus élégant (il est conseillé à ce stade de relire un bon cours des années 50 sur la puissance d'un point par rapport à un cercle et l'inversion, ou d'aller voir l'annexe ci-après) : considérons l'inversion i de centre B qui transforme K en A. Comme ACNK est inscriptible, on a aussi $i(\mathrm{N}) = \mathrm{C}$. Or $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_{\mathrm{ABC}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{KBN}}$, donc $i(\mathrm{N}) \in i(\mathcal{C}_{\mathrm{ABC}}) \cap i(\mathcal{C}_{\mathrm{KBN}}) = (\mathrm{KN}) \cap (\mathrm{AC}) = \mathrm{D}$. On a ainsi $i(\mathrm{M}) = \mathrm{D}$, donc B, M et D sont alignés.

De plus $\mathcal{C}_{\mathrm{ADK}}$ et $\mathcal{C}_{\mathrm{CDN}}$ sont concourants en M également, ce qui achève de rendre la situation complètement symétrique. Pour démontrer cela, on choisit ici aussi d'avoir recours à l'inversion : $\mathcal{C}_{\mathrm{ADK}}$ est invariant par i, car $i(\mathrm{A}) = \mathrm{K}$. Donc $\mathrm{M} = i(\mathrm{D}) \in i(\mathcal{C}_{\mathrm{ADK}}) = \mathcal{C}_{\mathrm{ADK}}$. De même on montre que $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_{\mathrm{CDN}}$.

2e étape : (MO) est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{DMB}}$

Maintenant, il faut avoir une deuxième bonne idée : montrer que les points A, O, N et M sont cocycliques. Ici, ne tergiversons pas, utilisons des angles inscrits dans tous les sens :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{AMN}} &= \widehat{\mathrm{AMK}} + \widehat{\mathrm{KMN}} \\
&= \widehat{\mathrm{ADK}} + \widehat{\mathrm{KBN}} \\
&= (\pi - \widehat{\mathrm{KNC}} - \widehat{\mathrm{NCA}}) + (\pi - \widehat{\mathrm{KAC}} - \widehat{\mathrm{NCA}}) \\
&= \pi - 2\widehat{\mathrm{NCA}} \\
\widehat{\mathrm{AMN}} &= \pi - \widehat{\mathrm{AON}}.
\end{aligned}$$

Ainsi le quadrilatère AONM est inscriptible, donc $\widehat{\mathrm{AMO}} = \widehat{\mathrm{ANO}} = \widehat{\mathrm{NAO}} = \widehat{\mathrm{NMO}}$, c'est-à-dire : O est sur la bissectrice de $\widehat{\mathrm{AMN}}$.

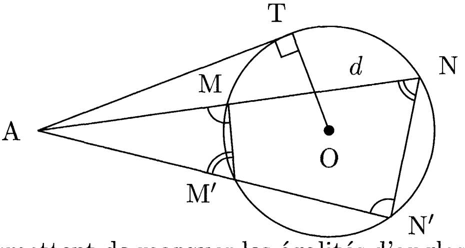
Pour conclure que (MO) est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{BMD}}$, il n'y a donc qu'à remarquer que $\widehat{\mathrm{BMN}} = \widehat{\mathrm{DMA}}$, ce qui se prouve en constatant que $\widehat{\mathrm{BMN}} = \widehat{\mathrm{BKN}}$ et $\widehat{\mathrm{DMA}} = \widehat{\mathrm{DKA}}$. Comme B, M et D sont alignés, on a donc bien $\widehat{\mathrm{BMO}} = 90^\circ$.

Annexe : puissance d'un point par rapport à un cercle et inversion

Voici un résumé de ce que le candidat sérieux doit connaître à ce sujet : la puissance d'un points par rapport à un cercle et l'inversion sont des techniques de résolution très fréquentes pour les Olympiades internationales.

Théorème-définition : puissance d'un point par rapport à un cercle. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre* O *et de rayon* R *et* A *un point du plan. Si une droite d passant par* A *coupe $\mathcal{C}$ en deux points* M *et* N*, alors le réel $\overline{\mathrm{AM}} \cdot \overline{\mathrm{AN}}$ est indépendant de d. Il est appelé puissance du point* A *par rapport au cercle $\mathcal{C}$ (notée $\mathcal{P}(\mathrm{A})$) et vaut*

$$\overline{\mathrm{AM}} \cdot \overline{\mathrm{AN}} = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{R}^2.$$



DÉMONSTRATION. On se contente du cas où A est à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Le lecteur étendra facilement cette démonstration au cas où A est à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Nos divers angles inscrits permettent de marquer les égalités d'angles sur le schéma. Ainsi les triangles AMM′ et AN′N sont semblables, donc $\mathrm{AM}/\mathrm{AM}' = \mathrm{AN}'/\mathrm{AN}$: $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AN} = \mathrm{AM}'\cdot\mathrm{AN}'$, quantité invariante que nous noterons $\mathcal{P}(\mathrm{A})$, puissance du point A par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

Si nous faisons tendre la droite d vers (AT), les points M et N convergent tous les deux vers T donc $\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{AM}\cdot\mathrm{AN} \to \mathrm{AT}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{R}^2$, ce qui est le résultat voulu. □

Le lecteur pourra déduire facilement de ce théorème une foule de résultats :

- ce théorème admet une réciproque : si deux droites distinctes (MN) et (M′N′) se coupent en A avec $\overline{\mathrm{AM}}\cdot\overline{\mathrm{AN}} = \overline{\mathrm{AM}'}\cdot\overline{\mathrm{AN}'}$, alors les points M, N, M′ et N′ sont cocycliques ;

- si deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres O_1 et O_2 se coupent en deux points distincts P et Q, le lieu des points A possédant la même puissance par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est la droite (PQ) ;

- si les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont une intersection vide, ce lieu est également une droite perpendiculaire à $(\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2)$, appelée « axe radical » des deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$;

- si trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont leurs centres non alignés, alors les trois axes radicaux qu'ils définissent sont concourants, en un point appelé « centre radical » des trois cercles. Ceci est une nouvelle façon de montrer que les droites (AC), (KN) et (BM) sont concourantes dans l'exercice que nous venons de résoudre, le 1985 n°5.

Définition : l'inversion. *Une inversion de centre* O *et de rapport* $k \in \mathbb{R}^*$ *est la transformation du plan qui à tout point du* M *distinct de* O *associe le point* $\mathrm{M}' \in (\mathrm{OM})$ *tel que* $\overline{\mathrm{OM}}\cdot\overline{\mathrm{OM}'} = k$.

Le lecteur pourra vérifier le théorème suivant, en utilisant notamment la puissance d'un point par rapport à un cercle. La partie la plus souvent utilisée (comme dans notre exercice 1985 n°5) est la dernière.

Théorème. *Une inversion de centre* O *transforme :*

- *une droite ne passant pas par* O *en un cercle passant par* O *;*
- *un cercle passant par* O *en une droite ne passant pas par* O *;*
- *un cercle ne passant pas par* O *en un cercle ne passant pas par* O.

6. De la complétude de $\mathbb{R}$

Pour tout réel x_1, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par la relation de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

Démontrer qu'il existe un et un seul réel x_1 tel que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

Solution

1re étape : natures possibles de la suite

On se donne $x_1 > 0$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de deux natures possibles :

- première possibilité : la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, donc admet pour limite 1 ou $+\infty$;
- dans le cas contraire il existe n_0 tel que $x_{n_0} \leqslant x_{n_0-1}$; alors $x_{n_0-1} + 1/(n_0-1) \leqslant 1$. On peut donc écrire $x_{n_0+1} = x_{n_0}(x_{n_0} + 1/n_0) \leqslant x_{n_0}(x_{n_0-1} + 1/(n_0-1)) \leqslant x_{n_0}$. On en déduit par une récurrence immédiate que la suite est décroissante à partir du rang n_0. Comme elle est positive, elle converge, nécessairement, vers 0 ou 1. Si elle convergeait vers 1, alors comme elle décroît elle serait supérieure à 1 à partir d'un certain rang ; on aurait alors : $x_{n+1}/x_n = x_n + 1/n > 1$, donc la suite serait croissante à partir de ce dernier rang, ce qui est contradictoire. Donc la suite converge vers 0.

2^e^ étape : unicité de x_1 vérifiant les conditions de l'énoncé

Pour p donné, x_p est une fonction (polynomiale) de x_1, que nous noterons $x_p = f_p(x_1)$. Remarquons (par une récurrence facile) qu'alors la fonction f_p est croissante. Ainsi, si $0 < x_1 \leqslant y_1$, on a $x_n \leqslant y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où on note $y_n = f_n(y_1)$. On en déduit que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, alors $(y_n)_{n\geqslant 1}$ l'est également : elle est minorée par x_1, donc ne peut pas converger vers 0. L'ensemble des valeurs de x_1 dans $\mathbb{R}^*$ telles que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ soit croissante (ensemble non vide, car 1 en fait partie) est donc de la forme $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$. On a de plus $\alpha > 0$ car on peut vérifier que pour $x_1 = 1/10$ la suite devient décroissante.

Si x_1 et y_1 sont distincts et tels que les suites correspondantes convergent vers 1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_{n+1} - y_{n+1} = (x_n - y_n)(x_n + y_n + 1/n) \underset{n\to\infty}{\sim} 2(x_n - y_n)$. Ceci est absurde : $x_n - y_n$ divergerait en $+\infty$.

Ainsi il existe au plus une valeur de x_1 satisfaisant les conditions de l'énoncé. Si une telle valeur existe, alors nécessairement c'est α : sinon $x_1 > \alpha$ donc $y_1 = 1/2(x_1 + \alpha)$ engendre une suite croissante, convergente vers 1 aussi car $y_1 < x_1$; ceci contredit ce qui précède.

3^e^ étape : existence d'un tel x_1

Montrons que pour $x_1 = \alpha$, la suite est croissante et converge vers 1.

S'il existe p telle que $x_{p+1} < x_p$, alors $f_{p+1}(\alpha) < f_p(\alpha)$. Comme les f_i sont continus, il existe donc $\beta > \alpha$ tel que $f_{p+1}(\beta) < f_p(\beta)$. Donc la suite définie par $y_1 = \beta > \alpha$ n'est pas croissante, ce qui est contradictoire par définition de α. L'intervalle est donc de la forme $[\alpha, +\infty[$.

La suite définie par $x_1 = \alpha$ est donc croissante et de plus elle converge vers 1 : dans le cas contraire il existe p tel que $x_p > 1$ et par continuité (et croissance) de f_p on peut trouver $y_1 > 0$ avec $1 < f_p(y_1) < x_p$. La suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est alors nécessairement croissante, avec $y_1 < x_1 = \alpha$, ce qui contredit la définition de α.

Ainsi la suite définie par $x_1 = \alpha$ est croissante et converge vers 1.

Varsovie (Pologne)

1986

1. Système diophantien sans solution

Soit d un entier strictement positif n'appartenant pas à l'ensemble $\{2, 5, 13\}$.

Démontrer que l'on peut trouver un couple (a, b) d'éléments distincts dans l'ensemble $\{2, 5, 13, d\}$ tel que $ab - 1$ ne soit pas le carré d'un entier.

Solution

On a $2 \times 5 - 1 = 3^2$, $2 \times 13 - 1 = 5^2$ et $5 \times 13 - 1 = 8^2$, donc il faut montrer que l'un des trois entiers $2d - 1$, $5d - 1$ ou $13d - 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Montrons que les trois équations $2d - 1 \equiv x^2$, $5d - 1 \equiv y^2$ et $13d - 1 \equiv z^2$ n'ont pas simultanément de solution dans un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n bien choisi. Après quelques tâtonnements on trouve $n = 16$ comme solution.

En effet tout carré est égal, modulo 16, à 0, 1, 4 ou 9. Si notre énoncé était faux, nous aurions donc modulo 16, pour un certain d :

- $2d - 1 \equiv 0$, 1, 4 ou 9, donc $d \equiv 1$, 5, 9 ou 13 : $2d - 1 \equiv 0$ [16] et $2d - 1 \equiv 4$ [16] n'ont clairement pas de solution, et les deux autres équations s'écrivent aussi $d \equiv 1$ [8] et $d \equiv 5$ [8].

- $5d - 1 \equiv 0$, 1, 4 ou 9, donc $d \equiv 1$, 2, 10 ou 13 : comme 5 est premier avec 16, on sait que l'on a exactement 4 solutions (et on peut les trouver en énumérant tous les restes des $5d - 1$ dans la division euclidienne par 16, pour $d \in [\![0, 15]\!]$) ;

- $13d - 1 \equiv 0$, 1, 4 ou 9, donc $d \equiv 2$, 5, 9, ou 10 : ici aussi 13 est premier avec 16 et on peut trouver ces solutions par une simple énumération.

L'intersection des ensembles $\{1,5,9,13\}$, $\{1,2,10,13\}$ et $\{2,5,9,10\}$ étant vide, un des trois termes $2d-1$, $5d-1$ ou $13d-1$ n'est pas un carré parfait.

Remarque. Le réflexe normal est ici de chercher les d tels que $2d-1$ et $5d-1$ soient des carrés parfaits ($2d-1=n^2$ et $5d-1=m^2$, pour des entiers m et n) et de montrer qu'alors $13d-1$ n'en est pas un. Cependant ces deux équations diophantiennes[1] ne peuvent se résoudre de façon élémentaire.

La technique employée dans notre solution est assez générale : on montre l'impossibilité de résoudre une équation sur un ensemble restreint ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où on n'a qu'un nombre fini de tests à effectuer) et on étend ce résultat à l'ensemble initial (c'est-à-dire $\mathbb{Z}$). Réciproquement, certains théorèmes puissants de théorie des nombres permettent parfois de démontrer qu'une équation diophantienne admettant une solution sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ admet une solution sur $\mathbb{Z}$. Ainsi la loi de réciprocité quadratique ou le théorème de Dirichlet[2] permettent de démontrer le type de résultat suivant : tout nombre qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est un carré parfait dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est un carré parfait dans $\mathbb{Z}$.

2. Géométrie des déplacements

Dans le plan euclidien orienté, on donne un triangle $A_1A_2A_3$ et un point P_0. On pose $A_s = A_{s-3}$ pour tout $s \geqslant 4$. La suite de points $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie par P_0 et par : « pour tout k, P_{k+1} est l'image de P_k par la rotation de centre A_{k+1} et d'angle $2\pi/3$ ».

Sachant que $P_{1986} = P_0$, démontrer que $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral.

Solution

Un bon cours sur les déplacements permet d'affirmer que

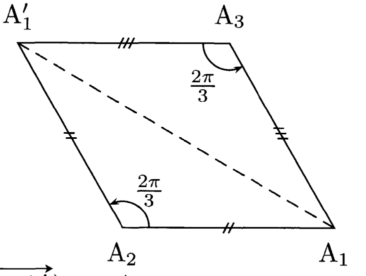
$$r_{A_3,2\pi/3} \circ r_{A_2,2\pi/3} \circ r_{A_1,2\pi/3} = t,$$

où t est une translation (pour ceux qui ne connaîtraient pas ce type de résultat, il est démontré en annexe). L'énoncé affirme alors, par associativité de la loi de composition : $t^{662}(P_0) = P_0$. Ceci impose $t = \mathrm{Id}$,

1. DIOPHANTE D'ALEXANDRIE (env. 200-284), mathématicien grec.
2. JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE-DIRICHLET (1805-1859), mathématicien allemand.

c'est-à-dire

$$r_{A_3,2\pi/3} \circ r_{A_2,2\pi/3} \circ r_{A_1,2\pi/3} = \mathrm{Id}\,. \tag{1}$$



Notons $A'_1 = r_{A_2,2\pi/3}(A_1)$. Alors $A_1A'_1A_2$ est isocèle direct en A_2 d'angle au sommet $2\pi/3$, donc $A_1A'_1 = \sqrt{3}\,A_1A_2$ et $(\overrightarrow{A_1A'_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \pi/6$.

La relation (1) évaluée en A_1 montre que $A_1A'_1A_3$ est isocèle indirect en A_3 d'angle au sommet $2\pi/3$, donc $A_1A'_1 = \sqrt{3}\,A_1A_3$ et $(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A'_1}) = \pi/6$.

Nous en déduisons

$$\begin{cases} A_1A_2 = A_1A_3 \\ (\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_2}) = (\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A'_1}) + (\overrightarrow{A_1A'_1}, \overrightarrow{A_1A_3}) = \pi/6 + \pi/6 = \pi/3 \end{cases}.$$

Ainsi $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral indirect.

Annexe : composées de déplacements

Théorème. *La composée de deux rotations r_{M_1,θ_1} et r_{M_2,θ_2} est :*

- *une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$;*
- *une translation si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons dans le plan complexe : notons z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et z l'affixe d'un point quelconque M. Alors l'affixe de $r_{M_2,\theta_2}(M)$ est $z_2 + e^{i\theta_2}(z - z_2)$, donc celle de la composée $r_{M_1,\theta_1} \circ r_{M_2,\theta_2}(M)$ vaut $z_1 + e^{i\theta_1}\left(\left(z_2 + e^{i\theta_2}(z - z_2)\right) - z_1\right)$, qui s'écrit sous la forme

$$z' = z_o + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - z_o)$$

si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$ ($z_o = e^{i\theta_1}(z_2(1 - e^{i\theta_2}) - z_1)/(1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)})$). Cette transformation correspond bien à une rotation. Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, alors $z' = (z_1 - z_2)(1 - e^{i\theta_1}) + z$, il s'agit donc d'une translation. □

Le lecteur vérifiera de même que la composée d'une translation et d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle θ, si bien que le théorème précédent reste vrai dans le cas de n rotations d'angles $\theta_1, \ldots, \theta_n$: leur composée est une rotation si $\theta_1 + \cdots + \theta_n$ n'est pas congru à 0 modulo 2π, une translation sinon.

3. À la recherche de l'« entropie »

À chaque sommet d'un pentagone régulier on associe un entier relatif de telle sorte que la somme des cinq nombres soit strictement positive. Si à trois sommets consécutifs correspondent les nombres x, y et z avec $y < 0$, alors l'opération suivante est permise :

« remplacer le triplet (x, y, z) par $(x + y, -y, y + z)$ ».

Cette opération est répétée tant qu'au moins un des cinq nombres est strictement négatif.

Déterminer si le processus prend nécessairement fin après un nombre fini d'opérations.

Solution

Notons x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les nombres présents aux cinq sommets du pentagone.

1re méthode : l'entropie décroissante

L'idée de cette démonstration est la suivante : lors du processus, les x_i tendent à s'harmoniser. On cherche donc une fonction f des x_i, appelée « entropie », à valeurs entières positives et strictement décroissante au cours du processus : celui-ci devra donc nécessairement prendre fin.

Plus précisément, après avoir essayé la fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} |x_{i+1} - x_i|$ (où les indices sont pris modulo 5), puis $\sum_{i=1}^{5}(x_{i+1} - x_i)^2$, sans succès, on arrive à une expression valable de l'entropie,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5}(x_{i+1} - x_{i-1})^2.$$

En effet, si $x_3 < 0$, la variation de f lors de l'opération transformant $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ en $(x_1, x_3 + x_2, -x_3, x_3 + x_4, x_5)$ est, après calcul,

$$\Delta f = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) < 0,$$

car la somme des x_i, constante au cours du processus, est strictement positive.

La fonction f est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc le processus prend fin : tous les x_i finissent par être positifs.

2^e méthode : en toute généralité

Pour tous les indices $i \in [\![1,5]\!]$ et $j \in \mathbb{N}$, notons $s_{ij} = \sum_{k=0}^{j} x_{i+k}$, où les indices sont considérés modulo 5. Regardons alors l'effet de la transformation de l'énoncé sur $\mathcal{S} = \{s_{ij} \mid i \in [\![1,5]\!], j \in \mathbb{N}\}$.

Une transformation de l'énoncé sur $x_{i_0} < 0$ transforme $s_{i_0 0}$ en son opposé et effectue une bijection sur l'ensemble des autres s_{ij} (ce point un peu technique sera vérifié par le lecteur).

Ainsi le nombre de s_{ij} négatifs, fini car $\sum_{i=1}^{5} x_i > 0$, décroît d'une unité à chaque étape du processus. Celui-ci sera donc nécessairement terminé en exactement N étapes, où N est le nombre de s_{ij} initialement strictement négatifs.

1^re remarque. Cette dernière démonstration reste valable pour des x_i réels et pour tout polygone de n côtés, $n \geqslant 5$. Nous avons trouvé le nombre exact d'opérations à effectuer pour terminer le processus, mais ce nombre n'est pas borné par une constante $c(n)$ indépendante des x_i, comme le montre le cas où $x_1 = -1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \varepsilon$: alors $x_1 + k\sum_{i=1}^{n} x_i$ est strictement négatif pour $\lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ valeurs de k, nombre non borné pour $\varepsilon \to 0$.

2^e remarque. La seconde démonstration reste valable pour des polygones à 3 ou 4 sommets. Ces deux cas peuvent se traiter avec un peu de courage à la main, c'est-à-dire par une énumération de cas selon le signe des x_i et des manipulations d'inégalités. Le cas d'un pentagone permet d'éviter ce genre de démonstration laborieuse.

4. Lieu géométrique défini par glissement

Soient A et B deux sommets consécutifs d'un polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 5$) et de centre O. Un triangle XYZ isométrique à OAB est placé initialement de telle sorte que les points X, Y et Z coïncident respectivement avec les points O, A et B.

Le triangle XYZ se déplace dans le plan du polygone de façon à ce que les points Y et Z se trouvent sur les côtés du polygone et que X reste à l'intérieur de celui-ci.

Quelle est la figure décrite par X lorsque Y parcourt entièrement le bord du polygone ?

Solution

On suppose que A, B et C sont trois sommets consécutifs du polygone, avec Y $\in$ [AB] et Z $\in$ [BC]. Montrons que X $\in$ (BO).

Le point O est le centre du cercle circonscrit à ABC, d'où

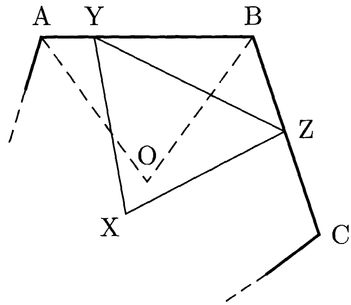
$$\widehat{\mathrm{YXZ}} + \widehat{\mathrm{YBZ}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{AOC}} + \widehat{\mathrm{ABC}} = \pi.$$

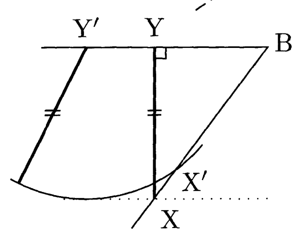
Ainsi les points B, X, Y et Z sont cocycliques, ce qui permet d'écrire

$$\widehat{\mathrm{ABX}} = \widehat{\mathrm{YBX}} = \widehat{\mathrm{YZX}} = \widehat{\mathrm{ABO}},$$

c'est-à-dire X $\in$ (BO). Nous en déduisons que la figure décrite par X est une étoile régulière à n branches.

Si le polygone de départ est inscrit dans un cercle de rayon r, alors la longueur l des branches est obtenue pour (XY) $\perp$ (AB) (le lecteur resté sceptique face à ceci contemplera le dessin ci-contre) et vaut donc après calcul, pour un polygone régulier de côté r,





$$l = r\left(\frac{1}{\sin 2\pi/n} - \frac{1}{2\sin \pi/n}\right).$$

Remarque. La condition $n \geqslant 5$ est assez incompréhensible : ce qui précède fonctionne aussi pour $n = 4$.

5. Équation fonctionnelle

Déterminer toutes les applications f de l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs ou nuls dans lui-même vérifiant les trois propriétés :

- **pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$, $f\,(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$;**
- **$f(2) = 0$;**
- **pour tout $x \in [0,2[$, $f(x) \neq 0$.**

Solution

Remarquons d'abord que pour $x \geqslant 2$, $f(x) = 0$; en effet pour $y = 2$ on obtient $f(x+2) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$, donc $f = 0$ sur $[2, +\infty[$.

Intéressons-nous désormais à la valeur de $f(x)$ pour $x \in [0, 2[$. Pour le couple $(2-x, x)$, nous obtenons $f((2-x)f(x))f(x) = f(2) = 0$. Or $f(x) \neq 0$, donc $f((2-x)f(x)) = 0$, d'où $(2-x)f(x) \geqslant 2$, c'est-à-dire

$$f(x) \geqslant \frac{2}{2-x}. \tag{1}$$

De plus, pour le couple $(2/f(x), x)$ ($f(x) \neq 0$ car $x \in [0, 2[$), nous obtenons $0 = f(2/f(x) + x)$, donc $2/f(x) + x \geqslant 2$, c'est-à-dire

$$f(x) \leqslant \frac{2}{2-x}. \tag{2}$$

Les inéquations (1) et (2) permettent de conclure que, pour tout $x \in [0, 2[$, $f(x) = 2/(2-x)$. Réciproquement, la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x} & \text{si } x \in [0, 2[\\ 0 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

vérifie les conditions de l'énoncé.

6. Colorier des points du plan de façon « équilibrée »

Dans un plan, on se donne un ensemble fini $\mathcal{E}$ de points à coordonnées entières.

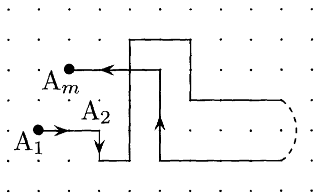
Est-il possible de colorier tous les points de $\mathcal{E}$ avec deux couleurs, rouge et blanc, de telle manière que, pour toute droite $\mathcal{D}$ parallèle à l'un ou l'autre des axes de coordonnées, la différence, en valeur absolue, entre le nombre de points rouges et le nombre de points blancs appartenant à $\mathcal{D}$ soit inférieure ou égale à 1 ?

Solution

Commençons par un peu de terminologie : nous appellerons « ligne » toute droite parallèle à l'axe des ordonnées ou des abscisses. Une ligne a donc deux directions possibles. Nous utiliserons aussi la notation $\Delta_{\mathcal{X}}(l)$ (où l est une ligne et $\mathcal{X}$ un ensemble inclus dans $\mathcal{E}$), désignant la différence, en valeur absolue, entre le nombre de points rouges et le nombre de points blancs appartenant à $\mathcal{X} \cap l$.

Raisonnons par récurrence sur $|\mathcal{E}|$ (le cas $|\mathcal{E}| = 1$ ne pose pas de problème). Nous souhaiterions construire un sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ et le colorier de telle façon que pour toute ligne l, $\Delta_{\mathcal{A}}(l)$ soit nul. Ainsi, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{E} - \mathcal{A}$, on aura finalement une coloration adéquate. Hélas, un tel ensemble $\mathcal{A}$ n'existe pas toujours, mais nous pouvons nous en rapprocher grâce à l'outil présenté ci-après.

Nous appelons « circuit » toute suite finie $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ de points distincts du plan telle que, pour tout $i \in [\![2, m-1]\!]$, $(A_{i-1}A_i)$ et (A_iA_{i+1}) sont de direction opposée.



Cette définition n'a ici d'intérêt que par le lemme qui en découle.

Lemme. *Soit* $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ *un circuit et* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des* A_i, *coloriés en blanc pour i pair et en rouge pour i impair. Alors pour toute ligne l :*

- *si l ne contient ni* A_1 *ni* A_m, $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$ *;*
- *si l contient* A_1 *ou* A_m, $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$ *ou* 1.

Démonstration. Soit l une ligne ne passant ni par A_1 ni par A_k. Si on note i_0 le plus petit indice i tel que $A_i \in l$, alors on a également $A_{i_0+1} \in l$: $(A_{i_0-1}A_{i_0})$ ou $(A_{i_0}A_{i_0+1})$ a la même direction que l, mais ce n'est pas $(A_{i_0-1}A_{i_0})$ car $A_{i_0-1} \notin l$. En réitérant le procédé, on remarque que les éléments de $\mathcal{A}$ appartenant à l forment une suite de couples bicolores (A_i, A_{i+1}), donc $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$.

Le cas où l contient A_1 ou A_k se traite de la même façon : les éléments de $\mathcal{A}$ appartenant à l peuvent être regroupés en paires de points consécutifs, plus éventuellement les points isolés A_1 et/ou A_k. S'il ne reste ni A_1 ni A_k, $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$. S'il reste A_1 et A_k, (A_1A_2) et $(A_{k-1}A_k)$ doivent être perpendiculaires à l, donc 1 et $k-1$ ont même parité : A_1 et A_k ont des couleurs distinctes donc $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$. S'il ne reste que l'un des deux points alors $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 1$. □

Comme $\mathcal{E}$ est fini, le nombre de circuits est fini, nous pouvons donc en considérer un ayant un nombre maximum d'éléments m : $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. On effectue sur $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ le coloriage du lemme et sur $\mathcal{E} - \mathcal{A}$ un coloriage satisfaisant l'énoncé, par hypothèse de récurrence. Montrons pour conclure qu'alors toute ligne l vérifie $\Delta_{\mathcal{E}}(l) = 0$ ou 1. Quitte à changer le sens de parcours de notre chemin, un des cas suivants se présente :

- l ne contient ni A_1 ni A_m. D'après le lemme $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$, donc $\Delta_{\mathcal{E}}(l) = \Delta_{\mathcal{E}-\mathcal{A}}(l) = 0$ ou 1 par hypothèse de récurrence.

- $A_1 \in l$ et $l \perp (A_1A_2)$. Comme m a été choisi maximal, l ne contient pas l'éléments de $\mathcal{E} - \mathcal{A}$: sinon pour $X \in (\mathcal{E} - \mathcal{A}) \cap l$ on pourrait considérer le circuit à $m+1$ éléments $(X, A_1, \ldots, A_m)$. On a donc $\Delta_{\mathcal{E}}(l) = \Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$ ou 1 d'après le lemme.

- $A_1 \in l$ et $l \mathbin{/\!/} (A_1A_2)$. La suite croissante des indices i tels que $A_i \in l$ est alors du type $(1, 2, i_0, i_0+1, \ldots, i_s, i_s+1)$ ou $(1, 2, i_0, i_0+1, \ldots, i_s, i_s+1, i_t)$. Dans le premier cas, $\Delta_{\mathcal{A}}(l) = 0$, donc $\Delta_{\mathcal{E}}(l) = \Delta_{\mathcal{E}-\mathcal{A}}(l) = 0$ ou 1. Dans le second cas, nécessairement $i_t = m$ (car sinon $A_{i_t+1} \in l$) et, par maximalité de m, $\mathcal{E} - \mathcal{A} = \emptyset$, d'où $\Delta_{\mathcal{E}}(l) = \Delta_{\mathcal{A}}(l) = 1$.

La Havane (Cuba)

1987

1. Calculs de dérangements

On désigne par $p_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n \geqslant 1)$ ayant exactement k points fixes.
Prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!.$$

Solution

Dans toute la suite, $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ $(n \geqslant 1)$.

1^re^ méthode

Comme dans beaucoup d'exercices liés aux permutations, nous allons utiliser la relation

$$p_n(k) = \mathrm{C}_n^k\, p_{n-k}(0).$$

En effet, choisir une permutation à k points fixes revient à choisir les k points fixes parmi les n éléments initiaux puis à choisir un dérangement (permutation sans point fixe) pour les $n-k$ éléments restants.

Dans la nouvelle somme que nous obtenons ainsi, remplacer « $k\,\mathrm{C}_n^k$ » par « $n\,\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ » doit être un réflexe, ceci permet ici de remplacer la variable k qui nous ennuie par la constante n :

$$k\, p_n(k) = k\,\mathrm{C}_n^k\, p_{n-k}(0) = n\,\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\, p_{(n-1)-(k-1)}(0) = n\, p_{n-1}(k-1).$$

On en déduit le résultat (en remarquant que les permutations à k points fixes de $\mathcal{S}_{n-1}$, pour k variant entre 0 et $n-1$, forment une partition de $\mathcal{S}_{n-1}$) :

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = \sum_{k=1}^{n} n\, p_{n-1}(k-1) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = n!.$$

2e méthode

On commence comme dans la solution précédente, en écrivant que $p_n(k) = \mathrm{C}_n^k\, p_{n-k}(0)$. Le principe d'inclusion et d'exclusion (cf. 1989 n°6) nous permet de calculer ce dernier terme. Pour cela, fixons n et notons $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $\sigma(i) = i$ $(i \in [\![1, n]\!])$. Si $\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (« dérangements »), alors $\mathcal{D}_n = \complement\,(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i)$. Or la formule du crible montre que $|\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i|$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{P}_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j| + \cdots + (-1)^{n-1}\, |\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n| \\
&\quad = n(n-1)! - \mathrm{C}_n^2 (n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1} \\
&\quad = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$p_n(0) = |\mathcal{D}_n| = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!},$$

donc $p_n(k) = \mathrm{C}_n^k p_{n-k}(0) = n!/k! \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i/i!$. Ceci permet en moulinant les calculs d'obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) &= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= n! \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^l}{(l-i)!\, i!} \\
\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) &= n! \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{l} \mathrm{C}_l^i (-1)^i,
\end{aligned}$$

où l'on a partitionné les indices de notre double somme en gardant $k + i$ constant. Par le binôme de Newton nous voyons apparaître dans ce dernier terme $(1-1)^l = 1$ si $l = 0$, 0 sinon. On a donc bien

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!.$$

3ᵉ méthode

Il serait très étonnant qu'une telle identité ne présente pas d'interprétation combinatoire. Nous en donnons effectivement une ici.

Dénombrons de deux manières distinctes tous les doublets (σ, x) où la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ admet x comme point fixe. Si σ admet k points fixes, on a k choix pour x, donc le nombre cherché vaut $\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k)$. De plus, si on se donne d'abord x parmi les n éléments possibles, il suffit de choisir pour σ une permutation laissant x invariant et on a alors $(n-1)!$ possibilités. Ceci nous permet de conclure que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n\,(n-1)! = n!.$$

Annexe : calcul et utilisation des fonctions génératrices

Plus généralement, il peut être utile de calculer diverses sommes telles que $\sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k)$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 p_n(k) \ldots$ Pour cela, il suffit de trouver une expression exploitable de la fonction $a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k p_n(k)$: l'évaluation des dérivées successives de a_n en 0 permettra de calculer la valeur des sommes précédentes.

On considère pour cela la fonction génératrice des $(a_n(t)/n!)_{n \geqslant 0}$ (la division par $n!$ se comprend en réalisant que $a_n(t)$ est « de l'ordre » de $n!$),

$$\mathrm{G}_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} t^k p_n(k) \right) x^n.$$

On a déjà vu la relation $p_n(k) = \mathrm{C}_n^k\, p_{n-k}(0)$ dans la première solution. Ceci nous permet d'écrire G_t sous la forme (après changement d'indices)

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_t(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{C}_n^k\, p_{n-k}(0) \right) x^n \\
&= \sum_{k,m \geqslant 0} p_k(0) \frac{x^k}{k!} \frac{(xt)^m}{m!} \\
\mathrm{G}_t(x) &= e^{xt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p_k(0)}{k!} x^k.
\end{aligned}$$

Mais nous connaissons le nombre de dérangements(d'après la deuxième solution, $p_k(0) = k! \sum_{i=0}^{k} (-1)^i / i!$), d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p_k(0)}{k!} x^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \right) x^k \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} x^k \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{x^i}{1-x} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p_k(0)}{k!} x^k &= \frac{e^{-x}}{1-x}.\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression simplifiée de notre fonction génératrice,

$$\mathrm{G}_t(x) = \frac{e^{x(t-1)}}{1-x}.$$

En développant cette expression et en identifiant les coefficients de x^n nous obtenons

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k p_n(k) = n! \left(1 + \frac{t-1}{1!} + \frac{(t-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(t-1)^n}{n!} \right).$$

Cette relation permet de retrouver le nombre de dérangements (pour $t = 0$), le résultat de notre exercice (évaluer la dérivée en $t = 0$) et montre plus généralement que pour $m < n$ (en évaluant la dérivée $m - 1^{\mathrm{e}}$ en $t = 0$),

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\dots(k-m)p_n(k) = n!.$$

On en déduit par exemple $\sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k) = 2n!$ (car $k^2 = k + k(k-1)$), $\sum_{k=0}^{n} k^3 p_n(k) = 5n!$ $(k^3 = k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2))\dots$

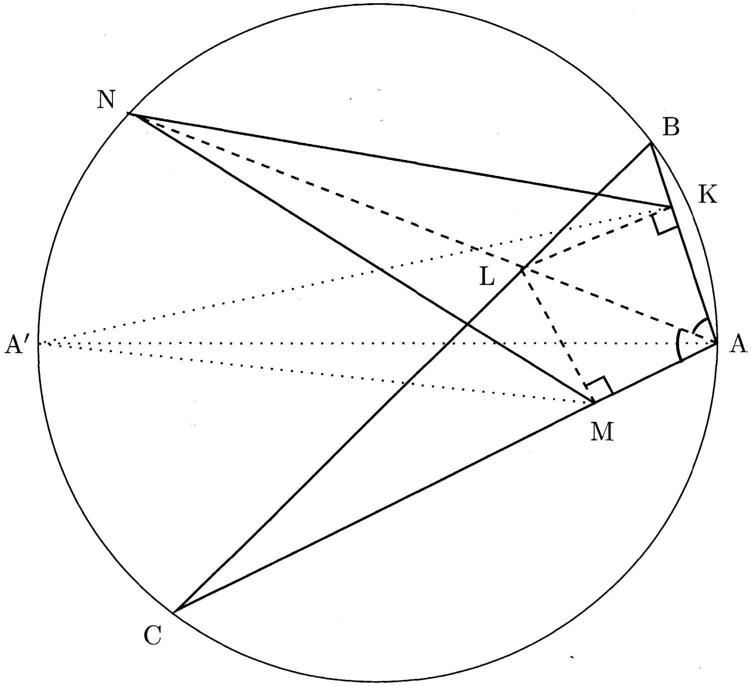
2. Géométrie

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ coupe le côté [BC] en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en N. On désigne respectivement par K et M les projections orthogonales de L sur les côtés [AB] et [AC].

Prouver que l'aire du quadrilatère AKNM et l'aire du triangle ABC sont égales.

Solution

On note $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ l'aire d'un polygone X. Comme souvent dans des exercices de géométrie aux olympiades (cf. 1997 n°2), on fait apparaître le point A′ tel que [AA′] soit un diamètre du cercle circonscrit à ABC.



Les droites (A′B) et (AB) sont orthogonales, de même que (KL) et (AB). On en déduit que (A′B) et (KL) sont parallèles, donc que $\mathscr{A}(\mathrm{A'KL}) = \mathscr{A}(\mathrm{BKL})$. De même $\mathscr{A}(\mathrm{A'LM}) = \mathscr{A}(\mathrm{CLM})$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathrm{AKA'M}) &= \mathscr{A}(\mathrm{A'KL}) + \mathscr{A}(\mathrm{A'LM}) + \mathscr{A}(\mathrm{AKLM}) \\ &= \mathscr{A}(\mathrm{BKL}) + \mathscr{A}(\mathrm{CLM}) + \mathscr{A}(\mathrm{AKLM}) \\ \mathscr{A}(\mathrm{AKA'M}) &= \mathscr{A}(\mathrm{ABC}).\end{aligned}$$

Il suffit donc désormais de démontrer que AKA′M et AKNM ont la même aire, donc que $\mathscr{A}(\mathrm{A'KM}) = \mathscr{A}(\mathrm{NKM})$ $(*)$. Or (AN) est orthogonale à la fois à (NA′) et à (KM) (on peut invoquer pour ce dernier point la symétrie par rapport à (AL)), donc ces deux dernières droites sont parallèles et on a bien $(*)$.

Remarque. Il suffit d'avoir en fait dans l'énoncé les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ aigus : ceci permet de s'assurer que $K \in [AB]$ et $M \in [AC]$.

3. Distance minimale sur un réseau

Soient n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ et k un entier supérieur ou égal à deux.

Prouver qu'il existe n entiers non tous nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant :

- **pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $|a_i| \leqslant k-1$;**
- **$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leqslant (k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$.**

Solution

On choisit tous les x_i positifs, ce qui ne change rien au problème. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E}_k = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [\![0, k-1]\!]^n\}.$$

L'ensemble $\mathcal{E}_k$ est constitué de k^n éléments (on conserve les répétitions) compris entre 0 et $(k-1)\sum_{i=1}^n x_i$, ces deux extrémités étant elles-mêmes des éléments de $\mathcal{E}_k$. On peut donc trouver un intervalle dont les extrémités sont deux éléments de $\mathcal{E}_k$, associés à des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ distincts, et de longueur inférieure ou égale à $(k-1)\sum_{i=1}^n x_i/(k^n-1)$. On a alors

$$|(a_1-b_1)x_1 + (a_2-b_2)x_2 + \cdots + (a_n-b_n)x_n| \leqslant \frac{(k-1)\sum_{i=1}^n x_i}{k^n-1},$$

avec les $a_i - b_i$ compris dans $[\![-(k-1), k-1]\!]$ et non tous nuls (car les deux n-uplets sont distincts).

Pour conclure il suffit de démontrer que $\sum_{i=1}^n x_i \leqslant \sqrt{n}$, ce qui est une conséquence classique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz[1] :

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n 1 \times x_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{n}.$$

---

1. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.
   Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.

Remarque. Considérons sur $\mathbb{R}$ le réseau engendré par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (c'est à dire $\mathcal{F} = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$). Alors $\mathcal{F}$ est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$, discret ou dense ; dans le cas où il est dense, le résultat de l'exercice montre avec quelle précision on peut s'approcher de 0 avec des éléments de $\mathcal{E}_k$ (et donc de $\mathcal{F}$) distincts de 0, lorsque $k \to \infty$: $d(0, \mathcal{E}_k - \{0\}) = \mathrm{O}(1/k^n)$.

4. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$

Prouver qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que, pour tout entier naturel n, $f(f(n)) = n + 1987$.

Solution

On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors

$$f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987,$$

on a donc par une récurrence immédiate, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$f(n + 1987k) = f(n) + 1987k.$$

Ceci nous permet de considérer g, fonction définie sur $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$, induite par f par passage au quotient, qui vérifie d'après ce qui précède $g \circ g = \mathrm{Id}$.

La fonction g est une involution dans un ensemble de cardinal impair, elle a donc un point fixe n_0. Ainsi il existe k tel que $f(n_0) = n_0 + 1987k$ et on a alors $n_0 + 1987 = f(f(n_0)) = f(n_0 + 1987k) = f(n_0) + 1987k = n_0 + 2 \times 1987k$, d'où $2k = 1$, ce qui est absurde car k est entier.

Remarque. Si on remplace 1987 dans l'énoncé par n'importe quel entier naturel impair, notre raisonnement tient toujours. En revanche, pour un entier naturel pair $2p$, en considérant $f : n \mapsto n + p$, on a trouvé une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de l'énoncé.

5. Distances irrationnelles et aires rationnelles

Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 il existe n points du plan euclidien vérifiant :

- **trois quelconques de ces points ne sont pas alignés ;**
- **la distance entre deux quelconques de ces points est irrationnelle ;**
- **l'aire du triangle déterminé par trois quelconques de ces points est rationnelle.**

Solution

Surtout ne prenons pas peur : pour simplifier l'énoncé, nous allons choisir les n points tant convoités avec des coordonnées entières. Ceci va nous simplifier la vie : les aires des triangles seront forcément rationnelles dans la suite, car on a la formule $\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = 1/2\,|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}}|$.

Nous allons construire ici par récurrence un ensemble de n points à coordonnées entières tels que la distance entre deux d'entre eux est irrationnelle et trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. Nous allons même choisir le n^{e} point avec pour abscisse n.

Pour $n = 3$, le triplet $\{(1,0),(2,1),(3,3)\}$ convient. Supposons construits $n-1$ points conformément au paragraphe précédent. On a pour le n^{e} point M_n les coordonnées (n,k), avec k entier à choisir. Soit $\mathrm{M}_i = (i,k_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Alors $d_i = \mathrm{M}_n\mathrm{M}_i = \sqrt{(n-i)^2 + (k-k_i)^2}$ est soit un entier soit un irrationnel. Or, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$ il existe $a_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geqslant a_i$,

$$(k-k_i)^2 < (n-i)^2 + (k-k_i)^2 < (k-k_i+1)^2.$$

Ainsi, si $k \geqslant a_i$, d_i est irrationnel. Pour $k \geqslant \sup\{a_i \mid i \in [\![1,n-1]\!]\} = a$, toutes les distances d_i seront donc irrationnelles. Comme les points A_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ sont en nombre fini, il existe un nombre fini de points d'abscisse n alignés avec deux A_i distincts $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Ainsi il existe une constante b telle que si $k \geqslant b$ alors A_n ne soit pas aligné avec deux autres A_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Pour $k \geqslant \sup\{a,b\}$, le point A_n est donc à une distance irrationnelle des $n-1$ autres points et n'est pas aligné avec deux d'entre eux. Comme par hypothèse de récurrence les distances entre deux quelconques des $n-1$ premiers points sont déjà irrationnelles, et qu'il n'en existe pas trois distincts et alignés, on a le résultat voulu.

Remarque. Le lecteur désireux d'avoir un ensemble explicite de points vérifiant l'énoncé pourra considérer la famille des points de coordonnées (k, k^2) $(k \geqslant 1)$.

Annexe : densité nulle des triplets pythagoriciens

Donnons pour cet exercice une solution reposant sur l'évaluation du nombre de « triplets pythagoriciens[2] », définis ci-après : le lemme suivant cette définition permettra de majorer le nombre de tels triplets.

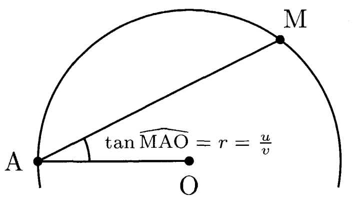
Théorème-définition. *Soient x, y et z trois entiers naturels premiers entre eux tels que $x^2 = y^2 + z^2$. Alors x ou y est pair et s'il s'agit par exemple de y il existe deux entier naturels u et v uniques, premiers entre eux, tels que*

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}.$$

Un tel ensemble $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ est appelé triplet pythagoricien primitif. Tout multiple d'un triplet pythagoricien primitif, de la forme $\lambda(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ $(\lambda \in \mathbb{N}^*)$, est appelé triplet pythagoricien.

DÉMONSTRATION. Si x et y étaient impairs, z serait pair donc $0 \equiv z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2$ [4], ce qui est absurde. Ainsi x ou y est pair.

Notre équation s'écrit aussi sous la forme $(x/z)^2 + (y/z)^2 = 1$, il s'agit donc de caractériser tous les points à coordonnées rationnelles du cercle unité $\mathcal{C}$. Soit M un tel point, A le point $(-1, 0)$ et O l'origine. Alors $\tan \widehat{\mathrm{MAO}} = y_{\mathrm{M}}/(x_{\mathrm{M}} + 1)$ est rationnelle.



Réciproquement, si nous fixons $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$ à l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite passant par A de coefficient directeur r rationnel $(1 \leqslant r \leqslant 0)$, alors M a bien ses coordonnées rationnelles. En effet, x_{M} est la solution, distincte de -1, de l'équation du second degré $x^2 + (r(x+1))^2 = 1$, donc

2. PYTHAGORE DE SAMOS (env. 569-475 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

$x_{\mathrm{M}} = (1-r^2)/(1+r^2)$. Si nous écrivons r sous forme irréductible u/v, alors $x/z = x_{\mathrm{M}} = (u^2-v^2)/(u^2+v^2)$ et $y/z = y_{\mathrm{M}} = 2uv/(u^2+v^2)$. Si u et v sont de parité différente, ces deux fractions sont irréductibles et donc $(x,y,z) = (u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$. Sinon, u et v sont impairs, donc nous pouvons poser $u' = (u+v)/2$ et $v' = (u-v)/2$, qui sont éléments de $\mathbb{N}$ premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair. Alors $(x,y,z) = (2u'v', u'^2 - v'^2, u'^2 + v'^2)$. $\square$

Lemme. *Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_k$ des couples $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(u^2-v^2, 2uv) \in [\![1,k]\!]^2$. Alors*

$$|\mathcal{P}_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}\, k.$$

Démonstration. Pour $(u,v) \in \mathcal{P}_k$, nous avons nécessairement $\sqrt{u^2-k} \leqslant v \leqslant k/2u$, donc $u^2 - k \leqslant (k/2u)^2$, ce qui impose $u \in [\![0, \sqrt{\alpha k}]\!]$ où $\alpha = (1+\sqrt{2})/2$. Distinguons alors trois cas :

- si $0 \leqslant u \leqslant \sqrt{k/2}$ nous pouvons choisir v dans $[\![0,u]\!]$;
- si $\sqrt{k/2} < u \leqslant \sqrt{k}$ nous pouvons choisir v dans $[\![0, k/(2u)]\!]$;
- si $\sqrt{k} < u \leqslant \sqrt{\alpha k}$ nous pouvons choisir v dans $[\![\sqrt{u^2-k}, k/(2u)]\!]$.

Nous avons donc l'affreuse expression

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_k| = &\sum_{0\leqslant u\leqslant\sqrt{k/2}} (u+1)\\ &+ \sum_{\sqrt{k/2}<u\leqslant\sqrt{k}} (\lfloor k/(2u)\rfloor + 1)\\ &+ \sum_{\sqrt{k}<u\leqslant\sqrt{\alpha k}} \left(\lfloor k/(2u)\rfloor - \left\lfloor\sqrt{u^2-k}\right\rfloor\right).\end{aligned}$$

Une comparaison série-intégrale montre que

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_k| &\underset{k\to\infty}{\sim} \int_{t=0}^{\sqrt{k/2}} t\,\mathrm{d}t + \int_{t=\sqrt{k/2}}^{\sqrt{\alpha k}} \frac{k}{2t}\,\mathrm{d}t - \int_{t=\sqrt{k}}^{\sqrt{\alpha k}} \sqrt{t^2-k}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}\, k.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi le résultat voulu. □

Posons-nous désormais la question suivante, où O est l'origine et $k \in \mathbb{N}$: quel est le nombre $p(k)$ de points M, de coordonnées $(x, y) \in [\![0, k]\!]^2$, tels que la distance OM soit entière ? De tels M sont en bijection avec les triplets pythagoriciens : nous pouvons faire correspondre les coordonnées de M avec les couples de deux entiers premiers entre eux u et v et un coefficient λ tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x = \lambda(u^2 - v^2) \leqslant k \\ 0 \leqslant y = \lambda(2uv) \leqslant k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant u^2 - v^2 \leqslant \frac{k}{\lambda} \\ 0 \leqslant 2uv \leqslant \frac{k}{\lambda} \end{cases}.$$

D'après le lemme précédent, pour λ fixé, le nombre de tels couples (u, v) peut être majoré par $\mathrm{C}\, k/\lambda$, où C est une constante indépendante de k et λ. Ainsi

$$p(k) \leqslant \mathrm{C}\frac{k}{1} + \mathrm{C}\frac{k}{2} + \cdots + \mathrm{C}\frac{k}{k} \leqslant \mathrm{C}' k \ln k.$$

Revenons désormais à notre problème 1987 n°5, en majorant le nombre $a(k)$ de placements de nos n points dans $[\![0, k]\!]^2$ tels qu'une distance entre deux points distincts soit entière :

- nous choisissons le 1^er point : k^2 possibilités ;
- prenons le second à une distance entière du 1^er : au plus $4p(k)$ possibilités ($p(k)$ pour chacun des carrés au NO, NE, SE et SO du 1^er point) ;
- nous pouvons placer les autres selon au plus $(k^2)^{n-2}$ possibilités.

Nous avons donc la majoration grossière

$$a(k) \leqslant k^2 \times 4p(k) \times (k^2)^{n-2} \leqslant 4\mathrm{C}' k^{2n-1} \ln k. \tag{1}$$

Évaluons le nombre $b(k)$ de placements de nos n points dans $[\![0, k]\!]^2$, tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Nous avons k^2 choix pour le 1^er point, $k^2 - 1$ pour le 2^e, au moins $k^2 - 1 - k$ pour le 3^e (il ne doit pas être aligné avec les deux premiers), puis au moins $k^2 - 1 - k - 2k$ pour le 4^e etc. Ainsi

$$b(k) \underset{k \to \infty}{\sim} (k^2)^n = k^{2n}. \tag{2}$$

Nous déduisons de (1) et (2) que pour k assez grand, $b(k) > a(k)$, donc il existe des placements de nos n points tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux soit irrationnelle : nous avons résolu l'exercice 1987 n°5 par un argument de densité.

Notre raisonnement montre même que si nous choisissons nos points à coordonnées entières « au hasard » dans un carré dont le côté tend vers $+\infty$, la probabilité de satisfaire les conditions de l'énoncé tend vers 1 (car $a(k)/b(k) \to 0$).

6. Arithmétique des formes quadratiques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Prouver que si $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{n/3}$, alors $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n - 2$.

Solution

Raisonnons par l'absurde (nous n'avons pas trop le choix...) en supposant qu'il existe l, $\sqrt{n/3} < l \leqslant n - 2$, tel que $l^2 + l + n$ ne soit pas premier. On peut choisir l minimal si on veut.

Soit q le plus petit diviseur premier de $l^2 + l + n$. Alors $q \leqslant 2l$. En, effet $q^2 \leqslant l^2 + l + n$, donc si $q \geqslant 2l + 1$ on aurait $(2l + 1)^2 \leqslant l^2 + l + n$, donc $l \leqslant \sqrt{n/3}$, ce qui est absurde.

C'est là que l'idée géniale intervient, à travers la relation

$$(l^2 + l + n) - (k^2 + k + n) = (l - k)(l + k + 1).$$

Comme $q \leqslant 2l$, on peut écrire $q = l - k$ ou $q = l + k + 1$ avec $0 \leqslant k \leqslant l - 1$.

La relation précédente montre alors que q divise $k^2 + k + n$. Or $k \leqslant l - 1$ et l a été choisi minimal, donc $k^2 + k + n$ est premier, d'où $k^2 + k + n = q$. La relation $q^2 \leqslant l^2 + l + n$ permet alors d'écrire $(k^2+k+n)^2 \leqslant (n-2)^2+(n-2)+n$, c'est-à-dire $(k^2+k+n)^2 \leqslant n^2-2n+2$. Or $n \geqslant 2$, donc $(k^2 + k + n)^2 < n^2$, ce qui est clairement absurde.

Remarque. Cet exercice est un des plus beaux jamais posé dans une compétition mathématique : le lecteur aura remarqué le fort contraste entre l'apparente simplicité de sa solution (néanmoins très originale) et la portée de son résultat.

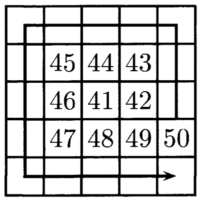
L'énoncé en aura d'ailleurs sans doute surpris plus d'un : il montre l'existence d'un formidable générateur de nombres premiers. Trop beau pour être vrai… En effet, on peut montrer (mais par des moyens beaucoup plus sophistiqués) que les seules valeurs de n vérifiant les conditions de l'énoncé sont $n = 2$, 3, 5, 17 et 41 (cf. l'annexe sur les nombres de Heegner).

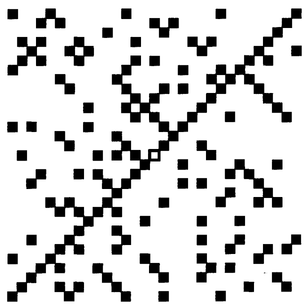
Annexe : spirales d'Ulam et nombres de Heegner

Comment les mathématiciens en sont-ils venus à considérer des nombres premiers de la forme $k^2 + k + n$? La quantité $k^2 + k + n$ a d'abord été étudiée par Euler[3], puis est revenue au goût du jour par deux voies différentes.

Spirales d'Ulam

Ce qui suit relève plutôt de l'anecdote, mais celle-ci, sympathique, mérite d'être contée. En 1967, pendant un congrès de mathématiques, le mathématicien Stanislaw Ulam[4] s'ennuie gravement face à un exposé rébarbatif. Alors que certains auraient décidé de dessiner des avions, lui se met à griffonner le crible « spiralique » ci-contre et à y noircir les nombres premiers. En partant de certaines valeurs pour la case centrale (ici 41), il se rend compte de l'incroyable tendance des nombres premiers (cases noircies) à se placer sur une diagonale. Les nombres diagonaux sont justement de la forme $k^2 + k + n$, où n est le nombre au centre.





Les spirales d'Ulam sont surtout de l'ordre de la curiosité : aucune théorie n'a pour le moment permis de calculer un équivalent de la proportion de nombres premiers sur notre diagonale, lorsque sa longueur tend vers $+\infty$.

3. Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse.
4. Stanislaw Ulam (1902-1984), mathématicien américain.

Nombres de Heegner

La seconde raison est quant à elle beaucoup plus profonde. Le lecteur pourra montrer que $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]^2$ si et seulement si l'anneau gaussien $\mathbb{Z}[\sqrt{\mathrm{D}}]$ est factoriel, où $\mathrm{D} = 1 - 4n$ (pour plus de détails à ce sujet, lire l'excellent livre de Yves Hellegouarch[5]).

Les seules valeurs de D vérifiant ce résultat sont les nombres de Heegner : -7, -11, -19, -43, -67 et -163. Ce résultat a été démontré en 1952 par Kurt Heegner[6], mathématicien amateur et professeur de lycée à Berlin. Les milieux scientifiques ont dans un premier temps refusé sa démonstration (d'une part Heegner refusa de l'exposer lors de conférences et d'autre part la communauté mathématique s'est montrée sceptique face au travail d'un amateur), jusqu'à ce qu'elle soit réhabilitée en 1963. Entre temps, Heegner s'était éloigné du monde scientifique et aurait vécu seul dans un hôtel d'Allemagne de l'Est. Il n'a donc sans doute jamais su qu'il a donné son nom à un théorème si fondamental.

5. Yves Hellegouarch, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*, chapitre I, problème 2, Masson, 1997.

6. Kurt Heegner (1893-1965), *Diophantische Analysis und Modulfunktionen*, Math. Z. 56, 227-253, 1952.

Canberra (Australie)

1988

1. Géométrie : calcul d'une valeur et recherche d'un lieu

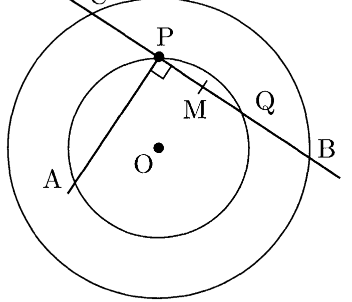
On se place dans le plan. On considère deux cercles de rayons respectifs R et r (R $>$ r) ayant le même centre O. Soit P un point fixe du cercle de rayon r et B un point variable sur le cercle de rayon R. La droite (BP) recoupe le cercle de rayon R au point C et la droite l, perpendiculaire à la droite (BP) en P, recoupe le cercle de rayon r au point A (si l est tangente au cercle, alors A $=$ P).

1. **Trouver l'ensemble des valeurs prises par $\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2$.**
2. **Trouver l'ensemble des milieux des segments BC.**

Solution

Appelons $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_\mathrm{R}$ nos cercles de rayons respectifs r et R, Q l'intersection (autre que P) de (BC) et de $\mathcal{C}_r$ et enfin M le milieu de [BC] (M est également clairement le milieu de [PQ]).

1[re] question : valeurs prises par $\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2$



Quitte à intervertir B et C, on peut supposer que Q $\in$ [PB], comme sur la figure ci-contre.

Ainsi on peut écrire, en utilisant plusieurs fois le théorème de Pythagore[1],

1. Pythagore de Samos (env. 569-475 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

$$\begin{aligned}
\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2 &= (\mathrm{PB}+\mathrm{PC})^2+(\mathrm{PA}^2+\mathrm{PC}^2)+(\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2)\\
&= 2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}+2(\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2)\\
&= 2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}+2\left(\mathrm{PA}^2+(\mathrm{PQ}+\mathrm{PC})^2+\mathrm{PC}^2\right)\\
&= 2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}+2\left((\mathrm{PA}^2+\mathrm{PQ}^2)+2\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PQ}+2\mathrm{PC}^2\right)\\
\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2 &= 6\underbrace{\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}}_{(1)}+2\underbrace{(\mathrm{PA}^2+\mathrm{PQ}^2)}_{(2)}.
\end{aligned}$$

Le terme (1) est l'opposé de la puissance du point P (cf. 1985 n°5) par rapport à $\mathcal{C}_\mathrm{R}$ (donc indépendant de B et C) et le terme (2) vaut par le théorème de Pythagore $\mathrm{AQ}^2 = 4r^2$ car [AQ] est un diamètre de $\mathcal{C}_r$.

Ainsi $\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2$ a une valeur constante, calculée facilement pour (OP) $\perp$ (BC) :

$$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2 = 6\mathrm{R}^2+2r^2.$$

2^e question : lieu du milieu de [BC]

Le point M est le milieu de [PQ]. Or, lorsque B varie, Q décrit l'intégralité de $\mathcal{C}_r$. Ainsi M décrit l'intégralité de l'image de ce cercle par l'homothétie de centre P et de rapport 1/2. Ainsi M décrit le cercle de diamètre [OP].

2. Des graphes masqués par un énoncé obscur

Soit n un entier strictement positif. Les ensembles $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{2n+1}$ sont $2n+1$ sous-ensembles d'un ensemble $\mathcal{B}$. On suppose vérifiées les propriétés suivantes :

- **chaque ensemble $\mathcal{A}_i$ contient exactement $2n$ éléments ;**
- **pour tout (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$ contient exactement un élément ;**
- **tout élément de $\mathcal{B}$ appartient à au moins deux des ensembles $\mathcal{A}_i$.**

Pour quelles valeurs de n est-il possible d'associer à tout élément de $\mathcal{B}$ la valeur 0 ou 1 de telle sorte que, dans chaque ensemble $\mathcal{A}_i$, on trouve exactement n éléments affectés de la valeur 0 ?

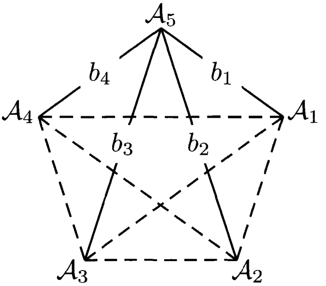
Solution

Dans la suite, nous dirons qu'un élément est de type 0 ou 1 si nous lui avons respectivement associé la valeur 0 ou 1.

La véritable difficulté de l'exercice est de bien en cerner l'énoncé, particulièrement opaque. Nous commençons donc par prouver une formulation équivalente et plus simple, sous forme de théorie des graphes. Ce premier paragraphe permet de mieux appréhender le problème dans les parties suivantes.

1re étape : reformulation du problème sous forme de graphe

Considérons un graphe complet de $2n+1$ sommets, que nous identifions aux ensembles $\mathcal{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2n+1)$. Nous pouvons étiqueter chaque arête de ce graphe par un élément de $\mathcal{B}$: nous choisissons de marquer l'arête reliant $\mathcal{A}_i$ à $\mathcal{A}_j$ $(i \neq j)$ par l'unique élément de $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$.



On a alors les propriétés suivantes :

- tout élément de $\mathcal{B}$ appartient à au moins deux ensembles $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_j$, donc tout élément de $\mathcal{B}$ est présent sur notre graphe comme unique élément d'un $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$;
- pour tout i fixé, les $2n$ éléments de $\mathcal{A}_i$ sont exactement les étiquettes des $2n$ arêtes partant du sommet $\mathcal{A}_i$: si b est un élément de $\mathcal{A}_i$, il est aussi un élément d'un $\mathcal{A}_j$ où $j \neq i$, donc b est l'étiquette de l'arête reliant $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_j$.

Notre problème peut donc s'énoncer de la façon suivante : pour quelles valeurs de n pouvons-nous colorier les arêtes d'un graphe complet de $2n+1$ sommet avec deux couleurs (le type 0 et le type 1) pour que de chaque sommet soient issues le même nombre d'arêtes de chaque couleur ?

2e étape : n est nécessairement pair

Montrons que si nous avons réussi à effectué le typage de notre graphe, alors n est pair. Comptons le nombre N d'arêtes de type 0 dans le graphe : on en a n qui partent de chacun des $2n+1$ sommet et chacune est alors comptée deux fois, donc $2\mathrm{N} = n(2n+1)$. Ainsi n est pair.

3^e étape : si n est pair on a le résultat voulu

Supposons que n est pair et plaçons les $2n+1$ sommets de notre graphe selon un polygone régulier.

Pour i fixé donnons alors à l'arête reliant $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_j$ le type 0 si $\mathcal{A}_j$ est un des n sommets les plus proches de $\mathcal{A}_i$ et le type 1 sinon. Alors notre typage convient (l'expression « les n sommets les plus proches » n'a ici de sens que parce que n est pair : ces sommets sont alors, modulo $2n+1$, $\mathcal{A}_{i_0-n/2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_0-1}, \mathcal{A}_{i_0+1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_0+n/2}$).

3. Points fixes d'une fonction définie récursivement

On désigne par f l'application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans lui-même définie par $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n) \end{cases} .$$

Déterminer le nombre des entiers n, $1 \leqslant n \leqslant 1988$, pour lesquels $f(n) = n$.

Solution

Remarquons tout d'abord que f est bien définie, car tout entier strictement positif s'écrit de façon unique sous une des trois formes : $2n$, $4n+1$ ou $4n+3$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Il faut ensuite dans cet exercice avoir directement la bonne idée : raisonner en base deux. Après quelques calculs de $f(n)$ pour de petites valeurs de n, il semble que $f(n)$ soit le miroir de n en écriture binaire (noté $\mathrm{M}(n)$) : si $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$, alors $f(n) = \overline{a_0 a_1 \ldots a_k}$.

Vérifions cette hypothèse par récurrence sur n. Pour $n = 1$, 2 ou 3 cette hypothèse est bien vérifiée d'après l'énoncé. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$. Il existe $m = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ tel que $n = 2m$, $4m+1$ ou $4m+3$. Par hypothèse de récurrence, $f(m) = \overline{a_0 a_1 \ldots a_k}$.

Dans le premier cas

$$f(n) = f(2m) = f(m) = \overline{a_0 \ldots a_k} = \overline{0 a_0 \ldots a_k} = \mathrm{M}(2m) = \mathrm{M}(n).$$

Dans le second cas l'hypothèse de récurrence s'applique à m et $2m+1$, donc

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4m+1) \\ &= 2f(2m+1) - f(m) \\ &= \overline{1a_0 \ldots a_k 0} - \overline{a_0 \ldots a_k} \\ &= \overline{10a_0 \ldots a_k} \\ &= \mathrm{M}(4m+1) \\ f(n) &= \mathrm{M}(n). \end{aligned}$$

De même, dans le troisième cas, on peut calculer

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4m+3) \\ &= 3f(2m+1) - 2f(m) \\ &= \overline{1a_0 \ldots a_k} + \overline{1a_0 \ldots a_k 0} - \overline{a_0 \ldots a_k 0} \\ &= \overline{1a_0 \ldots a_k} + \overline{10 \ldots 0} \\ &= \overline{11a_0 \ldots a_k} \\ &= \mathrm{M}(4m+3) \\ f(n) &= \mathrm{M}(n). \end{aligned}$$

Ainsi $f(n)$ est bien le miroir de n en écriture binaire, si bien que dénombrer l'ensemble des points fixes de f dans $[\![1, 1988]\!]$ consiste à compter les palindromes dans $[\![1, \overline{11111000100}]\!]$ (écriture binaire de 1988). Or on a 2^{k-1} palindromes à $2k$ chiffres exactement et 2^k palindromes à $2k+1$ chiffres exactement. De plus, tous les palindromes à 11 chiffres sont présents dans $[\![1, \overline{11111000100}]\!]$, excepté $\overline{11111111111}$ et $\overline{11111011111}$. On a ainsi en tout $1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+(2^5-2) = 92$ palindromes dans $[\![1, \overline{11111000100}]\!]$.

La fonction f admet donc 92 points fixes dans $[\![1, 1988]\!]$.

4. Polynômes et fractions rationnelles

Démontrer que l'ensemble des réels x qui vérifient l'inéquation

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

est la réunion d'intervalles disjoints dont le somme des longueurs a pour valeur 1988.

Solution

L'inégalité de l'énoncé est équivalente, après multiplication par le polynôme $\left(\prod_{k=1}^{70}(x-k)\right)^2$, à

$$\mathrm{P}(x)=\underbrace{\prod_{k=1}^{70}(x-k)}_{\mathrm{Q}(x)}\underbrace{\left(4\sum_{k=1}^{70}k\prod_{i\neq k}(x-i)-5\prod_{k=1}^{70}(x-k)\right)}_{\mathrm{R}(x)}\geqslant 0.$$

Le polynôme R vérifie $\mathrm{R}(1)<0, \mathrm{R}(2)>0, \ldots, \mathrm{R}(70)>0$ et tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, R admet donc des racines $a_1, \ldots, a_{70}$ qui vérifient $1<a_1<\cdots<70<a_{70}$. Comme $1, \ldots, 70$ sont les racines de Q, celles de P (de degré 140) sont exactement : $1<a_1<\cdots<70<a_{70}$.

La somme des longueurs cherchée est donc $a_{70}-70+\cdots+a_1-1=(a_1+\cdots+a_{70})-(1+\cdots+70)$. Or $5(a_1+\cdots+a_{70})$ est le coefficient de x^{69} dans R, d'où la somme des longueurs

$$1/5\left(4\sum_{k=1}^{70}k+5\sum_{k=1}^{70}k\right)-\sum_{k=1}^{70}k=1988.$$

5. Géométrie : une inégalité d'aires

Soit ABC est un triangle rectangle en A et D le pied de la hauteur issue de A. La droite joignant les centres des cercles inscrits aux triangles ABD et ACD coupe respectivement (AB) et (AC) en K et L. On désigne respectivement par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ les aires des triangles ABC et AKL.

Montrer que

$$\mathcal{S}\geqslant 2\mathcal{T}.$$

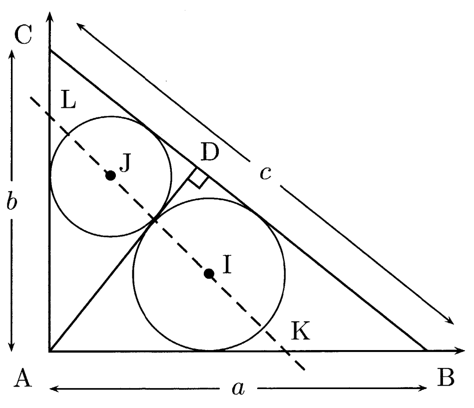
Solution

Une solution analytique paraît ici particulièrement adaptée. En considérant un repère orthonormé d'origine A où les coordonnées de B et C sont respectivement $(a,0)$ et $(0,b)$, on peut facilement :

- calculer les coordonnées de D et les longueurs des côtés de ABD et ACD ;

- calculer les coordonnées de I et J (centres des cercles inscrits respectivement à ABD et ACD), grâce à la relation caractérisant le centre du cercle inscrit comme le barycentre des sommets pondérés des longueurs des côtés opposés ;
- en déduire l'équation de la droite (IJ) puis les coordonnées de K et L ;
- calculer l'aire de AKL et la comparer à celle de ABC.

Il nous reste à mettre tout cela en œuvre. Pour alléger les notations, posons $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Les triangles ABD et ABC sont semblables, donc $\mathrm{BD}/a = a/c$, d'où $\mathrm{BD} = a^2/c$. De même $\mathrm{CD} = b^2/c$ et $\mathrm{AD} = ab/c$. On peut aussi facilement calculer les coordonnées de D (en remarquant que $x_\mathrm{D}/\mathrm{AD} = b/c$ et $y_\mathrm{D}/\mathrm{AD} = a/c$),

$$\mathrm{D} = \frac{ab}{c^2}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Passons désormais aux coordonnées de I et J. Comme le point I vérifie $\mathrm{I} = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{A},\mathrm{BD}),(\mathrm{B},\mathrm{AD}),(\mathrm{D},\mathrm{AB})\}$ (formule souvent utile démontrée dans l'annexe de 1991 n°1), où Bar désigne le barycentre, quelques calculs automatiques donnent

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{\mathrm{AD}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mathrm{AB}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}} = \frac{ab}{c(a+b+c)}\begin{pmatrix} b+c \\ a \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de J sont obtenues en intervertissant a et b dans la formule précédente,

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{ab}{c(a+b+c)} \begin{pmatrix} a+c \\ b \end{pmatrix}.$$

En écrivant la condition $\overrightarrow{\mathrm{XI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \vec{0}$ on obtient $x + y = ab/c$ comme équation de le droite (IJ). Ainsi les coordonnées respectives de K et L sont

$$(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) = \left(\frac{ab}{c}, 0\right), \ (x_{\mathrm{L}}, y_{\mathrm{L}}) = \left(0, \frac{ab}{c}\right).$$

Le triangle AKL est donc isocèle en A d'aire

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Ainsi le résultat est désormais évident :

$$\mathcal{S} \geqslant 2\mathcal{T} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Nous avons égalité si et seulement si $a = b$, c'est-à-dire si le triangle ABC est isocèle en A.

6. Magnifique arithmétique

Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$.
Montrer que $(a^2 + b^2)/(ab + 1)$ est un carré parfait.

Solution

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de k non carré parfait et de $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $(a^2 + b^2)(ab + 1) = k$. On choisit un tel couple (a, b) tel que $\max(a, b)$ soit minimum. Si $a = b$, alors nécessairement $k = 1$, ce qui est contradictoire. On peut donc supposer par exemple $b > a > 0$. La condition $(a^2 + b^2)(ab + 1) = k$ s'écrit aussi

$$b^2 - (ka)b + a^2 - k = 0.$$

Or le polynôme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^2 - (ka)\mathrm{X} + a^2 - k$, de degré 2, admet une autre racine que b, appelée b'. Alors b' est un entier car $b + b' = ka$. Encadrons b' :

- $b' < a$: $bb' = a^2 - k$, donc $b' = (a^2 - k)/b < (a^2 - k)/a < a$;
- $b' > 0$, comme le montre l'étude de ces deux cas :

- si $b' < 0$, alors comme $a > 0$ on a $k = (a^2 + b'^2)/(ab' + 1) < 0$, ce qui est contradictoire ;
- si $b' = 0$, alors $k = a^2$, ce qui est aussi contradictoire car k n'est pas un carré parfait.

On a donc un nouveau couple (a, b') solution avec $0 < b' < a$, ce qui contredit la minimalité de $\max(a, b)$, d'où le résultat.

Brunswick (Allemagne)

1989

1. Partition d'un ensemble

Démontrer que l'on peut décomposer $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ en 117 sous-ensembles deux à deux disjoints $A_1, \ldots, A_{117}$ tels que :

- **chaque A_i contient 17 éléments ;**
- **la somme S des éléments de chaque A_i est la même pour tout $i = 1, 2, \ldots, 117$.**

Solution

Le lecteur pourra d'abord vérifier qu'en effet $17 \times 117 = 1989$ et pourra calculer que nécessairement $S = 17 \times 995$.

L'idée est alors la suivante : il est difficile de construire des ensembles de 17 éléments dont la moyenne est 995, en revanche il est facile de construire de tels ensembles à 2 éléments (de la forme $\{995-n, 995+n\}$), ou à 3 éléments.

Plus précisément, cherchons nos ensembles de 17 éléments sous forme d'un ensemble de 3 éléments de moyenne 995, uni à 7 paires de moyenne 995. Définissons pour cela les ensembles (où n restera à choisir) $\mathcal{A}_n = \{995 + 2n, 995 + 2n + 1, 995 - 4n - 1\}$ et $\mathcal{B}_n$ le « symétrique » de $\mathcal{A}_n$ par rapport à 995 : $\mathcal{B}_n = \{995 - 2n, 995 - 2n - 1, 995 + 4n + 1\}$. Les $\mathcal{A}_n$ et les $\mathcal{B}_n$ sont alors de moyenne 995. Alors, le lecteur vérifiera que l'union ci-dessous est bien disjointe :

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{n=101}^{158} (\mathcal{A}_n \sqcup \mathcal{B}_n) \bigsqcup \{994, 995, 996\} \subset [\![1, 1989]\!].$$

Comment avons-nous choisi les indices 101 et 158 ? Nous avons besoin de 58 indices pour pouvoir former 117 ensembles à trois éléments et il suffit que l'indice de départ $n_0 = 100$ vérifie $995 - 4(n_0 + 57) - 1 \geqslant 1$ et $995 + 4n_0 + 1 \geqslant 995 + 2(n_0 + 57) + 1$, c'est-à-dire $n_0 \in [\![57, 191]\!]$.

Notre ensemble $\mathcal{T}$ est par construction symétrique par rapport à 995 : si $995 + x \in \mathcal{T}$, alors $995 - x \in \mathcal{T}$. Ainsi $[\![1, 1989]\!] - \mathcal{T}$ est aussi symétrique par rapport à 995, nous pouvons donc le partitionner en 819 paires.

Résumons-nous : en unissant 7 de ces paires à chacun des 117 ensembles de trois éléments, nous obtenons 117 ensembles disjoints de 17 éléments ayant la même somme.

2. Géométrie du triangle

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Les bissectrices intérieures des angles A, B, C recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en A_1, B_1, C_1.

On appelle A_0 le point d'intersection de la bissectrice intérieure (AA_1) avec les bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Les points B_0 et C_0 sont définis de manière analogue.

1. **Démontrer que l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est le double de l'aire de l'hexagone $AC_1BA_1CB_1$.**

2. **Démontrer que l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est supérieure ou égale à quatre fois l'aire du triangle ABC.**

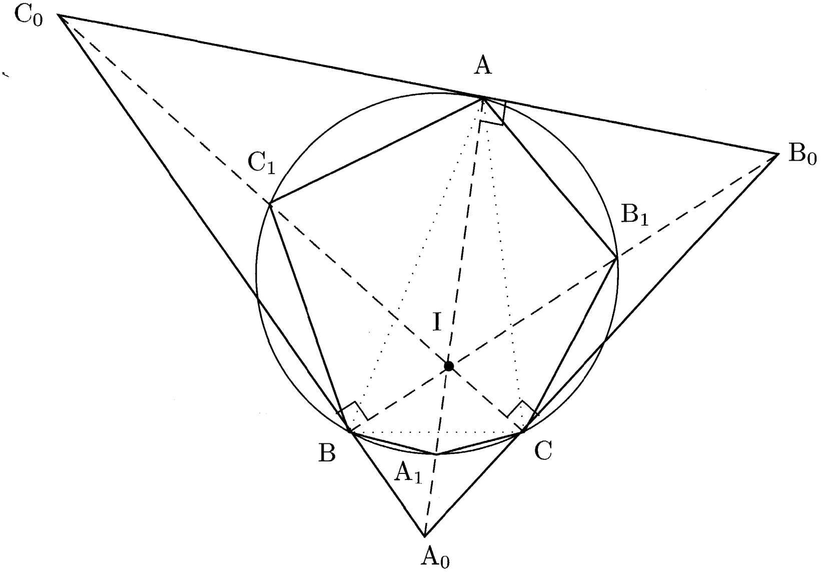
Remarque : les droites (AB) et (AC) définissent deux paires d'angles opposés au sommet, donc deux bissectrices. La bissectrice coupant [BC] est appelée la « bissectrice intérieure » à $\widehat{ABC}$, l'autre étant appelée la « bissectrice extérieure ». De même on définit les bissectrices en B et C.

Solution

1^re question : $\mathscr{A}(A_0B_0C_0) = 2\mathscr{A}(AC_1BA_1CB_1)$

L'énoncé suppose acquis le résultat suivant : dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ et les deux bissectrices extérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont concourantes (et de même en permutant ces sommets). Justifions rapidement ce résultat, en nommant A_0 le point d'intersection des bissectrices extérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. A_0 est ainsi à égale distance des droites (AB) et (BC) d'une part et de (AC) et (BC) d'autre part. Ainsi il est situé à égale distance de (AB) et (AC), il est donc sur une bissectrice de

$\widehat{A}$. Les trois bissectrices extérieures ont une intersection vide, donc A_0 est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$.



Les quadrilatères ABA_1C et IBA_0C sont inscriptibles, on peut donc écrire :

$$\widehat{IA_1B} = \widehat{AA_1B} = \widehat{C} = 2\widehat{ICB} = 2\widehat{IA_0B}$$

Ainsi le point A_1, situé sur le diamètre IA_0 du cercle circonscrit à IBA_0C, vérifie $\widehat{IA_1B} = 2\widehat{IA_0B}$. C'est donc le centre de ce cercle : A_1 est le milieu de $[IA_0]$ (de même B_1 est le milieu de $[IB_0]$ et C_1 celui de $[IC_0]$). Ce résultat permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(A_0B_0C_0) &= \mathscr{A}(A_0BIC) + \mathscr{A}(B_0CIA) + \mathscr{A}(C_0AIB)\\ &= 2\mathscr{A}(A_1BIC) + 2\mathscr{A}(B_1CIA) + 2\mathscr{A}(C_1AIB)\\ \mathscr{A}(A_0B_0C_0) &= 2\mathscr{A}(AC_1BA_1CB_1)\end{aligned}$$

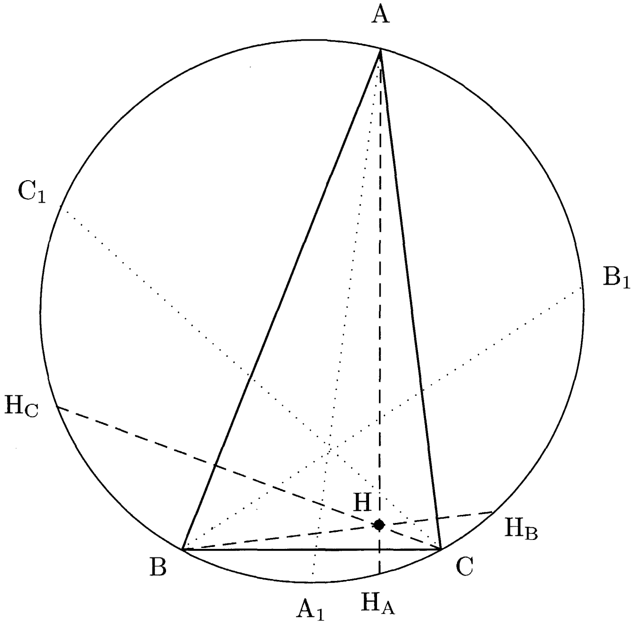
2^e^ question : $\mathscr{A}(A_0B_0C_0) \geqslant 4\mathscr{A}(ABC)$

Nommons H l'orthocentre de ABC et respectivement H_A, H_B, H_C les symétriques de H par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB).

Les habitués de la géométrie du triangle savent alors que ces trois points sont situés sur le cercle circonscrit à ABC. Démontrons ce résultat :

$$\begin{aligned}
\widehat{BH_AC} &= \widehat{BHC} \\
&= \widehat{BHH_A} + \widehat{CHH_A} \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{HBC}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{HCB}\right) \\
&= \widehat{C} + \widehat{B} \\
\widehat{BH_AC} &= \pi - \widehat{A},
\end{aligned}$$

donc A, B, C et H_A sont cocycliques.



L'hexagone $AH_CBH_ACH_B$ a une aire double de celle de ABC. D'après le résultat de la question précédente, il nous suffit donc de démontrer ici que

$$\mathscr{A}(AH_CBH_ACH_B) \leqslant \mathscr{A}(AC_1BA_1CB_1). \tag{1}$$

Or ce résultat est immédiat en regardant la figure ci-dessus : AA_1 est la bissectrice de $\widehat{A}$, donc A_1 est au milieu de l'arc délimité par B et C ne contenant pas A. Ainsi $\mathscr{A}(H_ABC) \leqslant \mathscr{A}(A_1BC)$. On a les résultats analogues sur les deux autres côtés du triangle et en sommant le tout on obtient bien (1).

3. Un résultat combinatoire en géométrie euclidienne

On considère deux entiers strictement positifs k et n et un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan tels que :

(1) trois points quelconques de $\mathcal{S}$ ne sont pas alignés ;

(2) pour tout point P de $\mathcal{S}$, il existe au moins k points distincts dans $\mathcal{S}$ situés à une même distance de P.

Démontrer que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Solution

Dénombrons de deux manières le nombre N de doublets $(A, \{B, C\})$ tels que A, B et C sont deux à deux distincts et $AB = AC$ (N n'est pas exactement le nombre de triangles isocèles s'il existe des triangles équilatéraux).

D'une part, si on commence par choisir A, avec n possibilités, on a ensuite au moins C_k^2 possibilités pour l'ensemble $\{B, C\}$ d'après l'énoncé : on peut choisir ces deux point sur le cercle de centre A contenant k points de $\mathcal{S}$. Ainsi

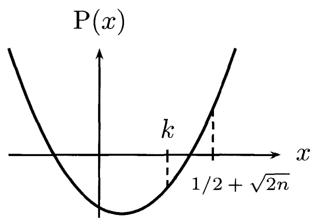
$$N \geqslant nC_k^2.$$

D'autre part, si on commence par choisir l'ensemble $\{B, C\}$ parmi C_n^2 possibilités, on n'a ensuite que deux choix possibles pour A car trois points quelconques ne sont pas alignés. D'où

$$N \leqslant 2C_n^2.$$

En rassemblant ces deux inégalités on obtient

$$P(k) = k^2 - k - 2n + 2 \leqslant 0.$$



Pour en déduire que $k < 1/2 + \sqrt{2n}$, il suffit de montrer que $P(1/2 + \sqrt{2n}) > 0$. Nous avons bien

$$\left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right) - 2n + 2 = \frac{7}{4} > 0.$$

Nous pouvons conclure que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

1^re^ remarque. On peut démontrer une inégalité du même type en dimension $d \geqslant 3$ quelconque, en prenant à la place de (1) la condition suivante, plus générale : « il n'existe pas d'hyperplan affine contenant $d+1$ éléments de $\mathcal{S}$ ». Ceci implique en particulier que trois points quelconques ne sont pas alignés.

Le nombre N de couples du type $(\mathrm{A}, \{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_d\})$, où tous les A_i sont des éléments distincts de $\mathcal{S}$ situés à égale distance de A, vérifie alors $\mathrm{N} \geqslant n\mathrm{C}_k^d$, comme le montre le choix de A parmi les n éléments de $\mathcal{S}$, puis celui des A_i à égale distance de A.

Nous pouvons aussi commencer par choisir d des A_i (C_n^d choix). Montrons que nous avons ensuite au plus 2 choix pour A. Comme par ces d A_i passe un unique hyperplan affine, l'ensemble des points situés à égale distance de ces d points est une droite (il s'agit de calculer l'intersection des hyperplans médiateurs aux paires de points, et le lecteur pourra pour cela vérifier que si m vecteurs sont indépendants, alors l'intersection de leurs orthogonaux est de dimension $d-m$, avec ici $m = d-1$). Comme trois points quelconques ne sont pas alignés, on n'a au plus que deux points A sur cette droite, d'où notre résultat. Ainsi $\mathrm{N} \leqslant 2\mathrm{C}_n^d$.

De l'inégalité

$$n\mathrm{C}_k^d \leqslant \mathrm{N} \leqslant 2\mathrm{C}_n^d$$

le lecteur pourra déduire la majoration grossière

$$k \leqslant d - 1 + 2^{\frac{1}{d}} \left(n - \frac{d}{2}\right)^{1-\frac{1}{d}}.$$

2^e^ remarque. On se place toujours en dimension $d \geqslant 3$. On peut alors majorer k selon une nouvelle méthode, en gardant les mêmes conditions sur les A_i que dans la remarque précédente. Nommons $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ les éléments de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_i$ la sphère de centre A_i ($i \in [\![1, n]\!]$) contenant au moins k éléments de $\mathcal{S}$.

Calculons le nombre D d'ensembles de d points distincts de $\mathcal{S}$ (ultérieurement appelés des d-uplets) : il en existe C_n^d. De plus, étant donné un point A_i de $\mathcal{S}$, on peut trouver C_k^d d-uplets de points de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}_i$.

Cependant, certains d-uplets peuvent ainsi être comptés plusieurs fois. Majorons ce nombre de répétitions. Un d-uplet n'est répété que s'il est inclus dans l'intersection de deux sphères.

De plus tout hyperplan contient au plus d points de $\mathcal{S}$, donc à chaque intersection de sphères on peut associer au plus un d-uplet. Nous en déduisons une bijection entre les répétitions de d-uplets et les intersections non vides de d points du type $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}$ $(i < j)$, qui sont au plus C_n^2. Ainsi $\mathrm{D} \geqslant n\mathrm{C}_k^d - \mathrm{C}_n^2$. L'inégalité suivante donne donc une nouvelle majoration de k, meilleure que dans la remarque précédente :

$$\mathrm{C}_n^d = \mathrm{D} \geqslant n\mathrm{C}_k^d - \mathrm{C}_n^2.$$

4. Géométrie : une inégalité

Le quadrilatère convexe ABCD possède les propriétés suivantes :

- **les côtés AB, AD et BC vérifient : $\mathbf{AB = AD + BC}$;**
- **il existe un point P à l'intérieur du quadrilatère, situé à une distance $\boldsymbol{h}$ de la droite (CD), tel que**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{AP} = \boldsymbol{h} + \mathbf{AD} \\ \mathbf{BP} = \boldsymbol{h} + \mathbf{BC} \end{array}\right. .$$

Démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{h}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathbf{AD}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{BC}}}.$$

Solution

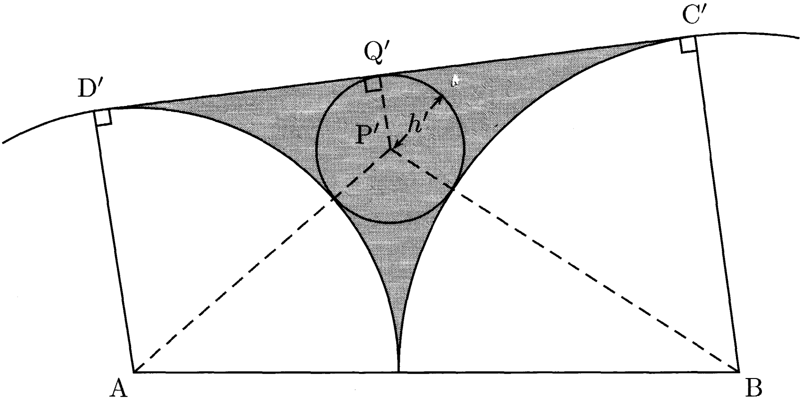
Notons Q le projeté orthogonal de P sur (CD), puis $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}$ et $\mathcal{C}_{\mathrm{P}}$ les cercles de centres respectifs A, B et P et de rayons respectifs AD, BC et h. Le cercle $\mathcal{C}_{\mathrm{P}}$ est alors le cercle inscrit au domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}$ et [CD] (cf. dessin ci-après).

Soient $\mathrm{C}' \in \mathcal{C}_{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{D}' \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$, situés du même côté que C et D par rapport à (AB), tels que (C′D′) soit tangente à $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ et $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}$. Soit alors $\mathcal{D}'$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}$ et [CD].

Nous pouvons alors ici aussi définir un point P′ et un réel h' tels que $\mathrm{AP}' = h' + \mathrm{AD}'$ et $\mathrm{BP}' = h' + \mathrm{BC}'$: P′ est le centre du plus grand cercle inclus dans $\mathcal{D}'$, dont le rayon est h' (l'existence d'un tel cercle, visuellement évidente, n'est manifestement pas à démontrer ici).

Pourquoi avons-nous introduit les points C′ et D′ ? Nous nous sommes donnés ce mal pour majorer très simplement h : le nouveau domaine $\mathcal{D}'$ contient $\mathcal{D}$, si bien que

$$h \leqslant h'.$$



Il nous suffit donc désormais de calculer h'. Par le théorème de Pythagore[1], on peut écrire les trois relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{r} (\mathrm{AD}'-h')^2+\mathrm{D}'\mathrm{Q}'^2=(\mathrm{AD}'+h')^2 \\ (\mathrm{BC}'-h')^2+\mathrm{C}'\mathrm{Q}'^2=(\mathrm{BC}'+h')^2 \\ (\mathrm{BC}'-\mathrm{AD}')^2+\mathrm{C}'\mathrm{D}'^2=(\mathrm{BC}'+\mathrm{AD}')^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}'\mathrm{Q}'^2=4h'\mathrm{AD}' \\ \mathrm{C}'\mathrm{Q}'^2=4h'\mathrm{BC}' \\ \mathrm{C}'\mathrm{D}'^2=4\mathrm{BC}'\cdot\mathrm{AD}' \end{array}\right. .$$

La simple égalité $\mathrm{C}'\mathrm{D}'=\mathrm{C}'\mathrm{Q}'+\mathrm{D}'\mathrm{Q}'$ s'écrit donc, grâce aux relations ci-dessus,

$$\sqrt{\mathrm{BC}'\cdot\mathrm{AD}'}=\sqrt{h'\mathrm{BC}'}+\sqrt{h'\mathrm{AD}'} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{h'}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{AD}}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{BC}}}.$$

On a donc bien

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{AD}}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{BC}}}.$$

5. Entiers consécutifs ne contenant pas la puissance d'un nombre premier

Démontrer que pour chaque entier strictement positif n, il existe n entiers strictement positifs consécutifs tels qu'aucun d'entre eux ne soit une puissance entière d'un nombre premier.

1. Pythagore de Samos (env. 569-475 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

Solution

Les première et deuxième méthodes apportent une réponse très concise au problème, par des raisonnements radicalement différents : la première démonstration est très constructive, à la manière de la preuve d'Euclide[2] de l'infinité des nombres premiers, alors que la seconde est fondée sur le théorème chinois. L'annexe, quant à elle, montre plus fondamentalement pourquoi notre énoncé est tout à fait naturel, à travers les notions de densité nulle des puissances et des nombre premiers.

1^re^ méthode : en s'inspirant d'Euclide

Pour $n \geqslant$ l'ensemble

$$\{(n!)^2+2,(n!)^2+3,\ldots,(n!)^2+n\}$$

est constitué de $n-1$ entiers consécutifs qui ne peuvent pas être des puissances entières d'un nombre premier. Cet ensemble fonctionne, mais dans les conditions d'un concours il n'est pas du tout évident et naturel de le trouver.

Pour prouver notre résultat, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $k \in [\![2, n]\!]$, p premier et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$(n!)^2+k=p^m.$$

On a $k \mid (n!)^2+k$, d'où $k \mid p^m$ et donc, comme $k>1$ et p premier, on a $k=p^l$ avec $l \in [\![1, m]\!]$.
Deux cas se présentent alors :

- si $l=m$, alors nécessairement $n!=0$, ce qui est absurde ;
- sinon, on a $p \mid \frac{(n!)^2}{k}+1$. Or $p \mid k \mid \frac{(n!)^2}{k}$, donc $p \mid 1$, ce qui est également absurde.

Nous avons donc bien trouvé $n-1$ entiers naturels consécutifs tels qu'aucun ne soit la puissance entière d'un nombre premier.

2^e^ méthode : le théorème chinois

Considérons n nombres composés $c_1=p_1p_2, \ldots, c_n=p_{2n-1}p_{2n}$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts. Comme les c_i

2. Euclide d'Alexandrie (env. 325-265 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

sont premiers entre eux, le système suivant admet une solution d'après le théorème chinois :

$$\begin{cases} x \equiv \quad 0 \quad [c_1] \\ x \equiv \quad -1 \quad [c_2] \\ \quad\vdots \\ x \equiv -(n-1)\ [c_n] \end{cases}.$$

Aucun des n nombres consécutifs $x, x+1, \ldots, x+(n-1)$ ne peut alors être la puissance d'un nombre premier, car chacun est divisible par un c_i.

Annexe : densité en arithmétique

On peut donner pour ce problème une solution fondée sur la notion de densité, définie ci-après. Nous énonçons aussi en préliminaire un lemme utile pour la suite, que montrera facilement le lecteur.

Définition. *Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{N}$ admet pour densité $d(\mathcal{E}) \in [0,1]$ si*

$$\frac{|\mathcal{E} \cap [\![1,n]\!]|}{n} \underset{n\to\infty}{\to} d(\mathcal{E}).$$

Lemme. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ tels que $d(\mathcal{A})$, $d(\mathcal{B})$ et $d(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ soient bien définis. Alors $d(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ est bien défini et vérifie*

$$d(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = d(\mathcal{A}) + d(\mathcal{B}) - d(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

Nous démontrons dans la suite que l'ensemble des puissances et l'ensemble des nombres premiers ont une densité nulle. Ceci nous donnera pour finir une nouvelle démonstration pour notre problème.

Densité nulle des puissances. Un énoncé semblable à notre problème est le suivant.

Démontrer que pour chaque entier positif n, il existe n entiers naturels consécutifs tels qu'aucun d'entre eux ne soit la puissance entière d'un entier naturel (c'est-à-dire de la forme l^m avec $(l,m) \in \mathbb{N}^2$ et $m \geqslant 2$).

Pour résoudre ce problème, on peut considérer la densité des puissances entières dans $\mathbb{N}$. Pour un entier naturel a, on note $f(a)$ le nombre de puissances entières dans $[\![1,a]\!]$.

Raisonnons par l'absurde en nous donnant n tel que, pour toute suite de n entiers consécutifs, l'un d'entre eux soit une puissance entière.

On aurait alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(kn) \geqslant k$. Donc $f(kn)/(kn) \geqslant 1/n$. Pour apporter une contradiction à ceci, montrons que $f(x)/x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que la densité des puissances dans $\mathbb{N}$ est nulle.

Le nombre de carrés dans $[\![1, a]\!]$ n'excède pas $\sqrt{a}$, le nombre de cubes ne dépasse pas $a^{1/3}$... et enfin la puissance maximale n_0 est telle que $2^{n_0} \leqslant a$, donc $n_0 = \lfloor \ln a / \ln 2 \rfloor$. On a ainsi

$$f(a) \leqslant \sum_{k=2}^{\left\lfloor \frac{\ln a}{\ln 2} \right\rfloor} a^{\frac{1}{k}}.$$

Tous les termes de la somme étant inférieurs au premier, on obtient la majoration grossière

$$f(a) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln a}{\ln 2} \right\rfloor \sqrt{a}.$$

Ainsi $f(a)/a \leqslant \ln a/(\sqrt{a} \ln 2) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui apporte la contradiction souhaitée.

Densité nulle des nombres premiers : démonstration élémentaire. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, classés par ordre croissant : $p_1 < p_2 < \cdots$

Calculons tout d'abord la densité des multiples de p_1, de p_2, ... ou de p_m, qui forment un ensemble appelé $\mathcal{M}_m$. Le lecteur vérifiera immédiatement que la densité des multiples d'un entier k est $1/k$, donc d'après le lemme $d(\mathcal{M}_2)$ existe et $d(\mathcal{M}_2) = 1/2 + 1/3 - 1/(2 \times 3) = 1 - (1 - 1/2)(1 - 1/3)$. Une récurrence immédiate, où nous utilisons le lemme, permet alors d'écrire

$$d(\mathcal{M}_m) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Si $d(\mathcal{M}_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$, le problème est terminé : pour $\varepsilon > 0$, il existe alors m_0 tel que $1 - d(\mathcal{M}_{m_0}) \leqslant \varepsilon$, donc il existe n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $1 - |\mathcal{M}_{m_0} \cap [\![1, n]\!]|/n \leqslant 2\varepsilon$. Pour n supérieur à n_0 et à m_0/ε,

$$\frac{|\mathcal{P} \cap [\![1, n]\!]|}{n} \leqslant \frac{n + m_0 - |\mathcal{M}_{m_0} \cap [\![1, n]\!]|}{n} \leqslant 3\varepsilon,$$

donc $\mathcal{P}$ est bien de densité nulle. Il nous reste à montrer que $d(\mathcal{M}_m)$ tend vers 1, c'est-à-dire que $\prod_{i=1}^{m} (1 - 1/p_i)$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. Pour ce dernier point, deux méthodes sont possibles.

La première est la plus classique : à l'aide de la formule $1/(1-x) = \sum_{i\geqslant 0} x^i$, on constate que

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)} = \sum_{t\in \mathrm{H}_m} \frac{1}{t} \geqslant \sum_{i=1}^{p_m} \frac{1}{i},$$

où H_m est l'ensemble des entiers naturels ayant tous leurs diviseurs dans $\{p_1,\dots,p_m\}$. Comme la série harmonique diverge, on a $\prod_{i=1}^{m}(1-1/p_i) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est le résultat voulu.

La deuxième méthode est purement arithmétique et devrait être retenue les candidats à divers concours car les examinateurs sont sans doute un peu lassés de la première. Par passage au logarithme, il nous suffit de montrer que la série de terme général $\log(1-1/p_i)$ est divergente. Or $\log(1-1/p_i) \underset{i\to\infty}{\sim} -1/p_i$, donc il nous suffit de montrer la divergence de $\sum 1/p_i$, chose que nous allons faire directement.

Raisonnons par l'absurde en supposant la convergence de cette série. On peut alors trouver $r \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=r+1}^{\infty} 1/p_i < 1/2$. Notons $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des entiers de $[\![1,n]\!]$ ayant tous leurs diviseurs premiers dans $\{p_1,\dots,p_r\}$. Dans $[\![1,n]\!]$ on a au maximum n/p multiples de p, donc

$$|\mathcal{E}_n| \geqslant n - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{n}{p_i} \geqslant n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

Ceci signifie intuitivement qu'au moins un entier sur deux s'écrit sous la forme $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ici est la contradiction : l'ensemble de ces entiers a une densité nulle ; on peut le montrer en remarquant qu'on a au maximum $\left(\frac{\lg n}{\lg p_1}\right)^r$ de ces nombres dans $[\![1,n]\!]$.

Conclusion. Comme l'ensemble des nombres premiers et l'ensemble des puissances sont de densité nulle, le lecteur pourra facilement prouver que l'ensemble des puissances de nombres premiers est de densité nulle. On peut alors conclure, comme pour la densité nulle des puissances, qu'il existe une suite (même une infinité de suites) de n entiers naturels consécutifs tels qu'aucun ne soit la puissance d'un nombre premier.

6. Dénombrement de permutations

Soit n un entier non nul. On dit qu'une permutation $(x_1, \ldots, x_{2n})$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ possède la propriété $\mathscr{P}$ si $|x_i - x_{i+1}| = n$ pour au moins un i dans $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$.

Démontrer que, pour chaque n, il y a strictement plus de permutations possédant la propriété $\mathscr{P}$ que de permutations ne la possédant pas.

Solution

1^re méthode : une injection

Si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des permutations possédant la propriété $\mathscr{P}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble de celles qui ne la possèdent pas, il nous suffit de trouver une injection « stricte » de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. En voici une, où x_p désigne l'unique élément de $[\![1, 2n]\!]$ tel que $x_p \equiv x_1 + n\ [2n]$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{2n}) & & \mathcal{B} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (x_2, \ldots, x_{p-1}, x_1, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{2n}) & & \mathcal{A} \end{array}$$

On remarque que tout élément $(y_1, \ldots, y_{2n})$ de $\operatorname{Im}\varphi$ vérifie $\mathscr{P}$ grâce à un unique indice i tel que $|y_{i+1} - y_i| = n$ ($y_i = x_1$ et $y_{i+1} = x_p$). Ceci permet de vérifier facilement l'injectivité de φ. Ainsi $|\mathcal{A}| \geqslant |\mathcal{B}|$.

L'énoncé demande une inégalité stricte. Celle-ci est acquise si $n = 1$ ($|\mathcal{B}| = 0$). Pour $n \geqslant 2$, il nous faut trouver un élément σ de $\mathcal{A}$ n'appartenant pas à $\operatorname{Im}\varphi$. Ceci est acquis pour tout σ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ grâce à au moins 2 indices, comme par exemple pour $\sigma = (1, n+1, 2, n+2, \ldots)$.

2^e méthode : la formule du crible

Notons $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des permutations de $[\![1, 2n]\!]$ telles que $|x_{i+1} - x_i| = n$ ($1 \leqslant i \leqslant 2n-1$) et $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{2n-1} \mathcal{A}_i$. La formule du crible (présentée en annexe) montre que

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^{2n-1} |\mathcal{A}_i| + \cdots + (-1)^{n-1} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{2n-1}|. \qquad (1)$$

Hélas le calcul exact de cette expression n'est pas exploitable (cf. annexe). Notre but est seulement de minorer $|\mathcal{A}|$, montrons donc que si

$|\mathcal{A}| \geqslant 1$ alors

$$|\mathcal{A}| \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} |\mathcal{A}_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n-1} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| . \tag{2}$$

Pour cela, considérons un élément x de $\mathcal{A}$ et soient $\mathcal{A}_{i_1}, \mathcal{A}_{i_2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_{k_x}}$ les k_x ensembles $\mathcal{A}_i$ distincts auxquels appartient x. Notre élément est alors compté 1 fois dans le premier membre de (2) et $k_x - \mathrm{C}_{k_x}^2$ dans celui de droite. On peut donc obtenir (2) par sommation sur tous les x de l'inégalité $1 \geqslant k_x - \mathrm{C}_{k_x}^2$.

Il nous reste à évaluer les termes du second membre de (2), d'abord $|\mathcal{A}_i|$: on a $2n$ choix pour x_i, x_{i+1} est ensuite imposé par la condition $|x_{i+1} - x_i| = n$, puis nous sommes libres pour la suite et pouvons choisir parmi les $(2n-2)!$ permutations des $2n-2$ éléments restants : $|\mathcal{A}_i| = 2n(2n-2)!$.

Passons à $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j|$. Celui-ci est nul si $|i-j| = 1$: on ne peut pas avoir trois nombres distincts de $[\![1, 2n]\!]$ tels que $x_i \equiv x_{i+1} \equiv x_{i+2}\ [n]$. On a donc nécessairement $|i-j| \geqslant 2$. Pour i fixé, on doit donc choisir j dans $[\![i+2, 2n-1]\!]$ donc au total $(2n-3)+(2n-4)+\cdots+1 = (2n-2)(2n-3)/2$ possibilités pour (i,j). Pour un tel couple d'indices (i,j), nous avons $2n$ choix pour x_i, x_{i+1} est imposé, puis $2n-2$ choix pour x_j, x_{j+1} est imposé et enfin $(2n-4)!$ choix pour les $2n-4$ éléments restants ; ainsi $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| = 2n(2n-2)(2n-4)!$.

L'inéquation (2) s'écrit donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\geqslant (2n-1) \times 2n(2n-2)! \\ &\qquad - \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} \times 2n \times (2n-2)(2n-4)! \\ &= (2n)! \left(1 - \frac{n-1}{2n-1}\right) \\ |\mathcal{A}| &> \frac{(2n)!}{2}. \end{aligned}$$

Comme il existe $(2n)!$ permutations de $[\![1, 2n]\!]$, cette dernière inégalité est le résultat voulu.

Annexe : calcul exact et équivalent de $|\mathcal{A}|$

Nous donnons ici une démonstration de la formule du crible (aussi appelée principe d'inclusion et d'exclusion) et son application au calcul exact de $|\mathcal{A}|$.

Formule du crible. *Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$ des ensembles finis et $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$. Alors*

$$|\mathcal{A}| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} |\mathcal{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{i_m}| \,.$$

DÉMONSTRATION. Soit x un élément de $\mathcal{A}$ appartenant à k ensembles distincts $\mathcal{A}_i$. Regardons, dans le membre de droite de notre égalité, les ensembles auxquels x appartient : nous avons k ensembles de type $\mathcal{A}_i$, C_k^2 de type $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$, etc. Ainsi x y est compté $k - \mathrm{C}_k^2 + \mathrm{C}_k^3 - \cdots + (-1)^{k+1} \mathrm{C}_k^k =$ 1 fois d'après le binôme de Newton. Par sommation sur tous les x, nous obtenons l'égalité voulue. □

La formule du crible nous a donné (1), que nous pouvons expliciter pour avoir une valeur exacte de $|\mathcal{A}|$: si $i_1, \ldots, i_k$ sont k éléments de $[\![1, 2n-1]\!]$ tels que deux quelconques ne soient pas consécutifs, alors

$$|\mathcal{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{i_k}| = (2n)(2n-2)\ldots(2n-2(k-1)) \times (2n-2k)!.$$

On a en effet $2n$ choix pour x_{i_1}, x_{i_1+1} est alors imposé, puis $2n-2$ choix pour x_{i_2}, x_{i_2+1} est imposé etc. Enfin il nous reste à choisir une permutation des $2n-2k$ éléments finalement restants.

Il nous faut encore calculer le nombre de k-uplets d'indices que nous pouvons choisir dans $[\![1, 2n-1]\!]$ tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas consécutifs. Si nous notons $\mathcal{E}$ cet ensemble et $\mathcal{F}$ l'ensemble des k-uplets de $[\![1, 2n-k]\!]$, rangés par ordre croissant, alors le lecteur vérifiera facilement que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) & \longmapsto & (x_1, x_2+1, \ldots, x_k+(k-1)) \end{array}$$

est une bijection. Ainsi $|\mathcal{E}| = |\mathcal{F}| = \mathrm{C}_{2n-k}^{k}$. Forts de ces résultats, nous pouvons réécrire (1) sous la forme

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{C}_{2n-k}^{k}(2n)(2n-2)\dots(2n-2(k-1))\times(2n-2k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!}\,2^k\frac{n!}{(n-k)!}\,(2n-2k)! \\
|\mathcal{A}| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{C}_{n}^{k}2^k(2n-k)!.
\end{aligned}$$

Ainsi $|\mathcal{A}|/(2n)! = \sum_{k=1}^{n} f(n,k)$, avec $f(n,k) = (-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k 2^k(2n-k)!/(2n)!$. Un simple calcul montre que $f(n,k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^{k+1}/k!$. Moyennant de lourdes précautions pour intervertir limite et somme, nous en déduisons que $\sum_{k=1}^{n} f(n,k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k!$, c'est-à-dire

$$|\mathcal{A}| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e-1}{e}\,(2n)!.$$

Nous avons bien $(e-1)/e \approx 0.632 \geqslant 0.5$. Ceci montre un résultat en un certain sens plus fort que notre énoncé initial (pour n assez grand, largement plus de la moitié des permutations vérifient le propriété $\mathscr{P}$), mais prouve la propriété $\mathscr{P}$ pour n plus grand qu'un certain entier, n_0, difficilement calculable.

Pékin (Chine)

1990

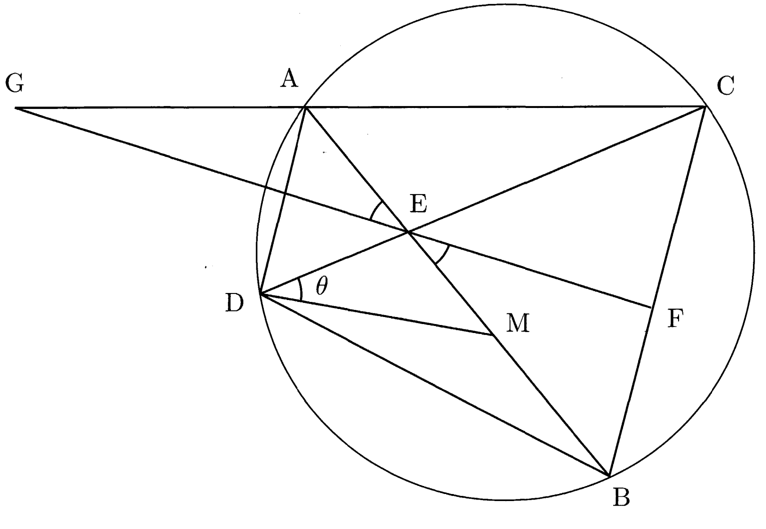
1. Géométrie

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'un même cercle tels que les segments [AB] et [CD] se coupent en E ; M est un point du segment [BE] distinct de B et de E. La tangente en E au cercle passant par les trois points D, E et M coupe respectivement les droites (BC) et (AC) en F et G.

Calculer le quotient EG/EF en fonction de t = AM/AB.

Solution

Notons $\theta = \widehat{\mathrm{EDM}}$. La droite (EF) est la tangente au cercle circonscrit au triangle DEM, donc $\widehat{\mathrm{MEF}} = \theta$.



On peut calculer facilement les valeurs de EG/EF dans deux cas particuliers :

- pour $t = \mathrm{AE}/\mathrm{AB}$ les points E et M sont confondus, donc $\mathrm{EG}/\mathrm{EF} = \mathrm{EA}/\mathrm{EB} = t/(1-t)$;
- pour $t \to 1$, le point M tend vers B, donc $\widehat{\mathrm{AEG}} \to \widehat{\mathrm{EDB}} = \widehat{\mathrm{CAB}}$; les angles $\widehat{\mathrm{AEG}}$ et $\widehat{\mathrm{CAB}}$ tendent donc à devenir alterne-internes, donc $\mathrm{EG}/\mathrm{EF} \to +\infty$.

Les exercices d'olympiades n'allant jamais chercher de formules très compliquées, on a donc de bonnes chances d'avoir $\mathrm{EG}/\mathrm{EF} = t/(1-t) = \mathrm{MA}/\mathrm{MB}$. Nous allons en effet démontrer ce résultat.

Montrons tout d'abord que les triangles ADM et CFE sont semblables. On a $\widehat{\mathrm{CEF}} = \pi - (\widehat{\mathrm{FEM}} + \widehat{\mathrm{MED}}) = \pi - (\widehat{\mathrm{EDM}} + \widehat{\mathrm{MED}}) = \widehat{\mathrm{AMD}}$ et $\widehat{\mathrm{CFE}} = \pi - \widehat{\mathrm{EFB}} = \widehat{\mathrm{FEB}} + \widehat{\mathrm{EBF}} = \widehat{\mathrm{EDM}} + \widehat{\mathrm{ADC}} = \widehat{\mathrm{ADM}}$. Ainsi les triangles ADM et CFE sont bien semblables, donc

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MA}}. \tag{1}$$

De même les triangles BDM et CGE sont semblables : $\widehat{\mathrm{ECG}} = \widehat{\mathrm{DBM}}$ et $\widehat{\mathrm{CGE}} = \pi - (\theta + \widehat{\mathrm{GAE}}) = \widehat{\mathrm{BAC}} - \theta = \widehat{\mathrm{BDC}} - \theta = \widehat{\mathrm{BDM}}$. On a donc

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MB}}. \tag{2}$$

Le rapport des équations (2) et (1) fournit alors exactement le résultat attendu,

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{t}{1-t}.$$

2. Les « bonnes » colorations

Sur un cercle on se donne un ensemble $\mathcal{E}$ de $2n-1$ points distincts ($n \geqslant 3$). Si exactement k de ces points sont coloriés en noir, cette coloration est dite « bonne » s'il existe au moins une paire de points noirs telle que l'un des deux arcs ouverts formés par ces deux points contienne exactement n points de $\mathcal{E}$.

Trouver la plus petite valeur de k pour laquelle toute coloration en noir d'exactement k points de $\mathcal{E}$ est « bonne ».

Solution

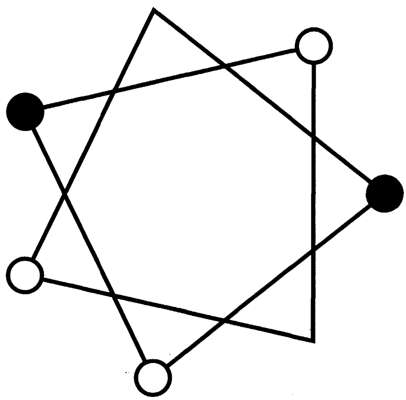
Notons les points $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ dans les sens trigonométrique. Une coloration est « mauvaise » (c'est-à dire « pas bonne ») si, pour tout A_i colorié, A_{i+n+1} (où les indices sont pris modulo $2n-1$) n'est pas colorié.

Il suffit donc, pour obtenir une coloration mauvaise, de considérer la suite (finie) des $(A_{1+k(n+1)})_{k\geqslant 0}$ et d'en colorier successivement un sur deux. En adoptant cette méthode, deux cas se présentent alors.

1^er^ cas : $(2n-1) \wedge (n+1) = 1$

Dans ce cas les sommets $A_1, A_{1+n+1}, \ldots, A_{1+(2n-2)(n+1)}$ forment un cycle : si $1+i(n+1) \equiv 1+j(n+1)\ [2n-1]$, alors $(i-j)(n+1) \equiv 0\ [2n-1]$ donc $i-j \equiv 0\ [2n-1]$, car $n+1$ et $2n-1$ sont premiers entre eux.

Si on colorie les $n-1$ sommets $A_1, A_{1+2(n+1)}, \ldots, A_{1+2(n-2)(n+1)}$ en noir, on a donc une coloration mauvaise.



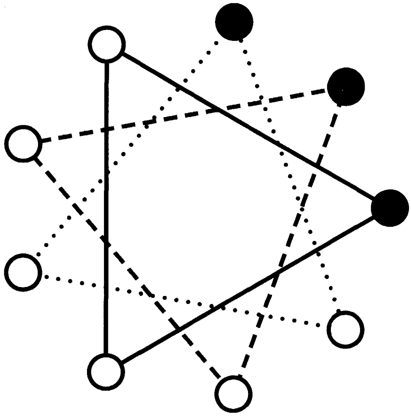
De plus, si on colorie n sommets $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ en noir, alors la coloration est bonne : les n sommets $A_{i_1+n+1}, A_{i_2+n+1}, \ldots, A_{i_n+n+1}$ ne peuvent pas être tous non coloriés car on aurait en tout au moins $2n$ sommets.

Nous pouvons conclure que la plus petite valeur de k cherchée est n.

2^e^ cas : $(2n-1) \wedge (n+1) = 3$

Ceci est le dernier cas possible, car $(2n-1) \wedge (n+1) \mid 2(n+1) - (2n-1) = 3$. Ici, $(2n-1) \wedge (n+1) = 3$, donc $3 \mid (n+1)$: on peut écrire $n = 3m+2$. Alors les sommets $A_1, A_{1+n+1}, \ldots, A_{1+(2m)(n+1)}$ forment un cycle, de même que les sommets $A_2, A_{2+n+1}, \dots, A_{2+(2m)(n+1)}$ et $A_3, A_{3+(n+1)}, \dots, A_{3+(2m)(n+1)}$.

Chacun de ces cycles comporte $2m+1$ sommets, donc on peut en colorier m en noir en gardant une coloration mauvaise. On a ainsi colorié $3m = n-2$ sommets et la coloration demeure mauvaise.



Si on colorie $n-1 = 3m+1$ sommets, d'après le principe des tiroirs on en a nécessairement au moins $m+1$ qui se retrouvent sur un même cycle. On en a ainsi colorié $m+1$ parmi les $2m+1$ éléments de ce cycle, le même argument que dans le paragraphe précédent montre que deux d'entre eux sont éloignés d'une distance $n+1$.

La valeur de k cherchée est donc ici $n-1$.

Remarque. Remplaçons dans l'énoncé $2n-1$ et $n+1$ respectivement par l et m et notons $d = l \wedge m$. Le lecteur pourra vérifier en calquant la méthode précédente que le nombre k cherché est alors $d\lfloor l/(2d) \rfloor + 1$.

3. Entiers n tels que n^2 divise $2^n + 1$

Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(2^n+1)/n^2$ soit entier ?

Solution

Remarquons que les candidats ayant lu un bon livre d'arithmétique classique, comme celui de Waclaw Sierpinski[1], étaient ici très avantagés, tant la deuxième partie de la démonstration ci-après est classique.

1. WACLAW SIERPINSKI (1882-1969), mathématicien polonais. *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*, Hachette Université, 1972.

Après quelques essais, le candidat courageux aura remarqué que seules quelques puissances de trois (1 et 3) semblent vérifier les conditions de l'énoncé. Nous nous intéressons donc dans un premier temps à la valuation 3-adique de n ($v_3(n)$, définie dans la table des notations, située P.XI).

1re étape : $v_3(n) = 0$ ou 1

Montrons par récurrence sur $k = v_3(n)$ la propriété suivante, valable pour tout entier n impair :

$$v_3(2^n + 1) = v_3(n) + 1.$$

Commençons par le rang 0, en supposant donc que 3 ne divise pas n. Montrons alors que $2^n + 1 \equiv 3$ ou 6 $[9]$: n, impair et non divisible par 3, s'écrit $6m + 1$ ou $6m + 5$. Comme $2^6 \equiv 1$ $[9]$, on a $2^n \equiv 2^1$ ou $2^5 \equiv 2$ ou 5 $[n]$, d'où le résultat.

Montrons désormais le résultat au rang $k + 1$ en le supposant vérifié au rang $k \geqslant 1$. On peut écrire, en notant $n = 3^{k+1}m$ ($3 \wedge m = 1$, m impair) et $x = 2^{3^k m}$,

$$2^n + 1 = 2^{3^{k+1}m} + 1 = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Ainsi $v_3(2^n + 1) = v_3(x + 1) + v_3(x^2 - x + 1) = k + v_3(x^2 - x + 1)$ par hypothèse de récurrence.

Or $2^3 \equiv -1$ $[9]$, donc $x = 2^{3^k m} \equiv -1$ $[9]$, donc $x^2 - x + 1 \equiv 3$ $[9]$, si bien que $v_3(x^2 - x + 1) = 1$, ce qui achève la récurrence.

Si nous avons $n^2 \mid 2^n + 1$, alors nécessairement n est impair donc d'après la relation ci-dessus : $2v_3(n) \leqslant v_3(2^n + 1) = v_3(n) + 1$, donc $v_3(n) = 0$ ou 1.

2e étape : n est une puissance de trois

Soit n un entier vérifiant l'énoncé. On a en particulier $2^n + 1 \equiv 0$ $[n]$ (ce qui démontre que n est impair).

Raisonnons par l'absurde en supposant que n n'est pas une puissance de trois : introduisons p le plus petit facteur premier de n distinct de trois et δ l'ordre de 2 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Alors $p \mid n \mid 2^n + 1$, donc $2^{2n} \equiv (-1)^2 \equiv 1$ $[p]$. On a donc $\delta \mid 2n$.

De plus, par le petit théorème de Fermat[2], comme p est impair ($p \mid n$, impair), on a $2^{p-1} \equiv 1$ $[p]$. Donc $\delta \mid p-1$ et en particulier $\delta < p$.

Résumons : $\delta \mid 2n$ et $\delta < p$. On a alors deux possibilités :

- si δ est impair, $\delta \mid n$ donc $-1 \equiv 2^n \equiv (2^\delta)^{(n/\delta)} \equiv 1$ $[p]$: $p = 2$, absurde car p est impair ;
- si δ est pair, alors $\delta = 2k$ avec $k \mid n$ et $k < p$. Par minimalité de p, k est nécessairement une puissance de 3. D'après le premier paragraphe, on a même nécessairement $k = 1$ ou $k = 3$. Dans le premier cas, on obtient $2^2 \equiv 1$ $[p]$ donc $p = 3$, dans le second $2^6 \equiv 1$ $[p]$ donc $p = 3$ ou 7. Le cas où $p = 3$ est clairement absurde, et celui où $p = 7$ aussi : l'ordre δ de 2 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est trois et non pas six.

Ainsi nous avons démontré dans ce second paragraphe que n est une puissance de trois. Comme $v_3(n) = 0$ ou 1 d'après le premier paragraphe, nous avons $n = 1$ ou $n = 3$, qui vérifient bien l'énoncé.

4. Un peu d'imagination

On désigne par $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels strictement positifs. Construire une application f de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ vérifiant, pour tout x et y de $\mathbb{Q}_+^*$,

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

Solution

L'idée est de trouver une expression simple de f sur l'ensemble des nombres premiers et de l'étendre à $\mathbb{Q}_+^*$ grâce au théorème fondamental de l'arithmétique.

Effectuons une partition de l'ensemble des nombres premiers en deux ensembles disjoints infinis : $\{p_1, p_2, \dots\}$ et $\{q_1, q_2, \dots\}$. On pose alors f telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $f(p_i) = q_i$ $f(q_i) = 1/p_i$.

Plus généralement, tout $x \in \mathbb{Q}_+^*$ s'écrit de façon unique

$$x = \prod_{i \in \mathrm{I}} {p_i}^{\alpha_i} \prod_{j \in \mathrm{J}} {q_j}^{\beta_j},$$

2. Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.

où les α_i et les β_j appartiennent à $\mathbb{Z}^*$, et où I, J sont des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}^*$ (pour I et J vides on a par convention $x = 1$). On pose alors

$$f(x) = \prod_{i\in\mathrm{I}} q_i^{\alpha_i} \prod_{j\in\mathrm{J}} p_j^{-\beta_j}.$$

Cette fonction f vérifie bien les conditions de l'énoncé. En effet, pour $x = \prod_{i\in\mathrm{I}} p_i^{\alpha_i} \prod_{j\in\mathrm{J}} q_j^{\beta_j}$ et $y = \prod_{i\in\mathrm{I}'} p_i^{\alpha'_i} \prod_{j\in\mathrm{J}'} q_j^{\beta'_j}$, on a

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= f\left(\prod_{i\in\mathrm{I}} p_i^{\alpha_i} \prod_{j\in\mathrm{J}} q_j^{\beta_j} f\left(\prod_{i\in\mathrm{I}'} p_i^{\alpha'_i} \prod_{j\in\mathrm{J}'} q_j^{\beta'_j}\right)\right) \\ &= f\left(\prod_{i\in\mathrm{I}} p_i^{\alpha_i} \prod_{j\in\mathrm{J}} q_j^{\beta_j} \prod_{i\in\mathrm{I}'} q_i^{\alpha'_i} \prod_{j\in\mathrm{J}'} p_j^{-\beta'_j}\right) \\ &= \prod_{i\in\mathrm{I}} q_i^{\alpha_i} \prod_{j\in\mathrm{J}} p_j^{-\beta_j} \prod_{i\in\mathrm{I}'} p_i^{-\alpha'_i} \prod_{j\in\mathrm{J}'} q_j^{-\beta'_j} \\ f(xf(y)) &= \frac{f(x)}{y}. \end{aligned}$$

5. Arithmétique et théorie des jeux

Deux joueurs A et B choisissent alternativement des entiers ; on désignera respectivement par $n_1, n_3, \ldots, n_{2k+1}, \ldots$ et $n_2, n_4, \ldots, n_{2k+2}, \ldots$ les entiers choisis par A et B. Un entier n_0 supérieur ou égal à 2 est donné ; A choisit n_1 vérifiant $n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_0^2$ puis B choisit n_2 tel que n_1/n_2 soit une puissance entière strictement positive d'un nombre premier ; si B a choisi n_{2k}, A choisit n_{2k+1} vérifiant $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$, puis B choisit n_{2k+2} tel que n_{2k+1}/n_{2k+2} soit une puissance entière strictement positive d'un nombre premier.

Le joueur A est vainqueur s'il réussit à choisir 1990, B est vainqueur s'il réussit à choisir 1.

1. **Pour quelles valeurs de n_0 le joueur A peut-il assurer sa victoire ?**
2. **Pour quelles valeurs de n_0 le joueur B peut-il assurer sa victoire ?**
3. **Pour quelles valeurs de n_0 chacun des deux joueurs peut-il empêcher l'autre de gagner ?**

Solution

Remarquons tout d'abord que A possède, si n_{2k} est suffisamment grand, un éventail de choix beaucoup plus large que B. On peut donc s'attendre à avoir pour A une stratégie gagnante dès que n_0 est suffisamment grand.

C'est ce que nous démontrons en premier, ce qui est le cas le plus difficile. Les questions 2 et 3, où nous n'aurons qu'un nombre fini de cas à étudier, se déduisent de la première.

Stratégie gagnante pour A

A peut conclure le jeu si B doit choisir n_{2k} tel que $n_{2k} \leqslant 1990 \leqslant n_{2k}^2$, c'est-à-dire pour $n_{2k} \in [\![45, 1990]\!]$. Cette simple considération nous pousse donc à définir pour A la stratégie suivante, construite de façon à mener B dans cet intervalle.

Pour de petites valeurs de n_{2k}, A choisit toujours un nombre ayant un grand nombre de facteurs premiers, pour obliger B à choisir un nombre suffisamment grand.

Stratégie de A

Cas pour A	Intervalle de n_{2k}	Choix de n_{2k+1}
1$^{\text{er}}$	8-11	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
2$^{\text{e}}$	12-19	$140 = 2^2 \times 5 \times 7$
3$^{\text{e}}$	20-34	$280 = 2^3 \times 5 \times 7$
4$^{\text{e}}$	35-44	$495 = 3^2 \times 5 \times 11$
5$^{\text{e}}$	45-1990	1990
6$^{\text{e}}$	$(11^n \times 181)$ - $(11^{n+1} \times 181 - 1)$	$11^{n+1} \times 181$

Montrons alors qu'il s'agit bien d'une stratégie gagnante, en constatant que nos divers cas mènent forcément au 5$^{\text{e}}$:

- 1$^{\text{er}}$ cas : B doit ensuite choisir 12, 15, 20, 30 ou 60, donc A se retrouve dans le 2$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$, 4$^{\text{e}}$ ou 5$^{\text{e}}$ cas ;

- 2$^{\text{e}}$ cas : B choisit ensuite 20, 28, 35, 70 ou 140, donc A se retrouve dans le 3$^{\text{e}}$, 4$^{\text{e}}$ ou 5$^{\text{e}}$ cas ;

- 3$^{\text{e}}$ cas : B doit choisir ensuite 35, 40, 56, 70, 140 ou 280 ; A est donc ensuite dans le 4$^{\text{e}}$ ou 5$^{\text{e}}$ cas ;

- 4$^{\text{e}}$ cas : B doit choisir 45, 55, 99, 165 ou 495 ; A se retrouve donc dans le 5$^{\text{e}}$ cas ;

- 5$^{\text{e}}$ cas : A a gagné !

- 6^e cas : si $n_{2k} \geqslant 1991 = 11 \times 181$ (181 est premier), alors il est dans un intervalle du type $[\![11^n 181, 11^{n+1}181-1]\!]$ (cas $6_n{}^e$, $n \geqslant 1$). A ayant choisi $11^{n+1} \times 181$, B doit choisir 11, (ce qui conduit A dans le 1^{er} cas),121, 181 ou 1331 (et A se retrouve dans le 5^e cas), ou bien le choix de B aboutit à un cas du type $6_m{}^e$ avec $m < n$. Ainsi après un nombre fini d'étapes A se retrouve dans le 1^{er} ou le 5^e cas.

On a ainsi prouvé qu'après un nombre fini d'étapes, si $n_0 \geqslant 8$, en suivant cette stratégie, A gagne.

Stratégie gagnante pour B

Regardons ce qui arrive pour de petites valeurs de n_0.

- Si $n_0 = 2$, alors $n_1 = 2, 3$ ou 4 et B est ensuite vainqueur en choisissant $n_2 = 1$.

- Si $n_0 = 3$, $n_1 \in [\![3, 9]\!]$. Si $n_1 \neq 6$, n_1 est est la puissance d'un nombre premier donc B a gagné en choisissant $n_2 = 1$. Si $n_1 = 6$, B peut choisir $n_2 = 2$ et on se retrouve dans le cas précédent : B gagne.

- Si $n_0 = 4$, $n_1 \in [\![4, 16]\!]$ et pour échapper à une défaite immédiate A doit choisir $n_1 = 6$, 10, 12, 14 ou 15. En choisissant ensuite respectivement n_2 =2, 2, 3, 2 et 3, B s'assure encore de sa victoire en se ramenant à l'un des cas précédents.

- Si $n_0 = 5$, $n_1 \in [\![5, 25]\!]$ et A doit choisir 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22 ou 24 pour ne pas perdre immédiatement. Alors en choisissant respectivement 2, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2 et 3, B a encore gagné.

Pour $n_0 \in [\![2, 5]\!]$, il existe une stratégie permettant à B de gagner.

Statu quo

Si $n_0 = 6$, A doit choisir $n_1 \in [\![6, 36]\!]$ non-puissance d'un nombre premier. Or il doit choisir $n_1 \in [\![26, 36]\!]$ car on a vu dans la partie précédente que pour $n_1 \in [\![1, 25]\!]$ B a une stratégie gagnante. Si $n_1 \neq 30$ on a donc $n_1 = 26$, 28, 33, 34, 35 ou 36 et B gagne en choisissant respectivement 2, 4, 3, 2, 5, 4. A doit donc choisir $n_1 = 30$. Alors n_2=6, 10, 15 ou 30. Ces trois derniers cas mènent à la perte de B comme le montre le premier paragraphe. On a donc $n_2 = 6$ et ce petit manège recommence : chacun des deux joueurs peut empêcher l'autre de gagner.

Si $n_0 = 7$, A doit choisir d'après ce qui précède 30 ou un nombre de $[\![37, 49]\!]$ non puissance d'un nombre premier. Si ce n'est ni 30 ni 42, il choisit 38, 39, 40, 44, 45, 46 ou 48 et en choisissant respectivement 2, 3, 5, 4, 5, 2, 3, B gagne. On a donc n_1=30 ou 42, ce qui oblige B à choisir $n_2 = 6$ et on retombe dans le cas précédent.

Voici un petit résumé :

- si $n_0 = 2$, 3, 4, ou 5, il existe une stratégie gagnante pour B ;
- si $n_0 = 6$ ou 7, chaque joueur peut empêcher l'autre de gagner ;
- si $n_0 \geqslant 8$, il existe une stratégie gagnante pour A.

6. Géométrie, combinatoire et arithmétique !

Prouver qu'il existe un polygone convexe ayant 1990 côtés vérifiant les deux propriétés suivantes :

- **le polygone a tous ses angles égaux ;**
- **les longueurs des côtés forment une permutation des nombres $1^2, 2^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$.**

Solution

Si on note $A_1A_2\ldots A_{1990}$ un polygone (dans le sens direct) vérifiant les hypothèses de l'énoncé, alors la première condition se traduit par : $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}})$ vaut $2(k-1)\pi/1990$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (les sommets sont considérés modulo 1990).

Dans un bon repère, le vecteur $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ doit donc avoir pour affixe $x_k\zeta^k$, avec $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{1990}}$ et où les x_k ($k \in [\![1, 1990]\!]$) forment une suite décrivant l'ensemble $\{1^2, \ldots, 1990^2\}$.

En raisonnant dans le plan complexe, le problème peut donc être formulé de la façon suivante : trouver $\sigma \in \mathcal{S}_{1990}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{1990} \sigma(i)^2\zeta^i = 0.$$

D'après le théorème chinois, comme $1990 = 2 \times 5 \times 199$, à tout i de $[\![1,1990]\!]$ on peut associer de façon bijective un triplet (a_i, b_i, c_i) de $[\![0,1]\!] \times [\![0,4]\!] \times [\![0,198]\!]$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} i \equiv a_i \ [2] \\ i \equiv b_i \ [5] \\ i \equiv c_i \ [199] \end{array}\right. .$$

On a alors pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_{1990}$, en notant $\zeta_2 = e^{\frac{2i\pi}{2}}$, $\zeta_5 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\zeta_{199} = e^{\frac{2i\pi}{199}}$,

$$\sum_{i=1}^{1990} \sigma(i)^2 \zeta^i = \sum_{i=1}^{1990} \sigma(i)^2 {\zeta_2}^{a_i} {\zeta_5}^{b_i} {\zeta_{199}}^{c_i}.$$

C'est alors qu'il faut sortir de sa poche le bon σ : $\sigma(i) = 1 + 995a_i + 199b_i + c_i$. On vérifiera facilement que σ effectue une permutation de $[\![1,1990]\!]$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{1990} \sigma(i)^2 \zeta^i &= \sum_{i=1}^{1990} \sigma(i)^2 {\zeta_2}^{a_i} {\zeta_5}^{b_i} {\zeta_{199}}^{c_i} \\
&= \sum_{c=0}^{198} \sum_{b=0}^{4} \sum_{a=0}^{1} (1 + 995a + 199b + c)^2 {\zeta_2}^{a} {\zeta_5}^{b} {\zeta_{199}}^{c} \\
&= \sum_{c=0}^{198} \sum_{b=0}^{4} \Big[(1 + 199b + c)^2 - \\
&\qquad\qquad (1 + 995 + 199b + c)^2\Big] {\zeta_5}^{b} {\zeta_{199}}^{c} \\
&= -995 \sum_{c=0}^{198} {\zeta_{199}}^{c} \left(\sum_{b=0}^{4} (997 + 398b + 2c) {\zeta_5}^{b} \right) \\
&= -995 \times 398 \left(\sum_{c=0}^{198} {\zeta_{199}}^{c} \right) \left(\sum_{b=0}^{4} b\, {\zeta_5}^{b} \right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{1990} \sigma(i)^2 \zeta^i = 0.$$

Ceci est le résultat souhaité.

Remarque. Quelle propriété spécifique de 1990 permet de construire un tel polygone ? On peut en fait ici conclure par ce raisonnement pour tout polygone à n côtés avec n pair et possédant au moins deux facteurs premiers impairs distincts.

Sigtuna (Suède)

1991

1. Une inégalité géométrique

Soit ABC un triangle. On désigne respectivement par A′, B′ et C′ les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles $\widehat{\mathrm{CAB}}$, $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{BCA}}$ avec les côtés BC, CA, AB et par I le centre du cercle inscrit. Montrer que

$$\frac{1}{4} < \frac{\mathrm{AI} \cdot \mathrm{BI} \cdot \mathrm{CI}}{\mathrm{AA'} \cdot \mathrm{BB'} \cdot \mathrm{CC'}} \leqslant \frac{8}{27}.$$

Solution

Exprimons toutes les longueurs de notre inégalité en fonction des longueurs des côtés de notre triangle : BC $= a$, AC $= b$ et AB $= c$. Les relatons suivantes, prouvées en annexe, sont classiques et doivent être retenues par le lecteur (où Bar désigne le barycentre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A'} = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\} \\ \mathrm{I} \ = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\} \end{array} \right. .$$

Ainsi, par associativité du barycentre, I $= \mathrm{Bar}\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{A'}, b + c)\}$, donc AI/AA′ $= (b + c)/(a + b + c)$. En effectuant le même calcul pour BI/BB′ et CI/CC′, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{AI} \cdot \mathrm{BI} \cdot \mathrm{CI}}{\mathrm{AA'} \cdot \mathrm{BB'} \cdot \mathrm{CC'}} = \frac{b+c}{a+b+c} \, \frac{c+a}{a+b+c} \, \frac{a+b}{a+b+c}.$$

L'inégalité de droite découle alors de l'inégalité de la moyenne (présentée en 1984 n°1). En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AI}\cdot\mathrm{BI}\cdot\mathrm{CI}}{\mathrm{AA'}\cdot\mathrm{BB'}\cdot\mathrm{CC'}} &= \frac{b+c}{a+b+c}\,\frac{c+a}{a+b+c}\,\frac{a+b}{a+b+c}\\ &\leqslant \left[\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\right)\right]^3\\ \frac{\mathrm{AI}\cdot\mathrm{BI}\cdot\mathrm{CI}}{\mathrm{AA'}\cdot\mathrm{BB'}\cdot\mathrm{CC'}} &\leqslant \frac{8}{27}.\end{aligned}$$

Pour montrer l'inégalité de gauche dans l'énoncé, faisons une transformation de Ravi (c'est toujours plus confortable), présentée dans l'annexe de 1983 n°6 : posons $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$, avec x, y et z strictement positifs. Nous avons alors, après substitution, l'inégalité voulue (où nous notons $s = x + y + z$) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AI}\cdot\mathrm{BI}\cdot\mathrm{CI}}{\mathrm{AA'}\cdot\mathrm{BB'}\cdot\mathrm{CC'}} &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{s}\right)\left(1+\frac{y}{s}\right)\left(1+\frac{z}{s}\right)\\ &> \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{s}+\frac{y}{s}+\frac{z}{s}\right)\\ \frac{\mathrm{AI}\cdot\mathrm{BI}\cdot\mathrm{CI}}{\mathrm{AA'}\cdot\mathrm{BB'}\cdot\mathrm{CC'}} &> \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

1re remarque. Le lecteur constatera que dans l'inégalité de droite le cas d'égalité est atteint lorsque notre triangle est équilatéral. On se rapproche du cas d'égalité dans celle de gauche avec un triangle isocèle dont la longueur commune à deux côtés tend vers l'infini.

2e remarque. Pour prouver cette inégalité, nous aurions pu essayer d'exprimer toutes nos données en fonction des angles du triangle et non pas en fonction de ses longueurs. Si on désigne par a, b et c les demi-angles aux sommets de ce triangle, l'inégalité demandée par l'énoncé, après de lourds calculs, devient

$$\frac{1}{4} < \frac{\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)}{8\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c} \leqslant \frac{8}{27}.$$

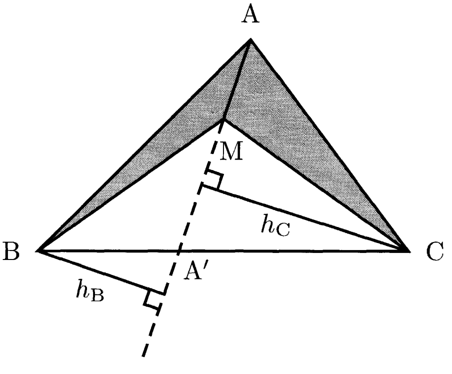
Cette inégalité semble hélas très difficile à démontrer, à moins d'être un as de la trigonométrie.

Annexe : les coordonnées barycentriques et le « théorème de la bissectrice ».

La caractérisation d'un point intérieur à un triangle comme un certain barycentre des sommets est souvent utile, en particulier pour le centre du cercle inscrit : il est extrêmement fastidieux de caractériser ses coordonnées à l'aide des bissectrices. Par conséquent, le lecteur devra systématiquement utiliser sa caractérisation sous forme de barycentre.

Théorème. *Soit* M *un point strictement intérieur à un triangle* ABC *et* $\mathrm{A}' = (\mathrm{MA}) \cap (\mathrm{BC})$. *Alors* A′ *et* M *s'expriment sous la forme de barycentres grâce aux formules suivantes :*

$$\begin{cases} \mathrm{A}' = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{B}, \mathscr{A}(\mathrm{MAC})), (\mathrm{C}, \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))\} \\ \mathrm{M} = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{A}, \mathscr{A}(\mathrm{MBC})), (\mathrm{B}, \mathscr{A}(\mathrm{MAC})), (\mathrm{C}, \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))\} \end{cases}.$$



Démonstration. Notons h_B et h_C les longueurs des hauteurs abaissées respectivement de B et C sur (AM).

Nous avons alors par le théorème de Thalès[1] $\mathrm{A'B}/\mathrm{A'C} = h_\mathrm{B}/h_\mathrm{C}$. Ainsi on a $1/2(h_\mathrm{B}\mathrm{AM})\cdot \mathrm{A'C} = 1/2(h_\mathrm{C}\mathrm{AM})\cdot \mathrm{A'B}$, ce qui s'écrit $\mathscr{A}(\mathrm{MAB})\mathrm{A'C} = \mathscr{A}(\mathrm{MAC})\mathrm{A'B}$, soit encore $\mathrm{A}' = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{B}, \mathscr{A}(\mathrm{MAC})), (\mathrm{C}, \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))\}$.

Notons g le point barycentre de $(\mathrm{A}, \mathscr{A}(\mathrm{MBC}))$, $(\mathrm{B}, \mathscr{A}(\mathrm{MAC}))$ et $(\mathrm{C}, \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))$. Le point g est ainsi le barycentre de $(\mathrm{A}, \mathscr{A}(\mathrm{MBC}))$ et de $\mathrm{Bar}\{(\mathrm{B}, \mathscr{A}(\mathrm{MAC})), (\mathrm{C}, \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))\}$ (par associativité du barycentre), c'est-à-dire de $(\mathrm{A}, \mathscr{A}(\mathrm{MBC}))$ et de $(\mathrm{A}', \mathscr{A}(\mathrm{MAC}) + \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))$ d'après le résultat précédent. Ainsi $g \in (\mathrm{AA}') = (\mathrm{MA})$. De même, $g \in (\mathrm{MB})$ et $g \in (\mathrm{MC})$, donc nécessairement les points g et M coïncident : $\mathrm{M} = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{A}, \mathscr{A}(\mathrm{MBC})), (\mathrm{B}, \mathscr{A}(\mathrm{MAC})), (\mathrm{C}, \mathscr{A}(\mathrm{MAB}))\}$. □

Corollaire : le centre du cercle inscrit et le « théorème de la bissectrice ». *Si* M *coïncide avec le centre* I *du cercle circonscrit au triangle* ABC, *alors, en notant* $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{AC} = b$ *et* $\mathrm{BC} = a$,

$$\begin{cases} \mathrm{A}' = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\} \\ \mathrm{I} = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\} \end{cases}.$$

En particulier, $\mathrm{A'B}/\mathrm{A'C} = c/b$ *(théorème de la bissectrice).*

1. Thalès de Milet (env. 624-547 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

Démonstration. Si M est le centre I du cercle (de rayon r) inscrit au triangle ABC, alors $\mathscr{A}(\mathrm{MBC}) = 1/2\,ra$, $\mathscr{A}(\mathrm{MAC}) = 1/2\,rb$ et $\mathscr{A}(\mathrm{MAB}) = 1/2\,rc$, donc les relations montrées dans le théorème précédent s'écrivent immédiatement sous la forme voulue.

Comme $\mathrm{A}' = \mathrm{Bar}\{(\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\}$, nous avons bien $\mathrm{A'B}/\mathrm{A'C} = c/b$ (résultat souvent utile qui peut aussi se démontrer directement en utilisant la loi des sinus). □

2. Entiers n tels que les nombres premiers avec n dans $[\![1, n]\!]$ soient en progression arithmétique

Soient n un entier naturel strictement supérieur à six et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tous les entiers compris strictement entre 0 et n et qui sont premiers avec n. On suppose

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0.$$

Montrer que n est soit un nombre premier, soit une puissance entière de deux.

Solution

Soit n un entier vérifiant la propriété de l'énoncé. Distinguons deux cas.

Si n est impair, alors 1 et 2 sont premiers avec n. L'écart entre deux a_i consécutifs est donc égal à 1. L'ensemble des entiers inférieurs à n et premiers avec n est donc $[\![1, k]\!]$. L'entier $n-1$ est également premier avec n, donc nécessairement $k = n-1$; ainsi tous les entiers de $[\![1, n-1]\!]$ sont premiers avec n : n est un nombre premier.

Si n est pair, raisonnons par l'absurde et supposons que $n = 2^m q$, avec q impair, $q \geqslant 3$. Alors nécessairement $q > 3$ ou $m > 1$ (car sinon $n = 6$, ce qui contredit l'énoncé), donc $q+2$ et $q+4$ sont inférieurs à n, premiers avec $2^m q = n$. L'écart entre deux a_i consécutifs est donc 1 ou 2. Dans chacun de ces deux cas $(q+2) - 2 = q$ est alors premier avec n, ce qui est absurde. L'entier n est donc une puissance de deux.

Réciproquement, les nombres premiers et les puissances de deux vérifient bien les conditions de l'énoncé.

3. Combinatoire et arithmétique

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Trouver le plus petit entier n tel que dans chaque sous-ensemble de n éléments de $\mathcal{S}$, il y ait 5 éléments qui soient premiers entre eux deux à deux.

Solution

Notre problème revient à construire un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S}$ ne contenant pas 5 nombres premiers entre eux deux à deux, et de cardinal maximal pour cette propriété. Un moyen efficace de construire $\mathcal{M}$ est de prendre tous les multiples de a_1, a_2, a_3 ou a_4 (4 entiers quelconques) appartenant à $\mathcal{S}$: d'après le principe des tiroirs, parmi 5 éléments quelconques de $\mathcal{M}$, 2 sont multiples d'un même a_i et ne sont donc pas premiers entre eux.

Nous cherchons $\mathcal{M}$ de cardinal maximal, le choix $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{2, 3, 5, 7\}$ semble donc judicieux. Si on note $\mathcal{M}_i$ l'ensemble des multiples d'un entier i dans $[\![1, 280]\!]$, on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_5 \cup \mathcal{M}_7$, donc d'après la formule du crible (présentée dans l'annexe de l'exercice 1989 n°6),

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}| &= (|\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3| + |\mathcal{M}_5| + |\mathcal{M}_7|) \\
&\qquad - (|\mathcal{M}_6| + |\mathcal{M}_{10}| + |\mathcal{M}_{14}| + |\mathcal{M}_{15}| + |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{35}|) \\
&\qquad\qquad + (|\mathcal{M}_{30}| + |\mathcal{M}_{42}| + |\mathcal{M}_{70}| + |\mathcal{M}_{105}|) - |\mathcal{M}_{210}| \\
&= (140 + 93 + 56 + 40) - (46 + 28 + 20 + 18 + 13 + 8) \\
&\qquad + (9 + 6 + 4 + 2) - 1 \\
|\mathcal{M}| &= 216.
\end{aligned}$$

Montrons pour conclure que pour tout sous-ensemble à 217 éléments de $\mathcal{S}$, on peut trouver 5 éléments premiers entre eux deux à deux. Soit $\mathcal{X}$ un tel ensemble. Si $\mathcal{X}$ contient 5 nombres premiers, nous n'avons plus rien à prouver. Sinon, $\mathcal{X}$ contient au moins $217 - 4 = 213$ nombres composés. Mais $[\![1, 280]\!]$ ne contient que 220 nombres composés : ce sont exactement les éléments de $\mathcal{M}$, auxquels nous devons enlever 2, 3, 5, 7 et rajouter 11×11, 11×13, 11×17, 11×19, 11×23, 13×13, 13×17 et 13×19.

Ainsi au plus 7 nombres composés de $[\![1, 280]\!]$ n'appartiennent pas à $\mathcal{X}$. Si nous trouvons 8 sous-ensembles disjoints $\mathcal{A}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 8$) contenus dans $[\![1, 280]\!]$, chacun contenant 5 nombres composés premiers entre eux deux à deux, on pourra conclure d'après le principe des tiroirs : un $\mathcal{A}_i$ sera nécessairement inclus dans $\mathcal{X}$. Voici un exemple de 8 ensembles $\mathcal{A}_i$ qui convient et achève ainsi la démonstration :

$$\mathcal{A}_1 = \{2 \times 139, 3 \times 89, 5 \times 53, 7 \times 37, 11 \times 23\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{2 \times 137, 3 \times 83, 5 \times 47, 7 \times 31, 11 \times 19\}$$
$$\mathcal{A}_3 = \{2 \times 131, 3 \times 79, 5 \times 47, 7 \times 29, 11 \times 17\}$$
$$\mathcal{A}_4 = \{2 \times 127, 3 \times 73, 5 \times 43, 7 \times 23, 11 \times 13\}$$
$$\mathcal{A}_5 = \{2 \times 113, 3 \times 71, 5 \times 41, 7 \times 19, 11 \times 11\}$$
$$\mathcal{A}_6 = \{2 \times 109, 3 \times 67, 5 \times 37, 7 \times 17, 13 \times 19\}$$
$$\mathcal{A}_7 = \{2 \times 107, 3 \times 61, 5 \times 31, 7 \times 13, 13 \times 17\}$$
$$\mathcal{A}_8 = \{2 \times 103, 3 \times 59, 5 \times 29, 7 \times 11, 13 \times 13\}.$$

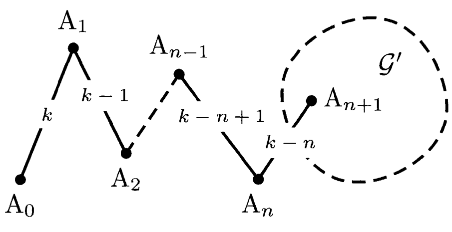
4. Théorie des graphes et théorie des nombres

Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe ayant exactement k arêtes. Montrer qu'il est possible de numéroter ces arêtes par l'ensemble de tous les entiers $1, 2, \ldots, k$ de telle sorte que, pour tout sommet v de $\mathcal{G}$ appartenant à au moins deux arêtes, les numéros affectés aux arêtes contenant v ont pour plus grand diviseur commun un.

Solution

L'idée principale à avoir ici est tout simplement que deux entiers consécutifs sont premiers entre eux. Procédons par récurrence sur k (pour $k = 1$, 2 ou même 3, la propriété est évidente).

Si un sommet A_0 de $\mathcal{G}$ n'est l'extrémité que d'une arête, alors $\mathcal{G}$ possède à partir de ce sommet une suite maximale $A_1, \ldots, A_n$, d'autres sommets n'étant l'extrémité que de deux arêtes. Numérotons alors A_iA_{i+1} avec

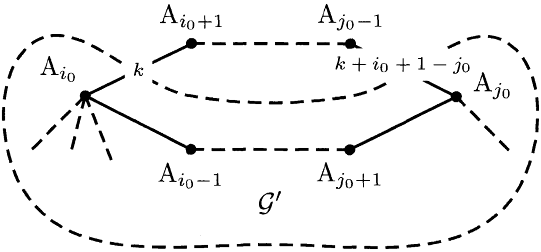


$k - i$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ (où A_{n+1} est le voisin de A_n autre que A_{n-1}), et le graphe $\mathcal{G}'$ obtenu en enlevant $A_1, \ldots, A_n$ selon une numérotation adéquate, par hypothèse de récurrence. La numérotation des arêtes ainsi choisie convient.

Si tous les sommets ont au moins 2 arêtes, alors nous pouvons y trouver un cycle $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Éliminons d'ores et déjà le cas évident où chaque A_i est le sommet d'exactement deux arêtes : les A_i sont tous les sommets du graphe et il suffit de numéroter A_iA_{i+1} par $i+1$ (les indices sont pris modulo n).

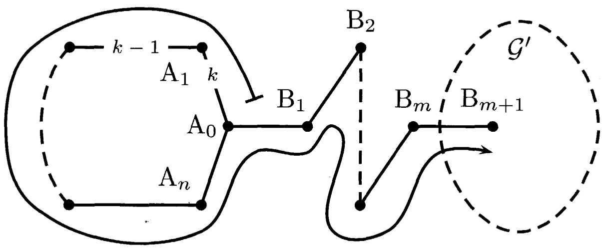
Distinguons désormais deux cas.

S'il existe deux A_i distincts qui sont les sommets d'au moins trois arêtes, nous pouvons en trouver deux, A_{i_0} et A_{j_0} ($i_0 < j_0$), tels que pour tout $i \in [\![i_0+1, j_0-1]\!]$, A_i soit le sommet de deux arêtes. Numérotons alors, pour $i \in [\![i_0, j_0-1]\!]$, A_iA_{i+1} par $k+i+1-j_0$ et appliquons l'hypothèse de récurrence au graphe $\mathcal{G}'$ obtenu en enlevant les sommets A_i pour $i \in [\![i_0+1, j_0-1]\!]$ (ce graphe est encore connexe). Notre numérotation convient alors.



Sinon, tous les A_i sont sommets de 2 arêtes, sauf un, que nous pouvons supposer être A_0. Si A_0 est le sommet d'au moins 4 arêtes, numérotons alors A_iA_{i+1} par $k-i$ et appliquons l'hypothèse de récurrence au graphe obtenu en enlevant les A_i distincts de A_0. Cette numérotation satisfait les conditions de l'énoncé.

Si A_0 est le sommet de 3 arêtes, nous pouvons à partir de A_0 construire une suite $B_1, \ldots, B_m$ de longueur maximale où les B_i ne sont les sommets que de 2 arêtes. Comme ci-dessus, numérotons les arêtes par ordre décroissant, depuis k, le long de la flèche. Si nous appliquons l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{G}'$, notre numérotation convient.



5. Autour des points de Brocard

> **Soit ABC un triangle et P un point intérieur à ce triangle. Montrer que parmi les trois angles $\widehat{PAB}$, $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PCA}$, l'un au moins est inférieur ou égal à 30°.**

Solution

1re méthode : la plus simple

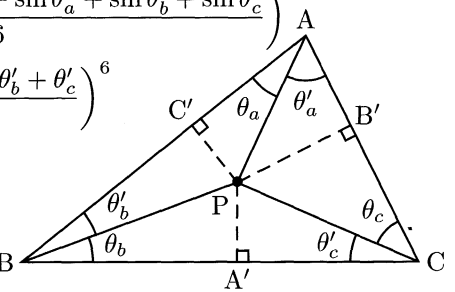
C'est de loin la plus courte, mais elle n'est pas aussi naturelle que ce qu'on pourrait croire.

On nomme A′, B′ et C′ les pieds des perpendiculaires abaissées depuis P, respectivement sur (BC), (AC) et (BC). On a alors

$$\sin\theta_a \sin\theta_b \sin\theta_c = \frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{PA}}\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{PB}}\frac{\mathrm{PB'}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PB'}}{\mathrm{PA}}\frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{PB}}\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{PC}} = \sin\theta'_a \sin\theta'_b \sin\theta'_c$$

avec les notations du dessin ci-dessous. Ainsi, en utilisant l'inégalité de la moyenne puis la concavité de la fonction sinus sur $[0,\pi]$,

$$\begin{aligned}(\sin\theta_a \sin\theta_b \sin\theta_c)^2 &= \sin\theta_a \sin\theta_b \sin\theta_c \sin\theta'_a \sin\theta'_b \sin\theta'_c\\ &\leqslant \left(\frac{\sin\theta_a + \sin\theta_b + \sin\theta_c + \sin\theta'_a + \sin\theta'_b + \sin\theta'_c}{6}\right)^6\\ &\leqslant \left(\sin\frac{\theta_a+\theta_b+\theta_c+\theta'_a+\theta'_b+\theta'_c}{6}\right)^6\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6.\end{aligned}$$



Nous en déduisons que l'un des trois angles θ_a, θ_b et θ_c a un sinus inférieur ou égal à $1/2$. Il est donc soit inférieur à 30° soit supérieur à 150°. Le premier cas répond à l'énoncé.

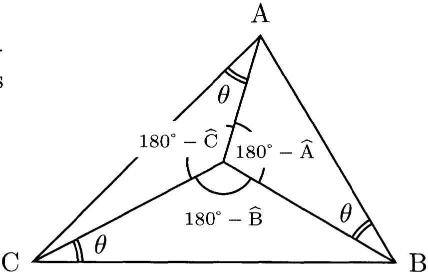
Étudions le second en supposant par exemple $\widehat{\mathrm{PAB}} \geqslant 150^\circ$. Alors $\widehat{\mathrm{BAC}} \geqslant 150^\circ$, donc par exemple $\widehat{\mathrm{ABC}} \leqslant 30^\circ$, ce qui implique que $\widehat{\mathrm{PBC}} \leqslant 30^\circ$, d'où le résultat.

2e méthode : la plus complète

Supposons $\widehat{\mathrm{ACB}} \geqslant \widehat{\mathrm{BAC}} \geqslant \widehat{\mathrm{ABC}}$. Choisissons $x = \widehat{\mathrm{PAB}} = \widehat{\mathrm{PBC}}$ et notons alors $f(x) = \widehat{\mathrm{PCA}}$. Le lecteur se convaincra que la fonction f est continue, strictement décroissante, $f(0) = \widehat{\mathrm{BCA}} > 0$ et $f(\widehat{\mathrm{ABC}}) = 0 < \widehat{\mathrm{ABC}}$. Ainsi $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante, $g(0) > 0$ et $g(\widehat{\mathrm{ABC}}) < 0$: par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en un unique réel, noté θ. Ainsi il existe un unique point P intérieur à ABC tel que $\widehat{\mathrm{PAB}} = \widehat{\mathrm{PBC}} = \widehat{\mathrm{PCA}} = \theta$.

Soit Q un point intérieur au triangle ABC. Quitte à permuter les sommets, nous pouvons supposer que Q appartient par exemple au triangle PAB et alors $\widehat{\mathrm{QAB}} \leqslant \mathrm{PAB} = \theta$. Pour résoudre notre exercice, il nous suffit donc de démontrer que $\theta \leqslant 30^\circ$.

Pour calculer la valeur de θ, remarquons d'abord que $\widehat{\mathrm{APB}} = 180^\circ - \theta - \widehat{\mathrm{PAB}} = 180^\circ - \theta - (\widehat{\mathrm{A}} - \theta) = 180^\circ - \widehat{\mathrm{A}}$. De même $\widehat{\mathrm{BPC}} = 180^\circ - \widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{APC}} = 180^\circ - \widehat{\mathrm{C}}$.



La loi des sinus dans les triangles ABP, BCP et ACP nous permet d'écrire

$$\begin{cases} \mathrm{AP}/\sin\theta = \mathrm{AB}/\sin\widehat{\mathrm{A}} \\ \mathrm{BP}/\sin\theta = \mathrm{BC}/\sin\widehat{\mathrm{B}} \\ \mathrm{CP}/\sin\theta = \mathrm{AC}/\sin\widehat{\mathrm{C}} \end{cases}.$$

Il nous manque une équation pour calculer la valeur des quatre inconnues (AP, BP, CP et θ). Cette dernière équation est obtenue en écrivant simplement que l'aire de ABC est la somme des aires des trois triangles qui le partitionnent,

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AC} + \mathrm{BP}\cdot\mathrm{AB} + \mathrm{CP}\cdot\mathrm{BC})\sin\theta.$$

En substituant dans cette équation les valeurs de AP, BP, CP données par la loi des sinus, nous obtenons

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}} + \frac{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\right)\sin^2\theta.$$

Or $\mathscr{A} = 1/2\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\widehat{\mathrm{A}} = 1/2\,\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin\widehat{\mathrm{B}} = 1/2\,\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\sin\widehat{\mathrm{C}}$, donc après substitution et simplification par $\mathscr{A}$, l'équation précédente s'écrit

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\widehat{\mathrm{A}}} + \frac{1}{\sin^2\widehat{\mathrm{B}}} + \frac{1}{\sin^2\widehat{\mathrm{C}}}. \tag{1}$$

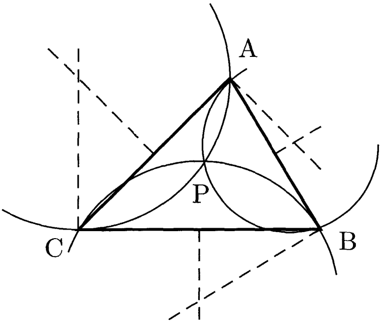
Pour conclure, il nous suffit d'utiliser l'inégalité de convexité pour la fonction $h : x \mapsto 1/\sin^2 x$ $(h''(x) = (2 + 4\cos^2 x)/\sin^4(x) > 0)$,

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\widehat{\mathrm{A}}} + \frac{1}{\sin^2\widehat{\mathrm{B}}} + \frac{1}{\sin^2\widehat{\mathrm{C}}} \geqslant \frac{3}{\sin^2\frac{\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\mathrm{C}}}{3}} = 4.$$

Ainsi, $\sin\theta \leqslant 1/2$, donc comme $\theta \leqslant \min(\widehat{\mathrm{ABC}}, \widehat{\mathrm{ACB}}, \widehat{\mathrm{BAC}}) \leqslant 60^\circ$, nous avons bien le résultat souhaité : $\theta \leqslant 30^\circ$.

Remarque : les points de Brocard. Le point P que nous avons caractérisé est un point de Brocard[2] du triangle ABC. Tout triangle possède deux points de Brocard : le second, P′, est obtenu en imposant cette fois-ci $\widehat{\mathrm{P'AC}} = \widehat{\mathrm{P'BA}} = \widehat{\mathrm{P'CB}} = \theta'$. Par le même raisonnement que précédemment, l'équation (1) est également valable pour θ', si bien que $\theta = \theta'$, résultat hautement difficile à prouver par un raisonnement de géométrie pure. La valeur commune de ces deux angles est appelée angle de Brocard du triangle ABC.

Une construction des points de Brocard peut se déduire des égalités d'angle que nous avons utilisée auparavant : le cercle circonscrit à PAB doit, d'après les angles inscrits, être tangent à (AC) en A. Son centre est donc à l'intersection de la médiatrice de [AB] et de la perpendiculaire à (AC) en A. Ainsi les trois cercles ci-contre sont concourants en P (nous avons bien sûr une construction analogue de P′).



3[e] méthode : la plus savante

Écartons le cas où l'un des angles de ABC est supérieur à 150°(par exemple $\widehat{\mathrm{A}}$) : $\widehat{\mathrm{PBC}}$ et $\widehat{\mathrm{PCA}}$ sont alors inférieurs à 30°.

Notons désormais A′, B′ et C′ les projetés orthogonaux de P respectivement sur (BC), (AC) et (AB). Raisonnons par l'absurde en supposant que les trois angles $\widehat{\mathrm{PAB}}$, $\widehat{\mathrm{PBC}}$ et $\widehat{\mathrm{PCA}}$ sont strictement supérieurs à 30°. Le sinus de ces trois angles est donc supérieur à $1/2$ (car nos angles sont aussi inférieurs à 150°), c'est-à-dire $\mathrm{PA} < 2\mathrm{PC'}$, $\mathrm{PB} < 2\mathrm{PA'}$ et $\mathrm{PC} < 2\mathrm{PB'}$. Ainsi, en additionnant ces trois inégalités, nous obtenons $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} < 2(\mathrm{PA'}+\mathrm{PB'}+\mathrm{PC'})$, ce qui contredit l'inégalité d'Erdös-Mordell, présentée en annexe.

2. Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (1845-1922), mathématicien et officier français.

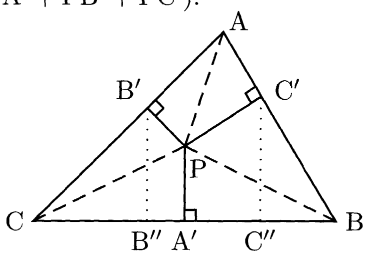
Annexe : l'inégalité d'Erdös-Mordell

Le théorème suivant a d'abord été conjecturé par Erdös[3] en 1935, avant que Mordell[4] et le mathématicien amateur Barrow ne le prouvent indépendamment, dans la même revue[5], en 1937.

Ce résultat est donc loin d'être évident, malgré l'apparente simplicité de sa démonstration. Le lecteur remarquera d'ailleurs l'analogie entre cette preuve et celle du problème 1996 n°5, d'une difficulté comparable.

Théorème. *Soit* P *un point intérieur à un triangle* ABC *et* A′, B′, C′ *ses projetés orthogonaux respectivement sur* (BC), (AC) *et* (AB). *Alors*

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} \geqslant 2(\mathrm{PA}'+\mathrm{PB}'+\mathrm{PC}').$$



DÉMONSTRATION. Notons B″ et C″ les projetés respectifs de B′ et de C′ sur (BC). Alors

$$\mathrm{B'C'} \geqslant \mathrm{B''C''} = \mathrm{A'B''}+\mathrm{A'C''}. \quad (2)$$

Or $\mathrm{A'B''} = \mathrm{PB'}\sin\widehat{\mathrm{C}}$ et $\mathrm{A'C''} = \mathrm{PC'}\sin\widehat{\mathrm{B}}$. De plus, $\mathrm{B'C'}/\sin\widehat{\mathrm{A}} = \mathrm{AP}$, d'après la loi des sinus dans AB′C′. En remplaçant les éléments de (2) par ces trois égalités, nous obtenons

$$\mathrm{PA} \geqslant \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\mathrm{PB'} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\mathrm{PC'}.$$

Nous pouvons écrire des minorations similaires pour PB et PC et en additionnant ces trois inégalités nous minorons PA + PB + PC par

$$\left(\frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}+\frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}\right)\mathrm{PA'} + \left(\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}+\frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\right)\mathrm{PB'} + \left(\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}+\frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\right)\mathrm{PC'}.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x + 1/x \geqslant 2$ (par l'inégalité de la moyenne par exemple), nous pouvons minorer chaque terme de nos parenthèses et obtenir

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} \geqslant 2(\mathrm{PA}'+\mathrm{PB}'+\mathrm{PC}').$$

Le cas d'égalité est obtenu uniquement si tous les sinus sont égaux, donc pour ABC équilatéral. □

---

3. PAUL ERDÖS (1913-1996), mathématicien hongrois.
4. LOUIS JOEL MORDELL (1888-1972), mathématicien anglais.
5. *American Mathematical Monthly*, avril 1937, p. 252-254.

6. Un peu d'imagination

Une suite infinie $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels est dite bornée si et seulement s'il existe un réel C tel que pour tout i on ait $|x_i| \leqslant \mathrm{C}$.

Soit a un nombre réel strictement supérieur à un. Trouver une suite infinie $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels qui soit bornée et qui vérifie pour tout couple d'indices distincts i et j

$$|x_i - x_j||i-j|^a \geqslant 1.$$

Solution

1re méthode

Voici notre belle suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, définie par l'écriture binaire de n,

$$n = \overline{a_m \dots a_1 a_0} \;\Rightarrow\; x_n = \frac{1}{\mathrm{R}} \sum_{k=0}^{m} a_k r^k,$$

avec les notations suivantes :

- $r = 1/2^a$;
- $\mathrm{R} = 1 - \frac{r}{1-r}$ ($a > 1$ donc $\mathrm{R} > 0$ et x_n est bien défini).

Nous n'avons plus qu'à vérifier que cette suite vérifie les conditions de l'énoncé. Remarquons tout d'abord qu'elle est bien bornée, par $\sum_{k=0}^{\infty} r^k/\mathrm{R} = 1/(1-2r)$.

Soient $i = \overline{i_m \dots i_1 i_0}$ et $j = \overline{j_m \dots j_1 j_0}$ les écritures binaires de deux entiers naturels i et j. Soit k_0 le plus petit indice tel que $i_k \neq j_k$. On a alors $|i-j| \geqslant 2^{k_0}$.

De plus

$$|x_i - x_j| = \frac{1}{\mathrm{R}} \left| r^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (i_k - j_k) r^k \right| \geqslant \frac{1}{\mathrm{R}} \left(r^{k_0} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} r^k \right) = r^{k_0}.$$

On a donc

$$|x_i - x_j||i-j|^a \geqslant r^{k_0} \left(2^{k_0}\right)^a = 1.$$

2^e méthode

Il suffit de construire une telle suite pour $a = 1$ et le problème sera résolu.

Posons $x_n = \{n\sqrt{2}\} = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, partie fractionnaire de $n\sqrt{2}$. Le lemme suivant permet d'écrire, pour toute fraction p/q, $|\sqrt{2} - p/q| \geqslant 1/(cq^2)$ (d'après la démonstration de ce lemme, le polynôme $X^2 - 2$ s'annulant en $\sqrt{2}$, on peut prendre ici pour constante $c = 1 + 2(\sqrt{2}+1)$). Ainsi, si $i > j$,

$$|x_i - x_j||i-j| = \left| \sqrt{2} - \frac{\lfloor i\sqrt{2} \rfloor - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor}{i-j} \right| (i-j)^2 \geqslant \frac{1}{c}.$$

La suite $y_i = cx_i$ vérifie donc les conditions de l'énoncé.

Lemme. *Si $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ possède un polynôme minimal* P *de degré n, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$,*

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{1}{cq^n}.$$

Démonstration. Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ le polynôme minimal de z. Alors $|P(p/q)| = |(a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n)/q^n| \geqslant 1/q^n$ (le numérateur, entier, ne peut pas être nul car P, de degré minimal, n'a pas de racine rationnelle). Posons alors $c = 1 + \sup\limits_{z-1 \leqslant x \leqslant z+1} |P'(x)|$.

- si $|z - p/q| \leqslant 1$, alors par le théorème des accroissements finis on a $|P(z) - P(p/q)| \leqslant c|z - p/q|$, donc $|z - p/q| \geqslant 1/(cq^n)$;
- si $|z - p/q| \geqslant 1$, on a alors aussi clairement $|z - p/q| \geqslant 1/(cq^n)$.

Ceci achève donc la démonstration. □

Annexe : impossibilité pour $a < 1$

Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant les conditions de l'énoncé avec $a < 1$. Alors, d'après le théorème d'Erdös[6] et Szekeres[7] présenté ci-après, nous pouvons extraire des $n^2 + 1$

6. Paul Erdös (1913-1996), mathématicien hongrois.
7. George Szekeres (1911-2005), mathématicien hongrois.

premiers termes de cette suite une sous-suite monotone de longueur $n+1$ (que l'on peut supposer croissante, quitte à considérer la suit des $-x_i$),

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_{n+1}} \text{ avec } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1} \leqslant n^2 + 1.$$

Nous pouvons alors écrire par hypothèse

$$x_{i_{n+1}} - x_{i_1} = \sum_{k=1}^{n} (x_{i_{k+1}} - x_{i_k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(i_{k+1} - i_k)^a}.$$

Or, par convexité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x^a$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(i_{k+1} - i_k)^a} \geqslant \frac{n}{\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(i_{k+1}-i_k)}{n}\right)^a} \geqslant n^{1-a}.$$

Pour tout n on peut donc trouver deux termes de la suite distants d'au moins n^{1-a}, ce qui contredit le caractère borné de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Théorème d'Erdös et Szekeres. *Soit $n \in \mathbb{N}$. De toute suite de réels de longueur n^2+1 on peut extraire une sous-suite monotone de longueur $n+1$.*

DÉMONSTRATION. Posons $n^2 + 1 = k$, écrivons notre suite sous la forme x_1, x_2 …, x_k et choisissons $i \in [\![1, k]\!]$.

Soit $c(i)$ la longueur maximale de toute sous-suite croissante de $x_1, \ldots, x_i$ finissant par x_i ; définissons de même $d(i)$ la longueur maximale de toute sous-suite décroissante de $x_i, \ldots, x_k$ commençant par x_i.

S'il n'existe pas de sous-suite monotone de longueur $n+1$ alors, pour tout i, $c(i)$ et $d(i)$ sont dans $[\![1, n]\!]$, donc le couple $(c(i), d(i))$ prend au plus n^2 valeurs. Or on a n^2+1 tels couples, donc deux d'entre eux sont égaux : $i_1 \leqslant i_2$, $c(i_1) = c(i_2)$ et $d(i_1) = d(i_2)$.

Mais ceci est impossible : si $x_{i_1} \leqslant x_{i_2}$, alors $c(i_1) < c(i_2)$ et si $x_{i_1} \geqslant x_{i_2}$ alors $d(i_1) > d(i_2)$. □

Remarque. Dans ce théorème, le nombre n^2+1 est incompressible. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite de longueur n^2 définie comme suit : $x_0 = n, x_1 = n-1, x_2 = n-2, \ldots, x_{n-1} = 1$ et, pour un indice $k \in [\![0, n^2-1]\!]$, $x_k = an + x_b$ où $k = an + b$ est la division euclidienne de k par n.

Si $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n^2-1}$ comportait une sous-suite croissante de longueur $n+1$, d'après le principe des tiroirs deux de ces $n+1$ éléments distincts appartiendraient à un intervalle du type $[\![\lambda n, (\lambda + 1)n - 1]\!]$. Ceci est absurde car $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2-1}$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si on pouvait extraire de $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2-1}$ une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$, d'après le principe des tiroirs deux éléments de cette sous-suite auraient le même reste dans la division euclidienne par n. Ceci est absurde car $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2-1}$ restreinte à une classe d'équivalence modulo n est croissante.

Moscou (Russie)

1992

1. Une énumération de cas en arithmétique

Trouver tous les entiers a, b, c vérifiant $1 < a < b < c$ et tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc-1$.

Solution

- Si $a \geqslant 4$, alors
$$1 < \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{a}{a-1}\frac{b}{b-1}\frac{c}{c-1} \leqslant \frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5} = 2,$$
donc $(a-1)(b-1)(c-1)$ ne peut pas diviser $abc-1$. Nous en déduisons que a vaut nécessairement 2 ou 3.

- Si $a = 2$, alors $(b-1)(c-1) \mid (2bc-1)-2(b-1)(c-1) = 2(b+c)-3 \neq 0$. Ainsi $(b-1)(c-1) \leqslant 2(b+c)-3 \leqslant 2(2c-1)-3$, ce qui s'écrit aussi $b \leqslant 5 - 1/(c-1)$. Nous avons donc $b = 3$ ou 4 :
  - si $b = 3$, $2(c-1) \mid (6c-1) - 3 \times 2(c-1) = 5$, ce qui est absurde, 5 étant impair ;
  - si $b = 4$, $3(c-1) \mid 3 \times 3(c-1) - (8c-1) = c-8$, donc soit $c = 8$, soit $3(c-1) \leqslant |c-8|$, ce qui est impossible pour $c \geqslant 5$.

  Ce cas donne donc pour unique solution $(a, b, c) = (2, 4, 8)$.

- Si $a = 3$, nous pouvons écrire
$$1 < \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} \leqslant \frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4} < 3.$$

La fraction ci-dessus, entière, est donc égale à 2. Ainsi $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$ (1). Or, si $b \geqslant 7$, $(3bc-1)/[(b-1)(c-1)] < 3\,b/(b-1) \times c/(c-1) \leqslant 3 \times 7/6 \times 8/7 = 4$, ce qui contredit (1). On a donc $b = 4$, 5 ou 6 :

- si $b = 4$, (1) donne $-1 = -12$, absurde ;
- si $b = 5$, (1) s'écrit $c = 15$;
- si $b = 6$, (1) impose $c = 19/2$, qui a le mauvais goût de ne pas être entier.

On n'a donc ici que $(a, b, c) = (3, 5, 15)$ comme solution.

En résumé

$$\mathscr{S} = \{(2,4,8), (3,5,15)\}.$$

2. Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous les nombres réels x et y,

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + f(x)^2.$$

Solution

On pose $f(0) = a$. Tout le problème consiste à déterminer a. La solution a l'air élémentaire, mais trouver les étapes ci-dessous n'a rien d'évident :

- $(x, y) = (0, -a^2)$: $f\left(f(-a^2)\right) = 0$. Composons alors par f : $f\left(f\left(f(-a^2)\right)\right) = a$. Or le choix $(x, y) = \left(0, f(-a^2)\right)$ donne aussi $f\left(f\left(f(-a^2)\right)\right) = f(-a^2) + a^2$. On en déduit que $f(-a^2) = a - a^2$.
- $(x, y) = (x, 0)$: $f(x^2 + a) = f(x)^2$, donc $f(x)^2 = f(-x)^2$. On en déduit que $f(a^2) = f(-a^2) = a - a^2$ ou $f(a^2) = -f(-a^2) = a^2 - a$.
- $(x, y) = (x, f(z))$ donne $f\left(x^2 + f(f(z))\right) = f(z) + f(x)^2$, ce qui s'écrit aussi $f(x^2 + z + a^2) = f(z) + f\left(x^2 + f(z)\right) - z$. Pour $(z, x) = (0, 0)$, on obtient $f(a^2) = a + f(a)$. Or $(x, y) = (0, 0)$ dans l'énoncé donne $f(a) = a^2$, d'où $f(a^2) = a^2 + a$.
- On a donc soit $a^2 + a = a^2 - a$, soit $a^2 + a = a - a^2$, ce qui donne dans tous les cas $a = 0$.

Nous obtenons ainsi successivement :

(1) en prenant $x = 0$, $f \circ f = \mathrm{Id}$;

(2) en prenant $y = 0$, $f(x^2) = f(x)^2$;

(3) en prenant $y = f(z)$, $f(x^2 + z) = f(x)^2 + f(z)$.

D'après cette dernière relation, par une récurrence immédiate sur n, on a $f(nx^2) = nf(x^2)$ $(*)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. De plus (2) permet d'écrire $f(1)^2 = f(1)$; si $f(1) = 0$, alors en composant par f on obtient, avec (1), $1 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $f(1) = 1$ donc $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($x = 1$ dans $(*)$). Pour une fraction m/n (où n et m sont des entiers naturels non nuls), on a donc $m = f(m) = f(n\,m/n) = nf(m/n)$, donc $f(m/n) = m/n$. En résumé, nous avons démontré que f restreinte aux rationnels positifs était l'identité.

Pour conclure, on utilise un raisonnement classique (cf. 2002 n°5), fondé sur la monotonie de f et la notion de densité. En effet, soit un réel $y > 0$. Il existe deux suites de rationnels $(r_n)_{n \geqslant 0}$ et $(s_n)_{n \geqslant 0}$ convergeant vers y, avec $r_n \leqslant y \leqslant s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, par croissance de f (d'après (3) $f(z+x^2) - f(z) = f(x)^2 \geqslant 0$), $r_n = f(r_n) \leqslant f(y) \leqslant f(s_n) = s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite quand $n \to \infty$ on obtient $f(y) = y$, relation valable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour montrer que cette relation demeure valable sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que f est impaire, ce qui est acquis en prenant $y = f(-x^2)$ dans l'énoncé : on obtient $0 = f(-x^2) + f(x^2)$.

Ainsi l'application f est nécessairement l'identité, et réciproquement l'identité vérifie les conditions de notre énoncé.

3. Combinatoire : un problème de type Ramsey

Dans l'espace, on se donne un ensemble de neuf points tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas coplanaires. Chaque paire de ces points définit une arête (à savoir le segment joignant ces deux points) et chaque arête est soit coloriée en bleu, soit coloriée en rouge, soit non coloriée.

Trouver le plus petit entier n tel que, quelle que soit la façon dont on colorie exactement n arêtes, l'ensemble de ces arêtes coloriées contient un triangle ayant ses trois côtés de la même couleur.

Solution

Montrons tout d'abord que nous pouvons colorier 32 arêtes sans avoir de triangle monochrome. On trace deux carrés $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$, le premier en rouge et le second en bleu, en laissant les diagonales incolores. Le sommet restant, M, est relié aux sommets de $A_1A_2A_3A_4$ par une arête bleue et à ceux de $B_1B_2B_3B_4$ par une arête rouge. On relie ensuite A_i et B_j en rouge si i et j sont de même parité, en bleu sinon. Notre graphe comporte alors bien 32 arêtes.

Soit XYZ un triangle de notre graphe (où les trois arêtes sont coloriées) :

- il ne peut pas avoir ses sommets sur un même carré (car les diagonales ne sont pas coloriées) ;

- si M est un de ses sommets, deux cas se présentent : si A_i et B_j sont les deux autres sommets, MA_i est bleu et MB_j est rouge ; si A_i et A_j sont les deux autres, MA_i est bleu et A_iA_j est rouge ;

- sinon il possède pour sommets par exemple A_i, A_j et B_k. Si A_iB_k et A_jB_k sont de la même couleur, i et j doivent avoir la même parité, donc A_iA_j est une diagonale, incolore : absurde.

Le graphe à 32 arêtes ainsi construit ne comporte donc pas de triangle monochrome.

Montrons pour terminer que si nous colorions 33 arêtes, le graphe obtenu comporte un triangle monochrome. Notre graphe à 9 sommets comporte au plus $C_9^2 = 36$ arêtes. Ainsi seules 3 arêtes ne sont pas coloriées. Prenons un sommet à l'origine de chacune de ces trois arêtes et retirons-le du graphe. Nous obtenons un graphe complet : deux quelconques des 6 sommets restant sont reliés par une arête. La suite est classique : elle affirme que le deuxième nombre de Ramsey[1], est 6 (cf. 1978 n°6).

Prenons un des 6 sommets précédents, disons M et regardons les 5 arêtes partant de M : 3 d'entre elles (MA, MB et MC) ont la même couleur, par exemple rouge. Distinguons alors deux cas :

- si toutes les arêtes de ABC sont bleues, nous avons trouvé notre triangle monochrome ;

- sinon, une arête de ABC est rouge, disons AB et alors MAB est monochrome.

1. Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), mathématicien anglais.

Nous pouvons conclure : le plus petit entier vérifiant la propriété de l'énoncé est $n = 33$.

4. Triangles ayant le cercle inscrit et le milieu d'un côté donnés

Dans le plan on se donne un cercle $\mathcal{C}$, une droite l tangente à ce cercle $\mathcal{C}$ et un point M de l.

Trouver l'ensemble des points P du plan tels qu'il existe deux points Q et R de L vérifiant les deux conditions :

- **M est le milieu du segment d'extrémités Q et R ;**
- **$\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle PQR.**

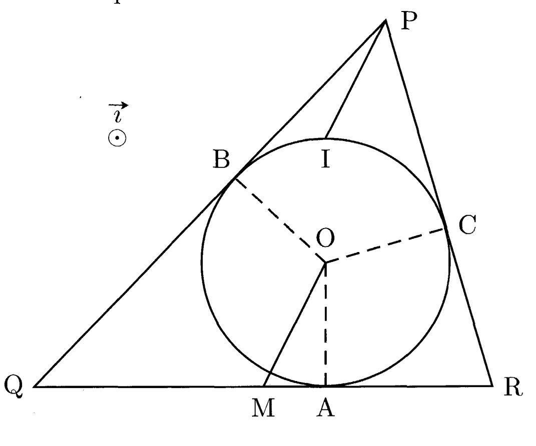
Solution

Après un peu de réflexion avec les mains, dans la mesure où aux Olympiades internationales un lieu de points se doit d'être simple, il ne peut s'agir ici que d'une demi-droite (voire un morceau d'hyperbole, mais les candidats à cette compétition ne sont pas censés connaître les coniques).

Notons A, B, C les pieds des perpendiculaires abaissées de O, centre de $\mathcal{C}$, respectivement sur (QR), (QP) et (PR). Soit I le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$.

Lorsque, sur ce schéma, on garde M milieu de [QR] avec $\mathrm{QR} \to +\infty$, on a $\mathrm{P} \to \mathrm{I}$. De plus, si on prend QR à la limite telle que P « parte à l'infini », on voit qu'il part selon la direction de (MO).

Le seul candidat crédible pour notre lieu de points semble donc être la demi-droite ouverte partant de I orientée selon $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$.



Vérifions donc que (PI) $/\!/$ (OM) :

$$\overrightarrow{\mathrm{PI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} = (\overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}) \wedge \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}})$$
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} = (-\mathscr{A}(\mathrm{OPQ}) + \mathscr{A}(\mathrm{ORP}) + \mathscr{A}(\mathrm{OQA}) - \mathscr{A}(\mathrm{OAR}))\,\vec{\imath}.$$

Or ce dernier terme est bel et bien nul, car

$$\begin{aligned} -\,&\mathscr{A}(\mathrm{OPQ}) + \mathscr{A}(\mathrm{ORP}) + \mathscr{A}(\mathrm{OQA}) - \mathscr{A}(\mathrm{OAR}) \\ &= -\,(\mathscr{A}(\mathrm{OPB}) + \mathscr{A}(\mathrm{OBQ})) \\ &\quad + (\mathscr{A}(\mathrm{ORC}) + \mathscr{A}(\mathrm{OCP})) + \mathscr{A}(\mathrm{OQA}) - \mathscr{A}(\mathrm{OAR}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

5. Cardinal d'un ensemble de points de l'espace en fonction des cardinaux de ses projetés sur des plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}xyz)$ et $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de points de cet espace. On désigne respectivement par $\mathcal{S}_x$, $\mathcal{S}_y$, $\mathcal{S}_z$ les ensembles constitués par les projections orthogonales des points de $\mathcal{S}$ sur les trois plans $(\mathrm{O}yz)$, $(\mathrm{O}zx)$, $(\mathrm{O}xy)$.

Montrer que

$$|\mathcal{S}|^2 \leqslant |\mathcal{S}_x||\mathcal{S}_y||\mathcal{S}_z|,$$

où $|\mathcal{A}|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini $|\mathcal{A}|$.

Remarque : la projection orthogonale d'un point sur le plan est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

Solution

Raisonnons par récurrence sur $|\mathcal{S}|$. Le résultat est évident lorsque $\mathcal{S}$ est réduit à un élément.

Supposons désormais $|\mathcal{S}| > 1$ et la propriété vraie jusqu'au rang $|\mathcal{S}| - 1$. Comme $|\mathcal{S}| > 1$, on peut séparer S en deux parties disjointes non vides ($\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$) par un plan parallèle à $(\mathrm{O}yz)$, $(\mathrm{O}zx)$ ou $(\mathrm{O}xy)$. On peut le supposer parallèle à $(\mathrm{O}yz)$. En utilisant des notations analogues à celles de l'énoncé,

$$\begin{cases} |\mathcal{T}_x| \leqslant |\mathcal{S}_x| \text{ et } |\mathcal{U}_x| \leqslant |\mathcal{S}_x| \\ |\mathcal{T}_y| + |\mathcal{U}_y| = |\mathcal{S}_y| \\ |\mathcal{T}_z| + |\mathcal{U}_z| = |\mathcal{S}_z| \end{cases} .$$

On peut donc écrire, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}|^2 &= (|\mathcal{T}| + |\mathcal{U}|)^2 \\
&\leqslant \left(\sqrt{|\mathcal{T}_x||\mathcal{T}_y||\mathcal{T}_z|} + \sqrt{|\mathcal{U}_x||\mathcal{U}_y||\mathcal{U}_z|}\right)^2 \\
&\leqslant |\mathcal{S}_x| \left(\sqrt{|\mathcal{T}_y||\mathcal{T}_z|} + \sqrt{|\mathcal{U}_y||\mathcal{U}_z|}\right)^2 \\
&\leqslant |\mathcal{S}_x|(|\mathcal{T}_y| + |\mathcal{U}_y|)(|\mathcal{T}_z| + |\mathcal{U}_z|) \\
|\mathcal{S}|^2 &\leqslant |\mathcal{S}_x||\mathcal{S}_y||\mathcal{S}_z|.
\end{aligned}$$

On a ici utilisé l'inégalité $(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2 \leqslant (a+c)(b+d)$, qui, une fois développée, n'est autre que l'inégalité de la moyenne. Nous avons ainsi conclu la récurrence.

Remarque. On peut démontrer l'inégalité plus générale, en dimension n quelconque, avec les mêmes notations que précédemment,

$$|\mathcal{S}|^{n-1} \leqslant |\mathcal{S}_{x_1}||\mathcal{S}_{x_2}| \dots |\mathcal{S}_{x_n}|,$$

où $\mathcal{S}_{x_i}$ est l'ensemble constitué des projections orthogonales des points de $\mathcal{S}$ sur l'hyperplan d'équation $x_i = 0$. Le raisonnement est en tout point identique, jusqu'à ce que l'on doive démontrer l'inégalité suivante, valable pour tous les réels strictement positifs :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\right)^{1/n}.$$

En divisant par $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$, en posant $b_i/a_i = e^{c_i}$ et en passant au logarithme, il suffit de prouver que, quels que soient les réels c_i,

$$\log\left(1 + e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \log\left(1 + e^{c_i}\right).$$

Ceci est vérifié par convexité de $f : x \mapsto \log(1 + e^x)$ $(f''(x) = 1/(4\cosh^2(x/2)))$. Ceci achève la démonstration de ce cas plus général.

6. Sommes de carrés d'entiers

Pour tout entier n supérieur ou égal à un, on désigne par $S(n)$ le plus grand entier vérifiant la propriété suivante : quel que soit l'entier k, $1 \leqslant k \leqslant S(n)$, n^2 s'écrit sous forme d'une somme de k carrés d'entiers strictement positifs.

1. **Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $S(n) \leqslant n^2 - 14$.**
2. **Trouver un entier n tel que $S(n) = n^2 - 14$.**
3. **Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $S(n) = n^2 - 14$.**

Solution

Dans tout ce qui suit, par l'expression « somme de carrés » on entendra « somme de carrés d'entiers naturels strictement positifs ».

1^re^ question : pour tout entier $n \geqslant 4$, $S(n) \leqslant n^2 - 14$

Il s'agit de démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, n^2 ne peut pas être somme de $n^2 - 13$ carrés.

Pour $n = 4$, on vérifie directement à la main que 16 n'est pas somme de 3 carrés.

Pour $n \geqslant 5$, raisonnons par l'absurde en écrivant

$$n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n^2-13}^2 \tag{1}$$

avec $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n^2-13}$. Si $x_{n^2-17} \geqslant 2$, alors

$$n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n^2-13}^2 \geqslant (n^2 - 18) + 5.2^2 = n^2 + 2,$$

ce qui est clairement absurde. Donc $x_{n^2-17} = 1$ et (1) s'écrit

$$17 = x_{n^2-16}^2 + x_{n^2-15}^2 + x_{n^2-14}^2 + x_{n^2-13}^2.$$

Or ceci est impossible : 17 n'est pas somme de 4 carrés. Pour tout $n \geqslant 4$ on a donc

$$S(n) \leqslant n^2 - 14.$$

2^e^ question : existence du cas d'égalité

Montrons que $n = 13$ convient.

Partant de la simple observation « $(2x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$ », on voit que si
$$13^2 = (2^{n_1}m_1)^2 + \cdots + (2^{n_k}m_k)^2$$
alors 13^2 s'écrit comme somme de $3n + k$ carrés pour $0 \leqslant n \leqslant 1/3(4^{n_1} + \cdots + 4^{n_k} - k)$.

Effectuons donc un comptage selon les classes modulo 3.

- À partir de $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, on voit que 13^2 s'exprime comme somme de $3n+9$ carrés avec $0 \leqslant n \leqslant 48$. De plus $13^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 12^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$, donc 13^2 est somme de $3n$ carrés pour $1 \leqslant n \leqslant 51$.
- De même, comme $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$, on peut exprimer 13^2 comme somme de $3n + 7$ carrés avec $0 \leqslant n \leqslant 54$. De plus $13^2 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$, donc 13^2 s'exprime comme somme de $3n + 1$ carrés avec $0 \leqslant n \leqslant 56$.
- Enfin, comme $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$, on peut exprimer 13^2 comme somme de $3n + 5$ carrés avec $0 \leqslant n \leqslant 52$. Le dernier cas particulier $13^2 = 12^2 + 5^2$ montre que 13^2 s'exprime comme somme de $3n + 2$ carrés avec $0 \leqslant n \leqslant 53$.

On peut conclure : 13^2 s'exprime comme somme de n carrés pour $1 \leqslant n \leqslant 13^2 - 14$.

3ᵉ question : existence d'une infinité de cas d'égalité

Montrons que si $\mathrm{S}(n) = n^2 - 14$, alors $\mathrm{S}(2n) = (2n)^2 - 14$. La question précédente permettra alors de conclure.

Comme $(2n)^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2$, $(2n)^2$ s'exprime comme somme de k carrés pour $4 \leqslant k \leqslant 4(n^2 - 14)$.

De plus, si $n^2 = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, alors $(2n)^2 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 = (2b_1)^2 + (2b_2)^2 + (2b_3)^2$, donc $(2n)^2$ s'exprime comme somme de k carrés pour $1 \leqslant k \leqslant 4(n^2 - 14)$

On peut enfin écrire
$$(2n)^2 = \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{3n^2 \text{ termes}} + n^2.$$

Ainsi $(2n)^2$ est somme de $3n^2 + k$ carrés avec $1 \leqslant k \leqslant n^2 - 14$.

Comme $3n^2 + 1 \leqslant 4(n^2 - 14) + 1$ $(n \geqslant 13)$, on peut conclure : $\mathrm{S}(2n) = (2n)^2 - 14$.

Istanbul (Turquie)

1993

1. Un polynôme irréductible

Soit $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ où $n > 1$ est un entier. Démontrer que $f(x)$ n'est pas le produit de deux polynômes dont chacun est à coefficients entiers et a un degré supérieur ou égal à un.

Solution

1re méthode : de type critère d'Eisenstein

Cette façon de procéder est inspirée de la démonstration du critère d'Eisenstein[1] (cf. 1995 n°6). Raisonnons par l'absurde en écrivant

$$x^n + 5x^{n-1} + 3 = (a_r x^r + \cdots + a_0)(b_s x^s + \cdots + b_0) \qquad (1)$$

avec $r + s = n$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, $a_r = b_s = 1$, les a_i et les b_j entiers. Comme $a_0 b_0 = 3$, nous pouvons supposer $a_0 = \pm 3$ et $b_0 = \pm 1$.

Si $n = 2$ ou $n = 3$, le lecteur vérifiera directement que (1) n'admet pas de solution, par résolution d'un système.

Si $n > 3$, alors $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$, donc $3 \mid a_1$. Comme $n > 3$, nous avons aussi $a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0$, donc $3 \mid a_2$. On montre ainsi par une récurrence immédiate que pour tout $k \leqslant \min(n-2, r)$, on a $3 \mid a_k$. Or $3 \nmid a_r = 1$. Donc $\min(n-2, r) < r$, c'est-à-dire $r > n - 2$. Ceci impose $r = n - 1$ et $s = 1$.

Le deuxième polynôme en facteur est donc $x \pm 1$, mais ceci est contradictoire car $f(1) \neq 0$ et $f(-1) \neq 0$.

Remarque. Nous pouvons ici remplacer 5 par tout entier tel que $f(1) \neq 0$ et $f(-1) \neq 0$, c'est-à-dire tout entier distinct de 4, -2 et -4.

1. Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852), mathématicien allemand.

2[e] méthode : une généralisation

Nous ne donnons pas de démonstration du théorème suivant, faisant appel à la théorie des fonctions holomorphes, résultat largement hors programme mais qui montre à quel point cette théorie est utile en algèbre.

Théorème de Rouché[2]. *Soit $\mathcal{U}$ l'intérieur d'un compact $\mathcal{K}$ du plan. Si f et g sont continues sur $\mathcal{K}$, holomorphes dans $\mathcal{U}$ et si*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

pour tout z dans $\mathcal{K} - \mathcal{U}$, alors f et g ont même nombre de zéros dans $\mathcal{U}$ (comptés avec leur multiplicité).

Ce théorème permet de démontrer le résultat suivant, qui généralise largement notre exercice (nous n'appliquons ce théorème qu'à des polynômes, cas particulier de fonctions holomorphes, et au disque unité $|z| \leqslant 1$, cas particulier de compact).

Théorème de Perron[3]. *Si $\mathrm{P} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ vérifie $a_0 \neq 0$ et $|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathrm{Q} = a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}$. Alors pour x sur le cercle unité

$$\begin{aligned} |\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x)| &= |x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0| \\ &\leqslant 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| \\ &< |a_{n-1}| \\ |\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x)| &< |\mathrm{Q}(x)|. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Rouché pour les fonctions holomorphes présenté précédemment : P et Q ont le même nombre de zéros dans le disque unité ouvert, c'est-à-dire $n - 1$. Le polynôme P a donc exactement une racine de module supérieur ou égal à 1.

Raisonnons alors par l'absurde en posant $\mathrm{P} = \mathrm{QR}$, décomposition dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, avec Q et R de degré supérieur ou égal à 1. Comme $\mathrm{P}(0) \neq 0$, on a $|\mathrm{Q}(0)| \geqslant 1$ et $|\mathrm{R}(0)| \geqslant 1$. Or ceci impose qu'à la fois Q et R aient une

2. EUGÈNE ROUCHÉ (1832-1910), mathématicien français.
3. OSKAR PERRON (1880-1975), mathématicien allemand.

racine de module $\geqslant 1$ ($Q(0)$ est, au signe près, le produit des racines de Q et de même pour R), donc P en aurait au moins deux. Ceci contredit le résultat du paragraphe précédent. $\square$

2. Autour du « Pedal Triangle Trick »

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et D un point à l'intérieur de ce triangle vérifiant

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{ADB}} = \widehat{\mathrm{ACB}} + 90^\circ \\ \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} \end{cases}.$$

1. **Déterminer la valeur du rapport $(\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD})/(\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD})$.**
2. **Démontrer que les tangentes, au point C, aux cercles circonscrits aux triangles ACD et BCD sont orthogonales.**

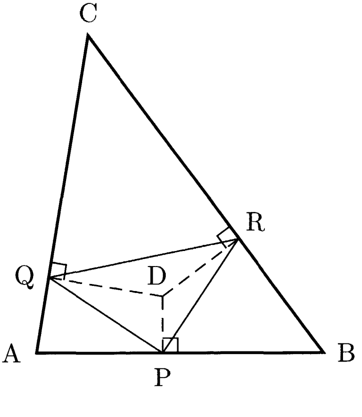
Solution

Pour commencer, transcrivons en des termes plus géométriques les hypothèses du problème. Pour cela, notons P, Q et R les projetés orthogonaux de D respectivement sur (AB), (AC) et (BC). Le résultat suivant (d'un nom anglais lourdement traduit par « l'astuce des projetés orthogonaux ») est classique et doit être retenu.

Lemme, le « Pedal Triangle Trick » : $\widehat{\mathrm{ADB}} - \widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{QPR}}$ *(et de même* $\widehat{\mathrm{ADC}} - \widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{PQR}}$, $\widehat{\mathrm{BDC}} - \widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{PRQ}}$*).*

DÉMONSTRATION. Nous utilisons d'abord la cocyclicité de C, Q, D et R (CQD et CRD sont des triangles rectangles), puis de A, P, D et Q et de B, P, D et R, en écrivant

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{ADB}} - \widehat{\mathrm{ACB}} &= \widehat{\mathrm{ADB}} - (\pi - \widehat{\mathrm{QDR}}) \\ &= \pi - (\widehat{\mathrm{ADQ}} + \widehat{\mathrm{BDR}}) \\ &= \pi - (\widehat{\mathrm{APQ}} + \widehat{\mathrm{BPR}}) \\ \widehat{\mathrm{ADB}} - \widehat{\mathrm{ACB}} &= \widehat{\mathrm{QPR}}. \end{aligned}$$



Ceci achève la démonstration. □

La première hypothèse de notre problème s'écrit donc aussi $\widehat{QPR} = 90^\circ$. Occupons nous désormais de la seconde. Le segment [AD] est un diamètre du cercle circonscrit à APQ, donc $AD = PQ/\sin\widehat{A}$; de même $BD = PR/\sin\widehat{B}$. Ainsi

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{PR \cdot AC \sin\widehat{A}}{PQ \cdot BC \sin\widehat{B}} = \frac{PR}{PQ}$$

d'après la loi des sinus. Notre seconde hypothèse s'écrit donc aussi $PQ = PR$.

En résumé, les hypothèses signifient que le triangle PQR est rectangle isocèle en P. Nous voici désormais bien armés pour résoudre le problème.

1re question : valeur du rapport $(AB \cdot CD)/(AC \cdot BD)$

Le segment [CD] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle CQR, donc $CD = QR/\sin\widehat{C}$. De même $BD = PR/\sin\widehat{B}$. On a donc

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{AB \cdot QR \sin\widehat{B}}{AC \cdot PR \sin\widehat{C}} = \frac{QR}{PR}$$

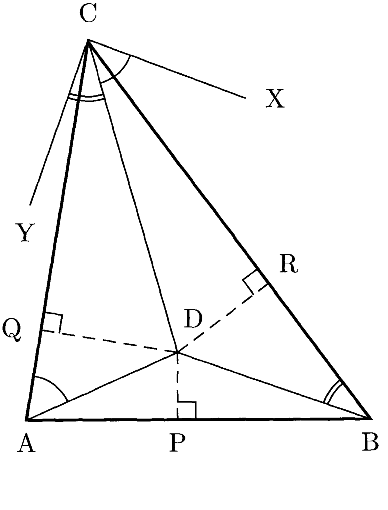
d'après la loi des sinus dans le triangle ABC. Comme le triangle PQR est rectangle isocèle en P, cette dernière quantité est égale à $\sqrt{2}$.

2e question : les tangentes en C aux cercles circonscrits aux triangles ACD et BCD sont orthogonales

Notons comme ci-contre (CX) et (CY) les tangentes en C aux cercles circonscrits respectivement à ACD et BCD.

On a donc $\widehat{DCX} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{DCY} = \widehat{DBC}$. Or A, P, D et Q d'une part et B, P, D et R d'autre part sont cocycliques, d'où

$$\begin{aligned}\widehat{XCY} &= \widehat{DCX} + \widehat{DCY}\\ &= \widehat{DAC} + \widehat{DBC}\\ &= \widehat{DPQ} + \widehat{DPR}\\ \widehat{XCY} &= \widehat{QPR}.\end{aligned}$$



Comme le triangle PQR est rectangle en P, (CX) et (CY) sont orthogonales.

3. Une variante du jeu de dames

Sur un échiquier, de taille illimitée, n^2 jetons sont disposés au début dans un tableau carré de taille $n \times n$, constitué de n^2 cases adjacentes entre elles, un jeton sur chaque case.

Le jeu consiste alors à sauter, horizontalement ou verticalement, au dessus d'une case adjacente occupée par un jeton, vers une case vide située immédiatement derrière. La pièce sautée est alors enlevée.

Trouver pour quelles valeurs de n le jeu peut se terminer avec un seul jeton sur l'échiquier.

Solution

L'énoncé évoque mystérieusement un échiquier, il faut donc peut-être utiliser un argument de type parité. C'est en effet le cas, mais pour un pavage de notre échiquier avec 3 couleurs !

Si on se donne un repère dans lequel toute case a une coordonnée (i, j), colorions ainsi les cases en bleu si $i + j \equiv 0$ [3], en rouge si $i + j \equiv 1$ [3] et en jaune si $i + j \equiv 2$ [3].

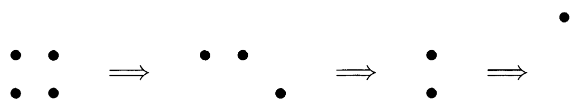
Après le mouvement d'un jeton vers une case bleue, le nombre de cases bleues occupées a augmenté d'une unité, celui des cases rouges a diminué d'une unité, de même que pour les cases jaunes. Ceci reste vrai bien sûr en permutant les couleurs.

Supposons ainsi que l'on ait effectué b sauts vers une case bleue, r vers une case rouge et j vers une jaune, avant qu'il ne reste qu'une pièce, que l'on peut supposer bleue. En notant n_b, n_r et n_j le nombre initial de jetons présents initialement respectivement sur une case bleue, rouge ou jaune, on a donc

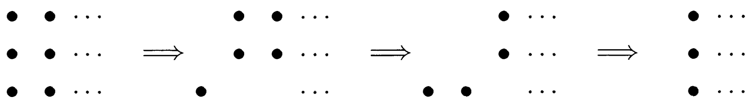
$$\left\{\begin{array}{l} n_b + b - r - j = 1 \\ n_r + r - b - j = 0 \\ n_j + j - b - r = 0 \end{array}\right. \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} b = (n_r + n_j)/2 \\ r = (n_b + n_j - 1)/2 \\ j = (n_b + n_r - 1)/2 \end{array}\right. .$$

Or, si $n \equiv 0$ [3], alors $n_b = n_r = n_j$, donc b et r ne peuvent pas être simultanément entiers. Ainsi il n'existe pas de solution si $3 \mid n$.

Si $3 \nmid n$, montrons que c'est possible. C'est en tout cas vrai aux rangs $n = 1$ et $n = 2$ comme le montre le mouvement ci-dessous.

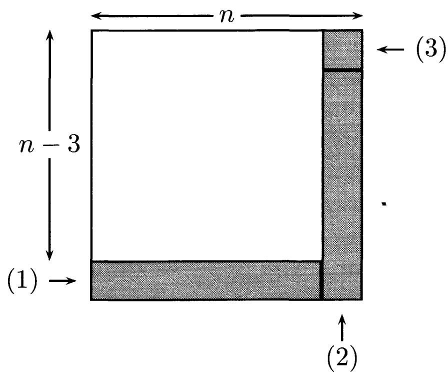


Montrons désormais que si le jeu peut se terminer au rang $n-3$, alors il peut se terminer au rang n : il suffit pour cela de savoir réduire le carré initial de taille $n+3$ en un carré de taille n, chose faisable grâce à cette procédure « mange bord » ci-dessous.



On peut donc manger une bande de longueur 3 pourvu qu'il y ait un jeton derrière une de ses extrémités.

On voit qu'en réitérant ce procédé selon diverses directions on peut donc, pour $n \geqslant 4$, passer d'un carré de taille n à un carré de taille $n-3$, en éliminant successivement les parties ci-contre.



En résumé, le jeu peut se terminer avec un seul jeton sur l'échiquier pour tous les n non divisibles par 3, et seulement pour ces valeurs de n.

4. Une inégalité géométrique

Pour trois points P, Q, R du plan, on appelle $m(\mathrm{PQR})$ le minimum des hauteurs du triangle PQR (dans le cas où P, Q, R sont colinéaires, on pose $m(\mathrm{PQR}) = 0$).

Soient A, B, C trois points du plan. Démontrer que pour tout X du plan on a

$$m(\mathrm{ABC}) \leqslant m(\mathrm{ABX}) + m(\mathrm{AXC}) + m(\mathrm{XBC}).$$

Solution

Montrons le résultat de l'exercice dans chacun des trois cas suivants.

1^er^ cas : X intérieur à ABC

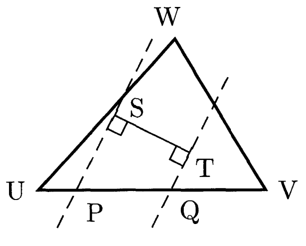
Posons $\mathscr{A}(\mathrm{ABC})$ l'aire de ABC et $\mathscr{M}(\mathrm{ABC})$ la longueur du plus grand côté de ABC. Alors on a clairement

$$m(\mathrm{ABC}) = 2\frac{\mathscr{A}(\mathrm{ABC})}{\mathscr{M}(\mathrm{ABC})}.$$

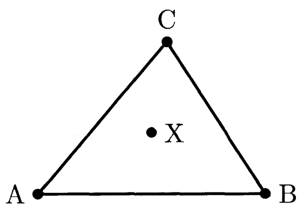
Énonçons désormais le résultat, apparemment évident, spécifique aux triangles et qui permet de faire l'exercice.

Lemme. *Tout segment inclus dans un triangle est de longueur inférieure ou égale au plus long côté de ce triangle.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer le résultat pour tout segment strictement inclus dans un triangle : on pourra conclure dans le cas où des sommets du segment sont sur les côtés du triangle par passage à la limite.



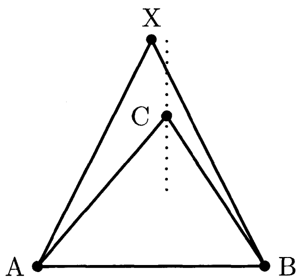
Soit UVW un triangle, et [ST] un segment inclus dans ce triangle. Traçons d_1 et d_2 les perpendiculaires à [ST] en S et T respectivement. Comme la ligne polygonale UVW entoure [ST], d_1 et d_2 coupent le triangle en 4 points. Par le principe des tiroirs, 2 de ces points (appelons-les P et Q) sont sur un même côté de UVW, par exemple [UV]. Les points P et Q sont nécessairement l'un sur d_1 et l'autre sur d_2 (car sinon S ou T serait sur [UV]). Alors $\mathrm{ST} \leqslant \mathrm{PQ} \leqslant \mathrm{UV}$, ce qui prouve notre résultat. □



D'après notre lemme, $\mathscr{M}(\mathrm{ABX})$ est la longueur maximale d'un segment inclus dans ABX. Comme $\mathrm{ABX} \subset \mathrm{ABC}$, tout segment inclus dans ABX a une longueur inférieure ou égale au plus long segment inclus dans ABC. Nous avons donc $\mathscr{M}(\mathrm{ABX}) \leqslant \mathscr{M}(\mathrm{ABC})$ et de même $\mathscr{M}(\mathrm{ACX}) \leqslant \mathscr{M}(\mathrm{ABC})$ et $\mathscr{M}(\mathrm{XBC}) \leqslant \mathscr{M}(\mathrm{ABC})$. Ainsi

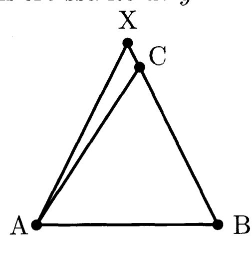
$$\begin{aligned}
m(\mathrm{ABX}) &+ m(\mathrm{AXC}) + m(\mathrm{XBC}) \\
&= 2\left(\frac{\mathscr{A}(\mathrm{ABX})}{\mathscr{M}(\mathrm{ABX})} + \frac{\mathscr{A}(\mathrm{AXC})}{\mathscr{M}(\mathrm{AXC})} + \frac{\mathscr{A}(\mathrm{XBC})}{\mathscr{M}(\mathrm{XBC})}\right) \\
&\geqslant 2\left(\frac{\mathscr{A}(\mathrm{ABX})}{\mathscr{M}(\mathrm{ABC})} + \frac{\mathscr{A}(\mathrm{AXC})}{\mathscr{M}(\mathrm{ABC})} + \frac{\mathscr{A}(\mathrm{XBC})}{\mathscr{M}(\mathrm{ABC})}\right) \\
&= 2\frac{\mathscr{A}(\mathrm{ABC})}{\mathscr{M}(\mathrm{ABC})} \\
&= m(\mathrm{ABC}).
\end{aligned}$$

2$^{\mathrm{e}}$ cas : situation du type C intérieur à ABX



Pour prouver notre résultat, il suffit de prouver que $m(\mathrm{ABC}) \leqslant m(\mathrm{ABX})$.

On peut supposer que $\mathrm{C} \in [\mathrm{AX}]$ ou $\mathrm{C} \in [\mathrm{BX}]$: en faisant « monter » C perpendiculairement à (AB) (pointillés sur le dessin ci-contre), toutes les hauteurs de ABC augmentent. En effet, c'est évident pour celle issue de C et c'est vrai pour celles issues de A et B : dans la repère orthonormé avec les coordonnées $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(x,y)$, la hauteur issue de B par exemple vaut $2y/\sqrt{x^2+y^2}$, fonction croissante de y.

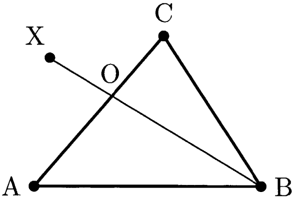


Nous nous sommes ainsi ramenés au cas où $\mathrm{C} \in [\mathrm{BX}]$ par exemple, où nous devons montrer que $m(\mathrm{ABC}) \leqslant m(\mathrm{ABX})$. Pour conclure, distinguons trois cas :

- si $m(\mathrm{ABX}) = h_{\mathrm{A}}$, hauteur issue de A, alors $m(\mathrm{ABC}) \leqslant m(\mathrm{ABX})$;
- si $m(\mathrm{ABX})$ est la hauteur h_{X} issue de X, en notant h_{C} celle issue de C dans ABC, on a $m(\mathrm{ABC}) \leqslant h_{\mathrm{C}} \leqslant h_{\mathrm{X}} = m(\mathrm{ABX})$;
- si $m(\mathrm{ABX})$ est la hauteur issue de B, alors le plus long côté de ABX est AX, donc l'angle $\widehat{\mathrm{BAX}}$ est aigu. Ainsi, $\widehat{\mathrm{BAC}} \leqslant \widehat{\mathrm{BAX}} \leqslant \pi/2$, donc $\mathrm{AB}\sin\widehat{\mathrm{BAC}} < \mathrm{AB}\sin\widehat{\mathrm{BAX}}$, c'est-à-dire : la hauteur issue de B dans BAC est plus petite que celle issue de B dans BAX. Ainsi $m(\mathrm{ABC}) \leqslant m(\mathrm{ABX})$.

3^e^ cas : situation du type ABCX convexe

Soit O l'intersection de [BX] et [AC]. Alors on a, avec les résultats précédents,



$$\begin{aligned} & m(\mathrm{ABX}) + m(\mathrm{AXC}) + m(\mathrm{XBC}) \\ & \quad \geqslant m(\mathrm{ABX}) + m(\mathrm{XBC}) \\ & \quad \geqslant m(\mathrm{ABO}) + m(\mathrm{OBC}) \\ & \quad = m(\mathrm{ABO}) + m(\mathrm{AOC}) + m(\mathrm{OBC}) \\ & \quad \geqslant (\mathrm{ABC}). \end{aligned}$$

5. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}^*$

Déterminer s'il existe une application $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\boldsymbol{f(1) = 2}$ **;**
- $\boldsymbol{f(f(n)) = f(n) + n}$ **pour tout n de $\mathbb{N}^*$;**
- $\boldsymbol{f(n) < f(n+1)}$ **pour tout n de $\mathbb{N}^*$.**

Solution

Notons $f_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $f_n = f \circ \cdots \circ f(1)$. L'énoncé nous donne $f_1 = 2$, $f_2 = 3$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Ceci montre que la suite f_n n'est autre que la suite de Fibonacci[4].

Nous avons donc démontré que pour tout élément f_n de la suite de Fibonacci, on doit avoir $f(f_n) = f_{n+1}$. Partant de cette remarque, nous pouvons étendre notre fonction f à tous les entiers en les décomposant en somme de termes de la suite de Fibonacci, grâce au lemme suivant.

Lemme-Définition. *Tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i f_i = \overline{\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \ldots \varepsilon_0}$$

avec $\varepsilon_k = 1$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour tout i et, parmi deux ε_i successifs l'un d'entre eux vaut 0. Une telle écriture est appelée l'écriture de n en base de Fibonacci.

4. Leonardo Pisano Fibonacci (env. 1170-1250), mathématicien italien.

DÉMONSTRATION.

Existence. Procédons par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est évident. Montrons-le au rang $n+1$ en supposant notre propriété vraie jusqu'au rang n. Comme $(f_t)_{t \geqslant 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{k_0} \leqslant n+1 < f_{k_0+1}$ $(*)$. Si $n+1 = f_{k_0}$, nous avons démontré la propriété au rang $n+1$ et sinon nous pouvons l'appliquer au rang $n+1-f_{k_0}$: $n+1-f_{k_0} = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i f_i$ avec les conditions du lemme. Or $k \leqslant k_0 - 2$, car sinon $n+1 \geqslant f_{k_0} + f_{k_0-1} = f_{k_0+1}$, ce qui est contraire à l'égalité $(*)$. Ainsi l'écriture $n+1 = f_{k_0} + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i f_i$ montre l'existence souhaitée au rang $n+1$.

Unicité. Raisonnons par l'absurde, en supposant l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ possédant deux écritures distinctes en base de Fibonacci,

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=0}^{l} \nu_i f_i,$$

avec les ε_i et les ν_i égaux à 0 ou 1, $\varepsilon_k = \nu_l = 1$ et jamais deux ε_i (ou ν_i) consécutifs non nuls. Quitte à soustraire à n tous les $(f_i)_{i \in \{p | \varepsilon_p = \nu_p = 1\}}$, nous pouvons supposer $k < l$. Alors

$$\sum_{m \in \mathbb{N} | k-2m \geqslant 0} f_{k-2m} \geqslant n \geqslant f_l. \tag{1}$$

Or nous pouvons vérifier facilement par récurrence (en distinguant les cas où k est pair ou impair) que $\sum_{m \in \mathbb{N} | k-2m \geqslant 0} f_{k-2m} = f_{k+1} - 1$.

- Pour k impair : le résultat est vrai pour $2k+1 = 1$. Supposons-le vrai au rang $2k-1$. Alors par hypothèse de récurrence $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} - 1 + f_{2k+1} = f_{2k+2} - 1$, ce qui démontre le résultat au rang $2k+1$.

- Pour k pair : le résultat est vrai pour $2k = 2$. Supposons-le vrai au rang $2k$. Alors par hypothèse de récurrence $f_2 + f_4 + \cdots + f_{2k} + f_{2k+2} = f_{2k+1} - 1 + f_{2k+2} = f_{2k+3} - 1$, ce qui démontre le résultat au rang $2k+2$.

Ainsi (1) s'écrit désormais $f_{k+1} - 1 \geqslant f_l$, absurde car $l > k$. □

Pour $n = \overline{\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \ldots \varepsilon_0}$, posons $f(n) = \overline{\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \ldots \varepsilon_0 0}$. On a alors bien $f(1) = 2$, $f(n) < f(n+1)$ (ceci se démontre par le même type de raisonnement que la démonstration du lemme) et

$$
\begin{aligned}
f(n)+n &= \overline{\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\dots\varepsilon_0 0} + \overline{\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\dots\varepsilon_0} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i f_{i+1} + \sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i f_i \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i f_{i+2} \\
&= \overline{\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\dots\varepsilon_0 00} \\
f(n)+n &= f(f(n)).
\end{aligned}
$$

6. Propagation d'un « signal lumineux »

Soit $n > 1$ un entier. On se donne n lampes $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ disposées sur un cercle, chacune en position « marche » ou en position « arrêt ». Les lampes sont prises modulo n, à savoir : $L_{-1} = L_{n-1}, L_0 = L_n, L_1 = L_{n+1}, \dots$

On effectue une suite d'opérations $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ L'opération S_j n'affecte que la lampe L_j (en laissant toutes les autres lampes dans le même état) et agit de la façon suivante :

- **si L_{j-1} est en position « marche », S_j change l'état de la lampe L_j en la passant de la position « marche » à la position « arrêt » ou de la position « arrêt » à la position « marche » ;**
- **si L_{j-1} est en position « arrêt », S_j ne change pas l'état de la lampe L_j.**

Initialement, toutes les lampes sont dans la position « marche ».

1. **Démontrer qu'il existe un entier strictement positif $M(n)$ tel qu'après $M(n)$ opérations toutes les lampes sont à nouveau en position « marche ».**
2. **Si n est de la forme 2^k, démontrer que toutes les lampes sont en position « marche » après $n^2 - 1$ opérations.**
3. **Si n est de la forme $2^k + 1$, démontrer que toutes les lampes sont en position « marche » après $n^2 - n + 1$ opérations.**

Solution

Nous donnons pour la première question une unique solution, s'appuyant sur la réversibilité des opérations et pour les deux questions suivantes nous considérons deux méthodes :

- la première n'utilise que des arguments de logique et la construction explicite des états des lampes au cours du processus ;
- le seconde fait appel à des notions d'algèbre linéaire, mais paraîtra sans doute plus simple à ceux possédant ces connaissances mathématiques.

1^re^ question : par réversibilité du processus

On pose $v_j = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'état du système après j transformations, où $x_i = 1$ si la lampe L_i est allumée et 0 sinon.

Le nombre d'états du système étant fini, il existe des entiers i et j, $i < j$ tels que $v_i = v_j$.

Il faut ensuite remarquer ici le point fondamental suivant : le processus est réversible, la connaissance de l'état des lampes après m transformations permet de le connaître après $m-1$ transformations. En effet, si $v_m = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors la dernière lampe que l'on a éventuellement modifiée est la m^{e} (où les indices sont pris modulo n) ; si la $m-1^{\mathrm{e}}$ est allumée, l'état avant était $v_{m-1} = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 1 - x_m, \ldots, x_n)$ et sinon c'était $v_{m-1} = (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_n)$.

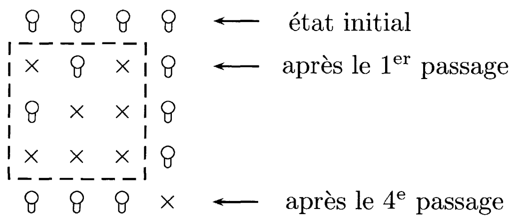
On a donc ici $v_{i-1} = v_{j-1}$, puis $v_{i-2} = v_{j-2}$ et finalement $v_0 = v_{j-i}$, ce qui est le résultat voulu avec $\mathrm{M}(n) = j - i$.

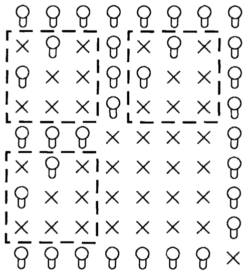
Remarquons que nous avons même ici un majorant du nombre d'étapes nécessaires pour retomber dans l'état initial : 2^n, car notre système peut atteindre au plus 2^n états.

2^e^ et 3^e^ questions : par récurrence

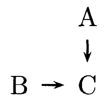
Nous nommerons ici « passage » la suite finie de n opérations sur des lampes consécutives commençant en L_0. Ainsi le premier passage est constitué de $\mathrm{S}_0, \ldots, \mathrm{S}_{n-1}$, le second de $\mathrm{S}_n, \ldots, \mathrm{S}_{2n-1}$ etc.

Pour exposer la suite des états des lampes, nous allons adopter le formalisme suivant : un tableau où la i^{e} ligne représente l'état du système après le $i - 1^{\mathrm{e}}$ passage, et la j^{e} colonne les états successifs de L_j. Ainsi pour un nombre de lampes égal à 4 et à 8, nous obtenons les schémas ci-après pour représenter la suite des états de chaque lampe.



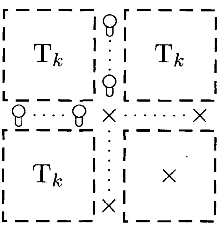


Un moyen relativement rapide pour construire ce type de tableau est de remplir les cases une par une selon le schéma « A-B-C » ci-contre (si C est sur la première colonne, B est la dernière lampe de la ligne de A) : C est une lampe allumée si et seulement si A ou B l'est et ce « ou » est exclusif.

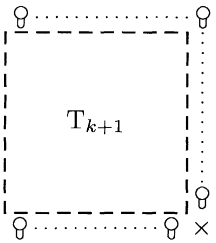


Traitons le cas où n est une puissance de deux. Nous voyons apparaître pour $n = 4$ et $n = 8$ des blocs communs, encadrés en pointillés. Ceci doit donner l'idée d'une construction récursive de nos schémas. Définissons donc les tableaux T_k (carré de côté $2^k - 1$) suivants, en partant pour T_1 d'un tableau limité à une case $\times$.

T_{k+1} :



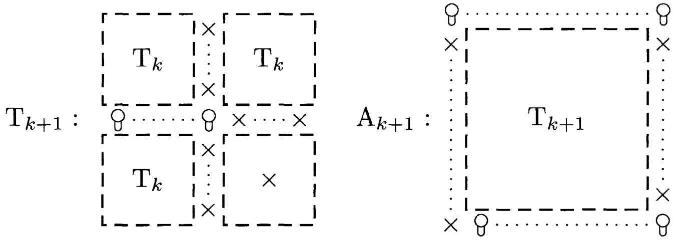
A_{k+1} :



Par une récurrence sur k, le tableau A_k est exactement la suite des états de nos lampes : c'est vrai au rang 1 et supposons que cela soit vérifié au rang k. Il suffit pour conclure de vérifier que notre schéma « A-B-C » est vérifié en toute case de A_{k+1}, résultat trivial en toute case C appartenant à un des trois sous-tableaux T_k (par hypothèse de récurrence), et facilement vérifié pour C sur une branche de la croix.

En regardant la $2^k = n^{\mathrm{e}}$ ligne de notre tableau A_k, nous pouvons conclure que toutes les lampes sont allumées après $n^2 - 1$ opérations.

Nous pouvons raisonner de même pour le cas où n est de la forme $2^k + 1$. Quelques essais suggèrent ici la construction récursive suivante, en partant pour T_1 d'un tableau d'une seule case 💡.



On montre ici de même facilement que A_k vérifie le schéma « A-B-C », donc sa dernière ligne est bien l'état de notre système après $2^k = n-1$ passage, c'est-à-dire $n(n-1)$ opérations. Si on effectue une opération supplémentaire, on voit que toutes les lampes seront allumées et donc, après $n^2 - n + 1$ opérations, on est revenu à l'état initial.

2e et 3e questions : algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Reprenons les notations de la solution de la première question. La transformation S_j est constituée d'une permutation pour se placer sur la lampe L_j, puis du remplacement de x_j par $x_{j-1} + x_j$ (où la somme est bien sûr à comprendre dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et enfin de la permutation inverse pour replacer la lampe à sa position initiale. Plus précisément, posons

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sigma & : & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n, x_1) \\ \rho & : & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + x_n, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right. .$$

Alors $v_j = S_j \circ \cdots \circ S_1(v_0) = (\sigma^{-j}\rho\sigma^j) \circ \cdots \circ (\sigma^{-1}\rho\sigma)(v_0) = \sigma^{-j}(\rho\sigma)^j(v_0)$. Nous avons donc l'équivalence $v_j = v_0 \Leftrightarrow \sigma^j(v_0) = (\rho\sigma)^j(v_0) \Leftrightarrow v_0 = (\rho\sigma)^j(v_0)$ (v_0 est invariant par permutation).

Il nous suffit donc de démontrer que $\tau = \rho \circ \sigma$ vérifie $\tau^m = \mathrm{Id}$ avec $m = n^2 - 1$ ou $m = n^2 - n + 1$ selon la question. Il faudrait donc trouver un polynôme annulateur de τ. Pour trouver ce polynôme, le théorème de Cayley[5]-Hamilton[6] semble tout indiqué.

L'application linéaire τ associe à un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le vecteur $(x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$, donc sa matrice associée est

5. ARTHUR CAYLEY (1821-1895), mathématicien britannique.
6. SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865), mathématicien et physicien irlandais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est (par développement selon la première colonne) $X^n - X^{n-1} - 1$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Le déterminant est non nul, donc τ est inversible (on rejoint l'idée de réversibilité du processus de la première question) et d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\tau^n = \tau^{n-1} + \mathrm{Id}$, c'est-à-dire $(\tau^{-1})^n = \tau^{-1} + \mathrm{Id}$.

De plus, si n est une puissance de deux, $(X+1)^n = X^n + 1$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ (cf. exercice 1985 n°3). On a donc $(\tau^{-1})^{n^2} = (\tau^{-1} + \mathrm{Id})^n = (\tau^{-1})^n + \mathrm{Id} = \tau^{-1}$, si bien que $(\tau^{-1})^{n^2-1} = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire $\tau^{n^2-1} = \mathrm{Id}$. Nous avons donc répondu à la seconde question.

Si n est de la forme $2^k + 1$, alors le même type d'astuce de calcul que précédemment permet d'écrire $(\tau^{-1})^{n^2-n+1} = \tau^{-1}((\tau^{-1})^n)^{n-1} = \tau^{-1}(\tau^{-1} + \mathrm{Id})^{n-1} = \tau^{-1}((\tau^{-1})^{n-1} + \mathrm{Id}) = (\tau^{-1})^n + \tau^{-1} = \mathrm{Id}$. Ainsi $\tau^{n^2-n+1} = \mathrm{Id}$, résultat qui répond à la troisième question.

Remarque. Que se passe-t-il si n est quelconque ? L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ étant fini, d'après le théorème de Lagrange[7], il existe un entier m_n (que nous pouvons choisir minimal) tel que $\tau^{m_n} = \mathrm{Id}$. Nous sommes donc sûrs, partant d'une configuration v, de la retrouver après $\mathrm{N} = nm_n$ opérations (car alors $\sigma^{\mathrm{N}}(v) = v$ et $\tau^{\mathrm{N}}(v) = v$).

Hélas, dans le cas général, il est difficile de calculer m_n. Néanmoins, quelques pistes peuvent être exploitées :

- m_n doit diviser $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})| = \prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$ (car un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ a sa la première colonne non nulle, la seconde ne doit pas être dans l'espace vectoriel engendré par la première, la troisième en dehors de l'espace vectoriel engendré par les deux premières etc).

- le polynôme $X^n - X - 1$ annule τ^{-1}, mais c'est aussi son polynôme minimal dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non tous nuls, tels que

7. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mathématicien français.

$a_0+a_1\tau^{-1}+\cdots+a_{n-1}(\tau^{-1})^{n-1}=0$. Or par définition on voit que $\tau^{-1}(x_1,\dots,x_n)=(x_n,x_1+x_n,x_2,\dots,x_{n-1})$, donc en particulier $(\tau^{-1})^k(1,0,\dots,0)=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, où $0\leqslant k\leqslant n-1$ et où le « 1 » est situé en $k+1^{\text{e}}$ position. Ainsi on a $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_{n-1})=\left(a_0+a_1\tau^{-1}+\cdots+a_{n-1}(\tau^{-1})^{n-1}\right)(1,0,\dots,0)=(0,\dots,0)$, donc le polynôme $a_0+a_1\mathrm{X}+\cdots+a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}$ est nul, ce qui est absurde.

Comme $\mathrm{X}^n-\mathrm{X}-1$ est le polynôme minimal de τ^{-1}, m_n est le plus petit entier tel que $\mathrm{X}^n-\mathrm{X}-1\mid\mathrm{X}^{m_n}-1$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\mathrm{X}]$. Déterminer m_n dans le cas général est donc un problème non trivial de théorie de Galois[8].

8. Évariste Galois (1811-1832), mathématicien français.

Hong-Kong (Chine)

1994

1. Minoration de la moyenne des éléments d'un ensemble

Soient m et n deux entiers strictement positifs et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. On suppose que si, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, $a_i + a_j$ est inférieur ou égal à n, alors il existe k, $1 \leqslant k \leqslant m$, tel que $a_i + a_j = a_k$.

Démontrer que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

Solution

On peut supposer les a_i ordonnés de façon croissante. On a alors pour tout $i \in [\![1, m]\!]$

$$a_i + a_{m+1-i} \geqslant n + 1.$$

En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un élément $i \in [\![1, m]\!]$ vérifiant $a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$. On peut en outre supposer ici $i < m + 1 - i$.

Alors les $m + 1 - i$ nombres distincts $a_i + a_1, a_i + a_2, \ldots, a_i + a_{m+1-i}$ s'écrivent sous la forme a_k et chacun est supérieur à $a_1, a_2, \ldots$ et a_i. On a donc au moins $(m + 1 - i) + i = m + 1$ nombres distincts de la forme a_k, ce qui contredit l'énoncé : les a_k sont au nombre de m.

On a donc

$$2\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} (a_i + a_{m+1-i}) \geqslant m(n+1).$$

Ceci est exactement le résultat voulu,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

2. Géométrie pure

Soit ABC est un triangle isocèle en A. On suppose que :

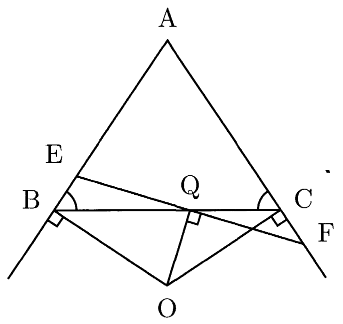
- **M est le milieu de [BC] et O est le point de la droite (AM) tel que la droite (OB) soit perpendiculaire à la droite (AB) ;**
- **Q est un point quelconque du segment [BC] différent de B et de C ;**
- **E est un point de la droite (AB) et F de la droite (AC) tels que E, Q et F soient colinéaires et distincts.**

Montrer que la droite (OQ) est perpendiculaire à la droite (EF) si et seulement si QE = QF.

Solution

Si (OQ) $\perp$ (EF) alors QE = QF

Supposons (OQ) $\perp$ (EF). Les angles droits de notre figure montrent alors deux ensembles de points cocycliques : B, E, Q et O d'une part, C, F, Q et O d'autre part. On en déduit l'égalité d'angles



$$\widehat{\mathrm{QOE}} = \widehat{\mathrm{QBE}} = \widehat{\mathrm{QCA}} = \pi - \widehat{\mathrm{QCF}}$$

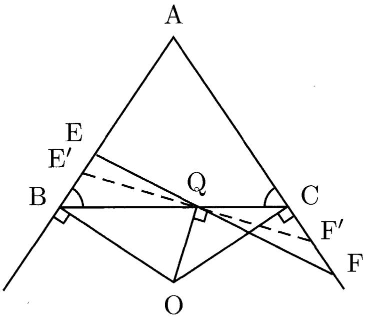
$$\widehat{\mathrm{QOE}} = \widehat{\mathrm{QOF}}.$$

On a donc le résultat,

$$\mathrm{QE} = \mathrm{OQ}/\sin\widehat{\mathrm{QOE}} = \mathrm{OQ}/\sin\widehat{\mathrm{QOF}} = \mathrm{QF}.$$

Si QE = QF alors (OQ) $\perp$ (EF)

Supposons QE = QF. Nous utilisons ici le résultat d'unicité de la droite (EF) passant par Q telle que QE = QF. Plus précisément, notons E′ et F′ tels que Q $\in$ (E′F′), E′ $\in$ (AB), F′ $\in$ (AC) et (OQ) $\perp$ (E′F′). Raisonnons par l'absurde en supposant E $\neq$ E′.



D'après la partie précédente, $QE' = QF'$. Le point Q est à la fois le milieu de [EF] et de [E'F'], donc EE'FF' est un parallélogramme, si bien que $(EE') /\!/ (FF')$: $\widehat{A} = 0$, résultat absurde (les droites (OQ) et (EF) n'ont alors pas de sens). Ainsi $E = E'$, donc

$$(OQ) \perp (EF).$$

3. Nombre de chiffres non nuls en base deux

Pour tout entier k strictement positif, on note $f(k)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ dont la représentation en base 2 contient exactement trois fois le chiffre 1.

1. **Démontrer que pour tout entier strictement positif m, il existe au moins un entier strictement positif k tel que $f(k) = m$.**
2. **Trouver tous les entiers strictement positifs m pour lesquels il existe un unique entier k tel que $f(k) = m$.**

Solution

Surjectivité de f sur $\mathbb{N}^*$

L'étude des premières valeurs de f permet de conjecturer la propriété suivantes : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) - f(k) = 0$ ou 1. Pour démontrer cette propriété, introduisons la fonction

$$g : k \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ comporte trois chiffres 1 dans son écriture binaire} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Pour tout k on a alors $g(2k) = g(k)$, si bien que

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \sum_{i=k+2}^{2k+2} g(i) - \sum_{i=k+1}^{2k} g(i) \\ &= g(2k+1) + g(2k+2) - g(k+1) \\ f(k+1) - f(k) &= g(2k+1). \end{aligned}$$

Ainsi $f(k+1) - f(k)$ vaut 0 ou 1.

De plus $f(k+1) - f(k) = 1$ pour une infinité de k : il suffit d'avoir $g(2k+1) = 1$, ce qui est acquis par exemple pour $k = \overline{10\ldots01}$. On a donc $\lim_{\infty} f = \infty$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{N}$ $(f(1) = 0)$, ce qu'il fallait démontrer.

Éléments de $\mathbb{N}^*$ possédant un unique antécédent par f

Un entier m a un unique antécédent k par f si et seulement si, d'après ce qui précède, $f(k+1) - f(k) = 1$ et $f(k) - f(k-1) = 1$, c'est-à-dire si $g(2k+1) = 1$ et $g(2k-1) = 1$.

Comme $2k+1$ a trois chiffres 1, k en a deux. On est alors dans un des trois cas suivants :

- si $k = \overline{10\ldots01}$, alors $2k-1 = \overline{10\ldots001}$ n'a que deux chiffres 1 ;
- si $k = \overline{10\ldots010}$, alors $2k-1 = \overline{10\ldots011}$ a bien trois chiffres 1 ;
- si $k = \overline{10\ldots010\ldots0}$, alors $2k-1 = \overline{10\ldots01\ldots1}$ a plus de trois chiffres 1.

Ainsi $f(k)$ a pour unique antécédent k si et seulement si k est de la forme $2(2^l+1)$ avec $l \geqslant 1$.

On voit alors que les éléments x de $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ tels que $g(x) = 1$ sont exactement :

- les x ayant une écriture binaire à $l+2$ chiffres dont exactement trois sont des 1 (on en a donc C_{l+1}^2 : on choisit la place des deux derniers 1) ;
- mais aussi $2k-1$ (qui a $l+3$ chiffres).

Ainsi les entiers m ayant un unique antécédent par f sont ceux de la forme $(l^2+l+2)/2$, avec $l \in \mathbb{N}^*$.

4. Une équation diophantienne

Trouver tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs tels que

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

soit entier.

Solution

Voici la bonne idée à avoir : le problème est symétrique. En effet si $mn-1$ divise n^3+1, il divise aussi $m^3(n^3+1) - (mn-1)\big((mn)^2+mn+1\big) = m^3+1$. On se limitera donc dans la suite au cas $m \geqslant n$.

Si $m = n$, alors $n^2 - 1$ divise $(n^3 + 1) - n(n^2 - 1) = n + 1$. Ainsi, comme $n + 1 \neq 0$, $n^2 - 1 \leqslant n + 1$, donc $n \leqslant 2$. Ceci donne $n = m = 2$.

Si $n = 1$, on a nécessairement $m = 2$ ou $m = 3$.

Débarrassés de ces cas parasites, considérons le cas $m > n > 1$. On pose k entier tel que

$$n^3 + 1 = k(mn - 1). \tag{1}$$

Évaluons k en fonction de n.

- On a tout d'abord $(n - k)(mn - 1) = mn^2 - n - (n^3 + 1) = (m - n)n^2 - n - 1 \geqslant n^2 - n - 1 > 0$ car $n \geqslant 2$. Ainsi $n - k > 0$, c'est-à-dire $k < n$.
- Or (1) peut aussi s'écrire sous la forme $n(km - n^2) = k + 1$. Comme $k + 1 > 0$, on a aussi $km - n^2 > 0$, donc $n \leqslant n(km - n^2) = k + 1$, c'est-à-dire $k \geqslant n - 1$.

La combinaison de ces deux inégalités donne $k = n - 1$. On a donc, en substituant k par $n - 1$ dans (1), $m = (n^2 + 1)/(n - 1)$. Donc $n - 1$ divise $(n^2 + 1) - (n - 1)(n + 1) = 2$, donc $n = 2$ ou $n = 3$. On obtient les couples $(2, 5)$ et $(3, 5)$.

En résumé, on a donc

$$\mathscr{S} = \{(1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (3,1), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3)\}.$$

5. Équation fonctionnelle sur $]1, +\infty[$

Soit S l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. Trouver toutes les applications $f : S \longrightarrow S$ vérifiant les deux conditions :

(1) pour tous x et y de S : $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$;

(2) la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $-1 < x < 0$ et $x > 0$.

Solution

Dans (1), $y = x$ donne $f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$, si bien que $x + f(x) + xf(x)$ est un point fixe de f.

Or, en regardant tout cela de plus près, la fonction f ne peut pas avoir beaucoup de points fixes : si elle en possède deux distincts, a et b, strictement positifs, alors $f(a)/a = f(b)/b$ et $x \mapsto f(x)/x$ n'est donc pas strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De même f ne peut pas avoir deux points fixes sur $]-1, 0[$. La fonction f peut donc avoir au maximum trois points fixes : $p_1 < 0$, 0 et $p_2 > 0$.

De plus, si p est un point fixe non nul, $x = y = p$ dans (1) montre que $p^2 + 2p$ en est un également, distinct de p ($p^2 + 2p = p \Leftrightarrow p = 0$ ou -1). Si $p > 0$, alors $p^2 + 2p > 0$, ce qui contredit l'unicité d'un point fixe strictement positif. De même si $-1 < p < 0$, alors $-1 < p^2 + 2p < 0$, ce qui contredit de même l'unicité d'un point fixe strictement négatif.

Ainsi le seul point fixe possible de f est 0, donc pour tout x de S on a $x + f(x) + xf(x) = 0$, c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{-x}{1+x}.$$

Réciproquement, cette application satisfait les conditions de l'énoncé.

6. Surtout ne pas prendre peur

Démontrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{A}$ d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante : « pour tout ensemble infini $\mathcal{S}$ constitué de nombres premiers, il existe k supérieur ou égal à deux et deux entiers strictement positifs m et n, $m \in \mathcal{A}$, $n \notin \mathcal{A}$, chacun d'eux étant un produit de k éléments distincts de $\mathcal{S}$ ».

Solution

En fait, il faut surtout ne pas être effrayé et se poser la bonne question : une fois un tel ensemble $\mathcal{A}$ créé, pour $\mathcal{S}$ donné, comment sait-on quel sera le k correspondant ?

Soit $p_2 < p_3 < \dots$ l'ensemble des nombres premiers. Comme on doit faire le lien entre $\mathcal{S}$ et k, on peut choisir pour k l'indice du plus petit nombre premier de $\mathcal{S}$, p_k.

Alors on est amené à démontrer que l'ensemble suivant, par exemple, convient ,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \geqslant 1} \mathrm{P}_i,$$

où P_i désigne l'ensemble constitué de tous les nombres de la forme $p_i q_1 \dots q_{i-1}$ avec p_i et les q_j premiers et $p_i < q_1 < \dots < q_{i-1}$.

En effet, pour $\mathcal{S}$ donné, de plus petit élément p_k, on peut lister les éléments de $\mathcal{S}$ sous la forme

$$p_k < q_1 < \cdots < q_{k-1} < q_k < \cdots .$$

Alors par construction on a $p_k q_1 \ldots q_{k-1} \in \mathcal{A}$ et $q_1 q_2 \ldots q_k \notin \mathcal{A}$, ce qui répond à la question.

Toronto (Canada)

1995

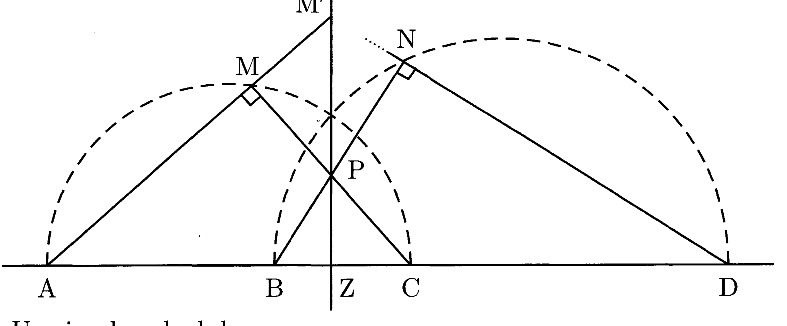
1. Trois droites concourantes

Soient A, B, C et D, dans l'ordre, quatre points distincts d'une même droite. Les cercles de diamètres [AC] et [BD] se coupent aux points X et Y. La droite (XY) rencontre la droite (BC) au point Z. Soit P un point de la droite (XY), distinct de Z. La droite (CP) rencontre le cercle de diamètre [AC] aux points C et M et la droite (BP) rencontre le cercle de diamètre [BD] aux points B et N.

Montrer que les droites (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

Solution

Notons respectivement M′ et N′ les intersections de (AM) et (DN) avec (XY). L'énoncé nous demande de démontrer que M′ = N′, c'est-à-dire que PM′ = PN′.



Un simple calcul donne

$$\mathrm{PM}' = \frac{\mathrm{PM}}{\cos\widehat{\mathrm{MPM}'}} = \frac{\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PC}}{\mathrm{PZ}},$$

et de même

$$\mathrm{PN}' = \frac{\mathrm{PN}}{\cos\widehat{\mathrm{NPN}'}} = \frac{\mathrm{PN}\cdot\mathrm{PB}}{\mathrm{PZ}}.$$

On a donc $PM' = PN'$ si et seulement si $PM \cdot PC = PN \cdot PB$. Or $P \in (XY)$, axe orthique de nos deux cercles initiaux, donc sa puissance par rapport à ces deux cercles est la même (cf. exercice 1985 n°5) : $PM \cdot PC = PN \cdot PB$.

Ainsi les droites (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

2. Une inégalité sous contrainte multiplicative

> **Soient a, b et c des nombres réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que**
>
> $$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Solution

Si on pose $x = 1/a$, $y = 1/b$ et $z = 1/c$ on a encore $xyz = 1$ et l'inégalité à démontrer devient (où nous définissons par la même occasion la quantité l)

$$l = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Or par symétrie on peut supposer $x \leqslant y \leqslant z$ et on a alors aussi $\frac{x}{y+z} \leqslant \frac{y}{x+z} \leqslant \frac{z}{x+y}$.

On peut donc appliquer l'inégalité de Tchebychev[1] (voir la remarque) :

$$\begin{aligned} l &= x\frac{x}{y+z} + y\frac{y}{x+z} + z\frac{z}{x+y} \\ &\geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right) \\ l &\geqslant \frac{1}{3}(x+y+z+l), \end{aligned}$$

donc $l \geqslant (x+y+z)/2$. Or d'après l'inégalité de la moyenne on a $\frac{x+y+z}{3} \geqslant (xyz)^{1/3} = 1$. Ainsi on a bien $l \geqslant 3/2$.

Remarque. Notons avant tout que Tchebychev est le nom de mathématicien admettant le plus d'orthographes distinctes dans la littérature

1. PAFTUNY LVOVICH TCHEBYCHEV (1821-1894), mathématicien russe.

scientifique (au moins 35). Le lecteur pourra donc l'écrire sereinement tant que la phonétique sera approximativement respectée ([tʃebitʃeəf] ou [tʃebitʃeəv]).

Inégalité de Tchebychev. *Si deux suites de nombres réels* $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *sont rangées dans le même ordre (croissant ou décroissant) alors*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Cette inégalité se retient bien sous la forme « la moyenne des produits est plus grande que le produit des moyennes » (l'inégalité est renversée si une suite est croissante et l'autre décroissante).

DÉMONSTRATION. Si les suites des a_i et des b_i sont décroissantes, nous avons $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$. Une fois développée, cette inégalité est exactement l'inégalité de Tchebychev. Si au contraire une des deux suites est croissante et l'autre décroissante, nous pouvons écrire $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leqslant 0$, ce qui constitue la seconde inégalité annoncée. □

Le lecteur pourra de nouveau utiliser l'inégalité de Tchebychev pour démontrer celle dite de Nesbitt[2], pour tous les réels strictement positifs x, y et z,

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

3. Logique et géométrie

Trouver tous les entiers n, strictement supérieurs à 3, pour lesquels il existe n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ et des nombres réels $r_1, r_2, \dots, r_n$ vérifiant les deux conditions :

- **trois quelconques des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas alignés ;**
- **pour tout triplet i, j, k ($1 \leqslant i < j < k \leqslant n$) l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ a pour valeur $r_i + r_j + r_k$.**

---

2. CECIL J. NESBITT (1912-1991), mathématicien américain.

Solution

Supposons une telle configuration donnée et nommons $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_m$ le polygone formant l'enveloppe convexe, à m côtés, de cet ensemble de points ($m \leqslant n$). Quitte à renuméroter les A_i, on peut supposer $\mathrm{A}_i = \mathrm{B}_i$ pour $i \in [\![1, m]\!]$.

1$^{\text{re}}$ étape : $m \leqslant 4$

Raisonnons par l'absurde et supposons $m \geqslant 5$. Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ avec $|i - j| \geqslant 2$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathrm{B}_{i-1}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}\mathrm{B}_j) &= \mathscr{A}(\mathrm{B}_{i-1}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j) + \mathscr{A}(\mathrm{B}_{i+1}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j) \\ &= \mathscr{A}(\mathrm{B}_{i-1}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}) + \mathscr{A}(\mathrm{B}_{i-1}\mathrm{B}_j\mathrm{B}_{i+1}).\end{aligned}$$

Dans ces égalités d'aire, les indices sont à comprendre modulo m et la dernière égalité s'écrit aussi d'après l'énoncé $(r_{i-1} + r_i + r_j) + (r_{i+1} + r_i + r_j) = (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) + (r_{i-1} + r_j + r_{i+1})$, c'est-à-dire

$$r_j = r_{i-1} + r_{i+1} - r_i.$$

Le coefficient de tous les B_j (pour $j \neq i-1$, i et $i+1$) est donc le même : $n - 3$ sommets consécutifs ont le même coefficient. Comme $n \geqslant 5$, deux sommets consécutifs ont donc le même coefficient, donc tous les sommets ont le même coefficient, nommé r.

Les triangles $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_4$ et $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_5$, ont donc la même aire, $3r$; les points B_3, B_4 et B_5. sont donc situés à la même distance de $(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2)$ et du même côté car le polygone est convexe. Ces trois points sont donc alignés, ce qui est contradictoire.

2$^{\text{e}}$ étape : un seul point à l'intérieur de l'enveloppe convexe

Soit A un point intérieur à l'enveloppe convexe. Notons $\mathscr{B}$ l'aire de $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_m$. Alors

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_m) = \mathscr{A}(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{A}) + \mathscr{A}(\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}) + \cdots + \mathscr{A}(\mathrm{B}_m\mathrm{B}_1\mathrm{A}).$$

Ceci permet d'écrire

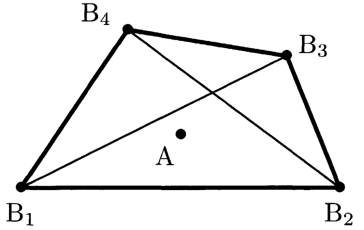
$$r_{\mathrm{A}} = \frac{1}{m}(\mathscr{B} - 2\sum_{i=1}^{m} r_i).$$

Ainsi tous les points à l'intérieur de l'enveloppe convexe ont le même coefficient.

Supposons désormais, par l'absurde, que deux tels points existent, nommons-les A et A'. Comme A et A' ont le même coefficient, les triangles B_1B_2A et B_1B_2A' ont la même aire. De plus A et A' sont du même côté de (B_1B_2) ; (AA') est donc parallèle à (B_1B_2). De même (AA') et (B_2B_3) sont parallèles, donc B_1, B_2 et B_3 sont alignés, ce qui apporte la contradiction souhaitée.

3e étape : étude d'un cas particulier

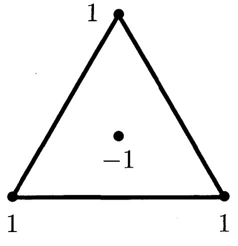
La valeur maximale de n est donc désormais 5 et, pour $n = 5$, nous avons nécessairement la configuration suivante.

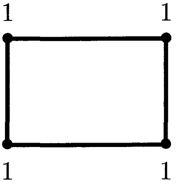


Montrons que ceci est impossible. Le point A est intérieur du triangle $B_1B_2B_3$, donc $\mathscr{A}(B_1B_2B_3) = \mathscr{A}(B_1AB_2) + \mathscr{A}(B_2AB_3) + \mathscr{A}(B_3AB_1)$, ce qui conduit à $r_1+r_2+r_3+3r_A = 0$. De même on a $r_1+r_2+r_4+3r_A = 0$. On en déduit que $r_3 = r_4$. Ainsi les triangles AB_2B_3 et AB_2B_4 ont la même aire, donc (AB_2) et (B_3B_4) sont parallèles. Mais on a de même (AB_1) et (B_3B_4) parallèles, donc B_1, A et B_2 sont alignés, ce qui est absurde.

4e étape : conclusion

La valeur maximale de n est donc 4, elle peut être atteinte comme le montrent les deux configurations suivantes.





4. Arithmétique et suites

Trouver la plus grande valeur de x_0 pour laquelle il existe une suite $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant les deux conditions :

(1) $x_0 = x_{1995}$;

(2) pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant 1995$,

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}.$$

Solution

La condition (2) de l'énoncé est du second degré en x_i et admet pour solution

$$x_i = \frac{x_{i-1}}{2} \text{ ou } x_i = \frac{1}{x_{i-1}}.$$

On montre alors facilement par récurrence la propriété suivante : pout tout i dans $\mathbb{N}$ on peut écrire

$$x_i = 2^{\alpha_i} {x_0}^{\varepsilon}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha_i| \leqslant i$. De plus on peut démontrer par une récurrence facile sur i que :

- si $\varepsilon = 1$ alors $\alpha_i + i$ est pair ;
- si $\varepsilon = -1$ alors $\alpha_i + i$ est impair.

La condition (1) donne alors $x_0 = 2^{\alpha_{1995}} {x_0}^{\varepsilon}$. Si $\varepsilon = 1$ alors cette équation s'écrit $2^{\alpha_{1995}} = 1$, donc $\alpha_{1995} = 0$. Mais alors $\alpha_{1995} + 1995$ est impair. On vient de voir que c'est impossible.

Ainsi $\varepsilon = -1$ et l'équation donne alors $x_0 = 2^{\frac{\alpha_{1995}}{2}}$. Or $\alpha_{1995} \leqslant 1995$ et même $\alpha_{1995} \leqslant 1994$ car $\alpha_{1995} + 1995$ doit être impair. Donc $x_0 \leqslant 2^{997}$.

De plus ce maximum peut être atteint en prenant $x_0 = 2^{997}$, $x_i = \frac{x_{i-1}}{2}$ pour $i \in [\![1, 1994]\!]$ et $x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}}$: on a alors bien $x_{1995} = x_0$.

La valeur maximale de x_0 est donc 2^{997}.

5. Un problème de chemin minimal

Soit ABCDEF un hexagone convexe tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{AB} & = \mathbf{BC} & = \mathbf{CD} \\ \mathbf{DE} & = \mathbf{EF} & = \mathbf{FA} \\ \widehat{\mathbf{BCD}} & = \widehat{\mathbf{EFA}} & = \mathbf{60^\circ} \end{array}\right. .$$

Soient G et H deux points intérieurs à l'hexagone tels que $\widehat{\mathbf{AGB}} = \widehat{\mathbf{DHE}} = \mathbf{120^\circ}$. Démontrer que

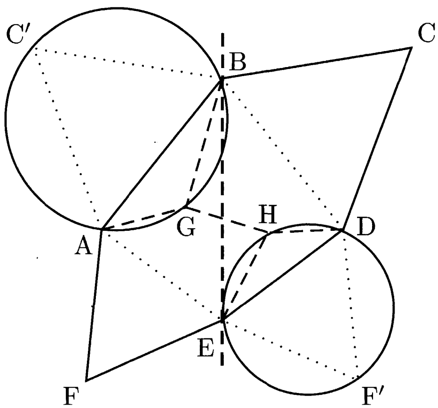
$$\mathbf{AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF.}$$

Solution

1^re^ méthode

Les triangles BCD et AFE sont équilatéraux, donc EA = ED et BA = BD : D et A sont symétriques par rapport à (BE). Complétons la symétrie de notre figure en introduisant C′ et F′, les symétriques respectifs de C et F par rapport à (BE).

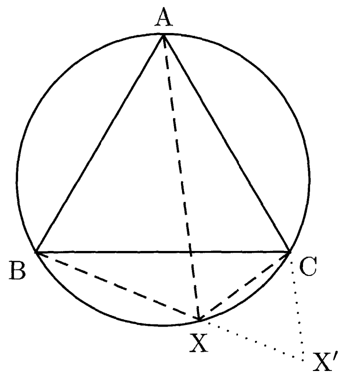
La condition $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$ signifie alors que les points G et H se situent sur les cercles circonscrits respectivement à ABC′ et DEF′, conformément au schéma ci-dessous.



Le lemme suivant permet alors d'écrire AG+GB = C′G et DH+HE = HF′, d'où le résultat,

$$AG + GB + GH + DH + HE = C'G + GH + HF' \geqslant C'F' = CF.$$

L'égalité intervient si et seulement si G et H sont sur (C′F′).



Lemme. *Si* X *est sur le cercle circonscrit au triangle équilatéral* ABC*, sur l'arc délimité par* B *et* C *ne contenant pas* A*, alors*

$$AX = BX + CX.$$

Démonstration. Nommons X′ le point extérieur à ABXC tel que XCX′ soit équilatéral. Alors $\widehat{BXX'} = \widehat{BXC} + \widehat{CXX'} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ donc B, X et X′ sont alignés. Par rotation de centre C et d'angle -60°, on a donc $AX = BX' = BX + XX' = BX + CX$. □

Remarquons que ce lemme peut aussi être vu comme une application directe de l'égalité de Ptolémée, présentée en annexe.

2^e^ méthode

Cette démonstration montre que la condition $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$ est superflue. Gardons les mêmes notations que précédemment.

Dans le quadrilatère AGBC′, l'inégalité de Ptolémée (présentée en annexe) s'écrit $GC' \cdot AB \leqslant GA \cdot BC' + GB \cdot AC'$, c'est-à-dire $GC' \leqslant GA + GB$. De même $HF' \leqslant HD + HE$, d'où le résultat,

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant C'G + GH + HF' \geqslant C'F' = CF.$$

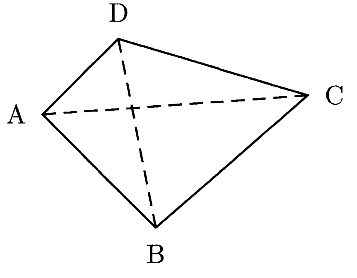
Annexe : l'inégalité de Ptolémée

Pour les problèmes faisant intervenir des encadrements en géométrie, l'inégalité de Ptolémée est souvent un outil efficace (outre bien sûr l'inégalité triangulaire) à maîtriser, en particulier son cas d'égalité : le candidat doit y penser dès qu'il est confronté à des points cocycliques.

Inégalité de Ptolémée[3]**.** *Soient* A, B, C *et* D *quatre points deux à deux distincts. On a alors*

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}\geqslant\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

avec égalité si et seulement si les points A, B, C *et* D *sont (dans cet ordre) cocycliques ou alignés.*



DÉMONSTRATION. La preuve la plus rapide de ce résultat est sans aucun doute celle utilisant le plan complexe : notons a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D. On a alors immédiatement, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|(b-a)(d-c)|+|(c-b)(d-a)| &\geqslant |(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)|\\ &=|(c-a)(d-b)|.\end{aligned}$$

Ceci est exactement l'inégalité souhaitée. On a égalité si et seulement si

$$\begin{aligned}&\operatorname{Arg}(b-a)(d-c)\equiv\operatorname{Arg}(c-b)(d-a)\ [2\pi]\\ \Leftrightarrow\quad &\operatorname{Arg}\frac{b-a}{d-a}+\operatorname{Arg}\frac{d-c}{b-c}\equiv\pi\ [2\pi]\\ \Leftrightarrow\quad &(\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}})\equiv\pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Cette dernière condition traduit exactement la cocyclicité de nos points ou leur alignement (dans l'ordre adéquat). $\square$

3. CLAUDIUS PTOLÉMÉE (env. 85-165), mathématicien grec.

6. Très belle combinatoire

Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensembles $\mathcal{A}_0$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tels que :

- **$\mathcal{A}_0$ contient exactement p éléments ;**
- **la somme de éléments de $\mathcal{A}_0$ est divisible par p.**

Solution

1^re^ méthode

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ possédant p éléments. Notons $\mathcal{A}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$ l'ensemble des éléments $\sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ (où on classera toujours les a_i par ordre croissant) de $\mathcal{A}$ vérifiant : $a_1 + a_2 + \cdots + a_p \equiv i\ [p]$. On définit alors la fonction f sur $\mathcal{A}$ par $f(\sigma) = i$, pour $\sigma \in \mathcal{A}_i$.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble $\mathcal{A}$ privé de deux parties particulières : $[\![1, p]\!]$ et $[\![p+1, 2p]\!]$. On définit $\mathcal{B}_0$ comme $\mathcal{A}_0$ privé de ces deux parties (on peut en effet vérifier que ces deux parties sont dans $\mathcal{A}_0$, ceci étant dû au caractère impair de p).

On va monter que les ensembles $\mathcal{B}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{p-1}$ sont de même cardinal, au moyen d'une bijection. Vérifions par exemple que tous les $\mathcal{A}_i$ sont de même cardinal que $\mathcal{B}_0$.

L'idée naturelle est d'utiliser des rotations pour passer de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{A}_i$ en associant à $\sigma = \{a_1, \ldots, a_p\}$ la partie $\sigma + r = \{a_1 + r, \ldots, a_p + r\}$, où « $a_i + r$ » est ici à comprendre modulo $2p$. Hélas ceci ne change pas $f(\sigma)$: $f(\sigma + r) = f(\sigma) + pr = f(\sigma)$; on demeure dans $\mathcal{B}_0$.

Il faut donc en fait effectuer la rotation sur quelques éléments, mais pas tous. Mais comment les choisir ? La solution la plus naturelle consiste à effectuer la rotation uniquement sur les éléments a_i compris entre 1 et p. Si on note q le nombre d'éléments de σ dans $[\![1, p]\!]$, considérons en effet la fonction suivante,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \sigma = \{a_1, \ldots, a_q, a_{q+1}, \ldots, a_p\} & & \mathcal{B}_0 \\ \big\downarrow & & \downarrow \\ \sigma' = \{a_1 + r, \ldots, a_q + r, a_{q+1}, \ldots, a_p\} & & \mathcal{A}_i \end{array}$$

où $r = q^{-1} i$. Le nombre r est alors bien défini : $q \in [\![1, p-1]\!]$ (car $\mathcal{B}_0$ ne contient pas les deux seules parties telles que $q = 0$ ou $q = p$) est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a alors bien $\sigma' \in \mathcal{A}_i : f(\sigma') = f(\sigma) + q\,r = 0 + i = i$.

De plus φ est bien bijective : $\varphi^p = \mathrm{Id}$, donc φ^{p-1} est la rotation inverse. On a ainsi $|\mathcal{B}_0| = |\mathcal{A}_i|$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$.

Or les $\mathcal{A}_i$ forment une partition de $\mathcal{A}$, donc $\sum_{i=0}^{p-1} |\mathcal{A}_i| = |\mathcal{A}| = \mathrm{C}_{2p}^{p}$. Ainsi

$$|\mathcal{A}_0| = \frac{\mathrm{C}_{2p}^{p} - 2}{p} + 2.$$

2^e^ méthode

Cette méthode fait appel à des notions plus poussées d'algèbre, mais elle est tout simplement superbe.

Posons $\omega = e^{2i\pi/p}$. Alors

$$\prod_{k=1}^{2p} (\mathrm{X} - \omega^k) = (\mathrm{X}^p - 1)^2 = \mathrm{X}^{2p} - 2\mathrm{X}^p + 1.$$

Le coefficient de X^p dans ce polynôme est donc -2 ; en développant le premier terme, on se rend compte que ce coefficient vaut aussi $-(x_0 + x_1\omega + \cdots + x_{p-1}\omega^{p-1})$ où x_i est le nombre de parties à p éléments de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ dont la somme des éléments est congrue à i modulo p. On a donc

$$x_{p-1}\omega^{p-1} + \cdots + x_1\omega + (x_0 - 2) = 0.$$

C'est alors que « l'argument massue » intervient : comme p est premier, le polynôme minimal de ω est $\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + \mathrm{X} + 1$ (voir en annexe). On a donc $x_{p-1} = \cdots = x_1 = x_0 - 2$. On conclut comme précédemment que

$$x_0 = \frac{\mathrm{C}_{2p}^{p} - 2}{p} + 2.$$

Annexe : lemme de Gauss et critère d'Eisenstein

Nous étudions dans cette annexe quelques outils sur les coefficients des polynômes de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. Ceci démontre en particulier la minimalité du polynôme présenté dans la seconde démonstration.

Définissons tout d'abord le « contenu » d'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ comme le plus grand diviseur commun de ses coefficients. Nous le notons $\mathrm{ct}(\mathrm{P})$. Ceci nous permet d'énoncer le lemme suivant.

Lemme de Gauss[4]**.** *Pour tous polynômes* P *et* Q *de* $\mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{ct}(PQ) = \mathrm{ct}(P)\,\mathrm{ct}(Q)$.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que $\mathrm{ct}(P) = \mathrm{ct}(Q) = 1$, et montrons que $\mathrm{ct}(PQ) = 1$. Dans le cas contraire, il existerait un nombre premier p divisant tous les coefficients de PQ. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on aurait donc $\overline{P}\,\overline{Q} = 0$. Or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est un anneau intègre (car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps), donc $\overline{P} = 0$ ou $\overline{Q} = 0$, donc $p \mid \mathrm{ct}(P)$ ou $p \mid \mathrm{ct}(Q)$, ce qui contredit nos hypothèses. Notre énoncé est donc vérifié dans le cas particulier où $\mathrm{ct}(P) = \mathrm{ct}(Q) = 1$.

Dans le cas général, nous avons $\mathrm{ct}(P/\,\mathrm{ct}(P)) = 1$ et $\mathrm{ct}(Q/\,\mathrm{ct}(Q)) = 1$, donc en utilisant le paragraphe précédent

$$\begin{aligned}
\mathrm{ct}(PQ) &= \mathrm{ct}(P)\,\mathrm{ct}(Q)\,\mathrm{ct}\left(\frac{P}{\mathrm{ct}(P)}\frac{Q}{\mathrm{ct}(Q)}\right)\\
&= \mathrm{ct}(P)\,\mathrm{ct}(Q)\,\mathrm{ct}\left(\frac{P}{\mathrm{ct}(P)}\right)\mathrm{ct}\left(\frac{Q}{\mathrm{ct}(Q)}\right)\\
\mathrm{ct}(PQ) &= \mathrm{ct}(P)\,\mathrm{ct}(Q).
\end{aligned}$$

Ceci constitue le résultat souhaité. □

Le lemme suivant est le critère le plus courant d'irréductibilité de polynômes. De plus sa démonstration est une méthode en soi : elle est très proche de la résolution de beaucoup de problèmes sur les polynômes, comme dans l'exercice 1993 n°1.

Critère d'Eisenstein[5]**.** *Soient* $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ *un polynôme à coefficients entiers et p un nombre premier vérifiant les conditions suivantes :*

- *p divise $a_0, \ldots, a_{n-1}$;*
- *p ne divise pas a_n ;*
- *p^2 ne divise pas a_0.*

Alors P *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$.

4. JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand.
5. FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823-1852), mathématicien allemand.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde en supposant que $P = AB$, où A et B sont deux polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$.

Montrons d'abord que P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Il existe des éléments a et b de $\mathbb{Z}$ tels que $aA \in \mathbb{Z}[X]$ et $bB \in \mathbb{Z}[X]$. Ainsi $abP = (aA)(bB)$, donc d'après le lemme de Gauss $ab\,\mathrm{ct}(P) = \mathrm{ct}(aA)\,\mathrm{ct}(bB)$. On a donc $P = \mathrm{ct}(P)(aA/\mathrm{ct}(aA))(bB/\mathrm{ct}(bB))$. Par définition du contenu d'un polynôme, $Q = \mathrm{ct}(P)(aA/\mathrm{ct}(aA))$ et $R = bB/\mathrm{ct}(bB)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}[X]$.

On peut donc écrire $P = QR$ avec $Q = b_kX^k + \cdots + b_0$ et $R = c_lX^l + \cdots + c_0$ des éléments non constants de $\mathbb{Z}[X]$. Nous pouvons réduire cette relation modulo p, et nous obtenons d'après l'énoncé $\overline{a_n}X^n = \overline{Q}\,\overline{R}$. Le coefficient dominant de $\overline{P}$ est non nul (car sinon $p \mid a_n$) et $\overline{Q}$ est un diviseur non constant de $\overline{a_n}X^n$; ainsi $\overline{Q} = \overline{b_k}X^k$. De même $\overline{R} = \overline{c_l}X^l$. On a donc $p \mid b_0$ et $p \mid c_0$, donc $p^2 \mid a_0$, ce qui contredit l'énoncé. $\square$

Nous allons utiliser le critère d'Eisenstein pour prouver l'irréductibilité de $P = X^{p-1} + \cdots + X + 1$ lorsque p est premier. En effet,

$$P(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{(X+1) - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} C_p^{k+1} X^k,$$

donc le lecteur vérifiera facilement que $P(X+1)$ vérifie les conditions du critère d'Eisenstein, avec pour nombre premier p ($p \mid pC_{p-1}^{k-1} = kC_p^k$, donc par le théorème de Gauss, si $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid C_p^k$). Le polynôme $P(X+1)$ est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, donc P également.

Bombay (Inde)

1996

1. Un exercice aux méthodes brutales et/ou subtiles

Soit ABCD un tableau rectangulaire dans lequel AB $= 20$ et BC $= 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unité. On se donne un entier strictement positif r.

Un jeton peut se déplacer d'un carré à un autre si et seulement si la distance des centres de ces deux carrés est exactement $\sqrt{r}$.

Le but est de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré ayant pour sommet A au carré ayant pour sommet B.

1. **Démontrer que ceci ne peut pas être réalisé si r est divisible par 2 ou par 3.**
2. **Démontrer que ceci peut être réalisé si $r = 73$.**
3. **Ceci peut-il être réalisé pour $r = 97$?**

Solution

Remarquons tout d'abord que les mouvements décrits dans l'énoncé ne sont possibles que si r est somme de deux carrés d'entiers. À une telle décomposition ($r = a^2 + b^2$) correspondent les mouvements possibles selon les vecteurs $(\pm a, \pm b)$ et $(\pm b, \pm a)$. Ainsi, si $a \neq b$, on a 8 mouvements possibles.

1re question : impossible pour r divisible par 2 ou par 3

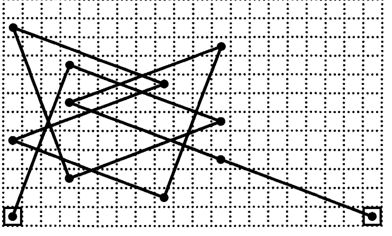
Notons (i, j) la position du jeton au cours du jeu : $(i, j) = (1, 1)$ au début et on voudrait $(i, j) = (20, 1)$ à l'arrivée. Le pion peut se déplacer selon un vecteur à coordonnées entières (a, b) avec $a^2 + b^2 = r$.

Si r est divisible par 2, a et b sont de même parité donc $i + j$ reste pair au cours du voyage. On ne peut donc pas atteindre $(20, 1)$.

Si r est divisible par 3, a et b sont nécessairement divisibles par 3, donc à tout moment la position du pion est du type $(3k+1, 3k'+1)$, avec k et k' entiers. Or $(20, 1)$ n'est pas de ce type, donc le jeton n'atteindra ici aussi jamais son but.

2ᵉ question : possible si $r = 73$

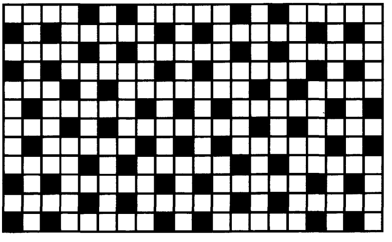
L'écriture $73 = 8^2 + 3^2$ est la seule décomposition de 73 en somme de deux carrés d'entiers naturels, donc les seuls déplacements possibles sont $(8, 3)$, $(-8, 3)$, $(8, -3)$, $(-8, -3)$, $(3, 8)$, $(-3, 8)$, $(3, -8)$, $(-3, -8)$. Après quelques considérations reposant sur le théorème de Bézout[1] et surtout beaucoup de chance, on obtient par exemple le parcours suivant, d'une esthétique rare.



On voit qu'on n'avait besoin que d'un tableau de taille 20×11.

3ᵉ question : impossible si $r = 97$

Remarquons ici que $97 = 9^2 + 4^2$ est la seule décomposition de 97 en somme de deux carrés, dont on déduit les 8 déplacements possibles. On peut alors utiliser une méthode très subtile : regarder tous les points que l'on peut ainsi atteindre à partir de $(1, 1)$. On obtient alors l'ensemble suivant (le lecteur motivé pourra vérifier), dans lequel ne se situe pas $(20, 1)$, d'où le résultat.



1. Etienne Bézout (1730-1783), mathématicien français.

Faire ce genre de tableau nécessite, si on s'y prend bien, moins de dix minutes, ce qui est clairement rentable dans de contexte des Olympiades internationales où l'on dispose de quatre heures et demie pour les trois problèmes.

Remarque. On peut tout de même donner une réponse plus fine à la question 3, mais elle est nettement plus difficile à trouver.

Appelons les mouvements du type $(\pm 9, \pm 4)$ les mouvements « longitudinaux » et les mouvements du type $(\pm 4, \pm 9)$ les mouvements « transverses ». De plus, partitionnons notre rectangle en deux zones : la zone 1 définie comme les points d'ordonnée 5, 6, 7 ou 8 (c'est-à-dire la « bande centrale » du rectangle) et la zone 2 définie comme les points d'ordonnée 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 ou 12.

Par mouvement longitudinal, le jeton change de zone alors qu'il demeure dans la même zone (la zone 2) par un mouvement transverse. Comme il doit arriver dans la même zone qu'au départ, il faut donc un nombre pair de mouvements longitudinaux. Mais le jeton doit passer de $(1,1)$ (d'abscisse impaire) à $(20,1)$ (d'abscisse paire), donc il lui faut aussi un nombre impair de mouvements longitudinaux. Ceci constitue la contradiction souhaitée.

2. Trois droites concourantes

Soit P un point à l'intérieur d'un triangle ABC tel que

$$\widehat{\mathbf{APB}} - \widehat{\mathbf{ACB}} = \widehat{\mathbf{APC}} - \widehat{\mathbf{ABC}}.$$

Soient D et E les centres des cercles inscrits respectivement dans les triangles APB et APC.

Montrer que les droites (AP), (BD) et (CE) sont concourantes.

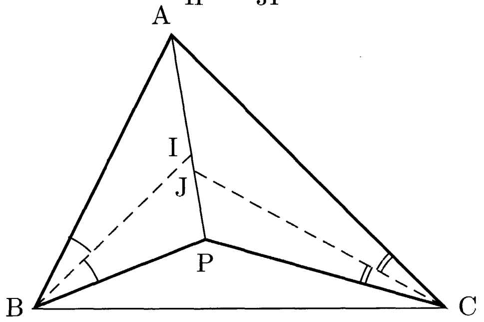
Solution

La géométrie nécessite une grande culture, cet exercice en est une fois de plus la preuve. Nous allons ainsi utiliser successivement le « théorème de la bissectrice » (déjà présenté dans l'annexe de 1991 n°1) et le « Pedal Triangle Trick » (utilisé quant à lui en 1993 n°2).

1^re^ étape

Notons I (respectivement J) l'intersection de (AP) avec la bissectrice de $\widehat{\mathrm{ABP}}$ (respectivement $\widehat{\mathrm{ACP}}$). Les droites (AP), (BD) et (CE) sont concourantes si et seulement si I = J, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IP}} = \frac{\mathrm{JA}}{\mathrm{JP}}.$$



D'après la loi des sinus on a

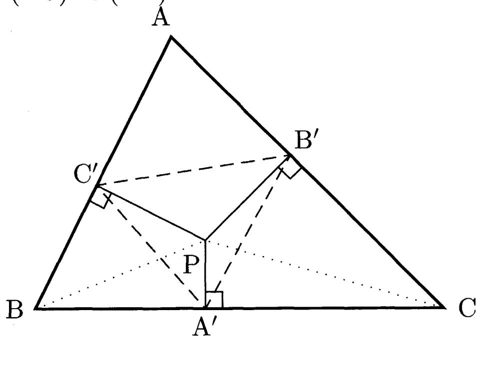
$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IP}} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{ABI}} \times \mathrm{BA}/\sin\widehat{\mathrm{AIB}}}{\sin\widehat{\mathrm{PBI}} \times \mathrm{BP}/\sin\widehat{\mathrm{PIB}}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BP}}.$$

De même JA/JP = CA/CP. Ainsi on a l'équivalence

$$\text{(AP), (BD) et (CE) sont concourantes} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CP}}. \qquad (1)$$

2^e^ étape

Introduisons A′, B′ et C′ les projetés orthogonaux de P respectivement sur (BC), (AC) et (AB).



Les quadrilatères $\mathrm{A'BC'P}$ et $\mathrm{A'CB'P}$ étant inscriptibles dans un cercle, un rapide calcul d'angles montre que $\widehat{\mathrm{APB}} - \widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{A'C'B'}}$ et $\widehat{\mathrm{APC}} - \widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{A'B'C'}}$. Ainsi

$$\widehat{\mathrm{APB}} - \widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{APC}} - \widehat{\mathrm{ABC}} \Leftrightarrow \mathrm{B'A'C'} \text{ isocèle en } \mathrm{A'}.$$

Or $[\mathrm{BP}]$ est le diamètre du cercle circonscrit à $\mathrm{A'BC'}$ donc $\mathrm{A'C'} = \mathrm{PB}\sin\widehat{\mathrm{B}}$ et de même $\mathrm{A'B'} = \mathrm{PC}\sin\widehat{\mathrm{C}}$, si bien que $\mathrm{A'B'/A'C'} = \mathrm{PB/PC}\times \mathrm{CA/BA}$. On a ainsi

$$\widehat{\mathrm{APB}} - \widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{APC}} - \widehat{\mathrm{ABC}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CP}}. \tag{2}$$

Les résultats (1) et (2) permettent de conclure.

3. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

pour tous m et n de $\mathbb{N}$.

Solution

Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour $m = n = 0$ on obtient $f(0) = 0$ puis, pour $m = 0$, $f(f(n)) = f(n)$. Ainsi, pour tout $k \in \operatorname{Im} f$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n + k) = f(n) + k. \tag{1}$$

Pour f non nulle, posons k_0 le plus petit élément de $\operatorname{Im} f$ distinct de 0. Montrons alors que

$$\operatorname{Im} f \subset k_0\mathbb{N}. \tag{2}$$

Si, par l'absurde, $k \in \operatorname{Im} f$ n'est pas un multiple de k_0, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $k - lk_0 \in]\!]0, k_0[\![$. Alors d'après (1), par une récurrence immédiate sur l, $f(k - lk_0) = f(k) - lk_0 = k - lk_0$. Ce dernier élément de $\operatorname{Im} f$ est alors dans $]\!]0, k_0[\![$, ce qui contredit la minimalité de k_0. On a donc bien (2).

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction f vérifiant (1) et (2) est solution de l'énoncé. Les fonctions solution du problème (hormis la fonction nulle) sont donc de la forme

$$f(k) = f(ak_0 + b) = k_0(a + n_b)$$

où $k = ak_0 + b$ est la division euclidienne de k par k_0, $n_0 = 0$ et les n_b $(1 \leqslant b \leqslant k_0)$ sont des éléments quelconques $\mathbb{N}$.

4. Arithmétique

Les entiers strictement positifs a et b sont tels que les nombres $15a + 16b$ et $16a - 15b$ sont tous les deux des carrés d'entiers strictement positifs.

Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum de ces deux carrés.

Solution

Notons u et v les deux carrés dont il est question dans l'énoncé. Alors

$$\begin{cases} 15a + 16b = u^2 \\ 16a - 15b = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15u^2 + 16v^2 = (16 \times 16 + 15 \times 15)a \\ 16u^2 - 15v^2 = (16 \times 16 + 15 \times 15)b \end{cases} . \tag{1}$$

Or $16 \times 16 + 15 \times 15 = 481 = 13 \times 37$. Donc $15u^2 + 16v^2 \equiv 0$ [13] et $16u^2 - 15v^2 \equiv 0$ [13].

L'étude des congruences de u^2 et v^2 modulo 13 montre alors que $13 \mid u$ et $13 \mid v$: les carrés modulo 13 sont 0, ± 1, ± 3 et ± 4, donc $15v^2 \equiv 0$, ± 2, ± 5 ou ± 6 et $16u^2 \equiv 0$, ± 1, ± 3 ou ± 4 ; on n'a donc $16u^2 \equiv 15v^2$ que si $u \equiv v \equiv 0$. De même $37 \mid u$ et $37 \mid v$.

On a donc $u = 481u'$ et $v = 481v'$. Comme ils sont strictement positifs, leur minimum est atteint pour $u' = v' = 1$. Le système (1) montre qu'en effet pour $u = v = 481$ on a un couple d'entiers strictement positifs (a, b) solution : $a = 481 \times 31$ et $b = 481$.

Le minimum des deux carrés est donc 481^2.

5. Très difficile géométrie

Soit ABCDEF un hexagone convexe tel que (AB) soit parallèle à (ED), (BC) soit parallèle à (FE) et CD soit parallèle à (AF). Soient $\mathbf{R_A}$, $\mathbf{R_C}$ et $\mathbf{R_E}$ les rayons des cercles circonscrits respectivement aux triangles FAB, BCD et DEF et soit p le périmètre de l'hexagone.

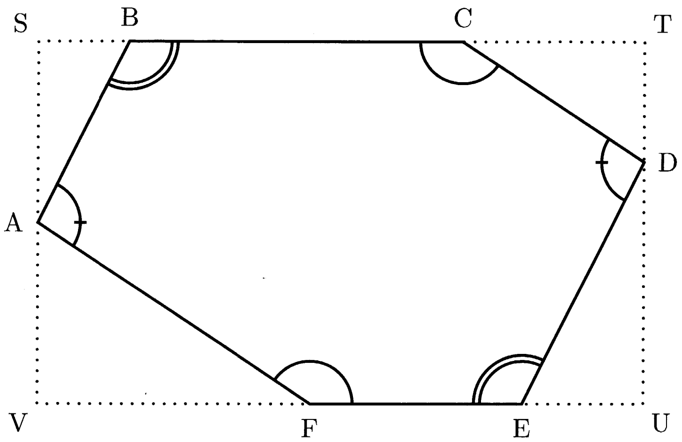
Montrer que

$$\mathbf{R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}}.$$

Solution

Ce problème est, sur le plan statistique en tout cas, le plus difficile des Olympiades internationales : seuls 6 candidats sur 426 l'ont résolu dans le temps imparti.

La grosse difficulté est avant tout d'oser rompre la symétrie du problème en introduisant un rectangle STUV dans lequel notre hexagone s'inscrit.



Dans le triangle BAF, on a : $R_A = BF/(2\sin\widehat{A})$ $(*)$. Or l'inégalité de l'énoncé est clairement égalité lorsque ABCDEF est un hexagone régulier, donc pour $BF = SV = TU$. Ceci nous pousse à minorer BF (qui nous ennuie dans $(*)$) par $(SV + TU)/2 = (AS + AV + DT + DU)/2$.

Or $AS = AB\sin\widehat{B}$, $AV = AF\sin\widehat{F} = AF\sin\widehat{C}$, $DT = CD\sin\widehat{C}$ et $DU = DE\sin\widehat{E} = DE\sin\widehat{B}$, donc on peut minorer $(*)$ par

$$\mathrm{R_A} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{AB} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{AF} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{CD} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{DE}\right).$$

Les inégalités équivalentes pour $\mathrm{R_C}$ et $\mathrm{R_E}$ s'écrivent

$$\mathrm{R_C} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\,\mathrm{BC} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\,\mathrm{CD} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\,\mathrm{AF} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\,\mathrm{EF}\right),$$

$$\mathrm{R_E} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{AB} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{BC} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{ED} + \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{EF}\right).$$

Sommons ces trois inégalités et regardons par exemple le coefficient de AB : $(\sin\widehat{\mathrm{B}}/\sin\widehat{\mathrm{A}} + \sin\widehat{\mathrm{A}}/\sin\widehat{\mathrm{B}})/4 \geqslant 1/2$ car pour tout x strictement positif, $x + 1/x \geqslant 2$ (comme le montre une étude de fonction ou l'inégalité de la moyenne). On en déduit le résultat voulu,

$$\mathrm{R_A} + \mathrm{R_B} + \mathrm{R_C} \geqslant \frac{1}{2}\,(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{AF}) = \frac{p}{2}.$$

Remarque. Le lecteur aura peut-être remarqué les similitudes entre ce problème et la démonstration de l'inégalité d'Erdös[2]-Mordell[3](cf. annexe de 1991 n°5).

6. Subtile combinatoire

Soient n, p et q des entiers strictement positifs tels que $n > p+q$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des entiers vérifiant les conditions suivantes :

- **$x_0 = x_n = 0$;**
- **pour chaque entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a soit $x_i - x_{i-1} = p$, soit $x_i - x_{i-1} = -q$.**

Montrer qu'il existe un couple d'indices (i, j) avec $i < j$ et $(i, j) \neq (0, n)$ tel que $x_i = x_j$.

Solution

Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer p et q premiers entre eux, quitte à les diviser par $p \wedge q$: ceci ne change pas notre problème.

2. Paul Erdös (1913-1996), mathématicien hongrois.
3. Louis Joel Mordell (1888-1972), mathématicien anglais.

Supposons l'existence de (i,j) tel que $x_i = x_j$. Soit alors n_p (respectivement n_q) le nombre d'indices $k \in [\![i, j-1]\!]$ tels que $x_{k+1} - x_k = p$ (respectivement $x_{k+1} - x_k = -q$). Alors $x_i = x_j$ impose $n_p p = n_q q$. Comme p et q sont premiers entre eux, ceci impose $n_p = \lambda q$ et $n_q = \lambda p$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $|j - i| = n_p + n_q$ est nécessairement un multiple de $p+q$ (en particulier, n est un multiple de $p+q$).

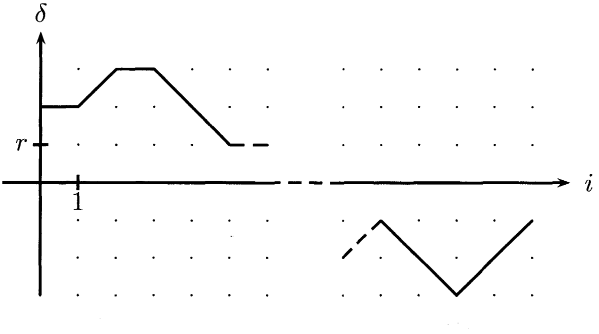
Ces considérations nous poussent à chercher le couple (i,j) voulu sous sa forme la plus simple : $(i, i+r)$, avec $r = p+q$.

Posons pour cela, pour $i \in [\![0, n-r]\!]$, $\delta_i = x_{i+r} - x_i$, et montrons que cette fonction δ s'annule. Elle est tout d'abord à valeurs dans $r\mathbb{Z}$: si on effectue n_p montées de hauteur p entre i et $i+r$, alors

$$\delta_i = n_p p - (r - n_p) q = (n_p - q) r.$$

Regardons de plus les variations de δ :

$$\begin{aligned}\delta_{i+1} - \delta_i &= (x_{i+r+1} - x_{i+r}) - (x_{i+1} - x_i)\\ &= (p \text{ ou } -q) - (p \text{ ou } -q)\\ \delta_{i+1} - \delta_i &= 0, r \text{ ou } -r.\end{aligned}$$



Ainsi, on est face à deux possibilités.

- Soit δ change de signe, donc elle passe de $k_1 r$ à $-k_2 r$ (k_1 et k_2 entiers positifs) en faisant des bonds de 0 ou $\pm r$. Elle s'annule donc.

- Soit elle est de signe strictement constant. Si elle demeure par exemple strictement positive, on a $x_n - x_0 = \sum_{i=0}^{n/r-1} \delta_{ir} > 0$ (n/r est entier : on a déjà vu que $p+q$ divise n), ce qui est contradictoire. De même si elle reste strictement négative

Il existe donc i tel que $x_{i+r} = x_i$. Comme $n > r$, on est assuré d'avoir $(i, i+r) \neq (0, n)$.

Mar del Plata (Argentine)

1997

1. Aire blanche et aire noire d'un triangle sur un échiquier

Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueurs m et n, suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire de la partie noire du triangle et S_2 l'aire de la partie blanche. On pose

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

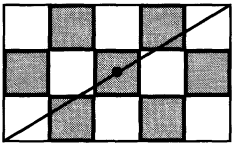
1. **Calculer $f(m,n)$ pour tous les entiers strictement positifs m et n qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.**
2. **Démontrer que, pour tout (m,n), $f(m,n) \leqslant 1/2 \max(m,n)$.**
3. **Démontrer qu'il n'existe pas de constante c telle que, pout tous m et n, $f(m,n) < c$.**

Solution

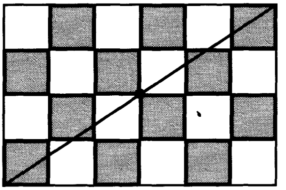
1re question : calcul de $f(m,n)$ pour m et n de même parité

Notons, de façon analogue à l'énoncé, S'_1 et S'_2 les aires respectives des parties noires et blanches du second triangle, sur les schémas ci-après.

Si m et n sont de même parité, alors l'échiquier est parfaitement symétrique par rapport à son centre.



m et n impairs



m et n pairs

On a donc $S_1 = S_1'$ et $S_2 = S_2'$.

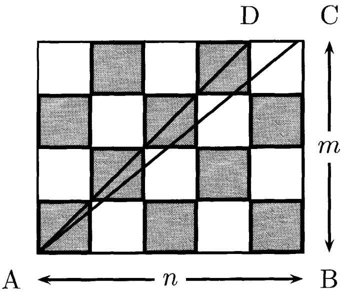
- Si m et n sont pairs, on a de plus $S_1 + S_1' = S_2 + S_2' (= mn/2)$ car on a autant de cases noires que de cases blanches. Ainsi $S_1 = S_1' = S_2 = S_2'$, donc
$$f(m,n) = 0.$$

- Si m et n sont impairs, on peut supposer, quitte à permuter les couleurs, que l'on a une case blanche de plus que le nombre de cases noires, d'où $S_1 + S_1' + 1 = S_2 + S_2'$. On en déduit
$$f(m,n) = \frac{1}{2}.$$

2e question : $f(m,n) \leqslant 1/2\ \max(m,n)$

Si m et n sont de même parité, l'inégalité demandée est bien vérifiée d'après ce qui précède.

Sinon, supposons par exemple m pair et n impair.



Notons T_1, T_2, Q_1, Q_2 les analogues de S_1 et S_2, mais ici respectivement pour le triangle ADC et le quadrilatère ABCD. Comme

ABCD est composé d'un triangle rectangle ayant deux côtés de longueur paire et d'une bande de longueur paire, on a $Q_1 = Q_2$, c'est-à-dire $S_1 - S_2 = T_2 - T_1$. On peut donc écrire

$$f(m,n) = |S_1 - S_2| = |T_1 - T_2| \leqslant |T_1| + |T_2| = \frac{m}{2}.$$

Ainsi $f(m,n) \leqslant k/2$ où k est la longueur du côté pair. On a donc en particulier

$$f(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\max(m,n).$$

3^e^ question : la fonction f n'est pas majorée

Calculons, pour tout n, $f(n, n+1)$, pour n impair. D'après ce que l'on a vu dans la question précédente, $f(n, n+1)$ est égal à $|T_1 - T_2|$. Calculons donc T_2 : c'est l'aire de n triangles rectangles, ayant pour côtés k/n et $k/(n+1)$, pour k variant entre 1 et n. Ainsi

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{12}.$$

On en déduit

$$f(m,n) = |T_1 + T_2 - 2T_2| = \left|\frac{n}{2} - \frac{2n+1}{6}\right| = \frac{n-1}{6}.$$

Cette quantité n'étant pas bornée, on a bien répondu à la question.

2. Géométrie pure

L'angle $\widehat{A}$ est le plus petit dans un triangle ABC. Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit U un point intérieur à l'arc limité par par B et C qui ne contient pas A.

Les médiatrices des segments [AB] et [AC] rencontrent la droite (AU) respectivement en V et W. Les droites (BV) et (CW) se coupent au point T.

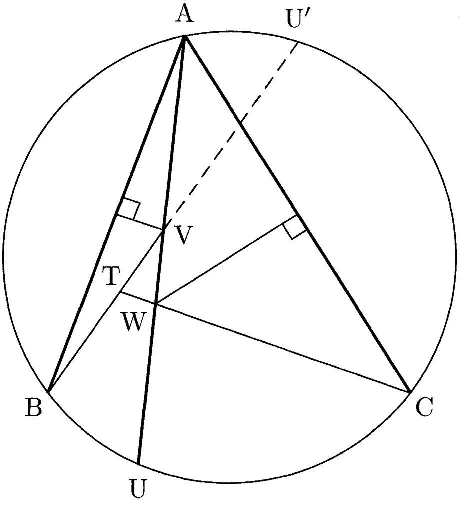
Montrer que

$$\mathbf{AU = TB + TC.}$$

Solution

Notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC et U′ l'intersection de (BV) et de $\mathcal{C}$, autre que B.

L'hypothèse « $\widehat{A}$ est le plus petit dans le triangle ABC » assure que V et W existent et sont sur le segment [AU].



Les triangles ABU′ et ABU sont isométriques. En effet ils ont un côté commun ([AB]) et deux angles deux à deux égaux : $\widehat{AU'B} = \widehat{AUB}$ (angles inscrits à $\mathcal{C}$) et $\widehat{BAU} = \widehat{ABU'}$ (car V est sur la médiatrice de [AB]).

On a donc $AU = BU'$, si bien que l'égalité souhaitée est équivalente à $BU' = TB + TC$, c'est-à-dire $TU' = TC$. Or le triangle TCU′ est bien isocèle en T, car

$$\begin{aligned}
\widehat{TU'C} &= \widehat{BU'C} \\
&= \widehat{BAC} \\
&= \widehat{BAU} + \widehat{UAC} \\
&= \widehat{ABU'} + \widehat{TCA} \\
&= \widehat{ACU'} + \widehat{TCA} \\
\widehat{TU'C} &= \widehat{TCU'}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

3. Combinatoire

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels tels que

$$\begin{cases} |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \\ |x_i| \leqslant (n+1)/2 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}.$$

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Solution

Considérons le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et sa permutation « miroir » $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$.

Si $-\frac{n+1}{2} \leqslant x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leqslant \frac{n+1}{2}$ ou $-\frac{n+1}{2} \leqslant x_n + 2x_{n-1} + \cdots + nx_1 \leqslant \frac{n+1}{2}$, le problème est terminé. Sinon les deux sommes ci-dessus sont de signes opposés : si elles étaient toutes deux positives, on aurait $n+1 < (x_1 + \cdots + nx_n) + (x_n + \cdots + nx_1) = (n+1)(x_1 + \cdots + x_n) = \pm(n+1)$, ce qui est clairement absurde. De même le cas où les deux sommes seraient négatives est exclu.

En posant, pour toute permutation σ de $(x_1, \ldots, x_n)$, $f(\sigma) = f(y_1, \ldots, y_n) = y_1 + \cdots + ny_n$ (où $y_n = x_{\sigma(n)}$), on peut donc supposer $f(x_1, \ldots, x_n) < -\frac{n+1}{2}$ et $f(x_n, \ldots, x_1) > \frac{n+1}{2}$. L'idée est alors de passer d'une de ces permutations à l'autre à l'aide de transpositions et de vérifier que f se retrouve alors nécessairement un beau jour dans $[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}]$.

Plus précisément, l'ensemble des transpositions $[i, i+1]$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ engendre le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$: il existe ainsi des transpositions τ_1, τ_2, $\ldots\tau_m$ de ce type avec

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_m = [n, \ldots, 1].$$

On note alors $u_0 = f(\mathrm{Id})$ et $u_i = f(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_i)$ pour $i \in [\![1, m]\!]$. Si τ_k intervertit i et $i+1$, on a donc $|u_k - u_{k-1}| = |(ix + (i+1)x') - ((i+1)x + ix')| = |x - x'| \leqslant n+1$ car x et x', qui font partie des x_j de départ, sont de module inférieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$.

Ainsi la suite des u_i se ballade sur $\mathbb{R}$, partant d'un nombre inférieur strict à $-\frac{n+1}{2}$, arrivant à un nombre supérieur strict à $\frac{n+1}{2}$ et en faisant des bonds de longueur inférieure ou égale à $n+1$: un de ses termes est donc nécessairement dans $[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}]$, ce qui est le résultat voulu.

4. Les « matrices d'argent »

Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, est appelée « matrice d'argent » si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, la réunion de la i^{e} ligne et de la i^{e} colonne contient tous les éléments de $\mathcal{S}$.

1. **Démontrer qu'il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$.**
2. **Démontrer qu'il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n.**

Solution

1re question : il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$

Montrons de façon plus générale qu'il n'existe pas de matrice d'argent pour n impair avec $n > 1$.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une telle matrice. Soit $l \in [\![1, 2n-1]\!]$ et notons $l_1, \ldots, l_m$ l'ensemble des « l » présents dans la matrice. Supposons que l n'est jamais présent sur la diagonale.

À chaque l_k on peut associer l'ensemble $\mathrm{A}_k = \{i_k, j_k\}$ de ses coordonnées. Ces ensembles (pour $k \in [\![1, m]\!]$) doivent être disjoints car la matrice est d'argent. De plus pour tout k on a $i_k \neq j_k$, car l n'est jamais présent sur la diagonale. Ainsi $2m = |\bigsqcup \mathrm{A}_k| \leqslant n$. Comme n est impair, on a donc une coordonnée i_0 qui n'est présente dans aucun des A_k : la $i_0{}^{\mathrm{e}}$ ligne et la $i_0{}^{\mathrm{e}}$ colonne ne contiennent pas l, ce qui contredit le fait que la matrice est d'argent.

Le nombre l figure donc au moins une fois sur la diagonale, pour tout $l \in [\![1, 2n-1]\!]$. Or on ne peut clairement mettre que n nombres sur la diagonale et $n < 2n-1$ pour $n > 1$... d'où l'absurdité.

2^{e} question : il existe des matrices d'argent pour une infinité de n

Si on sait construire une matrice d'argent M_n de taille n, alors on sait en construire une de taille $2n$.

Pour ceci, notons S_n la matrice M_n dans laquelle on ajoute $2n-1$ à tous les éléments. Notons T_n la matrice S_n dans laquelle on remplace tous les éléments de la diagonale par $4n-1$. Alors

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} M_n & S_n \\ T_n & M_n \end{bmatrix}$$

est d'argent, comme on peut le vérifier facilement.

Comme on sait construire une matrice d'argent de taille 1 ([1]!), on sait en construire pour une infinité de n (les puissances de deux).

5. L'équation diophantienne $a^{(b^2)} = b^a$

Trouver tous les couples d'entiers (a, b), $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ vérifiant l'équation

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

Solution

Soit (a, b) un couple solution. Si a ou b est égal à 1, ceci nous conduit à l'unique couple $(1, 1)$ solution.

Dans le cas contraire on pose les décompositions de a et b en facteurs premiers : $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ et $b = q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$, avec les p_i et les q_i rangés par ordre strictement croissant. L'équation $a^{(b^2)} = b^a$ impose, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, d'avoir $m = n$ et $p_i = q_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

De plus cette équation implique, pour tous ces indices i, $\alpha_i b^2 = \beta_i a$. On a donc $\alpha_i/\beta_i = x/y$ où x/y est l'écriture sous forme irréductible de a/b^2. Il existe donc pour tout i un entier γ_i tel que $\alpha_i = x\gamma_i$ et $\beta_i = y\gamma_i$. On peut donc écrire

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & c^x \\ b & = & c^y \\ a/b^2 & = & x/y \end{array}\right. \quad \text{avec } c = p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \geqslant 2,\ x \wedge y = 1. \tag{1}$$

L'équation $a^{(b^2)} = b^a$ s'écrit alors

$$xc^{2y} = yc^x. \tag{2}$$

Nous sommes alors amenés à distinguer deux cas : si $x > 2y$ alors $y \mid x$ ($x = yc^{x-2y}$) et sinon $x \mid y$.

- Si $x \mid y$, comme $x \wedge y = 1$ on a $x = 1$, donc (2) s'écrit aussi $c^{2y-1} = y$. Or $c^{2y-1} \geqslant 2^{2y-1} > 2y-1 \geqslant y$. On ne peut donc pas avoir (2) dans ce cas.
- Si $y \mid x$, de même, comme $x \wedge y = 1$ on a $y = 1$. L'équation (2) donne donc ici $x = c^{x-2}$. Ainsi $x = c^{x-2} \geqslant 2^{x-2}$, ce qui n'est possible que pour $x = 1$, 2, 3 ou 4 ($2^{x-2} \geqslant x$ pour $x \geqslant 5$, comme le démontre une facile récurrence) :
  - si $x = 1$, alors (1) montre que $a = b$ et $a = b^2$, donc $(a,b) = (1,1)$, ce qui est exclu ici ;
  - si $x = 2$, (1) donne $a = b^2$ et $a = 2b^2$, donc $b = 0$, ce qui est également exclu ;
  - si $x = 3$, (1) donne $a = b^3$ et $a = 3b^2$, donc $b = 3$ puis $a = 27$; ce couple est effectivement solution ;
  - si $x = 4$, (1) donne $a = b^4$ et $a = 4b^2$, donc $b = 2$ puis $a = 16$. Ici aussi ce couple est effectivement solution.

En résumé, l'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S} = \{(1,1), (16,2), (27,3)\}.$$

Remarque. La démonstration précédente peut être calquée pour résoudre toute équation diophantienne[1] du type $a^{(b^k)} = b^{(a^l)}$, avec k et l fixés. Il faut juste être assez patient pour énumérer tous les cas finaux.

Le lecteur pourra ainsi résoudre le grand classique $a^b = b^a$, cas particulier pour lequel il existe une méthode plus efficace : $(\ln a)/a = (\ln b)/b$ et l'étude de la fonction $x \mapsto \ln x/x$ permet rapidement d'identifier de tels couples.

1. Diophante d'Alexandrie (env. 200-284), mathématicien grec.

6. Partitions d'entiers en puissances de deux

Pour tout entier strictement positif n, $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls.

Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$ car le nombre 4 peut être représenté par les 4 façons suivantes : 4 ; 2+2 ; 2+1+1 ; 1+1+1+1.

Montrer que, pour tout entier $n \leqslant 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Solution

Dans les deux méthodes suivantes, la seconde utilise des notions poussées d'analyse. L'annexe présente une approche fondée sur les fonctions génératrices.

1^{re} méthode

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, évaluons le nombre de suites $(n_0, n_1, \dots)$ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i = n$. L'ensemble de ces suites sera noté A_n.

Remarquons tout d'abord que $\boldsymbol{f(2n+1) = f(2n)}$: la fonction $\varphi : \mathrm{A}_{2n} \to \mathrm{A}_{2n+1}$, $(n_0, n_1, \dots) \mapsto (n_0 + 1, n_1, \dots)$ est clairement bijective car dans tout élément de A_{2n} (respectivement A_{2n+1}) n_0 est pair (respectivement impair).

De plus, on a de même la relation suivante : $\boldsymbol{f(2n) = f(2n-1) + f(n)}$, car tout élément de A_{2n} du type $(0, n_1, \dots)$ s'identifie de façon univoque à l'élément $(n_1, \dots)$ de A_n, alors que les éléments $(n_0, n_1, \dots)$ de A_{2n} avec $n_0 \geqslant 1$ sont en bijection avec tous les éléments de A_{2n-1}, qui s'écrivent $(n_0 - 1, n_1, \dots)$.

On déduit de ces deux relations la monotonie de f et l'égalité $f(2n) = f(2n-2) + f(n)$. Par une récurrence immédiate, on a ainsi l'égalité suivante, fondamentale dans la récurrence qui va suivre (avec pour convention $f(0) = 1$),

$$f(2n) = f(n) + f(n-1) + \cdots + f(1) + f(0). \tag{1}$$

Raisonnons par récurrence pour démontrer les inégalités de l'énoncé, facilement vérifiées pour de petites valeurs de n. Supposons le résultat voulu vérifié jusqu'au rang n.

L'égalité (1) permet de démontrer la majoration au rang $n+1$, où l'on utilise aussi $f(1)+f(0)=f(2)$ et la monotonie de f :

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}) &= f(2^n)+f(2^{n-1})+\cdots+f(1)+f(0) \\ &\leqslant 2^n f(2^n) \\ &< 2^n 2^{n^2/2} \\ f(2^{n+1}) &< 2^{(n+1)^2/2}. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'autre inégalité, il nous faut cette fois-ci minorer l'égalité (1) et une inégalité de type convexité semble ici bien indiquée. Plus précisément, si on pose $g(k)=f(2k)$, alors g est convexe, car

$$\begin{aligned} g(k+1)+g(k-1) &= f(2k+2)+f(2k-2) \\ &= [f(2k+1)+f(k+1)]+[f(2k)-f(k)] \\ &= 2g(k)+[f(k+1)-f(k)] \\ g(k+1)+g(k-1) &\geqslant 2g(k). \end{aligned}$$

On en déduit le résultat voulu en se fondant sur (1), où on utilise successivement la convexité de g et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}) &\geqslant f(2^n)+\cdots+f(1) \\ &= g(2^{n-1})+2(g(2^{n-1}-1)+\cdots+g(1))+g(0) \\ &\geqslant (2+2\times(2^{n-1}-1))g(2^{n-2}) \\ &= 2^n\times f(2^{n-1}) \\ &\geqslant 2^n\times 2^{(n-1)^2/4} \\ f(2^{n+1}) &\geqslant 2^{(n+1)^2/4}. \end{aligned}$$

2e méthode

Dénombrer les $n+1$-uplets $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ de $\mathbb{N}^{n+1}$ tels que $a_0+2a_1+\cdots+2^n a_n=2^n$ revient à dénombrer les n-uplets $(a_1,\ldots,a_n)$ tels que $2a_1+\cdots+2^n a_n\leqslant 2^n$. Si on omet momentanément l'unique solution où $a_n=1$, ceci revient à dénombrer les $n-1$-uplets $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ tels que $a_1+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}\leqslant 2^{n-1}$.

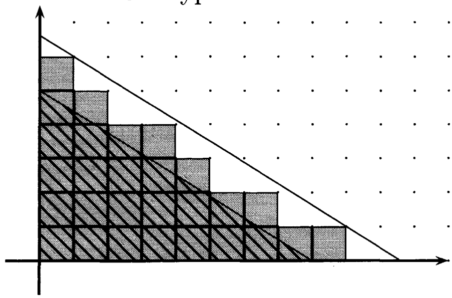
On veut donc plus généralement encadrer le cardinal de

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{N}^n \mid \vec{a}.\vec{\lambda} \leqslant \mathrm{N} \right\},$$

où $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{R}_+$.

Chaque point $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathcal{S}$ peut être vu comme un sommet de l'hypercube $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + 1\}$. Le cardinal de $\mathcal{S}$ est donc la somme $\mathcal{V}$ des volumes de ces hypercubes.

On note $\mathcal{V}_m$ (respectivement $\mathcal{V}_{\mathrm{M}}$) le volume de l'intersection de $\mathbb{R}_+^n$ et du demi-espace vérifiant $\vec{x}.\vec{\lambda} \leqslant \mathrm{N}$ (respectivement $(\vec{x} - \vec{\imath}).\vec{\lambda} \leqslant \mathrm{N}$, où $\vec{\imath} = (1, \ldots, 1)$). Alors $\mathcal{V}_m \leqslant \mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_{\mathrm{M}}$ comme le montre le schéma ci-contre.



Le calcul de $\mathcal{V}_m$ ou de $\mathcal{V}_{\mathrm{M}}$ effectué en annexe 1 permet alors d'écrire

$$\frac{\mathrm{N}^n}{n! \prod_{i=1}^n \lambda_i} \leqslant \mathcal{V} \leqslant \frac{(\mathrm{N} + \sum_{i=1}^n \lambda_i)^n}{n! \prod_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a donc

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{(n-1)!} \leqslant f(n) - 1 \leqslant \frac{2^{(n-1)(n+2)/2}}{(n-1)!}.$$

Ceci constitue une bien meilleure évaluation que celle demandée par l'énoncé (pour $n \geqslant 8$).

Annexe 1 : calcul de $\mathcal{V}_m$

Pour calculer $\mathcal{V}_m$, effectuons le changement de variables $y_i = \lambda_i x_i / \mathrm{N}$ (toutes les intégrales suivantes sont entendues sur le domaine de base $\mathbb{R}_+^n$),

$$\mathcal{V}_m = \int_{\vec{x}.\vec{\lambda} \leqslant \mathrm{N}} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\mathrm{N}^n}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \int_{\vec{y}.\vec{\imath} \leqslant 1} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

où $\vec{\imath}$ est le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$. Or le théorème de Fubini[2] permet d'obtenir la relation de récurrence suivante :

2. Guido Fubini (1879-1943), mathématicien italien.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_{\vec{y}\,.\,\vec{\imath}\leqslant 1} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\vec{y}\,.\,\vec{\imath}\leqslant 1-y_n} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{n-1} \right) \mathrm{d}y_n \\
&= \int_0^1 (1-y_n)^{n-1} \mathrm{I}_{n-1}\, \mathrm{d}y_n \\
\mathrm{I}_n &= \frac{1}{n}\, \mathrm{I}_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Comme $\mathrm{I}_1 = 1$, on a par une récurrence immédiate $\mathrm{I}_n = 1/n!$, donc

$$\mathcal{V}_m = \frac{\mathrm{N}^n}{n! \prod_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Annexe 2 : fonction génératrice du nombre de partitions d'un entier

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{N}$. Notons $f(n)$ le nombre de partitions d'un entier positif n en éléments de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire le nombre de suites décroissantes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant $n = a_1 + a_2 + \ldots$, avec la convention $f(0) = 1$) et g la fonction génératrice de $(f(n))_{n\geqslant 0}$. Alors, pour tout nombre complexe z avec $|z| < 1$,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^n = \prod_{k\in\mathcal{A}} \frac{1}{1-z^k}.$$

Ceci se démontre en écrivant chaque membre de notre produit sous la forme $\sum_{j=0}^{+\infty} z^{kj}$, puis en développant ce produit infini.

Dans le cas de notre exercice, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des puissances de deux, nous avons donc

$$g(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-z^{2^k}}$$

pour tout complexe z avec $|z| < 1$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f(2n) z^{2n} &= \frac{g(z)+g(-z)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^{2^k}} + \frac{1}{1+z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^{2^k}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right) g(z^2) \\
\sum_{n=0}^{\infty} f(2n) z^{2n} &= \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{2n}.
\end{aligned}$$

On en déduit en identifiant les coefficients que $f(2n) = f(n) + f(n-1) + \cdots + f(1) + f(0)$. Nous retrouvons donc la relation de récurrence à l'origine de notre première solution.

Le lecteur pourra suivre le raisonnement ci-dessus pour obtenir l'expression de $f(4n)$, $f(8n)$, $f(16n)$ $(\ldots)$ en fonction des $f(i)$, $i \leqslant n$.

Taïpei (Taïwan)

1998

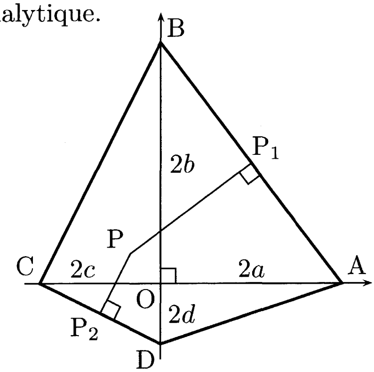
1. Une condition de cocyclicité

Dans un quadrilatère convexe ABCD, les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires et les côtés opposés (AB) et (DC) ne sont pas parallèles. On suppose que le point P, intersection des médiatrices de [AB] et [DC], se trouve à l'intérieur de ABCD.

Prouver que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si les triangles ABP et CDP ont la même aire.

Solution

Les solutions géométriques de ce problème sont relativement lourdes. On se limitera donc à une solution analytique.



On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec O intersection de (AC) et (BD), $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ portés respectivement par [OA) et [OB). Nommons P_1 et P_2 les milieux respectifs de [AB] et [DC] et posons $\mathrm{OA} = 2a$, $\mathrm{OB} = 2b$, $\mathrm{OC} = 2c$ et $\mathrm{OD} = 2d$.

Le non-parallélisme de (AB) et (DC) se traduit alors par $ad - bc \neq 0$.

Les coordonnées x et y de P dans notre repère se calculent facilement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{PP}_1} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}.\overrightarrow{\mathrm{PP}_2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a(x-a) + b(y-b) = 0 \\ -c(x+c) + d(y+d) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{b(c^2-d^2)+d(a^2-b^2)}{ad-bc} \\ y = \frac{a(c^2-d^2)+c(a^2-b^2)}{ad-bc} \end{array}\right. .$$

L'égalité des deux aires de l'énoncé s'écrit $|\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PD}|$, c'est-à-dire après quelques calculs (où on utilise le fait que P est à l'intérieur du quadrilatère),

$$(bd - ac)\left[(a+c)^2 + (b+d)^2\right] = 0.$$

Il est impossible que le second terme soit nul, car on aurait alors (AB) et (CD) parallèles. On a donc nécessairement $bd = ac$, c'est-à-dire, en utilisant la puissance d'un point par rapport à un cercle (cf. exercice 1985 n°5) : A, B, C et D sont cocycliques. La réciproque se fait facilement en remontant ces calculs.

2. La majoration de Plotkin

Une compétition regroupe a participants et b examinateurs, où $b \geqslant 3$ est un nombre entier impair. Chaque examinateur attribue à chaque participant une des mentions réussi ou échoué. On suppose que le nombre k est tel que : pour deux examinateurs quelconques, leurs décisions coïncident pour au plus k participants.

Prouver que

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Solution

On place sur le plan des points correspondants aux élèves et aux professeurs ; entre un professeur et un élève on dessine une arête bleue lorsque la mention est « réussi », rouge sinon.

Soit N le nombre de « triangles monochromes » ainsi constitués, c'est-à-dire le nombre de triplets constitués d'un élève et de deux professeurs pour lesquels les mentions attribuées à l'élève coïncident.

- On a $N \leqslant C_b^2\, k$, car pour 2 sommets de professeurs choisis, on a au maximum k élèves tels que le triangle constitué soit monochrome, d'après l'énoncé.

- Soit x_1 le nombre d'arêtes bleues partant du premier élève et de même pour les autres élèves. On a $C_{x_1}^2 + C_{b-x_1}^2$ triangles monochrome de sommet le premier élève. Comme b est impair, on a $C_{x_1}^2 + C_{b-x_1}^2 \geqslant C_{\frac{b-1}{2}}^2 + C_{\frac{b+1}{2}}^2 = \frac{(b-1)^2}{4}$, donc $N \geqslant a\frac{(b-1)^2}{4}$.

La combinaison de ces deux inégalités donne

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Remarque. Cette majoration est connue en cryptographie sous le nom de majoration de Plotkin[1].

3. Autour du nombre de diviseurs d'un entier et de son carré

Pour tout entier n strictement positif, $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n (y compris 1 et n).

Trouver tous les entiers strictement positifs k pour lesquels il existe n tel que

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

Solution

Considérons la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}$. Alors tout diviseur de n s'écrit de façon unique $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ avec $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant a_1, \dots, 0 \leqslant \alpha_m \leqslant a_m$. On en déduit que $d(n) = \prod_{i=1}^m (a_i + 1)$.

Le problème consiste donc à trouver tous les entiers k strictement positifs pour lesquels il existe un entier m et un m-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ d'entiers strictement positifs tels que

$$k = \frac{\prod_{i=1}^m (2a_i + 1)}{\prod_{i=1}^m (a_i + 1)}. \tag{1}$$

Remarquons que la relation ci-dessus impose d'avoir k impair. Montrons réciproquement par récurrence que tout k impair peut s'écrire sous cette forme.

C'est le cas pour $k = 1$: il suffit prendre $n = 1$. Montrons que si c'est vrai au rang k, c'est vrai au rang $2^s k - 1$ pour tout entier strictement positif s. Ceci permettra de conclure la récurrence car tout entier impair $l > 1$ s'écrit sous la forme $2^s k - 1$ avec k impair et $k < l$.

Supposons donc que le résultat est vrai au rang k et montrons qu'il tient aussi pour $2^s k - 1$. L'idée est de calculer un terme du type de celui de (1) en cascades. Prenons pour ce faire $b_i = 2^i\left[(2^s - 1)k - 1\right]$:

1. M. Plotkin, *Binary codes with specified minimum distance*, IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-6, pp. 445–450, Sept. 1960.

$$\frac{\prod_{i=0}^{s-1}(2b_i+1)}{\prod_{i=0}^{s-1}(b_i+1)} = \frac{\prod_{i=0}^{s-1}(2^{i+1}(2^s-1)k-2^{i+1}+1)}{\prod_{i=0}^{s-1}(2^i(2^s-1)k-2^i+1)}$$
$$= \frac{2^s(2^s-1)k-2^s+1}{(2^s-1)k}$$
$$\frac{\prod_{i=0}^{s-1}(2b_i+1)}{\prod_{i=0}^{s-1}(b_i+1)} = \frac{2^sk-1}{k}.$$

Comme par hypothèse de récurrence on peut écrire $k = \prod_{i=1}^{m}(2a_i+1)/\prod_{i=1}^{m}(a_i+1)$, on a donc

$$2^sk-1 = \frac{\prod_{i=0}^{s-1}(2b_i+1)\prod_{i=1}^{m}(2a_i+1)}{\prod_{i=0}^{s-1}(b_i+1)\prod_{i=1}^{m}(a_i+1)}.$$

Ceci conclut la récurrence. Tous les entiers strictement positifs vérifiant l'énoncé sont donc les entiers impairs.

4. Une équation diophantienne

> **Trouver tous les couples (a,b) d'entiers strictement positifs tels que ab^2+b+7 divise a^2b+a+b.**

Solution

D'après l'énoncé, $ab^2+b+7 \mid a(ab^2+b+7)-b(a^2b+a+b) = 7a-b^2$.

Si $7a = b^2$, alors b est un multiple de 7 et s'écrit donc sous la forme $b = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit les couples solutions de la forme $(a,b) = (7k^2, 7k)$.

Si $7a \neq b^2$, alors nécessairement $ab^2+b+7 \leqslant |7a-b^2|$, d'où $ab^2 < |7a-b^2|$ $(*)$. Si $7a < b^2$, alors $ab^2 < b^2$, donc $a = 0$ ce qui est absurde. Ainsi $7a > b^2$, donc $(*)$ permet d'écrire $ab^2 < 7a$, d'où $b = 1$ ou 2.

- Si $b = 1$, alors $a+8$ divise a^2+a+1, donc aussi $(a^2+a+1)-(a-7)(a+8) = 57 = 3\times 19$. On en déduit que $a = 11$ ou $a = 49$.
- Si $b = 2$ alors $4a+9$ divise $2a^2+a+2$, donc aussi $8(2a^2+a+2)-(4a-7)(4a+9) = 79$, qui est premier. On a donc nécessairement $4a+9 = 79$, donc $a = 35/2$, ce qui contredit son caractère entier.

En résumé, les couples solutions sont $(a,b) = (11,1)$, $(49,1)$ et $(7k^2, 7k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Comment démontrer qu'un angle est aigu ?

Soit I le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC. Ce cercle est tangent aux côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle en les points K, L et M respectivement. La droite parallèle à (MK) passant par B coupe les droites (LM) et (LK) respectivement en R et S.

Prouver que l'angle $\widehat{\mathrm{RIS}}$ est aigu.

Solution

Pour vérifier que $\widehat{\mathrm{RIS}}$ est aigu, rien de tel qu'une vérification de $\overrightarrow{\mathrm{IR}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{IS}} > 0$. Calculons donc ce produit scalaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{IR}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{IS}} = (\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{BR}})\,.\,(\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{BS}}) \tag{1}$$

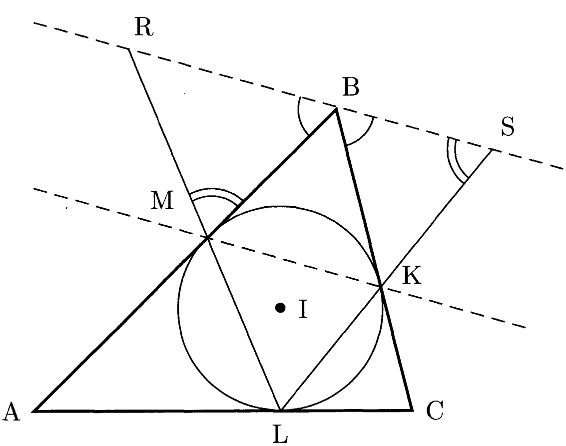
$$= \mathrm{IB}^2 - \mathrm{BR}\cdot\mathrm{BS} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{IR}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{IS}} = \mathrm{R}^2 + \mathrm{BM}^2 - \mathrm{BR}\cdot\mathrm{BS}. \tag{3}$$

Détaillons un peu ce calcul :

(1) $\overrightarrow{\mathrm{IB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{BS}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{BR}} = 0$ car (IB) est perpendiculaire à (KM), donc à (RS) également.

(2) on nomme R le rayon du cercle inscrit et on applique le théorème de Pythagore[2] dans le triangle BIM.



2. Pythagore de Samos (env. 569-475 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

Nous allons prouver que $BM^2 = BR \cdot BS$, pour simplifier (3). Montrons pour cela, comme indiqué sur la figure, que les triangle BMR et BSK sont semblables.

Les droites (AB) et (BC) sont tangentes au cercle inscrit, donc nous pouvons écrire $\widehat{BMK} = \widehat{MLK} = \widehat{MKB}$ par égalité d'angles inscrits. De plus les droites (RS) et (MK) sont parallèles donc $\widehat{MBR} = \widehat{BMK}$ et $\widehat{KBS} = \widehat{MKB}$. Nous avons donc $\widehat{MBR} = \widehat{KBS}$.

De plus, toujours par parallélisme de (RS) et (MK), $\widehat{BSK} = \widehat{MKL}$. Or $\widehat{MKL} = \widehat{AML}$ car (AB) est tangente au cercle inscrit. Ainsi $\widehat{BSK} = \widehat{AML} = \widehat{RMB}$.

Les égalités des deux paragraphes précédents montrent que les triangles BMR et BSK sont semblables, donc $BM^2 = BR \cdot BS$. En substituant dans (3), nous avons donc $\overrightarrow{IR}\,.\,\overrightarrow{IS} = R^2 > 0$, donc l'angle $\widehat{RIS}$ est aigu.

Remarque. Une solution au problème consiste à prendre un bon repère centré en I et à calculer les coordonnées de R et S dans ce repère. Elle a le « mérite » de ne demander aucune réflexion, mais les calculs, même bien menés, deviennent vite affreux. Il est ainsi très difficile d'aboutir dans le contexte d'un examen, mais le candidat désirant se perfectionner en trigonométrie pourra essayer...

6. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}^*$

On considère toutes les applications f de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de tous les entiers strictement positifs dans lui-même vérifiant

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2.$$

Déterminer la plus petite valeur possible de $f(1998)$.

Solution

Le candidat ne doit pas ici se focaliser sur des propriétés spécifiques du nombre « 1998 » (il est traditionnel d'inclure dans au moins un énoncé des Olympiades internationales l'année de la compétition). Il est en fait demandé de déterminer toutes les fonctions f vérifiant les hypothèses.

En cherchant à vérifier l'équation fonctionnelle on trouve facilement les fonctions du type $f : n \mapsto \lambda n$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Mais la grande difficulté de l'exercice est de ne pas se limiter à ces seules solutions et d'intuiter les autres.

Voici donc ce qu'il fallait ici deviner : les fonctions f solutions sont des multiples de fonctions multiplicatives et involutives g, c'est-à-dire :

- $g(ab) = g(a)g(b)$ (g est « multiplicative ») ;
- $g \circ g(n) = n$ (g est « involutive »).

Si nous posons $g(n) = f(n)/k$, où $k = f(1)$, il nous faut vérifier les deux points précédents. Une fois que l'on sait ainsi ce que l'on a à démontrer, tout est plus simple et ce qui suit est le type de raisonnement utilisé pour un grand nombre d'équations fonctionnelles.

1^re^ étape : multiplicativité de g

L'équation de l'énoncé donne successivement, pour $t = 1$ et $s = 1$,

$$\begin{cases} f \circ f(n) = k^2 n & (1) \\ f(n)^2 = f(kn^2) & (2) \end{cases}.$$

De (1) on déduit l'injectivité de f : si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.

On peut, forts de ces remarques, écrire les équivalences suivantes (la méthode est de se ramener à une équation simple en éliminant les carrés par la relation (2) puis en éliminant les f par la relation (1) et l'injectivité),

$$\begin{aligned} g(ab) = g(a)g(b) & \Leftrightarrow & k^2 f(ab)^2 = f(a)^2 f(b)^2 \\ & \Leftrightarrow & f \circ f(f(ab)^2) = f(a^2 f(f(b)^2)) \\ & \Leftrightarrow & f(f(ab)^2) = a^2 f(f(b)^2) \\ & \Leftrightarrow & f \circ f(ka^2b^2) = a^2 f \circ f(kb^2) \\ g(ab) = g(a)g(b) & \Leftrightarrow & k^3a^2b^2 = a^2k^3b^2. \end{aligned}$$

On a donc bien la multiplicativité de g.

2^e^ étape : g est entière et réalise une involution sur les nombres premiers

Montrons que g est à valeurs entières. On vient de démontrer la relation $kf(ab) = f(a)f(b)$, donc par une récurrence immédiate $f(a)^n = k^{n-1} f(a^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si p est un nombre premier et si μ (respectivement ν) est l'entier maximal tel que $p^\mu \mid f(a)$ (respectivement $p^\nu \mid k$), on a donc $n\mu \geqslant (n-1)\nu$, donc $\mu \geqslant \nu$ en faisant tendre n vers l'infini. Ainsi $k \mid f(a)$, donc g est à valeurs entières.

La fonction g étant multiplicative, elle est déterminée de manière unique par son action sur les nombres premiers et elle réalise en réalité une involution sur ces derniers :

- vérifions d'abord l'involutivité. Pour $s = t = 1$ dans l'équation initiale, on obtient $f(k) = k^2$. En utilisant alors à nouveau la relation $kf(ab) = f(a)f(b)$, pour $b = k$, on obtient $f(ka) = kf(a)$. On a donc $kf(f(n)/k) = f \circ f(n) = k^2n$, c'est-à-dire $g \circ g(n) = n$.
- de plus, si p est un nombre premier et si $g(p) = ab$, alors $p = g(ab) = g(a)g(b)$, donc par exemple $g(a) = 1$, donc $a = 1$ car g est injective (elle est involutive). L'entier $g(p)$ est donc un nombre premier.

La fonction g est donc entièrement définie par son action sur les nombres premiers, qui est involutive.

3^e^ étape : conclusion

On a donc

$$f(1998) = k\,g(2 \times 3^3 \times 37) = k\,p_2 \times p_3^3 \times p_{37}.$$

En considérant l'ensemble des valeurs de ce dernier produit sur les triplets de nombres premiers distincts, la valeur minimale de $f(1998)$ est obtenue pour $g(3) = p_3 = 2$, $g(2) = p_2 = 3$, $g(37) = p_{37} = 5$ et bien sûr $k = 1$.

Le minimum cherché est donc 120.

Bucarest (Roumanie)

1999

1. Ensemble fini de points stable par toute réflexion permutant deux de ses éléments

> **Dans le plan, déterminer tous les ensembles finis $\mathcal{S}$, constitués d'au moins trois points, qui vérifient la propriété suivante : pour tout couple de points distincts A et B dans $\mathcal{S}$, la médiatrice du segment [AB] est un axe de symétrie de $\mathcal{S}$.**

Solution

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble vérifiant les conditions de l'énoncé. $\mathcal{S}$ étant fini, on peut écrire $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Soit O l'isobarycentre des points A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, c'est-à-dire l'unique point tel que

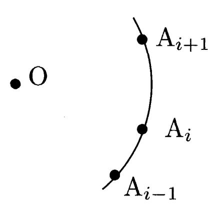
$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

La symétrie s par rapport à la médiatrice de $[A_iA_j]$ $(i \neq j)$ permute d'après l'énoncé tous les points de $\mathcal{S}$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{s(O)A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{s(O)s(A_i)} = s\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}\right) = s(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Par unicité de l'isobarycentre on a ainsi $s(O) = O$, donc O est sur la médiatrice de $[A_iA_j]$: $OA_i = OA_j$, tous les points sont donc situés sur un cercle de centre O.

Si A_{i-1}, A_i et A_{i+1} désignent trois points distincts consécutifs de $\mathcal{S}$ sur ce cercle, désignons par s la symétrie par rapport à la médiatrice de $[A_{i-1}A_{i+1}]$.



Alors $s(\mathrm{A}_i)$ doit être un élément de $\mathcal{S}$ sur l'arc de cercle $\widehat{\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_{i+1}}$ ouvert. Ainsi $s(\mathrm{A}_i) = \mathrm{A}_i$ donc $\widehat{\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{O}\mathrm{A}_i} = \widehat{\mathrm{A}_i\mathrm{O}\mathrm{A}_{i+1}}$: le polygone formé par les A_i est un polygone régulièr.

Réciproquement, les sommets d'un polygone régulier vérifient bien l'énoncé.

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc formé des sommets d'un polygone régulier.

2. Optimiser une inégalité

Soit un entier $n \geqslant 2$. Déterminer la plus petite constante C telle que pour tous réels positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on ait l'inégalité

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant \mathrm{C} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4 .$$

Déterminer les cas d'égalité.

Solution

La seconde solution est nettement la plus expéditive, mais la première a le mérite d'être plus naturelle ; elle s'apparente à une réelle recherche et présente une méthode plus générale : étude du problème pour de petits n et extension des résultats par récurrence.

1^{re} méthode

Quitte à diviser chaque x_i par $\sum_{i=1}^n x_i$, nous pouvons supposer par homogénéité que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Il faut donc trouver le maximum C de $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$ sous les contraintes $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ et $x_i \geqslant 0$ pour tout i. Procédons par récurrence (l'étude de l'inégalité pour de petites valeurs nous donnera certainement des idées pour la suite).

Si $n = 2$, on a $x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = x(1 - 2x) \leqslant 1/8$ (où l'on a posé $x = x_1 x_2$), valeur obtenue uniquement pour $x_1 = x_2 = 1/2$. On a donc ici $\mathrm{C} = 1/8$.

On pourrait supposer qu'au rang n le maximum est obtenu pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, mais un rapide calcul montre que cette valeur est dépassée pour $x_1 = x_2 = 1/2$ et $x_3 = \cdots = x_n = 0$. Nous allons donc montrer que l'on a encore $C = 1/8$ au rang n, avec égalité si et seulement si deux x_i sont égaux. Supposons acquis ce résultat au rang $n-1$.

Nous pouvons supposer $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$. Remplaçons alors notre $n-$uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ par $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} + x_n, 0)$. La somme des x_i est inchangée, mais le terme de gauche de notre inégalité a subi après calcul une variation Δ (où l'on a noté $\Sigma = \sum_{i=0}^{n-2} x_i$)

$$\begin{aligned}
\Delta &= f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} + x_n, 0) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
&= 3x_n x_{n-1}(x_n + x_{n-1})\Sigma - x_n x_{n-1}(x_n^2 + x_{n-1}^2) \\
&\geqslant x_n x_{n-1}(x_n + x_{n-1}) - x_n x_{n-1}(x_n^2 + x_{n-1}^2) \\
&= x_n x_{n-1}(x_n + x_{n-1} - x_n^2 - x_{n-1}^2) \\
\Delta &\geqslant 0
\end{aligned}$$

car $\Sigma \geqslant 1/3$ ($x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ et $\sum_{i=1}^n x_i = 1$). Ceci achève notre récurrence : nous avons montré que $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} + x_n, 0) \leqslant 1/8$, par hypothèse de récurrence, avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = 1/2$, encore par hypothèse de récurrence.

2e méthode

Ce qui suit se passe de commentaires :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right)^2 \\
&\geqslant 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
&= 8 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\
\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 &\geqslant 8 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right).
\end{aligned}$$

Dans la seconde inégalité, on a égalité si et seulement si tous les x_i sont nuls sauf deux d'entre eux. La première inégalité n'est alors une égalité que si ces deux x_i sont égaux. On peut donc conclure : $C = 1/8$, avec égalité si et seulement si deux des x_i sont égaux et tous les autres nuls.

3. Marquer des cases d'un échiquier pour que chaque case ait un voisin marqué

On se donne un tableau de taille $n \times n$ subdivisé en n^2 carrés unité, avec n pair. Deux carrés sont alors dits adjacents s'ils ont une arête commune, mais un carré n'est pas adjacent avec lui-même.

Trouver le nombre minimal de carrés que l'on doit marquer pour que tout carré (marqué ou non) soit adjacent avec un carré marqué.

Solution

Le point fondamental de cet exercice est de diviser l'ensemble des carrés en deux, en alternant les cases noires et les cases blanches comme sur un échiquier.

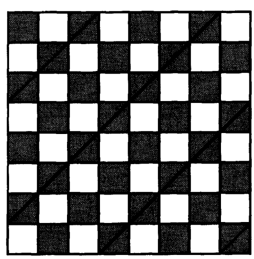
Considérons alors le nombre N minimal vérifiant : « il existe un marquage de N carrés blancs tel que chaque carré noir soit adjacent à une case marquée ». Comme n est pair, on a une parfaite symétrie entre les cases blanches et les cases noires, donc on peut affirmer l'énoncé réciproque, intervertissant cases blanches et noires, pour le même N. Si on note $\mathcal{N}$ le nombre cherché dans l'énoncé, alors

$$\mathcal{N} = 2\mathrm{N}.$$

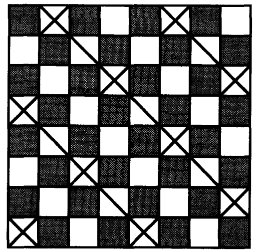
En effet un marquage minimal vérifiant l'énoncé doit d'après ce qui précède avoir N marques sur des cases blanches et N sur des cases noires et réciproquement un tel marquage vérifie les hypothèses de l'énoncé.

Il suffit donc désormais de calculer N.

Sur un échiquier de taille n, on s'intéresse à une diagonale de carrés noirs sur deux, comme sur le schéma ci-contre, en partant d'un carré noir dans un coin.



Chacune de ces diagonales passe par un nombre impair de carrés ; de plus, comme n est pair, tous les impairs de $[\![1, n]\!]$ sont la longueur d'une de ces diagonales. Si une de ces diagonales est de longueur $2k+1$, il faut marquer au moins $k+1$ cases blanches entourant cette diagonale pour que toutes ses cases noires soient adjacentes à une case marquée (une case marquée n'est adjacente au plus qu'à 2 éléments d'une même diagonale). Comme les ensembles de cases blanches entourant ces diagonales sont disjoints, il faut donc en tout au moins $1+2+\cdots+n/2 = n(n+2)/8$ carrés marqués.



Montrons que ce nombre suffit. Pour cela, sélectionnons les mêmes diagonales, mais blanches cette fois-ci. On marque alors, sur chaque diagonale de longueur $2k+1$, un carré sur deux en partant du bord.

Ce marquage convient alors et il est constitué de $1+2+\cdots+n/2 = n(n+2)/8$ marques. On a donc finalement prouvé que $\mathrm{N} = n(n+2)/8$, d'où

$$\mathcal{N} = \frac{n(n+2)}{4}.$$

Remarque. Si on avait dans l'énoncé seulement la condition « une case non marquée doit être adjacente à une case marquée », alors la solution est nettement distincte (et plus facile).

On note encore $\mathcal{N}$ le nombre de cases marquées nécessaires et on part d'une configuration à $\mathcal{N}$ vérifiant cet énoncé. On marque à leur tour les 4 cases adjacentes de chaque case marquée : toutes les cases doivent alors être marquées, si bien que $\mathcal{N} + 4\mathcal{N} \geqslant n^2$, soit

$$\mathcal{N} \geqslant n^2/5.$$

Remarquons de plus que l'on peut recouvrir un tel tableau par un enchevêtrement de croix de 5 cases, dont celle du milieu est marquée, toutes comprises dans le tableau de taille $n+4$ « concentrique » à notre tableau de taille n. On en déduit l'inégalité grossière

$$\mathcal{N} \leqslant (n+4)^2/5.$$

Ainsi

$$\mathcal{N} \underset{n\to\infty}{\sim} n^2/5.$$

4. Notion d'ordre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers strictement positifs tels que :

- **p est un nombre premier ;**
- **$n \leqslant 2p$;**
- **$(p-1)^n + 1$ est divisible par n^{p-1}.**

Solution

Soit q le plus petit diviseur premier de n et δ l'ordre de $p-1$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. L'entier q existe, à moins que $n = 1$, cas particulier qui donne comme solution n'importe quel couple $(1, p)$ avec p premier.

Remarquons de plus que si $p = 2$, alors n doit diviser 2, donc $n = 2$. Nous supposerons donc désormais $p \geqslant 3$, donc n impair.

Comme $(p-1)^n \equiv -1\ [n]$, on a $(p-1)^{2n} \equiv 1\ [q]$, donc $\delta \mid 2n$.

L'entier q divise n, qui divise $(p-1)^n + 1$, donc q ne divise pas $p-1$. Ainsi, par le petit théorème de Fermat[1] on a $(p-1)^{q-1} \equiv 1\ [q]$ donc $\delta \mid q-1$ et en particulier $\delta < q$.

On a $\delta \mid 2n$ et n impair, donc si $\delta \geqslant 3$ alors il existe p' impair avec $p' \mid \delta$. Alors $p' \mid 2n$, donc $p' \mid n$ car p' est impair. Mais $p' \leqslant \delta < q$, ce qui contredit la définition de q. On ne peut donc pas avoir $\delta \geqslant 3$.

- Si $\delta = 2$ alors $(p-1)^2 \equiv 1\ [q]$, donc $p-1 \equiv 1\ [q]$ (ce qui contredit la définition de δ) ou $p-1 \equiv -1\ [q]$. Dans ce dernier cas, $q \mid p$ donc, comme $q \neq 1$, on a $q = p$. Ainsi $n \leqslant 2p$ est impair et divisible par $q = p$, donc $n = p$: $p^{p-1} \mid (p-1)^p + 1$. En développant avec le binôme de Newton, on se rend compte que c'est impossible si $p > 3$ (car $p \mid \mathrm{C}_p^i$ mais p^2 ne divise pas C_p^i, pour $0 < i < p$). Le cas où $p = 3$ donne $(3, 3)$ comme couple effectivement solution.
- Si $\delta = 1$ alors $p-1 \equiv 1\ [q]$. Donc $(p-1)^n + 1 \equiv 2 \equiv 0\ [q]$, donc $q = 2$. Ainsi n est pair, donc $(p-1)^n + 1$ aussi, donc $p = 2$, cas déjà étudié.

En résumé, l'ensemble des solutions est

$$\mathscr{S} = \{\{(1, p) \mid p \text{ premier}\}, (2, 2), (3, 3)\}.$$

1. Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.

5. Géométrie pure

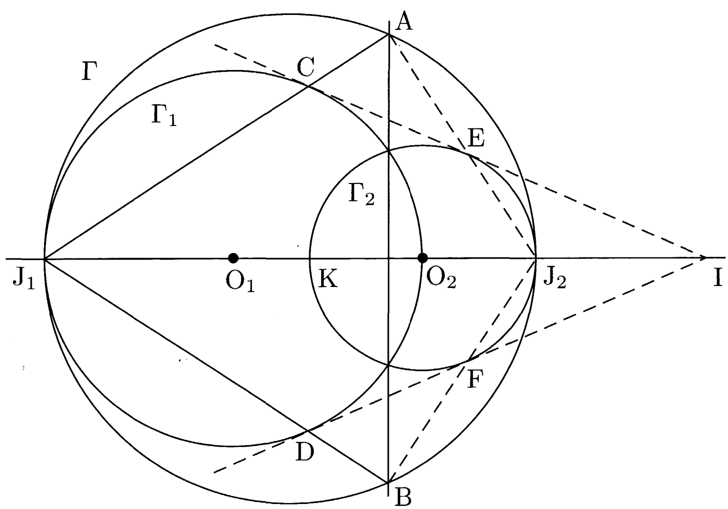
Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont intérieurs au cercle Γ et sont tangents à Γ respectivement en les deux points distincts J_1 et J_2. Le cercle Γ_1 passe par le centre de Γ_2. La droite contenant les deux points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 rencontre Γ en A et B. Les droites (MA) et (MB) coupent Γ_1 respectivement en C et D.

Montrer que la droite (CD) est tangente au cercle Γ_2.

Solution

La solution qui suit n'est certainement pas la plus simple : on peut résoudre le problème de façon analytique avec des calculs raisonnables. Cependant, on va manier ici de la jolie géométrie fondée sur l'inversion.

On suppose que les rayons des cercles Γ_1 et Γ_2 sont distincts (on peut traiter directement le cas où ils sont égaux par le calcul, ou bien en utilisant ce qui suit puis par continuité), ce qui permet d'introduire le point I, intersection de (CE) et de (DF) (où E et F sont les intersection de Γ_2 respectivement avec (AJ_2) et (BJ_2)).



On note i_1 l'inversion de centre J_1 transformant C en A, i_2 celle de centre J_2 transformant A en E et $i = i_1 \circ i_2$. Ainsi i est l'inversion de centre I transformant C en E.

On veut démontrer que (CD) et Γ_2 sont tangents, c'est-à-dire que $i[(CD)]$ et $i(\Gamma_2)$ le sont. Or :

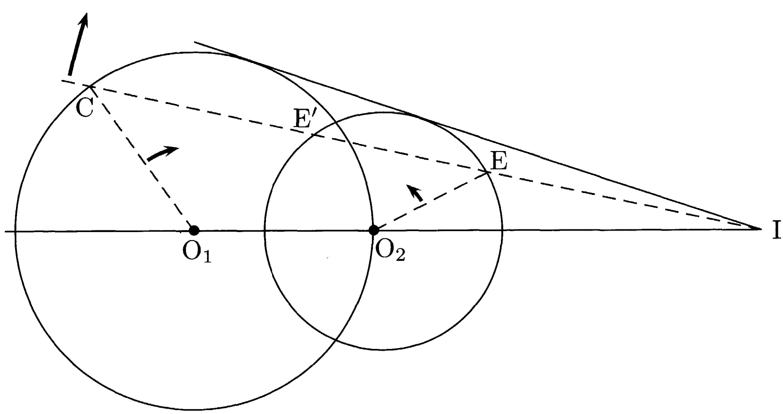
- $i(\Gamma_2) = i_1 \circ i_2(\Gamma_2) = i_1[(AB)] = \Gamma_1$;
- $i[(CD)]$ est le cercle passant par I, $i(C)$ et $i(D)$, c'est-à-dire le cercle circonscrit à IEF.

Ainsi il suffit de démontrer que Γ_1 et le cercle circonscrit à IEF sont tangents, c'est-à-dire que O_2, E, I et F sont cocycliques, donc que $\widehat{O_2EI} = \pi/2$, c'est-à-dire que (CE) est tangent à Γ_2. Pour démontrer ceci, remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}\widehat{CO_1I} &= 2\widehat{CJ_1I}\\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{EJ_2J_1}\right)\\ &= 2\widehat{EKI}\\ \widehat{CO_1I} &= \widehat{EO_2I}.\end{aligned}$$

Ainsi (CO_1) et (EO_2) sont parallèles.

Or $i(E) = C$, donc nécessairement (EC) est tangente à Γ_2, comme le montre le schéma ci-dessous : si E′ désigne l'autre intersection de (CE) avec Γ_2, on a $(CO_1) /\!/ (E'O_2)$, donc comme $(CO_1) /\!/ (EO_2)$ on a $E = E'$, ce qui signifie que (CE) est tangente à Γ_2.



On a ainsi démontré le résultat voulu : (CD) est tangente à Γ_2.

6. Équation fonctionnelle

> **Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que**
>
> $$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$
>
> **pour tout x, $y \in \mathbb{R}$.**

Solution

Posons $f(0) = a$. L'énoncé nous donne, pour $x = f(y)$,

$$a = f(x) + x^2 + f(x) - 1.$$

Ainsi pour tout $x \in \operatorname{Im} f$ on a

$$f(x) = \frac{a+1}{2} - \frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

Si la solution de notre problème n'est pas trop tordue, il y a donc de bonnes chances pour qu'il s'agisse d'un polynôme de degré 2.

Pour $y = 0$, l'équation de l'énoncé s'écrit

$$f(x - a) = f(a) + ax + f(x) - 1. \tag{2}$$

Si on avait $a = 0$, alors (2) s'écrirait, pour $x = 0$, $0 = -1$, ce qui est absurde. On a donc $a \neq 0$, donc (2) nous assure du résultat suivant : la fonction $x \mapsto f(x-a) - f(x)$ est affine non constante, donc a pour image $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe deux réels $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$ de $\operatorname{Im} f$ avec $x = x_1 - x_2$. On a donc d'après l'équation de l'énoncé puis (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 - x_2) \\ &= f(x_2) + x_1x_2 + f(x_1) - 1 \\ &= \frac{a+1}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_1x_2 + \frac{a+1}{2} - \frac{x_1^2}{2} - 1 \\ f(x) &= a - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Par comparaison avec (1), on a donc

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

et on vérifie que cette dernière fonction vérifie bien l'énoncé initial.

Taejon (Corée du Sud)

2000

1. Géométrie pure

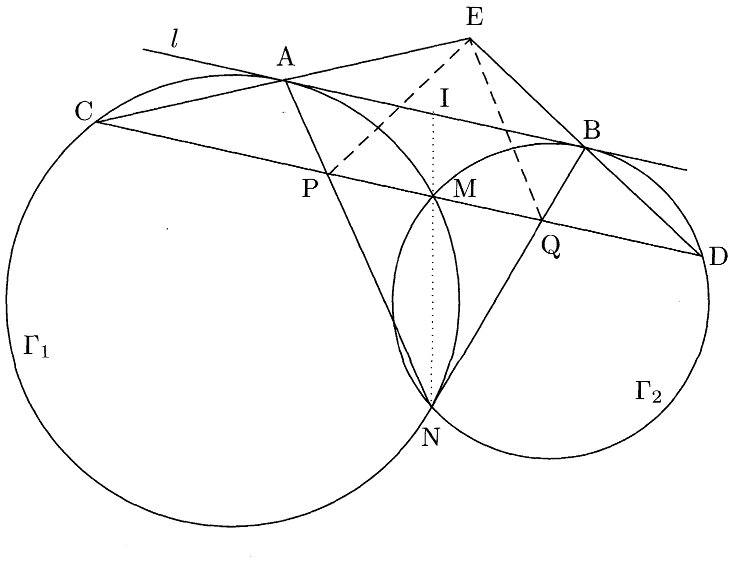
Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en M et N. Soit l la tangente commune à Γ_1 et Γ_2 telle que l soit plus proche de M que de N. La droite l est tangente à Γ_1 en A et à Γ_2 en B. La droite passant par M et parallèle à l rencontre à nouveau le cercle Γ_1 en C et le cercle Γ_2 en D.

Les droites (CA) et (DB) se coupent en E, les droites (AN) et (CD) se coupent en P, les droites (BN) et (CD) se coupent Q.

Montrer que EP = EQ.

Solution

Soit I l'intersection de l et de (MN).



La puissance de I (cf. exercice 1985 n°5) par rapport au cercle Γ_1 est $\text{IA}^2 = \text{IM} \cdot \text{IN}$ et, par rapport à Γ_2, $\text{IB}^2 = \text{IM} \cdot \text{IN}$. On en déduit que $\text{IA} = \text{IB}$, donc I est le milieu de [AB].

Soit h l'homothétie de centre N transformant A en P. Comme l et (PQ) sont parallèles, on a $h(\text{B}) = \text{Q}$ et $h(\text{I}) = \text{M}$. Or I est le milieu de [AB], donc M est le milieu de $h([\text{AB}]) = [\text{PQ}]$.

Le point M étant le milieu de [PQ] il suffit, pour avoir $\text{EP} = \text{EQ}$, que (EM) et (PQ) soient perpendiculaires.

Les droites l et (CD) sont parallèles donc $\widehat{\text{EAB}} = \widehat{\text{ACM}}$. De plus comme l est tangente à Γ_1 on a $\widehat{\text{ACM}} = \widehat{\text{MAB}}$, donc $\widehat{\text{EAB}} = \widehat{\text{MAB}}$. De même $\widehat{\text{EBA}} = \widehat{\text{MBA}}$.

Le point E est donc le symétrique de M par rapport à (AB), donc (EM) et l sont perpendiculaires, ce qui achève la démonstration.

2. Une inégalité sous contrainte multiplicative

Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$.

Montrer que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Solution

1re méthode

Remarquons tout d'abord qu'en multipliant deux fois de suite par abc l'inégalité à prouver on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1 \\
\Leftrightarrow\quad &\left(\frac{1}{c} - b + 1\right)\left(\frac{1}{a} - c + 1\right)\left(\frac{1}{b} - a + 1\right) \leqslant 1 \qquad (1)\\
\Leftrightarrow\quad &\left(1 - \frac{1}{a} + c\right)\left(1 - \frac{1}{b} + a\right)\left(1 - \frac{1}{c} + b\right) \leqslant 1. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Or le produit des termes (1) et (2) vaut

$$\left[1-\left(\frac{1}{c}-b\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{a}-c\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{b}-a\right)^2\right].$$

Ainsi deux cas se présentent.

- Si aucun des facteurs de (1) n'est négatif, alors les trois facteurs ci-dessus sont positifs donc $(1) \times (2) \leqslant 1$. On a donc par exemple $(1) \leqslant 1$, donc l'inégalité de départ est vraie.

- Si un des facteurs de (1) est strictement négatif, on a alors par exemple $1/c - b + 1 < 0$, d'où aussi $1 - 1/a + c < 0$. Intéressons-nous alors au signe des autres éléments de (1) :

  - si $1/a - c + 1 \leqslant 0$, alors $2 = c\,(1/c - b + 1) + (1/a - c + 1) < 0$, d'où l'absurdité ;
  - si $1/b - a + 1 \leqslant 0$, alors $2 = (1/c - b + 1) + b\,(1/b - a + 1) < 0$, ce qui est de nouveau absurde.

  Dans (1) il n'y a donc qu'un facteur négatif : l'expression est négative et en particulier inférieure à 1.

2$^{\text{e}}$ méthode

Pour se débarrasser de la condition $abc = 1$, on peut poser $a = u/v$, $b = v/w$ et $c = w/u$, avec u, v et w strictement positifs.

L'inégalité à démontrer s'écrit alors

$$(u + v - w)(u + w - v)(v + w - u) \leqslant uvw. \tag{3}$$

Pour conclure, la première idée consiste à effectuer une transformation de Ravi :

$$\left\{\begin{array}{l} u = x + y \\ v = y + z \\ w = x + z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{u+w-v}{2} \\ y = \frac{u+v-w}{2} \\ z = \frac{v+w-u}{2} \end{array}\right. .$$

- Si x, y et z sont positifs, alors (3), qui s'écrit aussi $(x + y)(y + z)(z + x)/8 \geqslant xyz$, est une conséquence directe de l'inégalité de la moyenne.

- Si au contraire un de ces trois réels est négatif, alors on n'a aucun mal à montrer que dans (3) le membre de gauche est négatif, d'où le résultat.

3e méthode

De même que dans la solution précédente, nous obtenons (3), que nous pouvons écrire sous la forme $u(u-v)(u-w)+v(v-u)(v-w)+w(w-u)(w-v) \geqslant 0$. Ceci est alors exactement, pour $n=1$, l'inégalité de Schur[1], valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u,v,w) \in \mathbb{R}_+^3$,

$$u^n(u-v)(u-w)+v^n(v-u)(v-w)+w^n(w-u)(w-v) \geqslant 0.$$

Cette inégalité se démontre facilement en ordonnant u, v et w. En effet, les variables jouant un rôle symétrique, on peut supposer $u \geqslant v \geqslant w \geqslant 0$. Ainsi $u^n(u-v)(u-w) \geqslant v^n(u-v)(v-w)$ et $w^n(w-u)(w-v) \geqslant 0$; la sommation de ces deux inégalités donne l'inégalité de Schur.

3. Le jeu de saute-mouton

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Au début, n puces sont sur une droite horizontale, pas toutes sur un même point. Pour un nombre réel strictement positif λ, on définit un mouvement de la façon suivante :

- **on choisit deux puces situées aux points A et B, avec A situé à la gauche de B ;**
- **alors la puce en A saute au point C, situé sur la même droite, à droite de B et tel que BC/AB $= \lambda$.**

Trouver toutes les valeurs de λ telles que, pour tout point M sur la droite et pour toutes positions initiales de n puces, il existe une suite finie de mouvements qui amène toutes les puces à droite de M.

Solution

Quelques exemples laissent à penser que les puces peuvent avancer à l'infini si et seulement si $\lambda \geqslant 1/(n-1)$. On nommera « puce extrême » la puce la plus à droite.

Si $\lambda < 1/(n-1)$, montrons que les puces restent dans une zone bornée.

L'idée magique est d'introduire la quantité suivante : soit M_k la

1. Issai Schur (1875-1941), mathématicien allemand.

somme des distances entre la puce extrême et les autres après k sauts. Alors au cours des mouvements M_k ne peut que diminuer :

- si après un saut la puce extrême n'a pas changé, alors M_k a clairement diminué ;
- si la puce extrême a changé et que la nouvelle se trouve à une distance x_k de la précédente, alors M vaut désormais $M_{k+1} \leqslant M_k + (n-1)x_k - x_k/\lambda < M_k$ car $\lambda < 1/(n-1)$.

De plus, lors d'un saut la puce extrême a progressé de $x_k \leqslant [\lambda/(1-\lambda(n-1))](M_k - M_{k+1})$ dans ce dernier cas, de 0 dans le premier. Donc après n sauts la puce extrême a progressé d'au plus $[\lambda/(1-\lambda(n-1))](M_0 - M_{n+1})$. Comme $M_n \geqslant 0$, on a donc une progression maximale de $[\lambda/(1-\lambda(n-1))]M_0$, d'où le résultat voulu.

Montrons maintenant que pour $\lambda \geqslant 1/(n-1)$, les puces peuvent se déplacer « à l'infini ». Imaginons qu'à chaque fois la puce la plus à gauche saute par dessus la puce extrême et montrons qu'elles s'en vont alors au loin. Pour ceci, plusieurs méthodes sont possibles.

1^re^ méthode

En s'inspirant de ce qui précède, on voit qu'ici $(M_k)_{k\geqslant 0}$ est croissante. Ainsi, si l_k désigne la distance entre la puce extrême et la puce la plus à gauche après k sauts, alors

$$x_k = \lambda l_{k-1} \geqslant \lambda \frac{M_{k-1}}{n-1} \geqslant \lambda \frac{M_0}{n-1} > 0.$$

La puce extrême s'éloigne donc à l'infini, donc toutes les puces car elles sont extrêmes à tour de rôle.

2^e^ méthode

On remarque d'abord que par ce processus au bout de $n-2$ sauts les puces sont toutes dans des positions distinctes. On peut donc considérer que l'on est dans cette configuration dès le début. On nomme x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ les écarts respectifs entre les deux premières puces, puis les deux suivantes, etc. On définit alors la suite récurrente d'ordre $n-1$ par

$$x_{m+n} = \lambda(x_{m+1} + \cdots + x_{m+n-1}).$$

Pour $k \geqslant m$, x_k est alors la distance entre la puce extrême et celle immédiatement à sa gauche après $k - m + 1$ sauts. Les puces ne vont alors à l'infini que si la série des x_i diverge.

Or les puces sont toutes distinctes donc $l = \min\{x_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1\} > 0$. On définit alors la suite $(y_i)_{i\geqslant 1}$ par $y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = l$ et

$$y_{m+n} = \frac{1}{n-1}(y_{m+1} + \cdots + y_{m+n-1}).$$

Alors on démontre par une récurrence immédiate que pour tout i on a $x_i \geqslant y_i = l > 0$. Ainsi la série des x_i diverge et on a le résultat souhaité.

3^e^ méthode (pour écraser les mouches avec des marteaux)

On note X_k le vecteur des $n-1$ écarts entre les puces, rangés de la gauche vers la droite, après le k^e saut. On a alors $X_{k+1} = AX_k$ où A est une matrice compagnon que le lecteur identifiera facilement.

On peut en fait chercher une forme explicite de X_k en regardant le polynôme caractéristique de A (qui est aussi le polynôme caractéristique de la suite récurrente de la méthode précédente),

$$P(X) = X^{n-1} - \lambda(X^{n-2} + \cdots + X + 1).$$

Le polynôme P tend vers l'infini en $+\infty$ et $P(1) = 1 - \lambda(n-1) \leqslant 0$, donc P admet une racine réelle r de module supérieur ou égal à 1.

Soit Y un vecteur propre associé à cette valeur propre r. L'équation $AY = rY$ montre que toutes les coordonnées de Y sont de même signe. On peut donc prendre pour Y un vecteur dont toutes les coordonnées sont strictement positives et inférieures à la plus petite de celles de X_0. Alors $X_k = A^k X_0 \geqslant A^k Y = r^k Y$ (l'inégalité doit ici être comprise coordonnée par coordonnée), donc $X_k \underset{k\to\infty}{\not\to} 0$: les puces vont à l'infini.

Remarque. Si $\lambda < 1/(n-1)$, toutes les racines de P sont de module strictement inférieur à 1. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant $P(x) = 0$ et $|x| > 1$. Alors $|x|^{n-1} = \lambda|x^{n-2} + \cdots + x + 1| \leqslant \lambda(|x|^{n-2} + \cdots + |x| + 1) < 1/(n-1)(|x|^{n-1} + \cdots + |x|^{n-1}) = |x|^{n-1}$, résultat contradictoire.

La suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ tend vers 0 à vitesse exponentielle. Ceci montre que, si $\lambda < 1/(n-1)$, la technique « le dernier culbute le premier » ne permet pas d'aller à l'infini. Cependant ceci ne répond pas à la question initiale : il pourrait exister d'autres techniques permettant d'aller plus loin.

Ces lourds raisonnements d'algèbre linéaire et de fonctions d'une variable complexe ne semblent donc pas pouvoir se substituer à l'astuce consistant à introduire M_k.

4. Mathématicien et magicien

Un magicien a cent cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boîte contienne au moins une carte.

Un spectateur choisit deux de ces trois boîtes, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée.

De combien de façons le magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que le tour de magie réussisse toujours ?

(Deux façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boîtes différentes)

Solution

Soient (1), (2) et (3) nos trois différentes boîtes (vues comme des sous-ensembles de $[\![1,100]\!]$) et considérons une répartition qui permet le tour de magie : pour $(x_1,x_2,x_3) \in (1)\times(2)\times(3)$, si $x = x_1+x_2-x_3 \in [\![1,100]\!]$, alors $x \in (3)$ et de même pour toute permutation des indices.

On peut supposer $1 \in (1)$. Soit $n = \sup\{x \mid [\![1,x]\!] \subset (1)\}$. On peut alors supposer $n+1 \in (2)$. Distinguons alors deux cas selon la nature de (3).

S'il existe $k \in (3)$ avec $k \neq 100$, alors $n+k-(n+1) = k-1 \in (2)$ et $(n+1)+k-n = k+1 \in (1)$. Grâce à ce triplet $(k+1, k-1, k) \in (1)\times(2)\times(3)$, on démontre de même que pour tout $i \in (1) \cap [\![2,99]\!]$, $i+(k-1)-k = i-1 \in (3)$ et $i+1 = i+k-(k-1) \in (2)$. De même pour tout $j \in (2) \cap [\![2,99]\!]$ $j-1 \in (1)$ et $j+1 \in (3)$.

On en déduit immédiatement que $(1) = \{x \in [\![1,100]\!] \mid x \equiv 1\ [3]\}$, $(2) = \{x \in [\![1,100]\!] \mid x \equiv 2\ [3]\}$ et $(3) = \{x \in [\![1,100]\!] \mid x \equiv 0\ [3]\}$. Réciproquement ce triplet convient car si $x+y \equiv i\ [3]$ ($i = 1$, 2 ou 3), alors $x+y \in (i)$.

Sinon on a nécessairement $(3) = \{100\}$. On alors $100+n-(n+1) = 99 \in (2)$. Ainsi, si $i \in (1)$ et $i > 1$, $i+99-100 = i-1 \in (3)$, donc $i = 101$, absurde. On a donc $(1) = \{1\}$. On a donc $(2) = [\![2, 99]\!]$.

Ce triplet d'ensembles est également bel et bien « magique » : pour x et y dans deux ensembles distincts, si $x+y = 101$ alors ces ensembles sont (1) et (3), si $x+y \leqslant 100$, il s'agit de (1) et (2) et si $x+y \geqslant 102$ le spectateur avait choisi les ensembles (2) et (3).

En considérant la possibilité de permuter les indices, le magicien a donc 12 possibilités pour répartir les cartes.

5. Arithmétique

Existe-t-il un entier strictement positif n divisible par exactement 2000 nombres premiers distincts et tel que $2^n + 1$ est divisible par n ?

Solution

Notons $f(k)$ le nombre de facteurs premiers distincts d'un entier k. Soit n tel que $n \mid 2^n+1$, $f(n) < 2000$ et $f(2^n+1) \geqslant f(n) + 2000$. Alors il existe n' vérifiant les conditions de l'énoncé.

En effet on peut trouver m diviseur de 2^n+1 tel que $m \wedge n = 1$ et $f(m) = 2000 - f(n)$. Alors $n' = mn$ convient :

- $f(n') = f(m) + f(n) = 2000$;
- $2^{mn}+1 = (2^n+1)(2^{(m-1)n} - 2^{(m-2)n} + \cdots + 1)$; on a donc les relations de divisibilité successives $n \mid 2^n + 1 \mid 2^{n'} + 1$. De même $m \mid 2^{n'} + 1$. Comme $m \wedge n = 1$ on a donc $n' = mn \mid 2^{n'} + 1$.

Reste donc à trouver un entier n vérifiant ce qui précède. L'entier n doit avoir peu de facteurs premiers, on choisit donc $n = p^\alpha$ avec p premier.

De plus on doit avoir $n \mid 2^n + 1$, donc ici $2^{p^\alpha} \equiv -1\ [p]$. Or d'après le petit théorème de Fermat[2] $2^p \equiv 2\ [p]$, donc ici $2 \equiv -1\ [p]$: $p = 3$. Réciproquement, pour $n = 3^\alpha$, on a bien $2^n + 1 \equiv 0\ [n]$, comme le montre cette récurrence : c'est vrai pour $\alpha = 1$ et si c'est vrai au rang α alors

$$2^{3^{\alpha+1}} + 1 = \left(2^{3^\alpha} + 1\right)\left(\left(2^{3^\alpha}\right)^2 - 2^{3^\alpha} + 1\right). \tag{1}$$

2. Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.

Le premier terme est divisible par 3^α par hypothèse de récurrence et le deuxième est divisible par trois, car $2^{3^\alpha} \equiv 2$ [3] pour tout $\alpha \geqslant 0$.

Il faut enfin vérifier que pour α assez grand on a $f(2^{3^\alpha}+1) \geqslant f(3^\alpha)+2000 = 2001$. Le pgcd d des deux facteurs du second membre de (1) est 3 : en posant $x = 2^{3^\alpha}$, $d \mid (x^2 - x + 1) - (x+1)(x-2) = 3$. Or ce second terme ne peut pas être une puissance de 3 autre que 3 : une rapide énumération montre que l'on n'a jamais $x^2 - x + 1 \equiv 0$ [9]. Pour α assez grand, ce second membre a donc un facteur premier autre que 3 et premier avec le premier membre.

On en déduit que $2^{3^{\alpha+1}} + 1$ a pour facteurs premiers tous ceux de $2^{3^\alpha} + 1$ et au moins un de plus. Il a donc plus de 2000 facteurs premiers pour α assez grand : on a le résultat voulu.

6. Très difficile géométrie

Soient $[A_1H_1]$, $[A_2H_2]$, $[A_3H_3]$ les trois hauteurs d'un triangle $A_1A_2A_3$ dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle $A_1A_2A_3$ est tangent respectivement aux côtés $[A_2A_3]$, $[A_1A_2]$, $[A_1A_2]$ en T_1, T_2, T_3. On désigne respectivement par l_1, l_2 et l_3 les symétriques des droites (H_2H_3), (H_3H_1), (H_1H_2) par rapport aux droites (T_2T_3), (T_3T_1), (T_1T_2).

Montrer que l_1, l_2, l_3 déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle $A_1A_2A_3$.

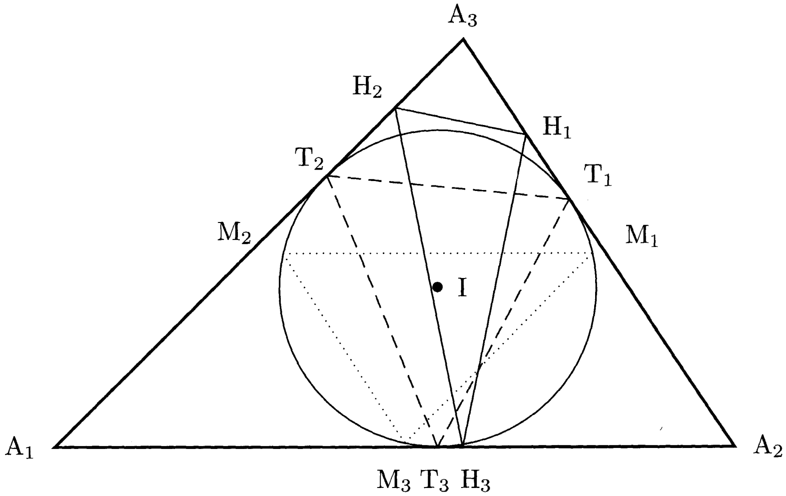
Solution

J'incite le lecteur sans l'ombre d'une idée à réfléchir à l'exercice 1982 n°2. Le candidat qui avait déjà vu ce dernier énoncé partait ici avec un avantage certain.

La première grande difficulté de l'exercice est de faire un dessin à peu près lisible, condition *sine qua non* pour espérer caractériser des points utiles à la résolution.

1re étape : un peu (beaucoup) d'intuition

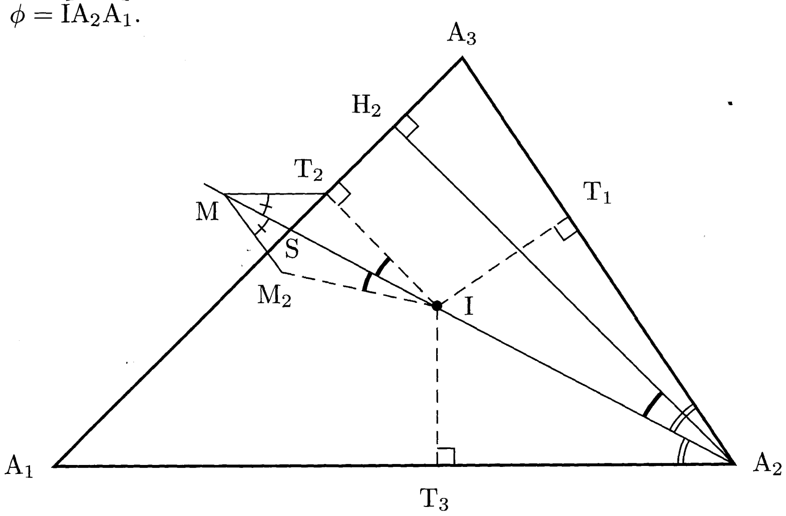
Notons alors M_i le symétrique de T_i par rapport à (IA_i). L'introduction de ces points constitue la deuxième grande difficulté de l'exercice : on va démontrer que (M_iM_j) est le symétrique de (H_iH_j) par rapport à (T_iT_j) (ceci permet alors de conclure).



2e étape : caractérisation différente des l_i

Notons M l'intersection de (IA_2) et de la parallèle à $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)$ passant par T_2. Montrons alors que $\mathrm{M} = \mathcal{S}_{(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3)}(\mathrm{H}_2)$.

Introduisons pour cela S, intersection de (IA_2) et $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3)$, $\theta = \widehat{\mathrm{T}_2\mathrm{IM}}$ et $\phi = \widehat{\mathrm{IA}_2\mathrm{A}_1}$.



On a tout d'abord $\widehat{\mathrm{H}_2\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3} = \widehat{\mathrm{MT}_2\mathrm{T}_3}$. En effet, par les angles « obtus alternés » on peut écrire

$$\widehat{\mathrm{MT}_2\mathrm{T}_3} = \widehat{\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3\mathrm{A}_2} = \frac{\pi}{2} + \widehat{\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3\mathrm{I}} = \frac{\pi}{2} + \widehat{\mathrm{T}_3\mathrm{T}_2\mathrm{I}} = \widehat{\mathrm{H}_2\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3}.$$

Pour avoir $M = \mathcal{S}_{(T_2T_3)}(H_2)$, il ne reste donc plus qu'à montrer $T_2H_2 = T_2M$. Calculons donc ces deux termes de part et d'autre.

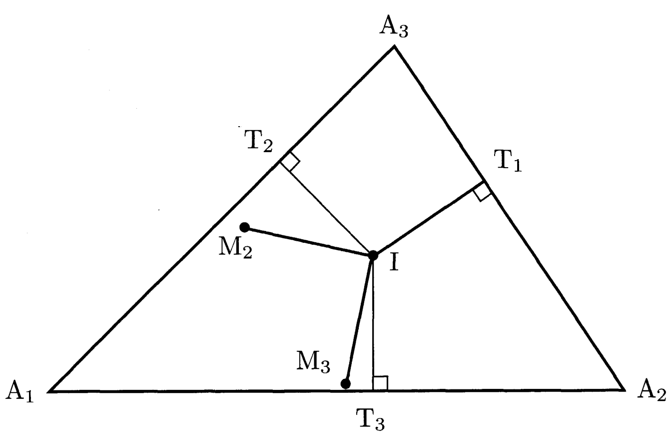
- D'une part, $H_2T_2 = H_2S - ST_2 = A_2S\sin\theta - IS\sin\theta = (A_2S - IS)\frac{ST_2}{IS} = \frac{IA_2 \cdot ST_2}{IS}$.
- D'autre part, la loi des sinus dans IMT_2 permet d'écrire $MT_2 = IT_2\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = IT_2\frac{ST_2}{IS}\frac{IA_2}{IT_3} = \frac{IA_2 \cdot ST_2}{IS}$.

On a donc bien $T_2H_2 = T_2M$, donc $M = \mathcal{S}_{(T_2T_3)}(H_2)$.

3ᵉ étape : identification des l_i et des (M_jM_k)

On souhaite démontrer que $l_1 = M_2M_3$ et de même pour les autres indices. Comme M est le symétrique de H_2 par rapport à T_2T_3, il suffit de démontrer que M, M_2 et M_3 sont alignés. Montrons pour cela que $(MM_2) /\!\!/ (A_2A_3)$ et $(M_2M_3) /\!\!/ (A_2A_3)$:

- on voit sur le dessin précédent que $\widehat{M_2MA_2} = \widehat{T_2MA_2} = \widehat{MA_2A_1} = \widehat{MA_2A_3}$, donc $(MM_2) /\!\!/ (A_2A_3)$;
- le dessin suivant suffit à se convaincre que $(M_2M_3) /\!\!/ (A_2A_3)$. En effet on est ici clairement en présence d'un « Y » posé perpendiculairement sur (A_2A_3) et symétrique : $IM_2 = IM_3$ et un rapide petit calcul d'angles montre que $\widehat{T_1IM_2} = \widehat{T_1IM_3}$.



En résumé, on a donc M, M_1 et M_2 alignés. En raisonnant de même sur le symétrique de H_3 par rapport à M_2M_3, on a ainsi M_1, M_2,

$\mathcal{S}_{(T_2T_3)}(H_2)$ et $\mathcal{S}_{(T_2T_3)}(H_3)$ qui sont alignés, donc $l_1 = (M_2M_3)$. De même $l_2 = (M_1M_3)$ et $l_3 = (M_1M_2)$, si bien que le triangle formé par l_1, l_2 et l_3 est exactement $M_1M_2M_3$.

En particulier, ses sommets appartiennent au cercle inscrit à $A_1A_2A_3$.

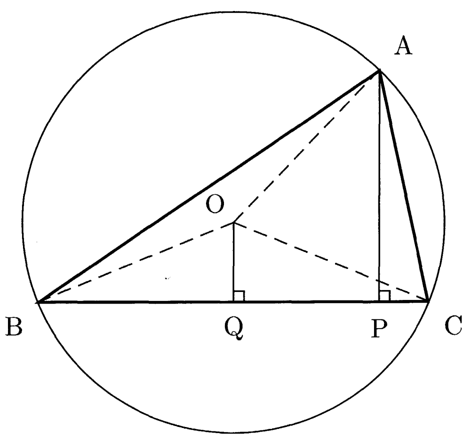
Washington, D.C. (États-Unis)

2001

1. Géométrie : une inégalité angulaire

> **Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et O le centre de son cercle circonscrit. Soit P le pied de la hauteur abaissée de A sur BC. On suppose que $\widehat{\mathrm{BCA}} \geqslant \widehat{\mathrm{ABC}} + 30^\circ$.**
>
> **Montrer que**
>
> $$\widehat{\mathrm{CAB}} + \widehat{\mathrm{COP}} < 90^\circ.$$

Solution



Remarquons tout d'abord que

$$\widehat{\mathrm{CAB}} = 1/2\,\widehat{\mathrm{COB}} = 1/2\,(180^\circ - 2\widehat{\mathrm{PCO}}) = 90^\circ - \widehat{\mathrm{PCO}}, \qquad (*)$$

si bien que l'inégalité à démontrer peut se réécrire sous la forme $\widehat{\mathrm{COP}} < \widehat{\mathrm{PCO}}$, ce qui est équivalent à

$$\mathrm{PO} > \mathrm{PC}. \qquad (1)$$

Pour démontrer ce résultat, nous devons utiliser la condition $\widehat{\mathrm{BCA}} \geqslant \widehat{\mathrm{ABC}} + 30^\circ$ sous une forme plus exploitable, en trouvant sur la figure un angle égal à $\widehat{\mathrm{BCA}} - \widehat{\mathrm{ABC}}$. Une égalité similaire à $(*)$ permet d'écrire $\widehat{\mathrm{ABC}} = 90^\circ - \widehat{\mathrm{CAO}}$, tandis que $\widehat{\mathrm{BCA}} = 90^\circ - \widehat{\mathrm{CAP}}$, si bien que notre condition s'écrit : $\widehat{\mathrm{BCA}} - \widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{PAO}} \geqslant 30^\circ$. Si on désigne par Q le projeté orthogonal de O sur (BC), ceci s'écrit aussi par passage au sinus

$$\mathrm{QP} \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{AO}. \tag{2}$$

De plus, OC > QC. On a donc, en utilisant d'abord (2),

$$\mathrm{QP} \geqslant \frac{\mathrm{AO}}{2} = \frac{\mathrm{CO}}{2} > \frac{\mathrm{CQ}}{2} = \frac{\mathrm{QP}+\mathrm{PC}}{2}.$$

Ceci permet d'affirmer QP > PC, donc PO > QP > PC, qui est le résultat (1) souhaité.

2. Une inégalité

Montrer que pour tous les réels a, b, c strictement positifs on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Solution

Pour résoudre l'exercice il suffit d'avoir une idée, pas forcément naturelle : on cherche à trouver une relation du type

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{a^x}{a^x+b^x+c^x},$$

ce qui conclura l'exercice par sommation. En développant les membres d l'inégalité précédente au carré, on se rend compte qu'il suffit de trouve x tel que l'inégalité suivante soit toujours vraie :

$$\frac{a^2b^{2x}+a^2c^{2x}+2a^{2+x}b^x+2a^{2+x}c^x+2a^2b^xc^x}{8} \geqslant a^{2x}bc.$$

Or, par l'inégalité de la moyenne , on a

$$\frac{a^2b^{2x}+a^2c^{2x}+2a^{2+x}b^x+2a^{2+x}c^x+2a^2b^xc^x}{8} \geqslant a^{2+x/2}b^{3x/4}c^{3x/4}.$$

Il suffit donc de trouver x tel que

$$\left\{\begin{array}{l} 2 + x/2 = 2x \\ 3x/4 = 1 \end{array}\right. .$$

Par bonheur $x = 4/3$ convient, ce qui achève la démonstration.

Annexe : une inégalité plus générale

Le lecteur, en essayant de résoudre cet exercice, se sera peut-être ramené par changement de variable à l'inégalité suivante, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $x_1x_2x_3 = 1$, $1/\sqrt{1+8x_1} + 1/\sqrt{1+8x_2} + 1/\sqrt{1+8x_3} \geqslant 1$, mais il est alors rapidement bloqué. Ceci donne l'idée de poser le problème suivant, plus général : démontrer que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $x_1x_2\ldots x_n = 1$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)x_i}} \geqslant 1.$$

On est d'abord tenté de faire le traditionnel changement de variable permettant de se débarrasser de la condition $x_1x_2\ldots x_n = 1$: $x_1 = y_2/y_1$, $x_2 = y_3/y_2, \ldots, x_n = y_1/y_n$. Mais, face à l'échec de cette solution, en s'inspirant de la méthode précédente, on pose $y_i = x_i^{-1/n}$ et on a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)x_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{(n-1)/2}}{\sqrt{y_i^{n-1} + (n^2-1)\prod_{j\neq i} y_j}}.$$

De même que dans la solution précédente, en développant et en réorganisant les termes, il suffit de trouver x tel que

$$\frac{y_i^{n-1}\left(\sum_{j\neq i} y_j^{2x} + \sum_{1\leqslant j,j'\leqslant n,\, j\neq j'} y_j^x y_{j'}^x\right)}{n^2-1} \geqslant y_i^{2x} \prod_{j\neq i} y_j.$$

Or, l'inégalité de la moyenne permet ici d'écrire

$$\frac{y_i^{n-1}\left(\sum_{j\neq i} y_j^{2x} + \sum_{1\leqslant j,j'\leqslant n,\, j\neq j'} y_j^x y_{j'}^x\right)}{n^2-1} \geqslant \left(y_i^{(n-1)(n^2-1)+2x(n-1)} \prod_{j\neq i} y_j^{2nx}\right)^{1/(n^2-1)}.$$

Il suffit donc de trouver x tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{(n-1)^3+2(n-1)(n-1+x)}{n^2-1} = 2x \\ \frac{2nx}{n^2-1} = 1 \end{array}\right. .$$

Ici aussi, par miracle, $x = \frac{n^2-1}{2n}$ convient.

Un point particulièrement étonnant ici est le fait suivant : on a montré que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, $\sum_{i=1}^n 1/\sqrt{1+(n^2-1)x_i}$ est maximale lorsque tous les x_i sont égaux à 1. Cependant ce résultat n'est plus vrai si on remplace la constante n^2-1 par une autre constante !

3. Bien manier le principe des tiroirs...

Des entiers sont placés dans chacune des 441 cases d'un tableau de 21 lignes et 21 colonnes. Chaque ligne et chaque colonne contient au plus 6 entiers différents.

Montrer qu'il existe un entier présent dans au moins 3 lignes et 3 colonnes.

Solution

On raisonne par l'absurde en supposant donc que pour chaque ca du tableau on est dans au moins un des deux cas suivants :

- le nombre placé dans cette case n'est présent que dans une ou de colonnes ; on écrit alors un « C » dans cette case ;
- le nombre placé dans cette case n'est présent que dans une ou de lignes ; on écrit alors un « L » dans cette case (seulement si on avait pas déjà placé un « C »).

Alors, quitte à prendre au départ la transposée du tableau, celui contient par exemple au moins 221 « C ».

Par le principe des tiroirs il existe donc une ligne contenant au mo $\lceil 221/21 \rceil = 11$ « C ». Comme chacun des nombres correspondants n' présent que dans une ou deux colonnes, cette ligne contient sur ses ca « C » au moins $\lceil 11/2 \rceil = 6$ nombres distincts. Comme elle en a au plu toutes les cases de la ligne contiennent donc un « C ». Mais alors cha nombre de la ligne n'est présent que sur une ou deux colonnes, don ligne est constituée d'au plus $6 \times 2 = 12$ cases, ce qui est absurde.

4. Arithmétique et combinatoire

> **Soient $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des entiers, avec m impair. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ désigne une permutation de $(1, 2, \ldots, m)$, on note $f(x) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_m n_m$.**
>
> **Montrer qu'il existe deux permutations distinctes a et b de $(1, 2, \ldots, m)$ telles que $f(a) - f(b)$ soit un multiple de $m!$.**

Solution

Soit A l'ensemble des restes des $f(x)$ modulo $m!$, pour $x \in \mathcal{S}_m$. Comme $|\mathcal{S}_m| = m!$, on est dans un des deux cas suivants :

- il existe a et b distincts dans $\mathcal{S}_m$ avec $f(a) \equiv f(b)$ $[m!]$, ce qui répond à la question ;
- l'ensemble A contient tout élément de $[\![1, 2, \ldots, m!]\!]$. Alors

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_m} f(x) = \sum_{k=1}^{m!} k = \frac{m!(m!+1)}{2}. \tag{1}$$

Mais on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathcal{S}_m} f(x) &= \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}_m} x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_m n_m \\
&= n_1 \Bigg(\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}_m} x_1 \Bigg) + \ldots \qquad (2)\\
&\qquad + n_m \Bigg(\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}_m} x_m \Bigg) \\
&= n_1 (m-1)! \sum_{k=1}^{m} k + \cdots + n_m (m-1)! \sum_{k=1}^{m} k
\end{aligned}$$

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_m} f(x) = \frac{(m+1)!}{2} \sum_{k=1}^{m} n_k. \tag{3}$$

Or, comme m est impair, le second membre de (1) n'est pas divisible par $m!$ alors que le second membre de (2) l'est. Cette contradiction montre que ce cas ne peut pas se produire.

Ainsi il existe deux permutations distinctes a et b de $(1, 2, \ldots, m)$ telles que $f(a) - f(b)$ soit un multiple de $m!$.

5. Étonnante géométrie

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 60°$. La droite (AX) est la bissectrice de $\widehat{A}$ avec X sur (BC). La droite (BY) est la bissectrice de $\widehat{B}$ avec Y sur (AC). On suppose que AB + BX = AY + YB.

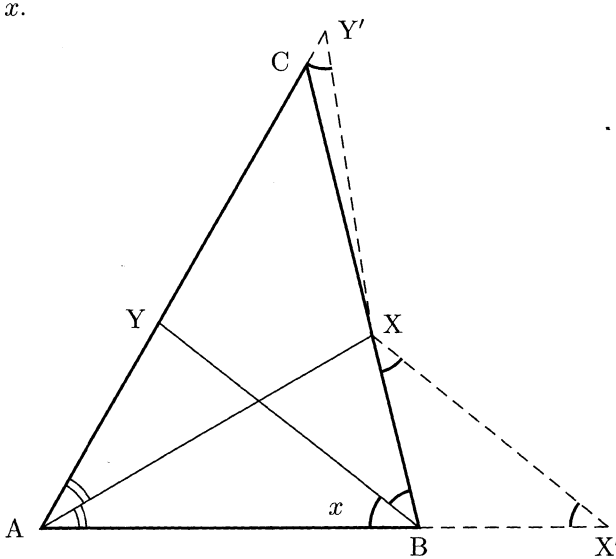
Trouver toutes les valeurs possibles de $\widehat{B}$.

Solution

La première solution se contente de géométrie pure alors que l seconde fait appel à une lourde machinerie trigonométrique. Il appa tient au candidat de savoir s'il préfère attendre l'étincelle de la premiè méthode ou se lancer dans les lourds calculs de la seconde.

1re méthode

On introduit les points Y′ et X′ (respectivement sur [YC) et (AI avec X′ $\notin$ [AB]) tels que YY′ = YB et BX′ = BX. De plus on pc $\widehat{ABY} = x$.



On a BX = BX′ d'où l'égalité d'angles $\widehat{BX'X} = \widehat{BXX'} = 1/2$ $\widehat{XBX'}) = 1/2\,\widehat{ABX} = x$.

De plus AY + YB = AB + BX donc AY′ = AX′. Comme X est s bissectrice de $\widehat{X'AY'}$ on en déduit que $\widehat{AY'X} = \widehat{AX'X} = x$ et XY′ =

C'est ici qu'intervient l'astuce du problème. Si Y′ et C sont distincts, alors (XY′) et (XB) sont distinctes. Or YY′ = YB et $\widehat{\mathrm{YY'X}} = \widehat{\mathrm{YBX}}$, on a donc XY′ = XB. On se souvient que XY′ = XX′, donc XB = XX′. Le triangle XBX′ est ainsi isocèle en X et en B, donc équilatéral. Ainsi $x = 60^\circ$, mais alors $\widehat{\mathrm{ABC}} = 120^\circ$ et C ne peut tout simplement pas exister. On en déduit que Y′ et C sont en réalité confondus.

L'égalité $\widehat{\mathrm{AY'X}} = \widehat{\mathrm{ACX}}$ s'écrit alors $x = 180 - (60 + 2x)$, soit $x = 40^\circ$. L'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ vaut donc nécessairement 80°.

2e méthode

Notons que la donnée de x caractérise entièrement la figure de l'énoncé. On a donc un problème à un seul paramètre (on peut poser AB = 1) que l'on doit pouvoir résoudre par une équation.

La loi des sinus dans le triangle ABY s'écrit

$$\frac{\mathrm{AY}}{\sin x} = \frac{\mathrm{BY}}{\sin 60} = \frac{1}{\sin(120 - x)}.$$

De même, dans le triangle ABX,

$$\frac{\mathrm{BX}}{\sin 30} = \frac{1}{\sin(150 - 2x)}.$$

L'égalité de l'énoncé s'écrit donc

$$\frac{\sin x}{\sin(120 - x)} + \frac{\sin 60}{\sin(120 - x)} = 1 + \frac{\sin 30}{\sin(150 - 2x)}.$$

On réduit cette inégalité au même dénominateur, on utilise des développements de type $\sin(a+b)$, on pose $s = \sin x$ et $c = \cos x$ et on obtient la sympathique égalité

$$\sqrt{3}c^3 + 2c^2 s - \sqrt{3}cs^2 - \sqrt{3}c^2 - 3cs + s + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

On souhaite ensuite ne conserver qu'une variable, donc on remplace par exemple « s^2 » par « $1 - c^2$ ». On obtient

$$\left(2c^2 - 3c + 1\right) s + \left(4c^3 - 2c^2 - 2c + 1\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Il est temps de repartir voir la figure et de constater que, pour $x = 60^\circ$, C n'est pas défini. On peut donc légitimement penser que l'expression ci-dessus se factorise par $c - \cos 60$, ce que l'on vérifie aisément. L'inégalité s'écrit donc désormais

$$2(c-1)s = \sqrt{3}(1-2c^2).$$

En élevant ceci au carré et en utilisant encore $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ on trouve une équation polynômiale en c qui est de nouveau factorisable par $c - 1/2$:

$$4\left(c-\frac{1}{2}\right)\left(4c^3 - 3c + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

On a déjà vu que $c \neq 1/2$, donc nécessairement $4c^3 - 3c = -1/2$. Or les férus de trigonométrie se souviennent que $4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$. Ainsi comme $x < 60^\circ$, on a $3x = 120^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{\mathrm{B}} = 80^\circ$.

Cette solution est inesthétique et peut paraître mécanique, mais elle est en réalité assez complexe à mettre en œuvre, surtout dans les conditions d'un concours où le temps est compté et la calculatrice interdite.

6. Montrer qu'un nombre est composé... sans le décomposer !

Soient quatre entiers positifs a, b, c et d tels que $a > b > c > d$ et $ac + bd = (a + b - c + d)(-a + b + c + d)$. Démontrer que $ab + cd$ est composé.

Solution

La condition $a > b > c > d$ implique $(ab + cd) - (ac + bd) = (a - d)(b - c) > 0$ et $(ac + bd) - (ad + bc) = (a - b)(c - d) > 0$. Ainsi

$$ad + bc < ac + bd < ab + cd.$$

De plus, l'égalité de l'énoncé s'écrit, après développement, $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Calculons alors le produit suivant (sans raison apparente) :

$$\begin{aligned}(ab + cd)(ad + bc) &= a^2bd + b^2ac + d^2ac + c^2bd \\ &= bd(a^2 + c^2) + ac(b^2 + d^2) \\ &= bd(a^2 - ac + c^2) + ac(b^2 + bd + d^2) \\ &= bd(a^2 - ac + c^2) + ac(a^2 - ac + c^2)\end{aligned}$$

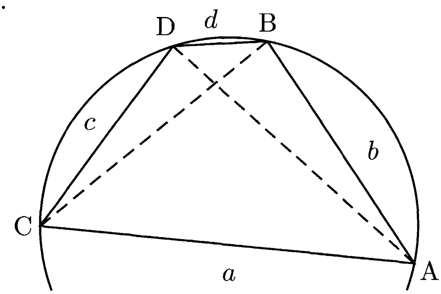
$$(ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)(a^2 - ac + c^2). \qquad (1)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $ab + cd$ soit premier. Comme il est supérieur à $ac + bd$, ces deux nombres sont premiers entre eux. Le théorème de Gauss[1] permet donc d'affirmer que $ac + bd$ divise $ad + bc$, mais ceci est absurde car $ac + bd > ad + bc$.

Ainsi $ab + cd$ est composé.

Remarque. La grande difficulté du problème est de trouver l'égalité (1). On peut donc se sentir un peu blousé : l'exercice consiste en la réécriture, certes astucieuse, d'une égalité donnée initialement sous une forme complètement inexploitable.

Remarquons tout de même que l'égalité (1) pouvait aussi s'obtenir par un moyen détourné mais plus naturel : en utilisant l'égalité de Ptolémée[2] !



En effet, considérons le quadrilatère ci-contre où $\widehat{ACD} = 60°$, $\widehat{ABD} = 120°$, et les longueurs des côtés sont indiquées. Ce quadrilatère existe si et seulement si les longueurs de [AD] calculées dans les triangles ABD et ACD coïncident. Ceci est acquis grâce à la condition $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 (= \mathrm{AD}^2)$ (formule d'Al-Kashi[3]).

Nos quatre points A, B, C et D sont cocycliques (car la somme des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$ vaut 180°). Ainsi $\sin \widehat{ABD} = \sin \widehat{ACD}$ et $\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{BDC}$. L'égalité d'aire $\mathscr{A}(\mathrm{ABD}) + \mathscr{A}(\mathrm{ACD}) = \mathscr{A}(\mathrm{BAC}) + \mathscr{A}(\mathrm{BDC})$ s'écrit donc $(ac+bd) \sin \widehat{ABD} = (ab+cd) \sin \widehat{BAC}$. Pour nous débarrasser de ces sinus, nous pouvons constater que $\mathrm{AD}/\sin \widehat{ABD} = \mathrm{BC}/\sin \widehat{BAC}$ (= 2R où R est le rayon du cercle circonscrit à ABDC). Ainsi $ac + bd = (ab + cd)\mathrm{BC}/\mathrm{AD} = (ab + cd)(\mathrm{BC} \cdot \mathrm{AD})/\mathrm{AD}^2$. Or $\mathrm{AD}^2 = a^2 - 2ac + c^2$ et par l'égalité de Ptolémée $\mathrm{BC} \cdot \mathrm{AD} = bc + ad$. Ainsi on a bien $(ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)(a^2 - ac + c^2)$.

1. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand.
2. Claudius Ptolémée (env. 85-165), mathématicien grec.
3. Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi (env. 1380-1429), mathématicien iranien.

Glasgow (Écosse)

2002

1. Combinatoire : diversité des méthodes

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples (h,k), où h et k sont des entiers naturels avec $h+k<n$. Chaque élément de $\mathcal{S}$ est colorié en rouge ou en bleu. De plus, si (h,k) est rouge et si $h'\leqslant h$ et $k'\leqslant k$ sont des entiers naturels, alors (h',k') est rouge aussi.

Un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué de n éléments bleus d'abscisses h distinctes est dit de type (1). Un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué de n éléments bleus d'ordonnées k distinctes est dit de type (2).

Montrer que le nombre de sous-ensembles de $\mathcal{S}$ de type (1) est égal au nombre de sous-ensembles de $\mathcal{S}$ de type (2).

Solution

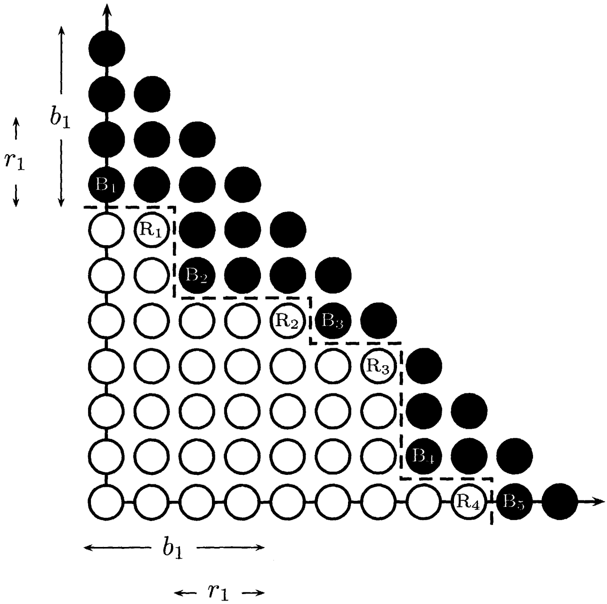
Nous donnons deux solutions de cet exercice. La première est la plus naturelle, elle calcule directement le cardinal de nos deux ensembles, alors que la deuxième consiste en une récurrence bien pressentie.

1re solution : calcul direct

Nous dirons qu'un élément bleu $\mathrm{B}=(\mathrm{B}^x,\mathrm{B}^y)$ est « minimal » s'il n'existe pas d'élément bleu (x,y) autre que B tel que $x\leqslant \mathrm{B}^x$ et $y\leqslant \mathrm{B}^y$ (ce sont les éléments bleus « dans les coins » de la ligne en pointillés ci-dessous).

De même nous dirons qu'un élément rouge $\mathrm{R}=(\mathrm{R}^x,\mathrm{R}^y)$ est « maximal » s'il n'existe pas d'élément rouge (x,y) autre que R tel que $x\geqslant \mathrm{R}^x$ et $y\geqslant \mathrm{R}^y$ (ce sont les éléments rouges « dans les coins » de la ligne en pointillés ci-dessous).

Nous indexons les $m+1$ éléments minimaux $(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\dots)$ et les m maximaux $(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2,\dots)$ par abscisse croissante, puis notons $b_i=n-\mathrm{B}_i^x-\mathrm{B}_i^y$ et $r_i=n-\mathrm{R}_i^x-\mathrm{R}_i^y-2$.



Calculons alors le nombre N_1 de sous-ensembles de type (1). On a b_1 choix d'ordonnée pour l'élément bleu d'abscisse 0, puis $b_1 - 1$ pour celui d'abscisse $1, \dots,$ et $r_1 + 1$ pour celui d'abscisse $b_1 - r_1 - 1$, soit $b_1!/r_1!$ choix pour les $b_1 - r_1$ premières ordonnées. Il existe ensuite b_2 possibilités pour l'abscisse $b_1 - r_1$, etc. On a ainsi (avec les conventions $k! = +\infty$ si $k < 0$ et $0! = 1$),

$$N_1 = \frac{b_1!}{r_1!}\,\frac{b_2!}{r_2!}\cdots\frac{b_m!}{r_m!}\,b_{m+1}!.$$

Mais le calcul de N_2 peut s'effectuer strictement de la même manière (à un décalage d'indices près),

$$N_2 = \frac{b_{m+1}!}{r_m!}\cdots\frac{b_2!}{r_1!}\,b_1!.$$

On a bien $N_1 = N_2$.

2^e solution : par récurrence

Si on note a_i (respectivement o_i) le nombre d'éléments bleus d'abscisse (respectivement d'ordonnée) i, il s'agit de montrer

$$\prod_{i=0}^{n-1} a_i = \prod_{i=0}^{n-1} o_i.$$

Montrons pour cela, par récurrence sur le nombre k d'éléments bleus, que les ensembles $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{o_1, \ldots, o_n\}$ (où on conserve les répétitions : ces ensembles comportent n éléments) sont identiques.

Ce résultat est évident pour $k = 1$, supposons-le vrai au rang k et montrons-le au rang $k+1$. Parmi les $k+1$ éléments bleus, il en existe au moins un, (u, v), que l'on peut qualifier de « minimal » : il n'existe pas d'élément bleu (x, y) autre que (u, v) tel que $x \leqslant u$ et $y \leqslant v$. Colorions cet élément en rouge. Comme (u, v) a été choisi minimal, cette nouvelle configuration (pour laquelle on a adopté les notations a'_i et o'_i) vérifie encore l'énoncé, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\{a'_1, \ldots, a'_n\} = \{o'_1, \ldots, o'_n\}$, c'est-à-dire $\{a_1, \ldots, a_u - 1, \ldots, a_n\} = \{o_1, \ldots, o_v - 1, \ldots, o_n\}$. Or $a_u = o_v$, donc $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{o_1, \ldots, o_n\}$, ce qui achève la récurrence.

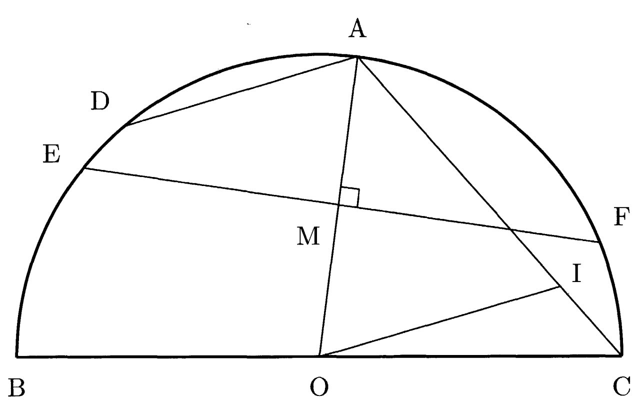
2. Géométrie pure

Soit [BC] un diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et A un point de $\mathcal{C}$ tel que $0^\circ \leqslant \widehat{AOB} \leqslant 120^\circ$. Soit D le milieu de l'arc limité par A et B ne contenant pas le point C. La droite passant par O et parallèle à (DA) rencontre (AC) en I. La médiatrice de [OA] rencontre $\mathcal{C}$ en E et F.

Montrer que I est le centre du cercle inscrit au triangle CEF.

Solution

Nommons M le milieu de [AO].



Tout d'abord, le lecteur vérifiera facilement le fait suivant : la condition $0^\circ \leqslant \widehat{AOB} \leqslant 120^\circ$ permet d'affirmer que I est intérieur au triangle EFC.

On a donc, en utilisant de plus des angles inscrits :

- $\widehat{FCI} = \widehat{FCA} = \frac{1}{2}\,\widehat{FOA} = \frac{1}{2}\,\widehat{EOA} = \widehat{ECA} = \widehat{ECI}$ donc I est sur la bissectrice de $\widehat{ECF}$;

- remarquons ensuite que ADOI est un parallélogramme : (AD) // (OI) et $\widehat{OAI} = \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{DOA}$ donc (DO) // (AI) (angles alterne-internes égaux).

  Ainsi, dans la symétrie par rapport à M, les images respectives de E et D sont F et I. On peut donc écrire $\widehat{EFI} = \widehat{FED} = \frac{1}{2}\,\widehat{FOD} = \frac{1}{2}\left(\widehat{FOA} + \widehat{AOD}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{EAO} + \widehat{OAI}\right) = \frac{1}{2}\widehat{EAC} = \frac{1}{2}\,\widehat{EFC}$ si bien que I est aussi sur la bissectrice de $\widehat{EFC}$.

Le point I est donc le centre du cercle inscrit au triangle CEF.

3. Arithmétique... pas si sûr

Trouver tous les couples d'entiers (m, n), $m > 2$, $n > 2$, tels qu'il existe une infinité d'entiers positifs k tels que $k^n + k^2 - 1$ divise $k^m + k - 1$.

Solution

1$^{\text{re}}$ étape : interprétation polynomiale

Soit (m, n) un couple solution. On note $P_m = X^m + X - 1$ et $P_n = X^n + X^2 - 1$. Effectuons la division euclidienne de P_m par P_n,

$$X^m + X - 1 = P(X)(X^n + X^2 - 1) + R(X).$$

En prenant pour X un des entiers auxquels l'énoncé fait référence, on remarque que $P_n(X)$ divise $R(X)$ pour des valeurs de X arbitrairement grandes. Comme R est de degré inférieur à n, il est donc nécessairement égal au polynôme nul.

Ainsi le polynôme P_n divise le polynôme P_m.

2^e étape : utilisation des racines

Soit (m, n) un couple solution et x une racine de $X^n + X^2 - 1$ ($x \neq 0$ et $x \neq -1$). Alors

$$\begin{cases} x^n + x^2 - 1 = 0 \\ x^m + x - 1 = 0 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} \frac{x^n}{1+x} = 1 - x \\ x^m = 1 - x \end{cases}.$$

Ainsi $x^n/(1 + x) = x^m$, donc x est racine du polynôme $P_k = X^{k+1} + X^k - 1$ (où $k = m - n$ est bien positif).

On vérifie facilement que P_n n'a pas de racine multiple, donc P_n divise P_k, d'où $n \leqslant k + 1$. Distinguons alors deux cas :

- si $n = k + 1$ alors P_n divise $P_k = X^n + X^{n-1} - 1$, donc aussi $P_k - P_n = X^{n-1} - X^2$.
  Si $n \neq 3$ on a $X^{n-1} - X^2 \neq 0$ et $\deg(X^n + X^{n-1} - 1) > \deg(X^{n-1} - X^2)$, donc P_n ne peut pas diviser $X^{n-1} - X^2$. Donc on a $n = 3$, d'où $m = 5$. On peut vérifier que réciproquement ce couple est bien solution.
- si $n < k + 1$, alors on a aussi $k > n - 1 \geqslant 2$ car $n > 2$. Mais alors sur $]0, 1[$ $X^{k+1} < X^n$ et $X^k \leqslant X^2$, donc $P_k < P_n$. Or P_n a une racine sur $]0, 1[$ ($P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 1$), qui ne peut donc pas être racine de P_k. Ceci et absurde car P_n divise P_k.

En conclusion, le seul couple solution est $(m, n) = (5, 3)$.

4. Arithmétique

Les diviseurs positifs de l'entier $n > 0$ sont $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$, si bien que $d_1 = 1$ et $d_k = n$. On pose $d = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.

1. **Démontrer que $d < n^2$.**
2. **Trouver tous les entiers n tels que d divise n^2.**

Solution

1^{re} question : $d < n^2$

Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ on a $d_i d_{k-i+1} = n$, si bien que

$$d = n^2 \left(\frac{1}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{d_2 d_1} \right).$$

De plus, pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, on a $d_{i+1} - d_i \geqslant 1$, donc

$$\frac{1}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{d_2 d_1} \leqslant \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Ainsi on a bien $d < n^2$.

2e question : recherche des entiers n vérifiant $d \mid n^2$

Pour n premier, c'est-à-dire $k = 2$, on a bien $d \mid n^2$. Montrons par l'absurde que c'est le seul cas possible.

Si $d \mid n^2$ et $k \neq 2$ alors

$$\frac{d}{n^2} = \frac{1}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{d_2 d_1} > \frac{1}{d_2},$$

donc si on pose $n^2/d = d'$, alors $1 < d'$ (d'après la question précédente) et $d' < d_2$. L'entier d' est un diviseur de n^2, donc possède un diviseur premier p qui divise n. Mais alors $1 < p < d_2$, ce qui contredit la définition de d_2, plus petit diviseur de n distinct de 1.

5. Équation fonctionnelle

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout quadruplet $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$

$$(f(x) + f(y))\,(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu).$$

Solution

Comme dans toute équation fonctionnelle, commençons simplement par $x = y = u = v = 0$, pour obtenir $4f(0)^2 = 2f(0)$: $f(0) = 0$ ou $1/2$. Si $f(0) = 1/2$, pour $y = u = v = 0$ on obtient $f(x) = 1/2$ pour tout x : f est constante égale à $1/2$ (ceci est effectivement une solution de l'équation initiale).

Supposons donc désormais $f(0) = 0$. Pour $x = y = u = 1$ et $v = 0$, on obtient $2f(1)^2 = 2f(1)$, donc $f(1) = 0$ ou 1. Si $f(1) = 0$, le choix $y = 0$ et $u = v = 1$ donne $f(x) = 0$ pour tout x : f est constante égale à 0. Une telle fonction est bien solution.

Nous étant débarrassés de ces solutions évidentes, nous pouvons désormais supposer $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrons par récurrence qu'alors $f(n) = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ce résultat est clairement vérifié pour $n = 0$ ou 1 et supposons-le vrai jusqu'au rang n. Le choix $x = n$, $y = u = v = 1$ permet d'écrire $2(f(n)+1) = f(n-1)+f(n+1)$, d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence $f(n+1) = 2(n^2+1) - (n-1)^2 = (n+1)^2$. Ceci achève la récurrence.

De plus f est paire : pour $x = u = 0$ et $v = 1$ on obtient $f(y) = f(-y)$. Ainsi $f(n) = n^2$ sur $\mathbb{Z}$.

Pour $y = v = 0$ on obtient la multiplicativité de f : $f(x)f(u) = f(xu)$. Ceci permet d'affirmer $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{Q}$: si p et q sont des entiers ($q \neq 0$), $f(p/q)f(q) = f(p)$, donc $f(p/q) = f(p)/f(q) = (p/q)^2$.

Pour étendre la relation $f(x) = x^2$ à $\mathbb{R}$, utilisons la monotonie de f. Plus précisément, par multiplicativité de f, si $x \geqslant 0$ alors $f(x) \geqslant 0$: $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$. Ainsi, pour $x = v = \sqrt{t}$ ($t \geqslant 0$) et $y = u = \sqrt{\varepsilon}$ ($\varepsilon \geqslant 0$), on obtient $f(t+\varepsilon) - f(t) = f(\varepsilon) + 2f(\sqrt{t\varepsilon}) \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'ensemble des rationnels étant dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ il existe une suite $(r_n^+)_{n\geqslant 0}$ de rationnels croissante tendant vers x et de même une suite $(r_n^-)_{n\geqslant 0}$ de rationnels décroissante tendant vers x. Par monotonie de f, on a $(r_n^-)^2 = f(r_n^+) \leqslant f(x) \leqslant f(r_n^-) = (r_n^-)^2$. Par passage à la limite, on obtient $f(x) = x^2$. Par parité de f, on a donc

$$f(x) = x^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Une telle fonction vérifie bien l'équation fonctionnelle initiale.

Remarque. La solution non évidente obtenue,

$$(x^2+y^2)(y^2+v^2) = (xu-yv)^2 + (xv-yu)^2,$$

est appelée « identité de Lagrange[1] » (ou parfois « de Fibonacci[2] ») . Elle est un premier pas dans la caractérisation des nombres somme de 2 carrés d'entiers.

De même l'identité de Legendre[3]

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)&(x^2+y^2+z^2+t^2)\\ &= (ax+by+cz+dt)^2 + (ay+bx+ct-dz)^2\\ &\qquad + (az-bt+cx+dy)^2 + (at+bz-cy+dx)^2\end{aligned}$$

permet de démontrer que tout entier positif n s'écrit comme somme de quatre carrés d'entiers, en se restreignant au cas où n est premier.

1. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mathématicien français.
2. Leonardo Pisano Fibonacci (env. 1170-1250), mathématicien italien.
3. Adrien-Marie Legendre (1752-1833), mathématicien français.

6. Géométrie et combinatoire

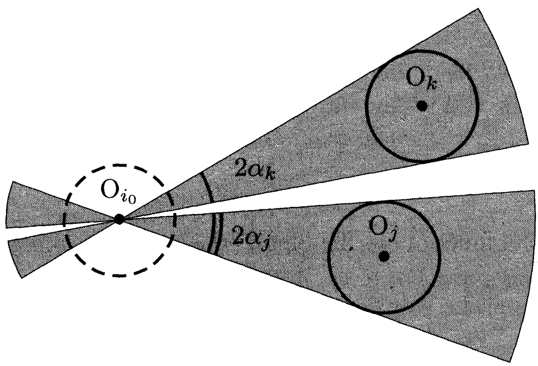
Soient n cercles de rayon 1 dessinés sur le plan, tels qu'aucune droite ne rencontre plus de deux d'entre eux. Leurs centres sont notés $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Démontrer que

$$\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Solution

1re majoration

Prenons un point O_{i_0} particulier et, pour un cercle unité de centre O_j ($j \neq i_0$), grisons une partie du plan comme sur le schéma ci-dessous.



Si les cercles O_{i_0}, O_j, O_k vérifient l'énoncé, nos parties grisées ne doivent pas se chevaucher. On a ainsi $\sum_{j\neq i_0} 4\alpha_j \leqslant 2\pi$. Or $\alpha_j \geqslant \sin\alpha_j = 1/O_{i_0}O_j$. On a donc

$$\sum_{j\neq i_0} \frac{1}{O_{i_0}O_j} \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

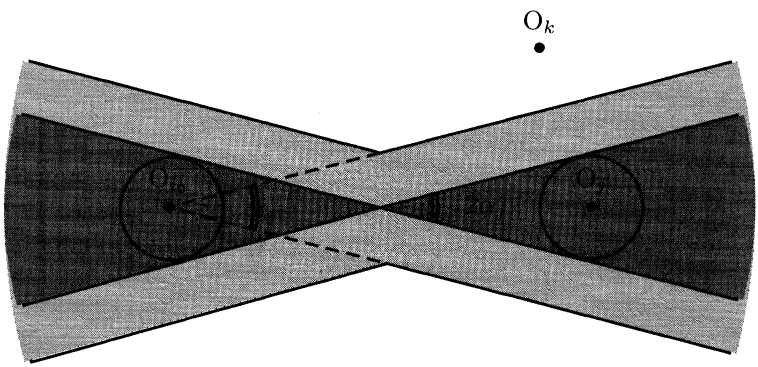
En sommant cette relation pour tous les indices i_0, on obtient

$$\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{n\pi}{4}.$$

Ceci n'est pas suffisant, on comprend que l'on peut notamment améliorer le résultat pour les O_{i_0} appartenant à l'enveloppe convexe de l'ensemble de nos points, comme dans la majoration suivante.

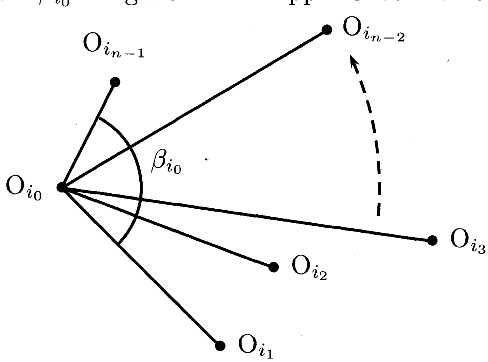
2^{e} majoration

Sur le schéma ci-dessous, si les cercles unités de centres O_{i_0}, O_j et O_k vérifient l'énoncé alors le cercle de centre O_k ne coupe pas la zone gris foncé, donc O_k est en dehors de la zone grise.



On a donc $\widehat{O_kO_{i_0}O_j} \geqslant \alpha_j \geqslant \sin\alpha_j = 2/O_{i_0}O_j$. En raisonnant de même à partir des cercles de centres O_{i_0} et O_k, on en déduit que $\widehat{O_kO_{i_0}O_j} \geqslant 2/\min(O_{i_0}O_j, O_{i_0}O_k)$.

Considérons un point O_{i_0} appartenant à l'enveloppe convexe des O_i et notons alors β_{i_0} l'angle de l'enveloppe convexe en ce point.



On a $\beta_{i_0} = \sum_{j=1}^{n-2} O_{i_j}\widehat{O_{i_0}O}_{i_{j+1}} \geqslant 2\sum_{j=1}^{n-2} 1/\min(O_{i_0}O_{i_j}, O_{i_0}O_{i_{j+1}}) \geqslant 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} 1/O_{i_0}O_{i_j} - 1/O_{i_0}O_{i_0^m}\right)$, où l'on a noté i_0^m l'indice j pour lequel $O_{i_0}O_j$ est maximal. Ainsi

$$\sum_{j\neq i_0} \frac{1}{O_{i_0}O_j} \leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_{i_0} + \frac{1}{O_{i_0}O_{i_0^m}}\right). \tag{2}$$

Conclusion

Si l'enveloppe convexe comporte k sommets, alors la somme de ses angles au sommet est $(k-2)\pi$. Ainsi, si on utilise (1) pour tous les sommets à l'intérieur de l'enveloppe convexe (ensemble d'indices $\mathcal{I}$) et (2) pour ceux appartenant à l'enveloppe convexe (ensemble d'indices $\mathcal{E}$), on obtient

$$\sum_{i<j} \frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_j} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_j} + \sum_{i\in\mathcal{E}}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_j}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{S}_{\mathcal{I}} + \mathrm{S}_{\mathcal{E}}).$$

Utilisons (1) pour majorer $\mathrm{S}_{\mathcal{I}}$:

$$\mathrm{S}_{\mathcal{I}} \leqslant \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-k)\pi}{2}. \tag{3}$$

Intéressons-nous désormais à $\mathrm{S}_{\mathcal{E}}$, en le majorant grâce à (2) et en remarquant que la somme des angles d'un polygone convexe à k sommets est $(k-2)\pi$:

$$\mathrm{S}_{\mathcal{E}} \leqslant \sum_{i\in\mathrm{S}_{\mathcal{E}}} \frac{1}{2}\left(\beta_i + \frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_{i^m}}\right) = \frac{(k-2)\pi}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{E}}\frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_{i^m}}.$$

Mais on peut majorer ce dernier terme simplement, car $\mathrm{O}_i\mathrm{O}_{i^m}$ est plus grand que tous les $\mathrm{O}_i\mathrm{O}_j$:

$$\sum_{i\in\mathcal{E}}\frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_{i^m}} \leqslant \sum_{i\in\mathcal{E}}\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\mathrm{O}_i\mathrm{O}_j} = \frac{1}{n-1}\mathrm{S}_{\mathcal{E}}.$$

En l'injectant dans la relation précédente, on en déduit que

$$\mathrm{S}_{\mathcal{E}} \leqslant \frac{(k-2)\pi}{2}\frac{2n-2}{2n-3} \leqslant \frac{(k-1)\pi}{2}. \tag{4}$$

La sommation de (3) et (4) donne alors le résultat voulu.

Tokyo (Japon)

2003

1. Combinatoire

Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ ayant exactement 101 éléments.

Montrer qu'il existe des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ dans S tels que les ensembles

$$\mathcal{A}_j = \{x + t_j \mid x \in \mathcal{A}\}, \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, 100,$$

soient deux à deux disjoints.

Solution

On écrit $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{101}\}$. On a $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \neq \varnothing$ si et seulement si il existe $(k_i, k_j) \in [\![1, 101]\!]^2$ tel que $|t_i - t_j| = |a_{k_i} - a_{k_j}|$. Ainsi il suffit de construire les t_i de telle sorte que les écarts entre deux d'entre eux soient distincts des écarts entre deux a_i (on a au maximum 101×100 tels écarts).

On choisit $t_1 = 1$, ce qui interdit au maximum $1 + 101 \times 100$ positions pour des t_i ultérieurs (la place de t_1 et celles correspondant aux 101×100 écarts possibles). On récidive pour t_2, etc. On peut donc caser au moins $n + 1$ entiers t_i distincts où n vérifie

$$n(1 + 101 \times 100) + 1 \leqslant 1000000.$$

On peut donc trouver au moins 100 entiers t_i vérifiant les conditions de l'énoncé.

Remarque. Cet exercice peut aussi être perçu comme une application du théorème de Turán[1], en théorie des graphes.

---

1. Paul Turán (1910-1976), mathématicien hongrois.

En effet, considérons un graphe à 10^6 sommets, notés $1, 2, \ldots, 10^6$. Lions les sommets i et j par une arête si les ensembles $\mathcal{A} + i$ et $\mathcal{A} + j$ sont disjoints. Alors un sommet i est lié à j si et seulement si $i - j$ n'est pas de la forme $a - a'$, où a et a' sont distincts dans $\mathcal{A}$. Mais il existe au plus 101×100 telles différences $a - a'$, donc un sommet a au moins $10^6 - 101 \times 100 - 1$ voisins dans le graphe. Il existe donc au moins $10^6(10^6 - 101 \times 100 - 1)/2$ arêtes dans le graphe.

Or le problème demande exactement de prouver que le graphe possède un sous-graphe complet de 100 sommets. Ceci est vrai d'après le théorème de Turán : « un graphe de n sommets possède un sous-graphe complet de k sommets dès que le nombre d'arêtes excède $\frac{k-2}{k-1}\frac{n^2-r^2}{2} + \frac{r(r-1)}{2}$, où r est le reste de n dans la division euclidienne par $k-1$ ». Cette condition est ici vérifiée, d'où une nouvelle solution de notre problème.

2. Une équation diophantienne

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

soit un entier strictement positif.

Solution

On peut écrire

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k \Leftrightarrow a^2 - (2kb^2)a + k(b^3 - 1) = 0.$$

On a donc une équation du second degré dont les solutions sont $a = kb^2 \pm \sqrt{\Delta}$ avec $\Delta = (kb^2)^2 - k(b^3 - 1)$.

Si $b = 1$ alors tout entier strictement positif pair a convient. Sinon Δ (qui doit être égal à un carré parfait) peut s'écrire sous la forme $(kb^2 - n)^2$ avec $n \in [\![1, kb^2]\!]$. L'équation $\Delta = (kb^2)^2 - k(b^3 - 1)$ s'écrit désormais

$$2n - b = \frac{n^2 - k}{kb^2}. \qquad (1)$$

On souhaiterait démontrer que les termes de (1) sont nuls. Il suffit pour cela de vérifier que $|n^2 - k| < kb^2$, c'est-à-dire $k(1 - b^2) < n^2 < k(1 + b^2)$. L'inégalité de gauche est vraie car $b > 1$.

Si on note $\mathrm{P}(x) = (x - kb^2)^2$, alors $\mathrm{P}\left(\sqrt{k(1+b^2)}\right) < \Delta = \mathrm{P}(n)$ (il suffit pour voir cela de vérifier que $\mathrm{P}\left(\sqrt{kb^2}\right) < \Delta$, ce qui se fait sans difficulté et est dû à $k \geqslant 1$). Ainsi $n < \sqrt{k(1+b^2)}$.

Nécessairement les deux termes de (1) sont donc nuls ; $b = 2n$ et $k = n^2$ conduisent alors (par $a = kb^2 \pm (kb^2 - n)$) à $a = 8n^4 - n$ ou $a = n$. Réciproquement, de tels couples sont effectivement des solutions.

En résumé, on a donc

$$\mathscr{S} = \left\{(2n, 1), (n, 2n), (8n^4 - n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

3. Géométrie repoussante

On se donne un hexagone convexe dans lequel deux côtés opposés ont la propriété suivante : la distance entre leurs milieux est $\sqrt{3}/2$ fois la somme de leurs longueurs.

Montrer que tous les angles de cet hexagone sont égaux.

Remarque : un hexagone convexe ABCDEF a trois paires de côtés opposés, (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Solution

Cet exercice est affreux (on le sait dès la lecture de l'énoncé) mais aussi affreusement difficile (ça, vous ne le saviez peut-être pas encore).

1re étape : les côtés opposés sont parallèles

On nomme M le milieu de [AB] et N celui de [DE]. Alors l'égalité de l'énoncé suivie d'une inégalité triangulaire donne

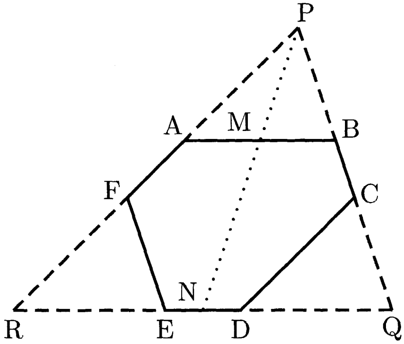
$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}}| = \sqrt{3}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{DE}}|\right) \geqslant \sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BE}}|,$$

avec égalité si et seulement si (AB) et (ED) sont parallèles. Cette inégalité au carré s'écrit $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2 \leqslant 4\overrightarrow{\mathrm{AD}}.\overrightarrow{\mathrm{BE}}$.

On a le même type d'inégalité pour les deux autres paires de côtés et en sommant ces trois inégalités on obtient $|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}}|^2 \leqslant 0$. On est donc forcément dans le cas d'égalité tout au long du raisonnement donc tous les côtés opposés sont parallèles.

2e étape : le plus dur est à venir !

Nommons M et N les milieux respectifs de [AB] et [DE]. On définit P comme l'intersection de (AF) et (BC) et de façon similaire Q et R (ces trois points existent bien car ABCDEF est convexe et les côtés opposés parallèles).



L'étape précédente a montré que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. En soustrayant cette relation à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$ on obtient $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{BP}$. Les deux membre étant des vecteurs de directions distinctes, ils sont nuls, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BP}$.

En renouvelant ce raisonnement en Q et en R on obtient ainsi que les triangles ABP, CDQ et EFR sont isométriques.

On en déduit facilement que P, M et N sont alignés, donc par le théorème de Thalès[2]

$$\frac{PM}{MN} = \frac{AB}{RQ - AB} = \frac{AB}{AB + ED},$$

d'où, en utilisant de nouveau l'hypothèse,

$$\frac{PM}{AB} = \frac{MN}{AB + ED} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

On peut renouveler ce raisonnement en Q et R et l'on voit donc que le triangle PAB a la propriété suivante : le rapport entre une médiane et le côté qui lui est associé est $\sqrt{3}/2$. Montrons qu'il s'agit alors d'un triangle équilatéral et l'on aura terminé : les angles en A et en B vaudront 60° et de même pour les autres sommets.

La relation (1) s'écrit $PM^2 = 3/4\ AB^2$. Or par l'égalité de la médiane on a $PM^2 = 1/2\ (PA^2 + PB^2) - 1/4\ AB^2$, d'où $PA^2 + PB^2 - 2AB^2 = 0$; de même $PA^2 + AB^2 - 2PB^2 = 0$ et $AB^2 + PB^2 - 2PA^2 = 0$, d'où $PA = PB = AB$ et on a le résultat voulu.

2. Thalès de Milet (env. 625-547 av. J.-C.), mathématicien et philosophe grec.

4. Savoir manier la loi des sinus...

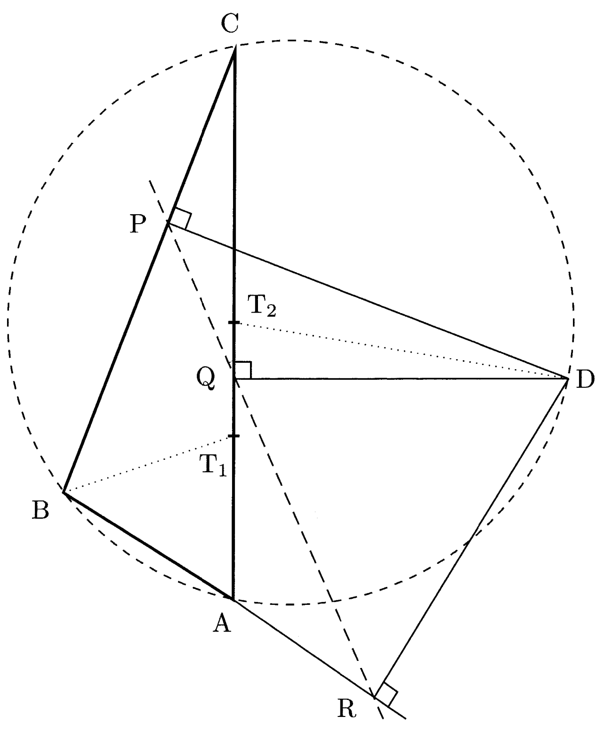
Soit ABCD est un quadrilatère convexe inscriptible . Soient P, Q et R les pieds des perpendiculaires issues de D respectivement sur les côtés (BC), (CA) et (AB).

Montrer que PQ = QR si et seulement si les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur (AC).

Solution

Remarquons que la première étape de notre raisonnement est aussi une application directe du théorème de la bissectrice, présenté en 1991 n°1.

Nommons respectivement T_1 et T_2 les intersections des bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ avec (AC).



1[re] étape

La loi des sinus dans les triangles BCT_1 puis BAT_1 permet d'écrire

$$\frac{CT_1}{\sin\widehat{CBT_1}} = \frac{CB}{\sin\widehat{CT_1B}} = \frac{CB}{\sin\widehat{AT_1B}} = CB\frac{AT_1}{AB\sin\widehat{ABT_1}}.$$

Comme les angles $\widehat{CBT_1}$ et $\widehat{ABT_1}$ sont égaux, on a donc $CT_1/AT_1 = CB/AB$, puis de même $CT_2/AT_2 = CD/AD$. Or $T_1 = T_2$ si et seulement si $CT_1/AT_1 = CT_2/AT_2$, donc

les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur (AC)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AD}. \qquad (1)$$

2[e] étape

Le segment [CD] est un diamètre du cercle passant par C, D, P et Q, donc $PQ/\sin\widehat{PCQ} = CD$. De même $QR/\sin\widehat{QAR} = AD$. Ainsi, en utilisant encore la loi des sinus dans ABC,

$$\frac{CD}{AD} = \frac{PQ}{QR}\frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{BCA}} = \frac{PQ}{QR}\frac{CB}{AB}.$$

Ainsi

$$PQ = QR \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AD}. \qquad (2)$$

Les équivalences (1) et (2) permettent de conclure.

1[re] remarque. Nous n'avons pas utilisé dans cette démonstration la cocyclicité des points A, B, C et D.

2[e] remarque. Les habitués auront remarqué que les points P, Q et R sont alignés, sur une droite appelée droite de Simson[3](en pointillés sur le dessin). On a en fait le résultat suivant :

P, Q et R sont alignés $\Leftrightarrow$ A, B, C et D sont cocycliques.

On peut en effet démontrer dans le cas général, avec des angles orientés, que, modulo π,

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RQ}).$$

3. Robert Simson (1687-1768), mathématicien écossais.

5. Une inégalité difficile

Soit n un entier strictement positif et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

1. **Démontrer que**

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

2. **Démontrer qu'il y a égalité si et seulement si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une suite arithmétique.**

Solution

Cet exercice est une des inégalités les plus difficiles tombées aux Olympiades internationales.

Il faut avant toute chose comprendre la deuxième question comme une indication pour la première. En fait, comme presque toujours, ici le cas d'égalité découlera de la démonstration de l'inégalité.

Une autre indication cachée peut apparaître : l'énoncé ordonne les x_i alors que l'inégalité ne fait pas apparaître un tel classement. Sans doute faut-il donc casser cette belle symétrie apparente de nos variables.

Voici la bonne idée à avoir : quitte à décaler les x_i en les remplaçant par $x_i - c$, où c est une constante (ce qui laisse les deux membres de l'inégalité invariants), on peut supposer que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Ainsi nous pouvons exprimer le second membre de notre inégalité sous une forme plus facilement utilisable,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j$$

$$= 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Intéressons-nous désormais au premier terme de l'inégalité, que l'on souhaite expliciter :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(x_i - x_j) + \sum_{j=i+1}^{n}(x_j - x_i)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left((i-1)x_i - \sum_{j=1}^{i-1}x_j + \sum_{i+1}^{n}x_j - (n-i)x_i\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i$$

L'inégalité à démontrer s'écrit désormais

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \leqslant \frac{n^2-1}{3}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right).$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz[4], on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right). \tag{1}$$

Sachant que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ et $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ (comme le montre une récurrence facile), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

On a donc exactement le résultat souhaité.

Concernant le cas d'égalité, celui-ci ne se produit que si l'on a égalité dans (1), c'est-à-dire dès que les x_i sont proportionnels aux $2i-n-1$, donc en progression arithmétique. Réciproquement, dans ce dernier cas on a bien égalité.

4. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.
Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.

6. Arithmétique très difficile

> **Soit p un nombre premier. Démontrer qu'il existe un nombre premier q tel que pour tout entier n, le nombre $n^p - p$ n'est pas divisible par q.**

Solution

Ce qui suit ne s'invente pas, ou très difficilement. Juste une petite piste : pour sortir du chapeau le nombre premier q demandé, on n'a pas beaucoup de solutions : on pourrait certes utiliser le théorème de Dirichlet[5] et chercher q sous la forme $np + a$ avec $a \wedge p = 1$, mais les Olympiades internationales ne requièrent jamais de connaissances aussi poussées. L'unique moyen est alors de choisir q comme diviseur premier d'une quantité qu'il reste à pressentir...

Pour $p = 2$ il suffit de prendre $q = 5$. On peut donc désormais supposer que p est impair.

Remarquons que $p^p - 1 = (p-1)(1 + p + \cdots + p^{p-1})$. Ce dernier facteur est impair et non congru à 1 modulo p^2. Il possède donc un facteur premier q impair non congru à 1 modulo p^2. Montrons alors que ce nombre premier convient.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un entier n tel que $n^p \equiv p\ [q]$. Alors $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1\ [q]$. De plus cette dernière relation montre que q ne divise pas n. Le petit théorème de Fermat[6] implique donc que $n^{q-1} \equiv 1\ [q]$.

On a donc $n^{(q-1)\wedge p^2} \equiv 1\ [q]$. Or $(q-1) \wedge p^2 = 1, p$ ou p^2, ce dernier cas étant exclu car q n'est pas congru à 1 modulo p^2. Dans les deux cas restant on a $n^p \equiv 1\ [q]$, donc comme $n^p \equiv p\ [q]$ on a aussi $p \equiv 1\ [q]$. Ainsi $1+p+\cdots+p^{p-1} \equiv p\ [q]$. Or q est un diviseur de $1+p+\cdots+p^{p-1}$, donc $q \mid p$ si bien que $p = q$. Ceci est impossible car $q \mid p^p - 1$. D'où la contradiction.

Remarque. Le théorème de densité de Chebotarev[7]. Le nombre premier q vérifie l'énoncé si et seulement si q demeure premier dans $\mathrm{K} = \mathbb{Q}[\sqrt[p]{p}]$. En appliquant le théorème de densité de Chebotarev à la clôture galoisienne de K, nous voyons que l'ensemble des q satisfaisant

5. Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), mathématicien allemand.
6. Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.
7. Nikolay Grigorievich Chebotarev (1894-1947), mathématicien russe.

cette condition a une densité $1/p$. En particulier cet ensemble n'est pas vide, ce qui répond à l'énoncé, de façon certes plus obscure mais plus fondamentale.

Athènes (Grèce)

2004

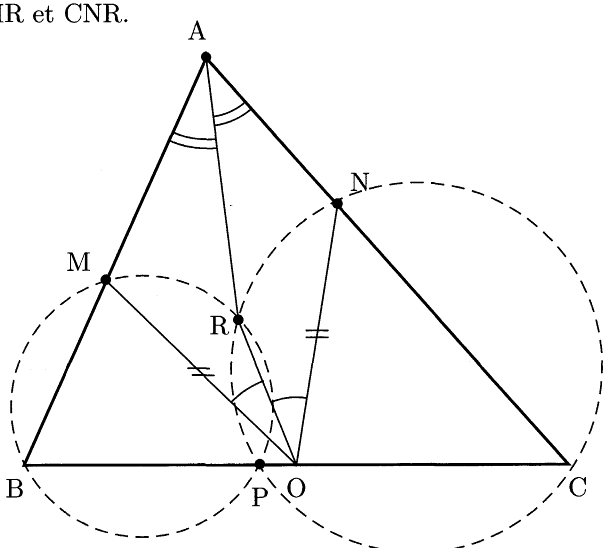
1. Géométrie

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, avec $AB \neq AC$. Le cercle de diamètre [BC] coupe les côtés [AB] et [AC] respectivement en M et N. On désigne par O le milieu de [BC]. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se rencontrent en R.

Prouver que les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR ont un point commun qui appartient au côté [BC].

Solution

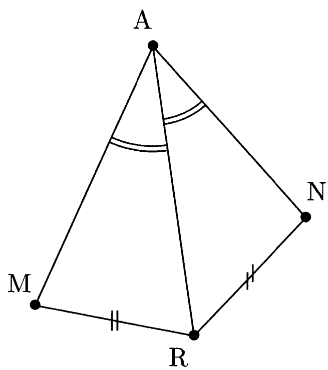
Soit P l'intersection (autre que R) des cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR.



On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} \in [\mathrm{BC}] &\Leftrightarrow \widehat{\mathrm{BPR}} + \widehat{\mathrm{RPC}} = \pi \\
&\Leftrightarrow (\pi - \widehat{\mathrm{BMR}}) + (\pi - \widehat{\mathrm{CNR}}) = \pi \\
&\Leftrightarrow \widehat{\mathrm{AMR}} + \widehat{\mathrm{ANR}} = \pi \\
\mathrm{P} \in [\mathrm{BC}] &\Leftrightarrow \text{A, M, R et N sont cocycliques.}
\end{aligned}$$

Montrons donc que ces points sont cocycliques. Le point M est le symétrique de N par rapport à (OR), car OM = ON et $\widehat{\mathrm{MOR}} = \widehat{\mathrm{NOR}}$. On a donc MR = NR. On est donc dans la situation ci-dessous.



La loi des sinus montre que

$$\sin \widehat{\mathrm{AMR}} = \mathrm{AR}\frac{\sin \widehat{\mathrm{MAR}}}{\mathrm{MR}} = \mathrm{AR}\frac{\sin \widehat{\mathrm{NAR}}}{\mathrm{NR}} = \sin \widehat{\mathrm{ANR}}.$$

On est donc dans un des deux cas suivants :

- si $\widehat{\mathrm{AMR}} = \pi - \widehat{\mathrm{ANR}}$, alors les points A, M, R et N sont cocycliques ;
- si $\widehat{\mathrm{AMR}} = \widehat{\mathrm{ANR}}$, alors AM = AN. Comme OM = ON, les bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{MAN}}$ et $\widehat{\mathrm{MON}}$ sont identiques, ce qui contredit l'énoncé : celui-ci affirme que R est leur unique point de rencontre (ce qui est vrai, car AB $\neq$ AC).

On est donc dans le premier de nos deux cas, ce qui conclut la démonstration.

Remarque. On admet que le point P existe bien, tout comme on admet que le point R existe, ce qui n'est pas complexe mais très ingrat à démontrer.

2. Équation fonctionnelle pour des polynômes

Déterminer tous les polynômes f à coefficients réels tels que, pour tous réels a, b, c vérifiant $ab + bc + ca = 0$, on ait

$$\boldsymbol{f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c).}$$

Solution

Cherchons des triplets (a, b, c) tels que $ab + bc + ca = 0$ sous la forme $(x, \lambda x, \mu x)$ et regardons tout simplement les informations que nous en retirons.

Pour le triplet $(x, -2x, -2x)$, l'équation de notre énoncé s'écrit $f(3x) + f(0) = f(-3x)$. Pour $x = 0$ on a donc $f(0) = 0$ puis, pour $y = x/3$, $f(y) = f(-y)$. La fonction f est donc paire.

Pour le triplet $(x, 2x, -2x/3)$, on a

$$f(-x) + f(8x/3) + f(-5x/3) = 2f(7x/3). \tag{1}$$

Soit $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, et $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$. L'égalité (1) impose alors $(-1)^k + (8/3)^k + (-5/3)^k = 2 \times (7/3)^k$. Comme f est paire, k est pair donc

$$8^k + 5^k + 3^k = 2 \times 7^k. \tag{2}$$

Or, pour k suffisamment grand, le terme de gauche dépasse celui de droite. Plus précisément, le développement par le binôme de Newton permet d'écrire, pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$. On a donc, pour $k \geqslant 6$, $(8/7)^k \geqslant (1 + 1/7)^6 \geqslant 1 + 6/7 + 15/49 > 2$

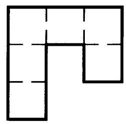
Il ne reste donc comme possibilité que $k = 0$, $k = 2$ et $k = 4$. Seules ces deux dernières solutions vérifient (2), f est donc de la forme

$$f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2, \ (a_2, a_4) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, de tels polynômes vérifient bien les conditions de l'énoncé.

3. Paver un rectangle avec des « crochets »

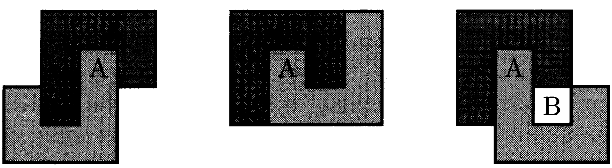
Un « crochet » est une figure formée de 6 carrés unités, comme indiqué sur le schéma, ou toute autre figure obtenue par rotation ou réflexion de ce dessin.



Déterminer tous les entiers m et n pour lesquels le rectangle $m \times n$ peut être entièrement recouvert par des crochets, sans chevauchement ni débordement.

Solution

Si nos crochets forment une partition du rectangle $m \times n$, alors sur le schéma suivant un crochet doit recouvrir le point A. Ceci impose, pour le crochet clair, l'un de ces trois cas.



(1) (2) (3)

Le point B devant être recouvert par un crochet, le cas (3) est exclu. Notre rectangle est donc en réalité recouvert par des pièces de type (1) ou (2), d'aire 12, donc $m \times n$ doit être un multiple de 12. Ceci nous conduit aux deux cas suivants.

1^er^ cas : si un des côtés est divisible par 4.

Quitte à permuter m et n, on est alors dans au moins un des cas suivants.

- Si $m = 3m'$ et $n = 4n'$, alors on n'a aucun mal à recouvrir notre rectangle avec des pièces du type (2) : il s'agit d'un pavage classique, avec m' lignes dans lesquelles on met n' pièces.

- Si $m = 12m'$, on ne peut pas recouvrir notre rectangle pour $n = 1$ ou 2 (nos pièces sont trop larges), ni pour $n = 5$ ou 6 (les pièces recouvrant deux des coins les plus proches sont distinctes et se chevauchent).

  En revanche, on peut avoir un tel recouvrement pour $n \geqslant 7$. En effet n s'écrit alors sous la forme $4a + 3b$, $(a, b) \in \mathbb{N}^2$: c'est vrai pour $n = 7 = 3 + 4$ et sinon n, $n - 4$ ou $n - 8$ est divisible par 3 (le lecteur pourra trouver une étude plus générale de cette question dans l'exercice 1983 n°3). Ainsi on peut diviser notre rectangle en deux rectangles de tailles $12m' \times 4a$ et $12m' \times 3b$, pour lesquels un tel recouvrement est possible d'après le cas précédent.

2e cas : si aucun des côtés n'est divisible par 4.

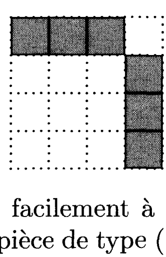
Nous pouvons supposer ici $m = 4m' + 2$ et $n = 4n' + 2$, donc $mn/12 = (2m' + 1)(2n' + 1)/3$: ceci impose clairement d'avoir un nombre impair de pièces (du type (1) ou (2)). Nous allons démontrer de deux façons distinctes que ce nombre de pièces doit également nécessairement être pair, d'où l'impossibilité de paver notre rectangle avec des crochets.

1re méthode

À chaque case de notre rectangle associons la coordonnée (i, j) ($(1, 1)$ pour la case en bas à gauche). Donnons alors à chacune de ces cases un numéro, 0 ou 1, selon la fonction

$$(i, j) \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } 4 \text{ divise } i \text{ ou } j, \text{ mais pas } i \text{ et } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Ceci revient à noircir les cases selon le motif suivant répété à l'infini depuis le coin en bas à gauche.



Le lecteur vérifiera alors facilement à la main le fait suivant : peu importe son placement, une pièce de type (1) ou (2) recouvre un nombre impair de cases noircies.

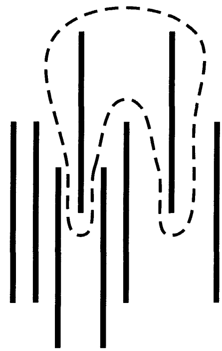
Or le rectangle initial contient un nombre pair de cases noircies, donc on a au total un nombre pair de pièces (du type (1) ou (2)), d'où la contradiction : on a vu que ce nombre doit également être impair.

2e méthode

De même que précédemment, à chaque case de notre rectangle initial associons la coordonnée (i, j) ($(1, 1)$ pour la case en bas à gauche).

Pour une pièce du type (1) ou (2), nous dirons qu'elle est « verticale » s'il existe (i, j) tel que (i, j), $(i, j+1)$, $(i, j+2)$ et $(i, j+3)$ soient des cases de la pièce. Nous dirons naturellement qu'elle est « horizontale » dans le cas contraire.

Toute ligne (j =constante) de cases coupe alors une pièce verticale en 3 cases et une pièce horizontale en 4 cases. Si n_v^j (respectivement n_h^j) désigne le nombre de pièces verticales (respectivement horizontales) sur cette ligne, alors $3n_v^j + 4n_h^j = 4n' + 2$. Ceci impose d'avoir n_v^j pair. À l'aide du facile lemme suivant, on en déduit que le nombre total de pièces verticales est pair.



Lemme (dit « des bâtons »). *Si n bâtons verticaux de même longueur sont tels que toute horizontale coupe un nombre pair d'entre eux, alors le nombre de bâtons est pair.*

Ce lemme se démontre aisément par récurrence sur le nombre n de bâtons : si on enlève tous les bâtons atteignant une ordonnée maximale, alors le nouvel ensemble vérifie encore la propriété et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

En raisonnant de même mais sur les colonnes et non plus sur les lignes, on obtient que le nombre de pièces horizontales est également pair. On a donc en tout un nombre pair de pièces, ce qui constitue la contradiction souhaitée : on a vu que ce nombre doit également être impair.

En résumé, nous avons montré que :

- si un des côtés est divisible par 4, il existe un pavage satisfaisant les conditions de l'énoncé;
- si aucun des côtés n'est divisible par 4, il n'existe pas de pavage satisfaisant les conditions de l'énoncé.

4. Une condition suffisante pour être les côtés d'un triangle

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Soient $t_1, \ldots, t_n$ des réels > 0 tels que

$$n^2 + 1 > (t_1 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Prouver que, pour tous i, j, k distincts dans $[\![1, n]\!]$, les nombres t_i, t_j et t_k sont les côtés d'un triangle.

Solution

Montrons la contraposée : soient i_0, j_0, k_0 distincts dans $[\![1, n]\!]$, tels que t_{i_0}, t_{j_0} et t_{k_0} ne soient pas les côtés d'un triangle. Supposons par exemple que $t_{i_0} + t_{j_0} \leqslant t_{k_0}$. Montrons alors que

$$n^2 + 1 \leqslant (t_1 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

En notant $\mathcal{A}$ l'ensemble des paires d'indices distincts $\{i, j\}$, excepté $\{i_0, k_0\}$ et $\{j_0, k_0\}$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = n + \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{A}} \underbrace{\left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right)}_{(1)} + \underbrace{\frac{t_{i_0}}{t_{k_0}} + \frac{t_{k_0}}{t_{i_0}}}_{(2)} + \underbrace{\frac{t_{j_0}}{t_{k_0}} + \frac{t_{k_0}}{t_{j_0}}}_{(3)}.$$

La fonction $x + 1/x$ décroît sur $]0, 1]$, avec pour de minimum 2, donc :

- $(1) \geqslant 2$;
- $(2) \geqslant t_{i_0}/(t_{i_0} + t_{j_0}) + (t_{i_0} + t_{j_0})/t_{i_0}$;
- $(3) \geqslant t_{j_0}/(t_{i_0} + t_{j_0}) + (t_{i_0} + t_{j_0})/t_{j_0}$.

Ainsi peut-on écrire

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) \geqslant n + (\mathcal{C}_n^2 - 2) \times 2 + \left(\frac{t_{i_0}}{t_{i_0} + t_{j_0}} + \frac{t_{i_0} + t_{j_0}}{t_{i_0}}\right)$$
$$+ \left(\frac{t_{j_0}}{t_{i_0} + t_{j_0}} + \frac{t_{i_0} + t_{j_0}}{t_{j_0}}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) \geqslant n^2 + 1.$$

On a donc démontré le résultat voulu.

5. Difficile géométrie

Dans un quadrilatère convexe ABCD, la diagonale [BD] n'est ni la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ ni celle de l'angle $\widehat{\mathrm{CDA}}$. Soit P un point intérieur au quadrilatère tel que $\widehat{\mathrm{PBC}} = \widehat{\mathrm{DBA}}$ et $\widehat{\mathrm{PDC}} = \widehat{\mathrm{BDA}}$.

Prouver que ABCD est inscriptible si et seulement si AP = CP.

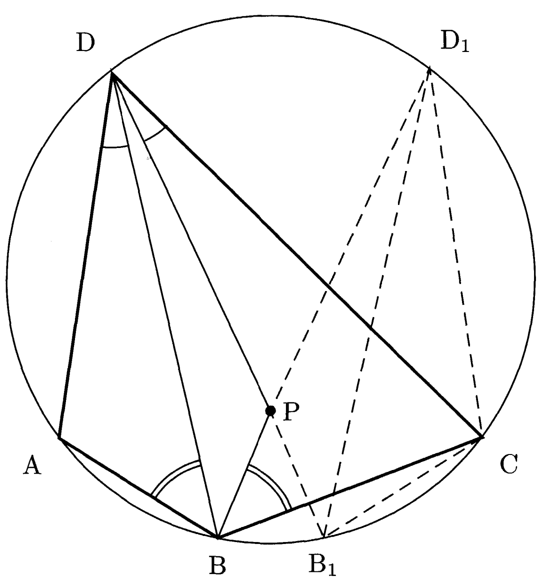
Solution

Remarquons dans ce qui suit que la première étape, sans être élémentaire, est abordable, alors que la deuxième est très difficile.

Notons de plus que la condition « la diagonale [BD] n'est ni la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ ni celle de l'angle $\widehat{\mathrm{CDA}}$ » impose juste d'avoir $\mathrm{P} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{D}$. On pourra donc parler des droites (PB) et (PD) dans la suite.

Si ABCD est inscriptible alors AP = CP

Soient $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABCD, D_1 l'intersection (autre que B) de (BP) et de $\mathcal{C}$ et B_1 l'intersection (autre que D) de (DP) et de $\mathcal{C}$.



On a alors $\widehat{CB_1D_1} = \widehat{CBD_1} = \widehat{ABD}$ et $\widehat{CD_1B_1} = \widehat{CDB_1} = \widehat{ADB}$ (angles inscrits), donc les triangles ABD et CB_1D_1 sont semblables.

Étant inscrits dans un même cercle, ils sont isométriques (pour s'en convaincre si R désigne le rayon de $\mathcal{C}$, on a $AB = 2R\sin\widehat{ADB} = 2R\sin\widehat{CD_1B_1} = CB_1$ et de même $AD = CD_1$, $BD = B_1D_1$).

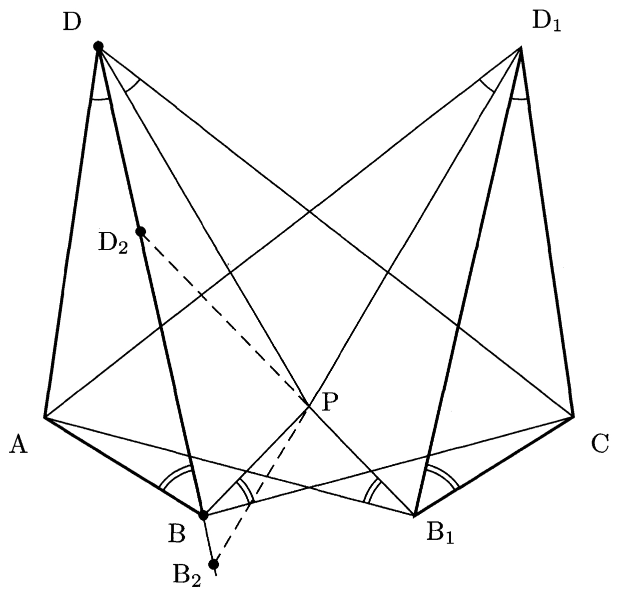
Soit alors s la symétrie par rapport à la médiatrice de [AC]. Alors $Cs(B) = s(A)s(B) = AB$ et $s(B)$ doit appartenir à l'image par s de l'arc limité par A et C, c'est-à-dire lui-même. Le point B_1 est clairement le seul point vérifiant ces deux conditions, donc $s(B) = B_1$. De même $s(D) = D_1$.

Ainsi $s(P) = s((BD_1) \cap (B_1D)) = s((BD_1)) \cap s((B_1D)) = (B_1D) \cap (BD_1) = P$, donc P est sur la médiatrice de [AC] : $AP = CP$.

Si AP = CP alors ABCD est inscriptible

Considérons toujours s, la symétrie par rapport à la médiatrice de [AC]. Notons $B_1 = s(B)$ et $D_1 = s(D)$.

Notons de plus B_2 (respectivement D_2) l'unique point de (BD) tel que A, C, D, D_1 et B_2 (respectivement A, C, B, B_1 et D_2) soient cocycliques.



On a alors $\widehat{B_2D_1A} = \widehat{B_2DA} = \widehat{PDC} = \widehat{PD_1A}$, donc D_1, P et B_2 sont alignés. De même B_1, P et D_2 sont alignés.

Remarquons de plus que B_2 et D_2 sont l'un dans le segment fermé [BD], l'autre en dehors du segment (ouvert)]BD[.

[Pour s'en convaincre : comme PA = PC, P est sur la médiatrice de [AC]. On a donc $\widehat{BPD} = \widehat{B_1PD_1} = \widehat{B_2PD_2}$ car ces deux derniers angles sont opposés. Si on avait à la fois B_2 et D_2 dans le segment ouvert]BD[, alors on aurait $\widehat{BPD} > \widehat{B_2PD_2}$ et s'ils étaient tous deux à l'extérieur on aurait $\widehat{BPD} < \widehat{B_2PD_2}$. Dans les deux cas on obtient donc une absurdité.]

Supposons par exemple que D_2 est sur le segment fermé [BC] et B_2 à l'extérieur du segment ouvert]BC[. On a donc

$$\begin{cases} \widehat{ADC} \leqslant \widehat{AD_2C} \\ \widehat{AB_2C} \leqslant \widehat{ABC} \end{cases}. \tag{1}$$

Or, par cocyclicité de A, B, C et D_2, puis de A, B_2, C et D, on a

$$\widehat{ADC} + \widehat{AB_2C} = \widehat{ABC} + \widehat{AD_2C} \ (= \pi).$$

Les inégalités de (1) sont donc des égalités, donc $B_2 = B$ et $D_2 = D$. Ainsi A, B, C et D sont cocycliques.

6. Les « nombres alternés »

Un entier strictement positif est dit alterné si deux chiffres consécutifs quelconques de son écriture décimale sont de parités différentes.

Trouver tous les entiers $n > 0$ qui possèdent un multiple alterné.

Solution

Remarquons tout d'abord que tout entier n multiple de 20 ne peut pas avoir de multiple alterné : les deux derniers chiffres de tous les multiples de n sont pairs.

Montrons qu'en réalité les multiples de 20 sont les seuls à ne pas avoir de multiple alterné, en prouvant d'abord le lemme suivant.

Lemme. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ possédant un multiple alterné de premier chiffre impair. Si $m \in \mathbb{N}^*$ est premier avec 10, alors mn possède un multiple alterné.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $\mathrm{A} = \overline{a} = \overline{a_n \ldots a_1}$ est un multiple alterné de n avec a_n impair, distinguons alors deux cas selon la parité de a_1.

Si a_1 est pair, considérons alors pour tout entier positif k le nombre alterné

$$\underbrace{\overline{a \ldots a}}_{k \text{ fois}} = (10^n)^k \mathrm{A} + (10^n)^{k-1} \mathrm{A} + \cdots + 10^n \mathrm{A} + \mathrm{A} = \mathrm{A} \frac{(10^n)^{k+1} - 1}{10^n - 1}.$$

Pour k tel que $m \mid ((10^n)^{k+1} - 1)/(10^n - 1)$, on a alors trouvé notre multiple. Or 10^n est premier avec $10^n - 1$ et avec m, donc avec $(10^n - 1)m$. Ainsi d'après le théorème d'Euler[1], pour $k + 1 = \varphi(m(10^n - 1))$, $(10^n)^{k+1} \equiv 1\ [m(10^n - 1)]$, ce qui est le résultat voulu.

Si a_1 est impair, on peut appliquer exactement le même raisonnement en cherchant cette fois notre multiple sous la forme $\overline{a0a0 \ldots a0}$. □

Ce lemme nous conduit naturellement à en énoncer deux autres, relatifs aux puissances de 2 et de 5.

Lemme. *Pour tout n, 5^n possède un multiple alterné de n chiffres.*

DÉMONSTRATION. Montrons ce résultat par récurrence sur n. Il est clairement vrai au rang $n = 1$.

Supposons-le vrai au rang n : $\overline{a_n \ldots a_1} = \mathrm{A} = \lambda 5^n$. Alors $5^{n+1} \mid \overline{a_{n+1} a_n \ldots a_1}$ si et seulement si $5 \mid a_{n+1} 2^n + \lambda$, c'est-à-dire $a_{n+1} \equiv -\lambda 3^n\ [5]$. Or il existe forcément deux éléments a_{n+1} vérifiant cette relation dans $[\![0, 9]\!]$ et ils sont de parité différente (leur différence vaut 5). On peut donc choisir a_{n+1} avec la parité voulue, ce qui achève la récurrence. □

Lemme. *Pour tout n, 2^n possède un multiple alterné A_n de n chiffres, avec n et $\mathrm{A}_n/2^n$ de même parité.*

DÉMONSTRATION. Montrons ce résultat par récurrence sur n. Il est clairement vrai au rang $n = 1$.

Supposons le résultat vrai au rang n : $\mathrm{A}_n = \overline{a_n \ldots a_1} = \lambda 2^n$, avec λ de la parité de n. Alors $2^{n+1} \mid \overline{a_{n+1} a_n \ldots a_1}$ si et seulement si $2 \mid a_{n+1} 5^n + \lambda$, c'est-à-dire $a_{n+1} + \lambda \equiv 0\ [2]$ (1). De plus $\overline{a_{n+1} a_n \ldots a_1}/2^{n+1} = (a_{n+1} 5^n + \lambda)/2 \equiv n + 1\ [2]$ si et seulement si $a_{n+1} + \lambda \equiv 2(n + 1)\ [4]$ (2). Il existe

1. LEONHARD EULER (1707-1783), mathématicien suisse.

clairement une solution a_{n+1} aux équations (1) et (2) : si a_{n+1} vérifie (1), a_{n+1} ou $a_{n+1}+2$ vérifie (2).

De plus le nombre ainsi obtenu est bien alterné : d'après (1) a_{n+1} est de même parité que λ donc par hypothèse de récurrence de même parité que n, donc distincte de celle de a_n (dans un nombre alterné pair a_n et n sont forcément de parité distincte : a_1 est pair, a_2 impair...). $\square$

Forts de ces lemmes nous pouvons conclure l'exercice : posons $n = 2^s 5^t m$ la décomposition de n en facteurs avec $m \wedge 10 = 1$.

- Si $s = t = 0$, le premier lemme montre l'existence d'un multiple alterné de n.

- Si $s = 0$ ou 1 : d'après le deuxième lemme 5^t admet un multiple alterné de dernier chiffre impair, supposé (quitte à lui rajouter 10^t) de premier chiffre impair. D'après le premier lemme, $5^t m$ admet un multiple alterné $\overline{a}$, de dernier chiffre également impair par construction. Le nombre $\overline{a0}$ est alors un multiple alterné de n.

- Si $t = 0$: d'après le troisième lemme 2^s admet un multiple alterné (nécessairement de dernier chiffre pair), que l'on peut supposer (quitte à lui ajouter 10^s) de premier chiffre impair. Alors d'après le premier lemme $n = 2^s m$ admet un multiple alterné.

- Sinon, on a nécessairement $t \geqslant 1$ et $s \geqslant 2$, donc $20 \mid n$, donc n n'admet pas de multiple alterné.

Merida (Mexique)

2005

1. Géométrie

Soit ABC un triangle équilatéral. On se donne six points A', A'', B', B'', C' et C'' vérifiant les conditions suivantes :

- **les points A' et A'' appartiennent au segment $[BC]$;**
- **les points B' et B'' appartiennent au segment $[AC]$;**
- **les points C' et C'' appartiennent au segment $[AB]$;**
- **l'hexagone $A'A''B'B''C'C''$ est convexe;**
- **$A'A'' = A''B' = B'B'' = B''C' = C'C'' = C''A'$;**

Montrer que les droites $(A'B'')$, $(B'C'')$ et $(C'A'')$ sont concourantes.

Solution

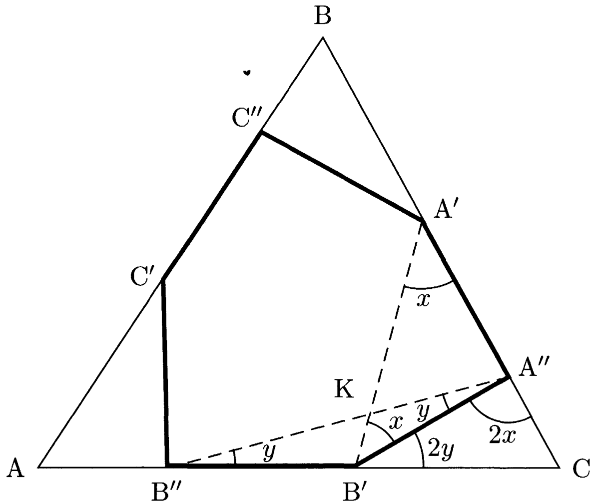
Nous nous intéressons au triangle $A'B'C'$: nous allons démontrer que les droites $(A'B'')$, $(B'C'')$ et $(C'A'')$ sont des bissectrices de ce triangle, elles seront donc concourantes.

Notons :

- K le point d'intersection des droites $(A'B')$ et $(A''B'')$;
- $x = \widehat{A''A'B'}$;
- $y = \widehat{B'B''A''}$.

Comme $A''A' = A''B'$ nous avons aussi :

- $\widehat{A''B'A'} = x$;
- $\widehat{CA''B'} = 180 - \widehat{A'A''B'} = 180 - (180 - 2x) = 2x$.



De même $\widehat{\mathrm{B'A''B''}} = y$ et $\widehat{\mathrm{CB'A''}} = 2y$. En raisonnant dans le triangle CA″B′, on remarque donc que $x + y = 60^\circ$. Ainsi

$$\widehat{\mathrm{KA''C}} + \widehat{\mathrm{KB'C}} = (y + 2x) + (x + 2y) = 3 \times 60 = 180^\circ.$$

Les points K, A″, C et B′ sont donc cocycliques, si bien que $\widehat{\mathrm{KCA''}} = x$: le triangle KA′C est isocèle en K, donc KA′ = KC. De même KB″ = KC, donc le triangle A′KB″ est isocèle en K. Comme son angle au sommet vaut $180 - (x + y) = 120^\circ$, on a $\widehat{\mathrm{B''A'B'}} = 30^\circ$.

De même on démontre facilement que $\widehat{\mathrm{B''A'C'}} = 30^\circ$, donc (A′B″) est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{B'A'C'}}$. Ce raisonnement démontre que les droites (A′B″), (B′C″) et (C′A″) sont des bissectrices du triangle A′B′C′, elles sont donc concourantes.

2. Suites d'entiers dont le n premiers éléments sont un système complet de résidus modulo n

Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'entiers contenant une infinité d'entiers positifs et une infinité d'entiers négatifs. On suppose que, pour tout entier strictement positif n, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est un système complet de résidus modulo n.

Montrer que tout entier est un élément de la suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et qu'aucun entier n'y apparaît deux fois.

Solution

Nous allons démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est constitué de n entiers consécutifs, ce qui est suffisant pour notre exercice : comme il existe une infinité de termes négatifs et une infinité de termes positifs, le résultat en découle immédiatement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord que dans $[\![1, n]\!]$ il n'y a pas deux indices distincts i et j tels que $a_i = a_j$: sinon $a_i \equiv a_j\ [n]$. Notons désormais :

- $a_{\mathrm{M}} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
- $a_m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Soit $k = |a_{\mathrm{M}} - a_m|$. Alors $k \geqslant n-1$: sinon, d'après le principe des tiroirs, il existerait dans $[\![1, n]\!]$ deux indices distincts i et j tels que $a_i = a_j$, ce qui contredirait l'observation précédente. Supposons $k \geqslant n$; alors a_{M} et a_m sont deux termes distincts parmi les k premiers termes de la suite et $a_{\mathrm{M}} \equiv a_m\ [k]$, ce qui est contradictoire. On a donc $|a_{\mathrm{M}} - a_m| = n$, ce qui signifie exactement que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est constitué de n entiers consécutifs.

3. Une inégalité

Soient x, y et z trois nombres réels positifs tels que $xyz \geqslant 1$. On note

$$f(x,y,z) = \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

Montrer que

$$f(x,y,z) + f(y,z,x) + f(z,x,y) \geqslant 0.$$

Solution

La condition $xyz \geqslant 1$ est peu banale : nous sommes plutôt habitués à une contrainte multiplicative du type $xyz = 1$. Voyons si nous pouvons nous y ramener. Pour x, y et z donnés vérifiant les conditions de l'énoncé et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, notons

$$f_\lambda(x,y,z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{\lambda^3 x^5 - x^2}{\lambda^3 x^5 + y^2 + z^2}.$$

Nous nous intéressons à la monotonie de f_λ. En effet, si f_λ avait le bon goût d'être croissante en λ, on pourrait se contenter de la condition $xyz = 1$: si l'énoncé était vérifié pour $xyz = 1$, on aurait alors, pour $\lambda = (xyz)^{-1/3} \leqslant 1$,

$$f_1(x,y,z) + f_1(y,z,x) + f_1(z,x,y) \geqslant f_\lambda(x,y,z) + f_\lambda(y,z,x) + f_\lambda(z,x,y) \geqslant 0,$$

ce qui est le résultat souhaité. Or

$$f_\lambda(x,y,z) = \frac{\lambda^3 x^5 - x^2}{\lambda^3 x^5 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{\lambda^3 x^5 + y^2 + z^2}, \tag{1}$$

et il ne fait donc aucun doute que f_λ est croissante en λ. Nous pouvons donc supposer que $xyz = 1$.

La décomposition (1) nous donne en outre un indice supplémentaire : grâce à elle nous pouvons réécrire l'inégalité voulue sous la forme

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} + \frac{1}{y^5+z^2+x^2} + \frac{1}{z^5+x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

Pour casser l'affreuse dissymétrie des termes du type $x^5 + y^2 + z^2$, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz[1] :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x^{5/2} \cdot x^{-1/2} + y \cdot y + z \cdot z \\ &\leqslant (x^5+y^2+z^2)^{1/2} \left(\frac{1}{x} + y^2 + z^2\right)^{1/2} \\ x^2+y^2+z^2 &\leqslant (x^5+y^2+z^2)^{1/2} \left(yz + y^2 + z^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

car $1/x = yz$. On a donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^5+y^2+z^2} + \frac{1}{y^5+z^2+x^2} + \frac{1}{z^5+x^2+y^2} \\ &\qquad \leqslant \frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{zx+z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{xy+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ &\qquad = \frac{2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{yz+zx+xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ &\qquad \leqslant \frac{3}{x^2+y^2+z^2}, \end{aligned}$$

1. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français. Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand.

car $yz + zx + xy \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ comme le montre l'inégalité du réordonnement (cf. 1978 n°5) ou la manipulation $(x^2 + y^2 + z^2) - (yz + zx + xy) = 1/2\ \left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right)$. Nous avons donc exactement démontré (2), ce qui conclut l'exercice.

4. Arithmétique

Déterminer tous les entiers strictement positifs premiers avec tous les nombres de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Il nous suffit ici de connaître l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres premiers qui sont premiers avec tous les $2^n + 3^n + 6^n - 1$: les nombres recherchés dans l'énoncé seront alors exactement les produits d'un nombre fini d'élément de $\mathcal{E}$.

Tout d'abord, $2 \notin \mathcal{E}$ car $2 + 3 + 6 - 1 \equiv 0\ [2]$. De même $3 \notin \mathcal{E}$ car $2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 \equiv 0\ [3]$. Soit donc désormais p un nombre premier distinct de 2 et 3. D'après de petit théorème de Fermat[2], comme p est premier avec 2, 3 et 6, on peut écrire

$$\begin{aligned} 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) &\equiv 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \\ &\equiv 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 - 6 \\ 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) &\equiv 0\ [p]. \end{aligned}$$

Comme p est premier avec 6, on a donc $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0\ [p]$. On peut conclure que $p \notin \mathcal{E}$. Le seul entier strictement positif premier avec tous les nombres de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) est donc 1.

2. Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.

5. Géométrie : autour des cercles de Miquel

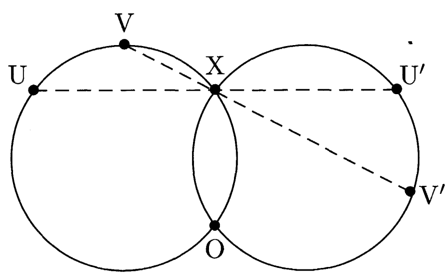
Soit ABCD un quadrilatère tel que BC = DA et (BC) non parallèle à (DA). Soient E et F deux points variables situés respectivement sur les côtés [BC] et [DA] tels que BE = DF. Les droites (AC) et (BD) se coupent en P, les droites (BD) et (EF) en Q et les droites (EF) et (AC) en R.

Montrer que, lorsque les points E et F varient, les cercles circonscrits aux triangles PQR passent par un même point fixe, distinct de P.

Solution

L'étude de quelques cas particuliers (tels que A = B) doivent permettre au candidat de deviner le fait suivant : le second point d'intersection cherché est l'intersection des médiatrices de [BD] et [AC]. Nommons donc O ce point et énonçons le lemme suivant, fondamental.

Lemme. *Soit* $\mathscr{R}_{\mathrm{O}}$ *une rotation de centre* O, U *et* V *deux points quelconques,* $\mathrm{U}' = \mathscr{R}_{\mathrm{O}}(\mathrm{U})$, $\mathrm{V}' = \mathscr{R}_{\mathrm{O}}(\mathrm{V})$ *et* $\mathrm{P} = (\mathrm{UU}') \cap (\mathrm{VV}')$. *Alors les points* U, V, O *et* P *sont cocycliques.*

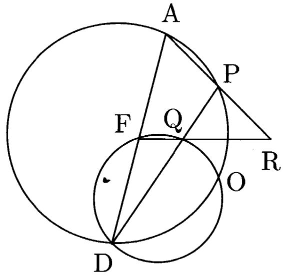


Démonstration. Nommons X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles OUV et OU′V′ (éventuellement X = O, ce qui n'est pas gênant). Alors $\widehat{\mathrm{U'XU}} = \widehat{\mathrm{U'XO}} + \widehat{\mathrm{OXU}} = (180 - \widehat{\mathrm{U'V'O}}) + \widehat{\mathrm{UVO}} = 180$, donc $\mathrm{X} \in (\mathrm{UU}')$. De même $\mathrm{X} \in (\mathrm{VV}')$, si bien que X = P, ce qui conclut notre démonstration. □

Prenons ici pour $\mathscr{R}$ la rotation qui envoie A sur C et D sur B. Son centre est bien O, le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [BD]. La rotation $\mathscr{R}$ envoie également clairement F sur E. Le lemme nous permet donc de conclure que les cercles circonscrits aux triangle DFQ, DAP et FAR passent par O. Nous sommes donc dans une situation classique d'un quadrilatère complet et de cercles de Miquel[3] qui nous

3. Cf. Yvonne et René Sortais, *La géométrie du triangle*, Hermann, 1987.

permet de conclure facilement l'exercice :



$$\widehat{POQ} = \widehat{POD} - \widehat{QOD}$$
$$= (180 - \widehat{PAD}) - (180 - \widehat{QFD})$$
$$= 180 - (\widehat{PAD} + \widehat{RFA})$$
$$\widehat{POQ} = \widehat{PRQ},$$

donc les points P, Q, R et O sont cocycliques.

Pour être tout à fait complets, il faut démontrer que $O \neq P$: si $O = P$, alors $PB = PD$ et $PA = PC$ donc ABCD serait un parallélogramme et on aurait (AD) // (BC), ce qui contredit l'énoncé.

Remarque. Le lemme ci-dessus demeure valable si on remplace la rotation $\mathscr{R}$ par une similitude $\mathscr{S}$. Ainsi le résultat de l'exercice demeurerait vrai si on avait dans l'énoncé $BE/BC = DF/DA$ pour seule contrainte de longueur.

6. Combinatoire : des résultats idylliques aux olympiades

Dans une compétition mathématique, six problèmes sont posés aux participants. Chaque groupe de deux problèmes a été résolu par strictement plus de 2/5 des candidats. De plus, on sait qu'aucun candidat n'a résolu les six problèmes.

Montrer qu'il y a au moins deux candidats qui ont résolu exactement cinq problèmes.

Solution

Ce problème fait appel à un résultat tout à fait analogue à l'exercice 1998 n°2, appelé majoration de Plotkin[4]. Les candidats possédant cette culture pouvaient ici facilement trouver le premier pas de la solution. Le second est cependant plus difficile.

Soit n le nombre de participants. Raisonnons par l'absurde en supposant les conditions de l'énoncé vérifiées et qu'au plus un candidat a

4. M. Plotkin, *Binary codes with specified minimum distance*, IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-6, pp. 445–450, Sept. 1960.

résolu 5 problèmes. Alors, quitte à ajouter des problèmes résolus pour certains candidats, on peut supposer qu'exactement $n-1$ participants ont résolu 4 problèmes et qu'un en a résolu 5.

1^re étape : une méthode proche de la majoration de Plotkin

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments du type $(\{i,j\},a)$ où les problèmes distincts i et j ont été résolus par le candidat a. On peut évaluer $|\mathcal{E}|$ de deux façons :

- tout d'abord, comme $n-1$ participants ont résolu 4 problèmes et qu'un en a résolu 5, on a $|\mathcal{E}| = (n-1)\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_5^2 = 6n+4$;
- on a aussi $|\mathcal{E}| \geqslant \mathrm{C}_6^2\left(\lfloor 2n/5 \rfloor + 1\right) = 15\left(\lfloor 2n/5 \rfloor + 1\right)$, comme l'indique l'énoncé.

On a ainsi $6n+4 \geqslant 15\left(\lfloor 2n/5 \rfloor + 1\right)$. Cette inégalité dépend du résidu de n modulo 5 :

- si $n = 5k$, $30k+4 \geqslant 30k+15$;
- si $n = 5k+1$, $30k+10 \geqslant 30k+15$;
- si $n = 5k+2$, $30k+16 \geqslant 30k+15$ $(*)$;
- si $n = 5k+3$, $30k+22 \geqslant 30k+30$;
- si $n = 5k+4$, $30k+28 \geqslant 30k+30$.

On a donc une absurdité si $n \equiv 0, 1, 3$ ou 4 $[5]$. Il nous reste donc à discuter le cas particulier où $n \equiv 2[5]$.

2^e étape : étude d'un cas particulier

La clé est ici de dénombrer non plus $\mathcal{E}$, mais des sous-ensembles de $\mathcal{E}$. Quitte à renommer les participants et les problèmes, nous pouvons supposer que l'individu a_1 a résolu les problèmes 1, 2, 3, 4 et 5, et que les autres participants $(a_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ ont résolu 4 exercices. D'après $(*)$, chaque paire de problèmes est résolue par $2k+1$ candidats, sauf une paire qui est résolue par $2k+2$ participants, appelée « maximale ». Distinguons alors deux cas :

- si la paire maximale contient le problème 6, on peut supposer qu'il s'agit de $\{1,6\}$. Regardons les ensembles suivants :

- $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ où seules les paires de problèmes $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$ et $\{1,6\}$ sont prises en compte ;
- $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ où seules les paires de problèmes $\{1,6\}$, $\{2,6\}$, $\{3,6\}$, $\{4,6\}$ et $\{5,6\}$ sont prises en compte.

Ces deux ensembles ont exactement le même cardinal, $4(2k+1)+(2k+2)=10k+6$. De plus, chaque candidat qui intervient dans le dénombrement de $\mathcal{F}$ apparaît 3 fois, sauf a_1 qui apparaît 4 fois, donc $12k+6 \equiv 4[3]$. Enfin, chaque candidat qui intervient dans le dénombrement de $\mathcal{G}$ apparaît 3 fois, donc $12k+6 \equiv 0[3]$. Ceci est contradictoire.

- si la paire maximale ne contient pas le problème 6, on peut supposer qu'il s'agit de $\{2,3\}$. Alors, avec les mêmes définitions que précédemment, on a $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}| = 5(2k+1)$ mais $|\mathcal{F}| \equiv 4[3]$ et $|\mathcal{G}| \equiv 0[3]$, ce qui est de nouveau contradictoire.

Index

Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD
B.P. 44 - 53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL
Dépôt légal : novembre 2005 - N° d'imprimeur : 511.045
Imprimé en France

L'art du « *Problem Solving* », si on se permet de l'appeler ainsi, est comme tous les autres arts un apprentissage. Au fur et à mesure qu'il apprend les techniques de base et les théories nécessaires, l'élève acquiert son propre style dans l'appréhension des problèmes, sa créativité se développe, et c'est alors qu'il commence à goûter le plaisir de la découverte.

Ce livre est composé des solutions complètes de tous les [illegible] aux Olympiades internationale[illegible] depuis 1976. Les exercices de [illegible] vrent tous les domaines des m[illegible] ires (ce qui ne veut pas dire fa[illegible] ébre, fonctions et inégalités, t[illegible] mbinatoire.

C'es[illegible] soin et d'élégance que l'auteu[illegible] nnée à l'École polytechnique, illustre l'idée cachée derrière chaque question tout en restant accessible. Souvent, plusieurs solutions sont proposées. Quant aux exercices dont la compréhension profonde, si ce n'est la résolution, demande plus de connaissances, ils sont accompagnés de commentaires qui incitent le lecteur à se plonger dans des théories plus générales.

Ce livre est un trésor de très jolis problèmes pour tous ceux qui aiment réfléchir. Je le recommande à tous les amoureux des mathématiques.

Omid Amini

Diplômé de l'École polytechnique, Omid Amini est l'unique candidat ayant obtenu le score maximum de 42/42 aux Olympiades internationales de mathématiques de 1998, à Taiwan.

Collection enseignement des mathématiques

Graphisme : Massin